ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Sur les suites de fonctions analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 20, nº 2 (1970), p. 403-413

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_2_403_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20, 2 (1970), 403-413.

SUR LES SUITES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

par André HIRSCHOWITZ

Ce travail a été suscité par la question suivante, posée par M. Zerner :

Soit E un espace vectoriel topologique sur **C**, F un sous espace de E. Trouver les parties P de **C** telles que si f est une application analytique de **C** dans E telle que $f^{-1}(F)$ contienne P, alors $f^{-1}(F)$ est égal à **C**. On notera $\mathfrak{L}(E, F)$ l'ensemble des parties P ayant cette propriété.

Notons T(E) la plus petite famille de sous espaces stricts de E qui soit stable par intersection quelconque et par réunion dénombrable croissante, et qui contienne les hyperplans fermés.

PROPOSITION 1. — *Si* $F \in T(E)$, $\mathfrak{L}(E, F)$ *contient toutes les parties non dénombrables de* **C**.

Cette proposition se démontre très facilement d'abord dans le cas où F est un hyperplan. Ensuite par induction.

Il convient de remarquer que ce résultat est très faible puisque, par exemple, si E est un Fréchet et si F est l'image continue d'un Fréchet, F n'appartient pas à T(E), en vertu du théorème de Baire, dès que F n'est pas fermé. Il serait toutefois intéressant de savoir si lorsque F est dans T(E) sans être fermé, $\mathfrak{L}(E, F)$ ne contient que les parties non dénombrables de **C**.

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout au cas où $\mathfrak{L}(E, F) = \{\mathbf{C}\}$.

DÉFINITION 1. — *Nous dirons que* F *est* E-*percé si* $\mathfrak{L}(E, F) = \{\mathbf{C}\}$. *Nous dirons que* F *est* E-*intègre dans le cas contraire.*

DÉFINITION 2. — *Notons* $\mathcal{A}_E$ *l'espace des applications analytiques de* $\mathbf{C}$ *dans* E. *Nous appellerons petite enveloppe de* F (*dans* E) *l'espace vectoriel*

$$\tilde{F} = \{z \in E/\exists f \in \mathcal{A}_E : f(\mathbf{C} - \{0\}) \subset F, f(0) = z\}.$$

Nous appellerons grande enveloppe de F (dans E) l'intersection $\check{F}$ de tous les sous espaces intègres de E contenant F. Il est facile de constater que $\check{F}$, qui contient $\tilde{F}$, est un sous espace intègre de E.

Par ailleurs, il est clair qu'on peut construire $\check{F}$ par induction de l'opération de petite enveloppe à partir de F.

Avant d'exploiter ces définitions, nous allons démontrer deux critères d'analyticité. Rappelons-les

DÉFINITION 3. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}$, F *un* e.l.c. *complexe,* f *une application de* Ω *dans* F. *On dit que* f *est analytique si pour toute forme linéaire* l *continue sur* F, $l \circ f$ *est analytique.*

DÉFINITION 4. — *Soient* E *et* F *deux* e.l.c. *complexes,* Ω *un ouvert de* E, f *une application de* Ω *dans* F. *On dit que* f *est analytique si elle est localement bornée et si sa restriction aux droites est analytique.*

PROPOSITION 2. — *Les applications analytiques à valeurs dans* F *sont les mêmes pour toutes les topologies localement convexes compatibles avec la dualité entre* F *et* F'.

Démonstration. — Cela résulte de la définition et du fait que les parties faiblement bornées d'un e.l.c. sont fortement bornées. C.q.f.d.

Notations. — Si F est un espace vectoriel, $\mathfrak{T}$ une topologie localement convexe sur F, les applications analytiques à valeurs dans (F, $\mathfrak{T}$) seront dites $\mathfrak{T}$-analytiques à valeurs dans F. En outre la topologie bornologique associée à $\mathfrak{T}$ sera notée ${}^b\mathfrak{T}$.

PROPOSITION 3. — *Soient* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *deux topologies localement convexes sur* F *telles que* ${}^b\mathcal{T}_1$ *et* ${}^b\mathcal{T}_2$ *coïncident. Alors les applications à valeurs dans* F *et* $\mathcal{T}_1$*-analytiques sont* $\mathcal{T}_2$*-analytiques.*

Démonstration. — Notons $F' = (F, {}^b\mathcal{T}_1)'$ et $G = (F, \mathcal{T}_1)'$. Il est clair que G est un sous espace dense de F' pour $\sigma(F', F)$. Il nous suffit d'après la proposition 2 de montrer que les applications $\sigma(F, G)$-analytiques sont $\sigma(F, F')$-analytiques. Soit donc f une application $\sigma(F, G)$-analytique à valeurs dans F. Comme les parties $\sigma(F, G)$-bornées de F sont $\sigma(F, F')$-bornées, on peut supposer, au vu de la définition 4, que le domaine de f est un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant zéro.

