ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALANO ANCONA

Sur les convexes de Ludwig

Annales de l'institut Fourier, tome 20, nº 2 (1970), p. 21-44
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_2_21_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20, 2 (1970), 21-44.

SUR LES CONVEXES DE LUDWIG

par Alano ANCONA

Introduction.

Soit K un convexe compact d'un espace localement convexe séparé. Disons qu'une partie N de K est une *face exposée* de K, s'il existe un ensemble A de fonctions affines positives continues sur K, tel que N soit l'ensemble des points de K où toutes les fonctions de A prennent la valeur 0. Une face exposée de K est compacte, et est une face de K. Nous dirons que K est un *convexe de Ludwig*, s'il vérifie la propriété (S) suivante :

(S) *Pour toute face exposée* N *de* K, *l'ensemble des fonctions affines continues sur* K, *s'annulant sur* N, *et comprises entre* 0 *et* 1, *admet un plus grand élément.*

Dans le cas de la dimension finie, cette classe de convexes a été introduite par Gunther Ludwig (voir bibliographie) en vue d'une axiomatisation de la mécanique quantique.

Soit K un convexe compact de dimension finie et vérifiant la propriété (S); pour toute face exposée il existe donc une plus grande fonction affine positive, s'annulant sur cette face, et inférieure à 1 sur K; Ludwig appelle une telle fonction effet de décision; l'ensemble G des effets de décision est ordonné par l'ordre naturel des fonctions numériques sur K. L'ensemble G est anti-isomorphe au treillis des faces exposées de K, de sorte que G est un treillis. Ludwig a montré la propriété suivante : si f et g sont deux éléments de G, tels que f soit inférieure à g sur K, alors $(g - f)$ est un élément de G, et de plus $(g - f)$ est un complémentaire relatif de f dans g, au sens du treillis G (ce qui signifie,

que dans le treillis G, $\sup(f, g - f) = g$ et $\inf(f; g - f) = 0$). Cette propriété donne une complémentation canonique de G, « régulière » en un certain sens, et très simplement rattachée aux structures affines en présence.

De plus Ludwig a montré que, si L désigne l'ensemble des fonctions affines positives et inférieures à 1 sur K, G est l'ensemble des points extrêmaux du convexe L. Enfin, Ludwig démontre une propriété intéressante de *décomposition spectrale* : toute fonction affine sur K est combinaison linéaire d'effets de décision deux à deux *orthogonaux* (f est orthogonale à g, f et g étant des éléments de G, si g est inférieure à $(1 - f)$ sur K), et cette décomposition est unique.

Dans ce travail, nous montrerons que si K est un convexe compact de Ludwig, au sens défini plus haut, on peut étendre les résultats établis par Ludwig dans le cas de la dimension finie. On utilise pour cela une propriété équivalente à la propriété (S) (deuxième partie). Par ailleurs, nous montrons que la propriété (S) entraîne une propriété de rareté des faces exposées de K : toute chaîne de faces exposées est finie; il en résulte, par exemple, qu'un simplexe ne sera « de Ludwig » que s'il est de dimension finie. Nous donnons quelques propriétés de stabilité des convexes de Ludwig, ainsi que quelques exemples.

Le résultat le plus étonnant mais aussi le plus insatisfaisant, est la finitude des décompositions spectrales; il serait intéressant de modifier la propriété (S) de manière à obtenir une classe de convexes compacts pour lesquels existent des décompositions spectrales sous forme d'intégrales non triviales.

1. Notations, conventions.

Soit K un convexe compact d'un espace localement convexe E; A(K) désignera l'espace des fonctions affines continues sur K, ordonné par le cône convexe $A_+(K)$ des fonctions affines continues et positives sur K. On notera F(K) l'ensemble des faces exposées de K, muni de l'ordre de l'inclusion. F(K) est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de K, qui est stable par intersection quelconque; il s'ensuit que F(K) est un *treillis complet* pour l'ordre de

l'inclusion; le plus petit majorant d'une partie B de F(K), est l'intersection des faces exposées qui contiennent toutes les faces appartenant à B; le plus grand minorant de B (dans le treillis F(K)) est l'intersection des faces appartenant à B. Le plus petit élément de F(K) est la face vide, et le plus grand élément de F(K) est la face K.

On réservera les notations $\vee$ (resp. $\wedge$) à l'opération sup. (resp. inf.) dans les treillis qu'on aura à considérer, et la notation $\cup$ (resp. $\cap$) à l'opération ensembliste usuelle.

Il sera commode de remplacer E par la variété affine $\tilde{E}$ engendrée algébriquement par K, et de munir cette variété de la topologie de la convergence simple sur A(K) (dont les éléments se prolongent à $\tilde{E}$ de manière unique, en fonctions affines). L'opération de restriction définit un isomorphisme de l'espace $A(\tilde{E})$ des fonctions affines et continues sur $\tilde{E}$, sur l'espace A(K); et $\tilde{E}$ induit sur K la topologie initiale. Le changement d'espace ambiant ne modifie donc pas les propriétés affines topologiques de K. Chaque fois qu'on aura dans la suite à considérer un convexe compact K dans un espace E, on supposera que E est identique à $\tilde{E}$.

Soit N une face exposée de K; on désignera par $V_N(K)$ l'intersection des hyperplans d'appui de K contenant N, c'est-à-dire :

$$V_N(K) = \{x \in E;\ (l \in A_+(K),\ l_N = 0) \Longrightarrow l(x) = 0\}$$

$V_N(K)$ est une variété affine fermée de E, et par la définition même d'une face exposée, on a :

$$V_N(K) \cap K = N.$$

On remarquera que $V_N(K)$ contient la variété affine fermée engendrée par N mais ne lui est pas identique en général (il suffit pour le voir de prendre par exemple, pour K la boule unité d'un hilbert muni de sa topologie faible, et pour N un point de la sphère unité).

On définit l'espace A(N, K), le cône convexe $A_+(N, K)$, et le convexe $A_+^1(N, K)$ par les relations suivantes :

— $A(N, K) = \{l \in A(K);\ l = 0 \text{ sur } V_N(K)\}$,
— $A_+(N, K) = A(N, K) \cap A_+(K) = \{l \in A_+(K);\ l = 0 \text{ sur } N)$,
— $A_+^1(N, K) = \{l \in A_+(N, K),\ l \leqslant 1 \text{ sur } K\}$.

On désignera par $A^1_+(K)$ l'ensemble convexe des éléments de $A(K)$, qui prennent sur K des valeurs comprises entre 0 et 1.

Nous utiliserons également, si N est une face exposée non vide, l'espace E_N quotient de E par $V_N(K)$, E_N étant muni de la topologie quotient; T_N sera l'application canonique de E sur E_N; on posera $K_N = T_N(K)$. Alors K_N est un convexe compact de E_N; il est facile de voir que la variété affine engendrée par K_N est E_N, et que la topologie de E_N coïncide avec la topologie de la convergence simple sur $A(K_N)$. De plus, $T_N(N)$ est une face exposée de K réduite à un point noté ν.

2. Un critère pour que $A^1_+(N, K)$ ait un plus grand élément.

On va d'abord considérer le cas où N est une « pointe » du convexe K, c'est-à-dire le cas où N est réduite à un point, et où $N = V_N(K)$.

THÉORÈME (1). — *Soit* K *un convexe compact de l'espace séparé* E *(avec les conventions décrites plus haut). On suppose que* $0 \in K$, *que* $\{0\}$ *est une face exposée de* K, *et que*

$$V_{\{0\}}(K) = \{0\}.$$

Soit C *le Cône convexe fermé de sommet* 0 *engendré par* K. *Alors,* C *est saillant. Soit* φ *la fonction convexe s.c.i. définie sur* C *par*

$$\varphi(x) = \sup \{l(x);\ l \in A_+(\{0\}, K)\}.$$

On a les propriétés suivantes :

(1) *Si* $A^1_+(\{0\}, K)$ *est filtrant croissant,* K *est un chapeau universel de* C, φ *est affine sur* C, *et* φ *est la jauge de* K *dans* C.

(2) *Pour que* $A^1_+(\{0\}, K\}$ *ait un plus grand élément, il faut et il suffit que* K *soit un chapeau universel de* C, *à jauge continue dans* C.

Démonstration. — Soit E' le dual de E; avec les conventions qu'on a faites, $E' = A(\{0\}; K)$; le polaire C^o de C

est évidemment $A_+(\{0\}, K)$; par bipolarité, on a :

$$C = \{x \in E;\ \forall l \in C^o,\ l(x) \geqslant 0\}$$

et

$$C \cap (-C) = \{x \in E;\ \forall l \in C^o,\ l(x) = 0\} = V_{\{0\}}(K) = \{0\},$$

Donc C est saillant. Par ailleurs, φ est évidemment positive sur C, et est finie parce que $A^1_+(\{0\}, K)$ est simplement borné sur E (engendré par K).

(1) Si $A^1_+(\{0\}, K)$ est filtrant croissant sur K, $A^1_+(\{0\}, K)$ est encore filtrant croissant sur C. Donc φ est affine positive et s.c.i. sur C. L'assertion (1) du théorème sera prouvée si on montre que :

$$K = \{x \in C;\ \varphi(x) \leqslant 1\}.$$

L'inclusion du premier membre de l'égalité dans le second est évidente; pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que si $y_0 \in (C \dot{-} K)$, on a $\varphi(y_0) > 1$. Comme C est saillant, $C^o - C^o$ sépare les points de E, et par conséquent K est compact pour la topologie faible séparée $\sigma(E, C^o - C^o)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $l \in C^o - C^o$, telle que :

$$a = \sup_K l(x) < l(y).$$

Comme $l(y_0) > l(0) = 0$, on ne peut avoir $l \in (-C^o)$, de sorte que a est strictement positif. Par homothétie, on peut se ramener à $a = 1$.

Soient alors $L \in A^1_+(\{0\}, K)$, et $b > 0$, tels que :

$$l \geqslant -bL \quad \text{(dans E ordonné par } C^o)$$

On a

$$l + bL \in C^o \qquad \text{et} \qquad \sup_K (l + bL) \leqslant (1 + b).$$

Il s'ensuit que $(l + bL) \leqslant (1 + b)\varphi$ sur C.

Mais ce qui vient d'être dit pour L vaut encore pour toute $L' \in A^1_+(\{0\}, K)$ avec $L \leqslant L'$ sur K (ou sur C). On a pour ces L' qui forment, par hypothèse, un ensemble filtrant croissant de fonctions sur C :

$$(l + bL') \leqslant (1 + b)\varphi \quad \text{sur C}$$

Passons à la limite sur le filtrant croissant des L' :

$$l + b\varphi \leqslant (1 + b)\varphi \quad \text{sur } C$$

donc

$$l \leqslant \varphi \quad \text{sur } C$$

On obtient : $\varphi(y_0) \geqslant l(y_0) > a = 1$, d'où $\varphi(y_0) > 1$; c'est ce que nous voulions prouver.

(2) Si $A^1_+(\{0\}, K)$ a un plus grand élément L, d'après ce qui précède, K est un chapeau universel de C, dont la jauge est φ. Or évidemment $L = \varphi$ sur C, ce qui prouve que K est un chapeau universel de C à jauge continue.

Inversement, si K est un chapeau universel de C à jauge continue dans C, cette jauge est manifestement le plus grand élément de $A^1_+(\{0\}, K)$.