Écrivons donc $f(z) = \sum\limits_n a_n z^n$, la convergence ayant lieu pour $|z| \leqslant r$ au sens de $\sigma(F, G)$. Il s'en déduit que la suite $a_n r^n$ tend vers zéro pour $\sigma(F, G)$, donc est $\sigma(F, G)$-bornée et par suite, $\sigma(F, F')$-bornée.

Soit l dans F'; la suite $r^n l(a_n)$ est bornée, par suite, dès que $|z| < r$ la série $\sum\limits_n l(a_n z^n)$ est convergente. $\sum\limits_n a_n z^n$ converge donc pour $\sigma(F, F')$. Posons $g(z) = \sum\limits_n a_n z^n$. Lorsque λ décrit $\mathbf{C}$, $\lambda(f - g)$ décrit un ensemble $\sigma(F, G)$-borné, donc borné, ce qui prouve que $f = g$. C.q.f.d.

Au vu de ce résultat, la définition suivante s'impose :

DÉFINITION 5. — *Soit* E *un* e.l.c., Ω *un ouvert de* E, F *un espace disqué (autrement dit, un espace vectoriel muni d'une bornologie convexe). Une application* f *de* Ω *dans* F *sera dite analytique si* f *est localement bornée et si sa composée avec toute forme linéaire bornée sur* F *est analytique.*

Intéressons-nous maintenant au cas où F est un espace de fonctions.

Soit X un espace topologique séparé, P(X) (resp. $\mathcal{C}(X)$) l'espace des fonctions numériques (resp. continues) sur X. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$. Notons

$$F^\times = \Big\{ g \in P(X) \Big| \forall f \in F, \ \sum_{x \in X} |f(x)g(x)| < +\infty \Big\}.$$

Les espaces F et $F^\times$ sont mis en dualité (séparant F) par :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x \in X} f(x)g(x).$$

DÉFINITION 6. — *La bornologie définie sur* F *par* $\sigma(F, F^{\times})$ *sera appelée bornologie de la croissance.* F *muni de cette bornologie sera appelé espace de croissance.*

Exemples. — Si X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, les bornologies usuelles sur $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{K}(X)$, sont les bornologies de la croissance. Si $X = \mathbf{N}$, les bornologies usuelles sur les espaces c_0, l^∞, l^p, s, s' sont les bornologies de la croissance.

PROPOSITION 4. — *Pour qu'une application* f *à valeurs dans un espace de croissance* F *soit analytique, il suffit qu'elle soit simplement analytique et localement bornée.*

Démonstration. — D'après la définition 4, on peut supposer que le domaine de f est un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant zéro. Il nous suffit de montrer que f est analytique en zéro. Nous noterons f_z l'image de z par f. Supposons donc que pour $|z| \leqslant r$, $f_z(x) = \sum_n z^n f_n(x)$.

Nous aurons besoin du

LEMME. — *Si* $g \in F^{\times}$, $q_g(f) = \sum_{x \in X} |f(x)g(x)|$ *définit une semi-norme bornée sur* F.

En effet, g est équivalente pour la dualité à une fonction de la forme $\sum_p a_p \chi_{x_p}$ et par suite $q_g(f) = \sum_p |a_p f(x_p)|$.

Soit f_n une suite bornée de F, montrons que q_g est bornée sur f_n : Soit $\lambda = (\lambda_p)$ le point courant de l^∞ et posons

$$l_n(\lambda) = \sum_p \lambda_p a_p f_n(x_p)$$

l_n est une forme linéaire continue sur l^∞ de norme $\sum_p |a_p f_n(x_p)|$. Comme la suite f_n est bornée, la suite l_n est simplement bornée, donc fortement bornée, d'après le théorème de Banach-Steinhaus; donc $q_g(f_n)$ est borné.