Remarque (2). — On peut se demander si le point (1) du théorème admet une réciproque : si K est un chapeau universel d'un cône saillant fermé C, $A^1_+(\{0\}, K)$ est-il filtrant croissant? Asimov (voir [4]) a démontré une propriété voisine plus faible : pour $f, g \in A^1_+(\{0\}, K)$ et pour $\varepsilon > 0$, il existe $h \in A(K)$ telle que, sur K on a :

$$\sup(f, g) \leqslant h \leqslant 1 + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad h(0) = 0.$$

On trouvera les définitions des chapeaux de cônes convexes, et des jauges associées dans [3].

Corollaire (3). — *Soit* K *un convexe compact de l'espace séparé* E; *soient* N *une face exposée non vide de* K, T_N *l'application canonique de* E *sur* E_N, $K_N = T_N(K)$, ν *le point de* E_N *tel que* $T_N(N) = \{\nu\}$ *(avec les conventions faites en* I*).*

(1) *Si* $A^1_+(N, K)$ *est filtrant croissant, alors* K_N *est un chapeau universel du cône convexe fermé de sommet* ν *engendré par* K_N *dans* E_N.

(2) $A^1_+(N, K)$ *a un plus grand élément, si et seulement si* K_N *est un chapeau universel à jauge continue, du cône fermé de sommet* ν *qu'il engendre.*

(3) *Si* $A^1_+(N, K)$ *a un plus grand élément* L, *et si* φ *est la jauge de* K_N *dans le cône convexe de sommet* ν *qu'il engendre, on a :*

$$L = \varphi \circ T_N$$

Démonstration. — Ce corollaire est une application évidente du théorème 1, compte tenu de l'isomorphisme de $A^1_+(\{\nu\}, K_N)$ sur $A^1_+(N, K)$, obtenu par composition à droite avec T.

3. Les treillis F(K), G(K); Complémentaires canoniques.

Soit K un convexe de Ludwig. Pour $N \in F(K)$, on notera χ_N le plus grand élément de $A^1_+(N, K)$, et G(K) l'ensemble de ces fonctions χ_N lorsque N parcourt F(K). On munit G(K) de l'ordre naturel des fonctions sur K (ordre induit par A(K)).

PROPOSITION (4). — *Soit* K *un convexe de Ludwig. L'application* χ *de* F(K) *sur* G(K) *est un anti-isomorphisme d'espaces ordonnés.* G(K) *est donc un treillis complet. De plus si* $\{N_i, i \in I\}$ *est une famille de faces exposées de* K, *on a*:

$$\bigvee_I \chi_{N_i} = \chi_{[\wedge N_i]} = \chi_{\{\cap N_i\}}.$$

La démonstration est immédiate; on notera que $\chi_\emptyset = 1$, et que $\chi_K = 0$.

DÉFINITION (5). — *Considérons un convexe de Ludwig* K, *et* N *une face exposée de* K; *l'ensemble des points de* K *où* χ_N *prend la valeur* 1 *est évidemment une face exposée de* K: *on dira que cette face est la face S-complémentaire à* N, *et elle sera dans la suite notée* N*.

On justifiera plus loin cette définition, c'est-à-dire qu'on prouvera qu'effectivement dans le treillis F(K), N et N* sont complémentaires au sens qu'on donne en général à cette expression. Auparavant, nous allons prouver un lemme qui est une conséquence facile du théorème (1) et du corollaire (3). On remarquera qu'ensuite nous n'utiliserons pratiquement plus le théorème, qui sera remplacé dans la plupart des démonstrations par le lemme (6).

LEMME (6). — *Soit* K *un convexe de Ludwig, et soit* $N \in F(K)$. Si φ_1 et φ_2 *sont deux éléments de* A(N, K), *tels que* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ *sur* N*, *alors* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ *partout sur* K; *si* $\varphi_1 = \varphi_2$ *sur* N*, *alors* $\varphi_1 = \varphi_2$ *sur* K.

Démonstration. — Remarquons que si N est vide, on a $N^* = K$ et le lemme est évident. On peut donc supposer que N n'est pas vide; reportons-nous alors au corollaire (3). Envisageons avec nos notations, l'application canonique T_N de E sur E_N, $K_N = T_N(K)$, $\nu \in E_N$ et $\{\nu\} = T_N(N)$, C le cône fermé de sommet ν engendré par K_N, φ la jauge du chapeau K_N de C. La jauge φ est continue et on a vu que $\chi_N = \varphi \circ T_N$.

Posons $\tilde{N} = \{x \in C, \varphi(x) = 1\}$; $\tilde{N}$ est une semelle compacte de C, et comme $\chi_N = \varphi \circ T_N$, on voit que :

$$N^* = T_N^{-1}(\tilde{N}) \cap K, \qquad \text{et que,} \qquad T_N(N^*) = \tilde{N}.$$

Si φ_1 et φ_2 sont dans $A(N, K)$, elles s'annulent sur $V_N(K)$ et par conséquent se factorisent par T_N : il existe ψ_1 et ψ_2 dans $A(\{\nu\}, K_N)$ telles que

$$\varphi_1 = \psi_1 \circ T_N), \qquad \varphi_2 = \psi_2 \circ T_N.$$

Or si $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ sur N^*, alors $\psi_1 \leqslant \psi_2$ sur $\tilde{N}$; $\tilde{N}$ étant une base de C, on voit alors que $\psi_1 \leqslant \psi_2$ sur C, d'où : $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ sur K.

De même, si $\varphi_1 = \varphi_2$ sur N, on obtiendra que $\varphi_1 = \varphi_2$ sur K.

THÉORÈME (7). — *Soit* K *un convexe de Ludwig; alors :*

(1) *Pour* $N \in F(K)$, N^* *est un complémentaire de* N *dans le treillis* F(K) :

$$N \vee N^* = K, \qquad N \wedge N^* = \varnothing.$$

(2) *Pour* N *dans* F(K), $\chi_{N^*} = 1 - \chi_N$.

(3) *L'application qui transforme* N *en* N^* *est un anti-isomorphisme involutif du treillis* F(K).