Ce lemme étant démontré, soit g dans $F^{\times}$. D'après la proposition 3 il nous suffit de démontrer que $\langle f_z, g\rangle$ est analytique en z. Mais $\langle f_z, g\rangle = \sum_p a_p f_z(x_p)$. Mais f_z est borné pour $|z| \leqslant r$. Donc $q_g(f_z)$ est borné d'après le lemme. $\sum_p |a_p f_z(x_p)| \leqslant M_g(r)$. La fonction $\langle f_z, g\rangle$ est la limite de la suite $u_n(z) = \sum_{p \leqslant n} a_p f_z(x_p)$ et on a $|u_n(z)| \leqslant M_g(r)$. On conclut que $\langle f_z, g\rangle$ est analytique pour $|z| \leqslant r$. C.q.f.d.

Dans la suite nous considérons des sous espaces de croissance de $P = \mathcal{C}(\mathbf{N})$. Les sous espaces usuels de P sont munis naturellement de la bornologie de la croissance. On dit d'un tel sous espace F qu'il est solide si $x \in F$ et $|y_n| \leqslant |x_n|$ entraînent $y \in F$. Nous dirons que F est strictement solide, si F est solide et contient un élément x tel que $x_n \neq 0$ pour tout n.

Théorème 1. — *Si* $E = P$ *et si* F *est strictement solide* $\tilde{F} = P$.

Démonstration. — Soit K_n une suite de compacts de Runge (c'est-à-dire polynomialement convexes) de $\mathbf{C}$, croissante et telle que $\bigcup_n K_n = \mathbf{C} - \{0\}$. Il est facile de construire une telle suite. Soit (x_n) une suite quelconque de P, et (y_n) une suite de F telle que $y_n \neq 0$. Soit f_n une fonction entière telle que $f_n(0) = x_n$ et $\|f_n\|_{K_n} \leqslant |y_n|$. Cette suite f_n définit un élément de $\mathcal{A}_p$ qui permet d'établir que $(x_n) \in \tilde{F}$. C.q.f.d.

Définition 7. — *Nous dirons qu'un espace strictement solide* E *est inaccessible s'il existe une suite décroissant vers zéro de nombres positifs* u_n *telle que si* $(x_n) \notin E$, $(u_n x_n) \notin E$. *Dans le cas contraire, nous dirons que* E *est accessible.*

Théorème 2. — *Si* F *est accessible et si* E *est inaccessible,* F *est* E*-percé.*

Démonstration. — A l'aide des K_n précédemment introduits, on peut construire une suite g_n de fonctions analytiques entières telle que

$$g_n(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \|g_n\|_{K_n} \leqslant u_n.$$

Posons $M_n = \sup_{|x|<n} |g_n(x)|$. M_n tend évidemment vers l'infini avec n, mais on peut trouver une application i croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, non bornée et telle que $M_{i(n)} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et $i(n) \leqslant n$.

Comme $i(n)$ tend vers l'infini, on peut trouver (s_n) dans F tel que $\left(\frac{s_n}{u_{i(n)}}\right)$ ne soit pas dans F. Comme $i(n)$ est plus petit que n et comme u_n est décroissante $\frac{s_n}{u_{i(n)}} \leqslant \frac{s_n}{u_n}$, ce qui prouve que $\left(\frac{s_n}{u_{i(n)}}\right)$ est dans E. Posons alors $f_n = \frac{s_n}{u_{i(n)}} g_{i(n)}$.

On a $\|f_n\|_{\mathrm{K}_{i(n)}} \leqslant s_n$, $f_n(0) = \frac{s_n}{u_{i(n)}}$ et $\sup\limits_{|x| \leqslant i(n)} |f_n(x)| = \mathrm{M}_{i(n)} \frac{s_n}{u_{i(n)}}$.

On peut en conclure que $\left(\frac{s_n}{u_{i(n)}}\right) \in \tilde{\tilde{\mathrm{F}}}$ et $\left(\frac{s_n}{u_{i(n)}}\right) \notin \mathrm{F}$ ce qui prouve que F est E-percé. C.q.f.d.

Dans la suite, nous étudions plus en détail le cas où F est un espace l_q (ou bien C_0) et où F est un espace $l_p (p < q)$.

Nous commencerons par démontrer quelques lemmes :

Lemme 1. — *Pour toute suite* v_n *de nombres réels positifs tendant vers l'infini, il existe une suite* (w_n) *de nombres positifs dans* F *tels que* $(v_n w_n)$ *ne soit pas dans* F *et que* $v_n w_n < \frac{1}{n^{1/p}}$.

Nous nous contenterons de démontrer ce lemme dans le cas $p = 1$.

D'autre part, il est loisible de minorer v_n par une suite d'entiers (u_n) croissante surjective, et telle que

$$\rho(p) = \mathrm{card}(u^{-1}(p))$$

majore $v^{-1}(p - 1)$ pour tout p, ce qui implique $2\rho(u_n) \geqslant n$.

Il ne nous reste qu'à poser $w_n = \frac{1}{2\rho(u_n) u_n^2}$ et à constater que w_n est sommable, que $u_n w_n$ ne l'est pas et que $w_n u_n \leqslant \frac{1}{2\rho(u_n)} \leqslant \frac{1}{n}$.

Lemme 2. — *Soit* χ_n *une suite de nombres positifs décroissante appartenant à* l_p *pour tout* p *strictement supérieur à* 1. *Alors* $n\chi_n \log^2 n$ *est infiniment petit par rapport à toute puissance positive de* n.

Il nous faut montrer que $n^{1-\varepsilon}\chi_n \log n^2$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

La série χ_n^p est une série décroissante sommable. Donc $n\chi_n^p \to 0$. Il s'ensuit que χ_n est infiniment petit par rapport à $\frac{1}{n^{1/p}}$. Par suite $n^{1-\varepsilon}\chi_n \log^2 n$ est infiniment petit par rapport à $n^{1-\varepsilon-\frac{1}{p}} \log^2 n$. Lorsque p tend vers 1, $1-\varepsilon-\frac{1}{p}$ tend vers $-\varepsilon$, ce qui permet de conclure.

LEMME 3. — *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* u_n *une suite tendant vers zéro telle que* u_n *soit infiniment grand par rapport à toute puissance de* $\frac{1}{n}$. *Soient* K *et* L *deux compacts de* **C**, K *étant polynomialement convexe et ne contenant pas zéro. Il existe alors une suite* f_n *de fonctions entières vérifiant* :

$a)$ $f_n(0) = 1$, $\quad b)$ $\|f_n\|_K \leqslant u_n$ $\quad$ et $\quad c)$ $\frac{\|f_n\|_L}{n^\varepsilon} \to 0$.

Démonstration. — Soit f une fonction entière vérifiant $f(0) = 1$ et $m = \|f\|_K < 1$. Posons $M = \|f\|_L$ et

$$p(n) = \inf \{q \in \mathbf{N} \mid u_n \geqslant m^q\}.$$

On a donc $|p(n) + \log_{1/m} u_n| < 1$.

Posons $f_n = f^{p(n)}$. f_n vérifie évidemment $a)$ et $b)$. Pour prouver $c)$ nous montrerons que $A_n = \log_{1/m} \frac{M^{p(n)}}{n^\varepsilon}$ tend vers $-\infty$ avec $-n$.

$$A_n = p(n) \log_{1/m} M - \varepsilon \log_{1/m} n.$$

Posons

$$A'_n = -(\log_{1/m} u_n) \log_{1/m} M - \varepsilon \log_{1/m} n.$$

Il nous suffit évidemment de montrer que A'_n tend vers $-\infty$. Mais $-A'_n = \log_{1/m} \left[\left(u_n n^{\frac{\varepsilon}{\log_{1/m} M}} \right)^{\log_{1/m} M} \right]$ et cette quantité tend vers l'infini en vertu de l'hypothèse sur u_n. C.q.f.d.

LEMME 4. — *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* u_n *une suite tendant vers zéro moins vite que toute puissance de* $\frac{1}{n}$. *Il existe une suite de compacts* K_n *croissante, recouvrant* $\mathbf{C} - \{0\}$, *une suite de compacts* L_n *croissante exhaustive dans* **C**, *et une suite de fonctions analytiques entières* f_n *tels que* *a*) $f_n(0) = 1$, *b*) $\forall p \|f_n\|_{K_p} \leqslant u_n$ *à partir d'un certain rang et* *c*) $\forall p \frac{\|f_n\|_{L_p}}{n^\varepsilon} \to 0$.

Ce lemme se déduit du précédent par un procédé diagonal.

Lemme 5. — *Soit* Γ *le cercle unité du plan complexe muni d'une mesure* μ *telle que* $\mu(\Gamma) = 1$. *Soit* E *une partie mesurable de* Γ *vérifiant* $\mu(E) = \varepsilon < 1$. *Soit* A_n *une suite de parties mesurables de* Γ *vérifiant* $\mu(A_n) \geqslant \delta > \varepsilon$. *Soit* u_n *une suite de nombres réels positifs telle que* $f = \sum_n u_n \chi_{A_n}$ *soit finie hors de* E. *Alors* $\sum_n u_n < +\infty$.