Démonstration (1). — Remarquons que par définition, N et N^* sont disjoints, de sorte que : $N \wedge N^* = N \cap N^* = \varnothing$.

D'autre part, soit $M = N \vee N^*$; alors χ_M s'annule sur N, sur N^*, et est positive : $\chi_M \in A^1_+(N, K)$. En appliquant le lemme (6), on obtient que $\chi_M = 0$, d'où $M = K$.

(2) Soit $N \in F(K)$; $I - \chi_N$ s'annule sur N^*, est positive, et inférieure à 1 sur K; donc $\chi_{N^*} \geqslant (1 - \chi_N)$ et $(1 - \chi_{N^*})$

est positive. Donc $(1 - \chi_{N^*}) \in A_+(N, K)$ et $(1 - \chi_{N^*})$ vaut 1 sur N^*; le lemme 6 montre alors que $(1 - \chi_{N^*}) = \chi_N$.

(3) La relation $\chi_{N^*} = (1 - \chi_N)$ montre que $N^{**} = N$, pour toute face exposée N. Par ailleurs, cette même relation montre que N^* est fonction décroissante de N.

La transformation qui envoie N sur N^* est donc une involution décroissante du treillis F(K) sur lui même; il s'ensuit qu'elle est un anti-automorphisme de F(K) sur lui-même.

Par transport de structure, on peut définir une complémentation canonique dans G(K), lorsque K est de Ludwig.

Définition (8). — *Si* K *est un convexe de Ludwig, et si* $\varphi \in G(K)$, *d'après le théorème* 7, $(1 - \varphi) \in G(K)$. *On dira que* $(1 - \varphi)$ *est l'élément de* G(K), *S-complémentaire à* φ *dans* G(K), *et on notera dans ce qui suit* $\varphi^* = 1 - \varphi$.

— En utilisant l'anti-isomorphisme canonique de F(K) sur G(K), on voit aussitôt que φ^* est un complémentaire de φ dans le treillis G(K), et que l'application qui transforme φ en φ^* est un anti-automorphisme involutif du treillis G(K); enfin, on a, pour toute face exposée N de K :

$$(\chi_N)^* = \chi_{N^*} = (1 - \chi_N)$$

— On pourra aussi remarquer, K étant un convexe de Ludwig, et N une face exposée de K, que φ^* est la plus petite fonction affine continue, comprise entre 0 et 1 sur K, et qui prend la valeur 1 sur N.

Remarque (9). — Lorsqu'on a muni un treillis $\mathcal{T}$ (ayant un plus grand élément et un plus petit élément) d'un anti-automorphisme involutif ψ, tel que pour tout $a \in \mathcal{T}$, $\psi(a)$ soit un complémentaire de a, on dit que $\mathcal{T}$ est un treillis complémenté. Lorsque K est un convexe de Ludwig, nous considérerons F(K) et G(K) comme *des treillis complémentés*; dans la partie suivante, on va préciser encore les propriétés de régularité de G(K).

4. Complémentation relative. Orthogonalité.

Thoérème (10). — *Soit* K *un convexe de Ludwig*; *soient* φ_1 *et* φ_2 *dans* G(K) *avec* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. *Alors* $(\varphi_2 - \varphi_1)$ *est dans*

G(K) *et de plus :*

(i) $(\varphi_2 - \varphi_1) \vee \varphi_1 = \varphi_2$,
(ii) $(\varphi_2 - \varphi_1) \wedge \varphi_1 = 0$,
(iii) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_1^* \wedge \varphi_2$.

Démonstration. — Soient N_1 et N_2 les faces exposées de K telles que :

$$\varphi_1 = \chi_{N_1}, \qquad \varphi_2 = \chi_{N_2}.$$

Par hypothèse $N_2 \subset N_1$, et par conséquent $N_2^* \supset N_1^*$; $(\varphi_2 - \varphi_1)$ prend la valeur 1 sur $N_2^* \cap N_1$, et est positive sur K.

Or on a :

$$(N_2^* \wedge N_1)^* = N_2 \vee N_1^*.$$

Comme la fonction affine continue positive $(\varphi_2 - \varphi_1)$ s'annule sur les faces N_2 et N_1^*, nécessairement $(\varphi_2 - \varphi_1)$ s'annule sur $N_2 \vee N_1^*$, d'où :

$$(\varphi_2 - \varphi_1) \in A_+(N_2 \vee N_1^*, K)$$

et

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \qquad \text{sur} \qquad N_2^* \wedge N_1.$$

En appliquant le lemme (6), on obtient :

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \chi_{(N_2 \vee N_1^*)} = \chi_{N_2} \wedge \chi_{N_1^*} = \varphi_2 \wedge \varphi_1^*$$

C'est-à-dire la relation (iii).

Maintenant $(\varphi_2 - \varphi_1) \vee \varphi_1$ s'écrit χ_M, où $M = \{x \in K, \varphi_2(x) = \varphi_1(x)\} \cap \{x \in K, \varphi_1(x) = 0\}$. Donc $M = N_2$; ce qui donne

$$\text{(i)} \quad (\varphi_2 - \varphi_1) \vee \varphi_1 = \varphi_2.$$

Enfin $(\varphi_2 - \varphi_1) \wedge \varphi_1 = \varphi_2 \wedge \varphi_1^* \wedge \varphi_1 = \varphi_2 \wedge 0 = 0$; soit encore :

$$\text{(ii)} \quad (\varphi_2 - \varphi_1) \wedge \varphi_1 = 0.$$

Définition (11). — *Soient* K *un convexe de Ludwig,* φ_1 *et* φ_2 *deux éléments du treillis complémenté* G(K); *on dira que* φ_1 *et* φ_2 *sont orthogonaux, si* $\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant 1$ sur K, *où ce qui revient au même, si* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2^*$. *En utilisant l'anti-isomorphisme* χ, *on voit encore que l'orthogonalité de* φ_1 *et* φ_2 *équivaut à :*

$$- \{x \in K, \varphi_2(x) = 1\} \subset \{x \in K, \varphi_1(x) = 0\}.$$

D'autre part, 0 *est le seul élément de* G(K) *orthogonal à lui-même.*

THÉORÈME (12). — *Soient* K *un convexe de Ludwig, et* $\{\varphi_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *une famille finie d'éléments de* G(K).

(1) *Si* $\varphi \in G(K)$, *et si* φ *est orthogonale à toutes les* $\varphi_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ *alors* φ *est orthogonale à* $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

(2) *Les* φ_i *sont deux à deux orthogonaux si et seulement si :*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n.$$

Démonstration. — L'assertion (1) est évidente; en effet si $\varphi_i \leqslant \varphi^*$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. évidemment, on a aussi $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \leqslant \varphi^*$; donc φ est orthogonale à $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

(2) Supposons que l'on ait :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$$

Pour i et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *et* $i \neq j$, on aura :

$$\varphi_i + \varphi_j \leqslant \bigvee_{1}^{n} \varphi_i \leqslant 1 \quad \text{sur K;} \qquad \text{et,} \qquad \varphi_i \leqslant \varphi_j^*$$

ce qui signifie φ_i et φ_j orthogonales.

Inversement supposons les $\varphi_i (i = 1, \ldots, n)$ deux à deux orthogonales. On a $\varphi_1 \leqslant \varphi_2^* = 1 - \varphi_2$; or $(1 - \varphi_2) \in G(K)$ donc d'après le théorème (10), $(1 - \varphi_2 - \varphi_1)$ est dans G(K), puis aussi $(\varphi_2 + \varphi_1) \in G(K)$.

Or :

$$\{x \in K;\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0\}$$
$$= \{x \in K;\ \varphi_1(x) = 0\} \cap \{x \in K;\ \varphi_2(x) = 0\}.$$

En utilisant l'anti-isomorphisme χ, on obtient :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2.$$

On procède alors par récurrence. Supposons p entier avec :

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_p = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_p, \quad \text{et} \quad 2 \leqslant p < n.$$

Alors φ_{p+1} est orthogonal à $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_p$, et d'après

ce qui précède :

$$(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_p) \vee \varphi_{p+1} = (\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_p) + \varphi_{p+1}$$
$$= \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{p+1}.$$

Cela montre bien que l'on aura

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n.$$

La proposition suivante précise des propriétés de régularité de G(K) :

Proposition (13). — *Soit* K *un convexe de Ludwig; le treillis complémenté* G(K) *vérifie les propriétés suivantes:*

(1) *Soient* $\varphi_1, \varphi_2 \in G(K)$, *avec* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. *Si* $\psi \in G(K)$, *est orthogonale à* φ_1, *et vérifie* $\psi \vee \varphi_1 = \varphi_2$, *alors* $\psi = \varphi_2 \wedge \varphi_1^*$.

(2) *Soient* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in G(K)$, *avec* φ_2 *et* φ_3 *orthogonaux, et* $\varphi_2 \leqslant \varphi_1$; *Alors*:

$$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) = \varphi_2 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3).$$

Ces résultats sont des conséquences connues des propriétés du treillis complémenté G(K), énoncées dans le théorème 10. Les démonstrations se simplifient ici :

Démonstration. — (1) Plaçons-nous dans les hypothèses de l'assertion (1). On a d'après le théorème (10) et le théorème (12)

$$\varphi_2 = \varphi_1 \vee \psi = \varphi_1 + \psi; \quad \text{d'où} \quad \psi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2 \wedge \varphi_1^*.$$

(2) Prenons $\varphi_1, \varphi_1, \varphi_3$ dans G(K) avec $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$, et φ_2 orthogonale à φ_3. A priori, on a :

$$\varphi = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \geqslant \varphi_2 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3) = \psi$$

Or, d'après le théorème (10) :

$$\varphi - \psi = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \wedge \varphi_2^* \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_3)^*$$

et

$$\varphi_2 \leqslant \varphi_2 \vee \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_3.$$

Donc (théorème 12) :

$$\varphi_2^* \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) = \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_3$$

et

$$\varphi - \psi = \varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_3)^* = (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_3)^* = 0.$$

Ce qui prouve l'assertion (2).

COROLLAIRE (14). — *Soit* K *un convexe de Ludwig; le treillis* G(K) *est une algèbre de Boole, si et seulement si :*

$$\forall \varphi, \psi \in G(K), \quad \text{on a} \quad \psi = (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \varphi^*)$$

Démonstration. — Si G(K) est booleien c'est-à-dire distributif, la relation annoncée est évidente.

Inversement, supposons satisfaite la condition du corollaire; prenons a, b, c dans G(K). On aura :

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge \{(b \wedge a) \vee (b \wedge a^*) \vee (c \wedge a) \vee (c \wedge a^*)\}$$

On peut appliquer la proposition (13), car $\{(b \wedge a) \vee (c \wedge a)\} \leqslant a$, et $\{(b \wedge a) \vee (c \wedge a)\}$ est orthogonal à

$$\{(b \wedge a^*) \vee (c \wedge a^*)\}.$$

On obtient :

$$a \wedge (b \vee c) = (b \wedge a) \vee (c \wedge a) \vee \{a \wedge [(b \wedge a^*) \vee (c \wedge a^*)]\}.$$

Comme a est orthogonal à $\{(b \wedge a^*) \vee (c \wedge a^*)\}$, on a encore :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Par passage aux complémentaires canoniques, on obtiendra la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$; et le treillis G(K) est donc de Boole.

5. Chaînes de G(K). Atomes de G(K).

Dans le théorème suivant nous montrons que les chaînes de G(K) et celles de F(K) — si K est de Ludwig — sont finies, même si K n'est pas de dimension finie.