Démonstration. — On peut évidemment trouver un nombre M et un ensemble E′ vérifiant $\|f\|_{E'} \leqslant M$ et $\mu(E') < \delta$. Posons $f' = \sum_n u_n \chi_{A_n - E'}$ et appliquons aux sommes partielles le théorème de Beppo-Levi. On obtient :

$$\sum_n u_n \mu(A_n - E') \leqslant M.$$

Mais on a $\mu(A_n - E') > \delta - \mu(E') > 0$ d'où le résultat.

Définition 8. — *Soit* (u_n) *une suite tendant vers zéro. Nous appellerons indicatrice intégrale de* (u_n) *la fonction* $\tilde{u}$ *de* $\mathbf{R}^+$ *dans* $\mathbf{N}$ *définie par* $\tilde{u}(\chi) = \operatorname{card}\{n \in \mathbf{N} \,|\, |u_n| > \chi\}$. *Nous dirons d'un sous ensemble* F *de* C_0 *qu'il est intégral si* $u \in F$ *et* $\tilde{v} \leqslant \tilde{u}$ *impliquent* $v \in F$. *Si* P *est une partie de* C_0, *nous définirons son enveloppe intégrale par*

$$P_I = \{v \in C_0 \,|\, \exists u \in P : \tilde{v} \leqslant \tilde{u}\}.$$

Lemme 6. — *L'enveloppe intégrale d'un borné de* $E(l_q$ *ou* $C_0)$ *est un borné de* E.

Il suffit pour s'en convaincre de constater que la boule unité de E est intégrale.

Lemme 7. — *Si* F *est un sous espace intégral de* $E(l_q$ *ou* $C_0)$, $\tilde{F}$ *est intégral.*

Démonstration. — En toute généralité, il est évident que si F est solide, $\tilde{F}$ l'est aussi. Il nous faut donc montrer que si $u = (u_n) \in \tilde{F}$ et $v = (v_n)$ est tel qu'il existe une bijection j

d'une partie $\mathbf{N}'$ de $\mathbf{N}$ sur une partie $\mathbf{N}''$ de $\mathbf{N}$ telle que $p \notin \mathbf{N}' \Longrightarrow u_p = 0$ $q \notin \mathbf{N}'' \Longrightarrow v_q = 0$ et $u \in \mathbf{N}' \Longrightarrow u_n = v_{j(n)}$ alors $v \in \tilde{\mathrm{F}}$.

Soit (f_n) une application analytique de $\mathbf{C}$ dans E telle que pour x non nul $(f_n(x)) \in \mathrm{F}$ et $f_n(0) = u_n$.

Posons $g_n = f_{j^{-1}(n)}$ pour $n \in \mathbf{N}''$ et $g_n = 0$ sinon.

On a $g_n(0) = v_n$. $(g_n(x)) \in \mathrm{F}$ parce que F est intégral.

Enfin (g_n) est une application analytique en vertu du lemme 6. C.q.f.d.

Nous sommes en mesure de démontrer le

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathrm{F} = l_p$ *un sous espace de* $\mathrm{E} = l_q$ *ou* C_0. *Alors* $\tilde{\mathrm{F}} = l_p^+ = \bigcap_{p'>p} l_{p'}$.

Démonstration. — Nous ne détaillerons la démonstration que lors que $p = 1$. Montrons d'abord que $\tilde{\mathrm{F}}$ contient l_p^+. D'après le lemme 7, il nous suffit de montrer que toute suite (x_n) tendant vers zéro en décroissant, et appartenant à l_p^+ est dans $\tilde{\mathrm{F}}$. D'après le lemme 2, on peut écrire $x_n = \dfrac{1}{u_n n \log^2 n}$ et u_n infiniment grand par rapport à toute puissance de $\dfrac{1}{n}$. Nous supposerons de plus que u_n tend vers zéro, ce qui ne restreint pas la généralité, vu le lemme 7.

Choisissons maintenant ε de façon que $(n^\varepsilon x_n)$ soit dans E. A la suite (u_n), le lemme 4 fait correspondre une suite f_n de fonctions analytiques vérifiant :

$$f_n(0) = 1 \quad \|f_n\|_{\mathrm{K}_p} \leqslant u_n$$

à partir d'un certain rang et $\dfrac{\|f_n\|_{\mathrm{L}_p}}{n^\varepsilon} \to 0$ avec $\dfrac{1}{n}$.

Posons $g_n = x_n f_n$. On voit que $g_n(0) = x_n$.