THÉORÈME (15). — *Soient* K *un convexe de Ludwig, et* H *une partie filtrante croissante (resp. décroissante) non vide de* G(K). *Posons* $\varphi = \bigvee_{g \in H} g$ $\left(\text{resp. } \varphi = \bigwedge_{H} g\right)$. *Alors* $\varphi \in H$.

Toute chaîne dans G(K), *ou dans* F(K), *est finie. Toute partie* A *de* G(K), *dont les éléments sont deux à deux orthogonaux est finie.*

Démonstration. — Supposons H filtrante croissante pour $g \in H$, on a $\varphi - g \in G(K)$ (théorème 10). Posons :

$$K_g = \{x \in K;\ \varphi(x) - g(x) = 1\}$$

K_g est compact; si φ était distincte de g, pour toute g dans H, les $(\varphi - g)$ seraient des éléments non nuls de G(K); les K_g formeraient donc une famille filtrante décroissante de compacts non vides; prenant un point x_0 de l'intersection des K_g, on aurait alors : $\varphi(x_0) - g(x_0) = 1$, pour toute g dans H; cela contredit le fait que la face où s'annule φ est l'intersection des faces N_g; N_g étant la face où s'annule g. On voit donc que $\varphi \in H$.

Le cas où H est filtrant décroissant se ramène évidemment au précédent.

Soit $\mathfrak{M}$ une chaîne de G(K) (i.e une partie totalement ordonnée de (GK)). D'après ce qui précède toute partie non vide de $\mathfrak{M}$ admet un plus grand élément et un plus petit élément. Cette propriété ($\mathfrak{M}$ est bien ordonnée pour son ordre propre et pour l'ordre opposé) entraîne que $\mathfrak{M}$ est finie.

Enfin, soit A une partie de G(K), dont les éléments sont deux à deux orthogonaux; posons, pour toute partie B finie de A :

$$\varphi_B = \bigvee_{\varphi \in B} \varphi = \sum_{\varphi \in B} \varphi.$$

Les φ_B forment un ensemble filtrant croissant dans G(K); d'où, d'après ce qui précède, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in A$, tels que

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n \geqslant \varphi_B \quad \forall B, \text{ partie finie de A.}$$

Donc, si $\varphi \in A$, et si φ est distincte de $\varphi_1, \ldots \varphi_n$, $\varphi = 0$; A est inclus dans l'ensemble fini $\{0, \varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ et est donc lui-même fini.

Définition (16). — *Soit* K *un convexe de Ludwig; nous appellerons atome de* G(K) *tout élément minimal non nul de* G(K).

Proposition (17). — *Soit* K *un convexe de Ludwig; pour toute* $\varphi \in G(K)$ *avec* $\varphi \neq 0$, *il existe une suite finie* $\{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ *d'atomes deux à deux orthogonaux, telle que :* $\varphi = \sum_1^n \varphi_i$.

Démonstration. — Tout d'abord, remarquons que si f est un élément non nul de G(K), f majore au moins un atome de

G(K) : en effet, soit $\mathfrak{M}$ une chaîne maximale de $G(K) \dot{-} \{0\}$, avec $f \in \mathfrak{M}$; d'après le théorème 15, $\mathfrak{M}$ a un plus petit élément, qui est évidemment un atome.

Prenons maintenant $\varphi \in G(K) \dot{-} \{0\}$, et soit $\{\varphi_i\}_I$ une famille maximale d'atomes deux à deux orthogonaux, majorés par φ. Cette famille est finie, et :

$$\sum_I \varphi_i = \bigvee_I \varphi_i \leqslant \varphi.$$

Donc $\left(\varphi - \sum_I \varphi_i\right) \in G(K)$. Si $\left(\varphi - \sum_I \varphi_i\right)$ n'était pas nulle, il existerait un atome ψ de G(K), tel que

$$\psi \leqslant \left(\varphi - \sum_I \varphi_i\right) \leqslant (1 - \Sigma\varphi_i).$$

Donc ψ serait majorée par φ et orthogonale aux φ_i; cela contredit la maximalité de $\{\varphi_i\}_{i \in I}$; on a donc bien :

$$\varphi = \sum_I \varphi_i.$$

6. Décomposition spectrale dans A(K).

THÉORÈME 18. — *Soit* K *un convexe de Ludwig, et soit* $f \in A(K)$. *Il existe une suite numérique finie* $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ *strictement croissante, et une suite* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *de même longueur, d'éléments non nuls de* G(K), *deux à deux orthogonaux, de somme* $\sum_1^n \varphi_i$ *identique à* 1 *sur* K, *et telles que* :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

De plus les deux suites $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sont uniques.

Démonstration. — *a*) Supposons d'abord f positive, non nulle; définissons la suite scalaire $\{\alpha_i\}$ et la suite $\{\psi_i\}$ d'éléments de G(K) par

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sup_K f \\ \{x \in K, \psi_1(x) = 1\} = \{x \in K, f(x) = \alpha_1\} \end{cases}$$

et pour $i \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \sup\limits_{K} \left\{ f - \sum\limits_{1}^{i} \alpha_j \psi_j \right\} \\ \{x \in K, \psi_{i+1}(x) = 1\} = \{x \in K, f(x) - \sum\limits_{1}^{i} \alpha_j \psi_i(x) = \alpha_{i+1}\}. \end{cases}$$

Soit N_i la face exposée de K telle que $\chi_{N_i} = \psi_i$. On a évidemment :

$$N_{i+1}^* = \left\{ x \in K ; f(x) - \sum_{1}^{i} \alpha_j \psi_j(x) = \alpha_{i+1} \right\}.$$

i) Il est clair que les ψ_i sont distinctes de 0.

ii) Supposons $\left(f - \sum\limits_{1}^{p} \alpha_k \psi_k\right)$ positive sur K (pour un certain p); alors $\left(\alpha_{p+1} - f - \sum\limits_{1}^{p} \alpha_k \psi_k\right)$ est positive sur K, s'annule sur N_{p+1}^*, et est partout inférieure à α_{p+1}. D'après le lemme 6 on a, sur K :

$$\alpha_{p+1} - f - \sum_{1}^{p} \alpha_k \psi_k \leqslant \alpha_{p+1}(1 - \chi_{N_{p+1}}) = \alpha_{p+1} - \alpha_{p+1}\psi_{p+1}$$

et aussi

$$\left(f - \sum_{1}^{p+1} \alpha_k \psi_k\right) \geqslant 0.$$

On voit donc, par récurrence que :

$$\forall p \geqslant 1 : \quad f - \sum_{1}^{p} \alpha_k \psi_k \geqslant 0.$$

iii) Il s'ensuit que les α_i sont positifs et décroissants.

iv) Si $\alpha_p \neq 0$ $(p \geqslant 1)$, $\left(f - \sum\limits_{1}^{p} \alpha_k \psi_k\right)$ est nulle sur N_p^* et inférieure à $\left(f - \sum\limits_{1}^{p=1} \alpha_k \psi_k\right)$ sur $(K - N_p^*)$; il s'ensuit que $\left(f - \sum\limits_{1}^{p} \alpha_k \psi_k\right) < \alpha_p$ sur K, et par conséquent, $\alpha_{p+1} < \alpha_p$. Si $1 \leqslant i < j \leqslant p$, on aura donc : $\alpha_i > \alpha_j > 0$ et :

$$0 \leqslant \alpha_j \psi_j \leqslant \left(f - \sum_{1}^{j-1} \alpha_k \psi_k\right) \leqslant \left(f - \sum_{1}^{i} \alpha_k \psi_k\right).$$

Si x dans K est tel que $\psi_i(x) = 1$, par la construction des α_k, ψ_k, le dernier terme de cette inégalité est nul, donc $\alpha_j\psi_j(x) = 0$; comme $\alpha_j \neq 0$, on a $\psi_j(x) = 0$; autrement dit :

$$N_i^* \subset N_j \qquad \text{ou encore} \qquad \psi_i^* \geqslant \psi_j.$$

Ce qui signifie que ψ_i et ψ_j sont orthogonales.

v) D'après le théorème (15), il existe un entier $p \geqslant 1$, tel que $\alpha_p > \alpha_{p+1} = 0$. Or $\alpha_{p+1} = 0$ signifie que

$$\left(f - \sum_1^p \alpha_k\psi_k\right) = 0;$$

on aura donc

$$f = \sum_1^p \alpha_k\psi_k.$$

On obtiendra la décomposition annoncée par le théorème, en ajoutant à cette décomposition formelle $0.\left(1 - \sum_1^p \psi_k\right)$ si $\left(1 - \sum_1^p \psi_k\right) \neq 0$, et en indexant convenablement la suite scalaire et la suite des éléments de G(K).

b) Soit alors f quelconque dans A(K); pour montrer l'existence de la décomposition, il suffit de choisir un réel a positif, tel que $f + a$ soit positive, non nulle sur K; d'après ce qui précède, il existe bien une décomposition pour $f + a$, et on en déduit aussitôt une décomposition pour f.

c) Il nous reste à prouver l'unicité de la décomposition. On se ramène de manière évidente, au cas où f est positive partout sur K; supposons alors que l'on ait :

$$f = \sum_1^n \lambda_i\varphi_i = \sum_1^m \mu_j\psi_j$$

avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m$, les φ_i dans G(K), non nuls, deux à deux orthogonaux, de somme 1, et de même pour les ψ_j.

On a : $f \leqslant \lambda_n\varphi_1 + \lambda_n\varphi_2 \ldots + \lambda_n\varphi_n = \lambda_n$; et comme $\varphi_n \neq 0$, f atteint effectivement la valeur λ_n. Donc :

$$\lambda_n = \sup_K f(x).$$

Or si $f(x) = \lambda_n$, on a :

$$\sum_1^n \lambda_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_n \varphi_i(x).$$

Cette égalité implique que : $\lambda_i \varphi_i(x) = \lambda_n \varphi_i(x)$, pour $i \leqslant n$, ou encore $\varphi_i(x) = 0$, pour $1 < n$ et par conséquent $\varphi_n(x) = 1$; autrement dit :

$$\{x \in \mathrm{K},\ \varphi_n(x) = 1\} = \{x \in \mathrm{K},\ f(x) = \lambda_n\}.$$

On voit donc que :

$$\lambda_n = \mu_m \qquad \text{et} \qquad \varphi_n = \psi_m.$$

Puis on écrit :

$$0 . \varphi_n + \sum_1^{n-1} \lambda_i \varphi_i = 0 \psi_n + \sum_1^{m-1} \mu_j \psi_j$$

et, ainsi de proche en proche, on obtiendra (si $n \geqslant m$) :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{n-i} = \mu_{m-i} \\ \varphi_{n-i} = \psi_{m-i} \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1.$$

Alors
$$1 = \sum_1^m \psi_k = \sum_{n-m+1}^n \varphi_k.$$

Comme les φ_i sont non nulles, on a nécessairement $n = m$.

7. Extrémalité dans le cône $\mathbf{A}_+(\mathbf{K})$, et dans le convexe $\mathbf{A}_+^1(\mathbf{K})$.

Proposition (19). — *Soit* K *un convexe de Ludwig.* G(K) *est identique à l'ensemble des points extrémaux de* $\mathrm{A}_+^1(\mathrm{K})$, *et* $\mathrm{A}_+^1(\mathrm{K})$ *est l enveloppe convexe de* G(K).

Démonstration. — *a*) Soit f dans $\mathrm{A}_+^1(\mathrm{K})$; on va prouver que f appartient à l'enveloppe convexe de G(K).