Si $x \neq 0 \, |g_n(x)| = |x_n f_n(x)| \leqslant u_n x_n = \dfrac{1}{n \log^2 n}$ soit $(g_n(x)) \in l_1$.

Enfin pour tout compact L, il existe une constante A telle que $\|g_n\|_{\mathrm{L}} \leqslant \mathrm{A} n^\varepsilon x_n$ ce qui prouve que (g_n) est analytique.

Il nous reste à montrer que $\tilde{\mathrm{F}} \subset l_1^+$. Pour cela nous prouverons $\tilde{l}_1^+ = l_1^+$. Soit donc f_n une suite de fonctions localement bornée telle que $\forall x |x| = 1$, $(f_n)(x)) \in l_1^+$. Nous allons montrer que $\forall \varepsilon > 0 (f_n(0)) \in l_{1+\varepsilon}$. On peut supposer sans dommage que $\sup\limits_{|x|=1} |f_n(x)| \leqslant 1$.

Choisissons des ensembles A_n vérifiant $\mu(A_n) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et tels que $\inf\limits_{A_n} |f_n| = \sup\limits_{\complement A_n} |f_n| = r_n$. Il s'ensuit que $|f_n| \geqslant r_n \chi_{A_n}$ ou encore si $\theta > 0$ $|f_n|^{1+\theta} \geqslant r_n^{1+\theta} \chi_{A_n}$. Le lemme 5 nous dit alors que $r_n \in l_{1+\theta}$ ou encore $r_n \in l_1^+$. Maintenant on peut écrire $|f_n| \leqslant \chi_{A_n} + r_n \chi_{\complement A_n}$ ou encore $\log |f_n| \leqslant \log (\chi_{A_n} + r_n \chi_{\complement A_n})$.

Mais $\log |f_n|$ est sous harmonique d'où :

$$\log |f_n(0)| \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \log r_n.$$

$$|f_n(0)| \leqslant r_n^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \; |f_n(0)|^{1+\varepsilon} \leqslant r_n^{(1+\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} = r_n^{1+\theta}.$$

C.q.f.d.

Remarque 1. — Le lemme 1 a fait une chute en désuétude.

Remarque 2. — Posons $l_\infty^- = \bigcup\limits_p l_p$. Un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que $\mathfrak{L}(l_\infty^-, C_0)$ contient tous les ensembles de mesure non nulle et même beaucoup plus. On peut légitimement habiter la curiosité de caractériser $\mathfrak{L}(l_\infty^-, C_0)$.

Nous terminerons en donnant une application inattendue des résultats qui précèdent :

THÉORÈME 4. — *Soit* F *un sous espace de* C_0 (resp. l_p), Ω *un ouvert pseudoconvexe de* C_0 (resp. l_p) *contenant* F. *Alors* Ω *contient* $\check{F}$.

Démonstration. — On prouve évidemment que $\check{F} \subset \Omega$, le reste s'en déduit par induction. Soit $x \in \check{F}$ $f = (f_n) \in \mathcal{A}_E$ telle que $(f_n)(z)) \in F$ pour $z \neq 0$ et $(f_n(0)) = x$. Soit Γ le cercle unité de $\mathbf{C}$ $f(\Gamma)$ est un compact de C_0 (resp. l_p). Si donc on pose $f_{(N)} = (f_1, \ldots, f_N, 0, 0 \ldots)$, on a

$$\|f_{(N)}(z) - f(z)\| \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

uniformément sur Γ.

Définissons $d(x)$ dans Ω comme la distance au complémentaire de Ω, c'est une fonction plurisurharmonique continue. Pour $z \in \partial\Gamma$ $d(f(z)) \geqslant \varepsilon$. Donc pour N suffisamment grand, $d(f_{(N)}(z)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $z \in \partial\Gamma$. Comme $f_{(N)}$ est analytique et d plurisurharmonique, $d(f_{(N)}(0)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour N suffisamment grand. Comme $f_{(N)}(0)$ tend vers $f(0)$ et comme d est continue, on conclut $d(f(0)) > 0$. C.q.f.d.

Il en découle sans difficulté des corollaires du genre :

Corollaire. — *Toute application analytique définie au voisinage de* l_1 *dans* C_0 *se prolonge au voisinage de* l_1^+.

BIBLIOGRAPHIE

L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, The Macmillan Co., New York, 1966.

M. Zerner, Théorie de Hartogs et singularités des distributions, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 165-184.

Manuscrit reçu le 10 février 1970.

André Hirschowitz,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
06-Nice.