Écrivons la décomposition spectrale de f:

$$f = \sum_1^n \lambda_i \varphi_i$$

avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$; et $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ dans G(K), deux à deux orthogonaux, de somme 1; Il est facile de voir que f prend sur K les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; de sorte que l'on a :

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \leqslant 1.$$

La décomposition peut s'écrire :

$$f = \lambda_1(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + (\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_2 + \cdots + \varphi_n) \\ + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\varphi_k + \cdots + \varphi_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1})\varphi_n.$$

La somme des coefficients de cette décomposition étant inférieure à 1, et les coefficients étant positifs, on voit que f est dans l'enveloppe convexe de G(K).

b) De ce qui précède, on déduit en particulier que les points extrémaux de A(K) sont dans G(K); Il ne nous reste donc plus qu'à montrer, que si φ est dans G(K), φ est extrémale dans $A^1_+(K)$:

Supposons que

$$\varphi = \frac{l_1 + l_2}{2} \qquad \text{avec} \qquad l_1, l_2 \in A^1_+(K).$$

Écrivons $\varphi = \chi_N$. On voit que l_1 et l_2 s'annulent sur N, et que sur N*, elles valent 1 toutes les deux. Le lemme 6 montre alors que $\varphi = l_1 = l_2$.

φ est donc extrémale dans $A^1_+(K)$.

Proposition (20). — *Soit* K *un convexe de Ludwig. L'ensemble des génératrices extrémales du cône* $A_+(K)$ *est identique à l'ensemble des génératrices de* $A_+(K)$, *qui sont engendrées par un atome de* G(K). *De plus,* $A_+(K)$ *est l'enveloppe convexe de ses génératrices extrémales.*

Démonstration. — *a*) Soit f dans A(K); le théorème de décomposition spectrale, joint à la proposition 17, permet aussitôt de voir que f est combinaison linéaire à coefficients positifs, d'atomes de G(K);

b) Il ne nous reste plus qu'à montrer que tout atome de G(K) engendre une génératrice extrémale du cône $A_+(K)$; soit φ un atome de G(K) et soit f dans $A_+(K)$, avec $f \leqslant \varphi$; soit $N \in F(K)$ telle que $\varphi = \chi_N$.

Écrivons $f = \sum_1^n \lambda_i \varphi_i$, avec $\lambda_i \neq 0$, $\varphi_i \in G(K)$, deux à deux orthogonaux. Il s'ensuit que les φ_i s'annulent sur N; φ étant un atome, on aura donc :

$$\varphi_i = \varphi \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{et } f \text{ est homothétique à } \varphi.$$

PROPOSITION (21). — *Soit* K *un convexe de Ludwig*; *soit* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ *une suite finie d'atomes deux à deux orthogonaux, dans* G(K); *Le cône convexe engendré par les* φ_i *est réticulé.*

Démonstration. — Il suffit en effet de voir que les $\varphi_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des vecteurs indépendants dans A(K); Supposons donc des scalaires non tous nuls, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0.$$

Réunissons les φ_i relatives à un même coefficient dans cette relation :

$$\sum_{p=1}^{k} \alpha_p \Big[\sum_{I_p} \varphi_i \Big] = 0.$$

Or les α_p ne sont pas tous nuls, et les $I_p \subset \{1, \ldots, n\}$ sont disjoints; de sorte que les $\sum_{I_p} \varphi_i$ sont deux à deux orthogonaux. Cela contredit évidemment l'unicité de la décomposition spectrale du théorème (18).

8. Convexes de Ludwig et simplexes.

Soit K un simplexe (c'est-à-dire un convexe compact, tel que tout cône de base K soit réticulé). Edwards (voir bibliographie) a montré, que si f est une fonction concave s.c.i. sur K, majorant une fonction g convexe s.c.s sur K, il existe $h \in A(K)$ telle que : $g \leqslant h \leqslant f$ sur K.

On en déduit facilement qu'un simplexe jouit d'une propriété un peu plus faible que la propriété (S) :

PROPOSITION (22). — *Soit* K *un simplexe*; *Alors pour toute face exposée* N *de* K, $A^1_+(N, K)$ *est filtrant croissant.*

Démonstration. — Soient $l_1, l_2 \in A^1_+(N, K)$; posons $g = \sup(l_1, l_2)$; et soit f la fonction qui vaut 0 dans N, et 1 dans (K — N); Comme g est convexe s.c.s, f concave s.c.i., il existe, d'après le théorème d'Edwards, $l \in A(K)$ telle que :

$$g \leqslant k \leqslant f.$$

Donc $l \in A^1_+(N, K)$ et $l \geqslant l_1, l_2$; ce qui prouve que $A^1_+(N, K)$ est filtrant croissant.

Remarque (23). — Néanmoins il se peut très bien que pour toute $N \in F(K)$, avec $N \neq \emptyset$ et $N \neq K$, $A^1_+(N, K)$ n'ait pas de plus grand élément; par exemple, cela est vrai lorsque K est le simplexe des mesures positives de masse 1 sur $[0, 1]$, muni de la topologie vague.

THÉORÈME (24). — *Soit* K *un convexe de Ludwig. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) F(K) *est une algèbre de Boole.*

(2) *Les atomes de* G(K) *sont deux à deux orthogonaux.*

(3) K *est un simplexe.*

(4) *Pour tout* $N \in F(K)$, K *est l'enveloppe convexe de* $N \cup N^*$.

Démonstration :

(1) $\Longrightarrow$ (2) : si F(K) est de Boole; il en va de même de G(K), et il est alors clair que deux atomes de G(K) sont orthogonaux.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Si les atomes sont deux à deux orthogonaux, ils sont alors en nombre fini, engendrent $A_+(K)$ et $A_+(K)$ est réticulé; a fortiori K est un simplexe.

(3) $\Longrightarrow$ (4) : Supposons que K soit un simplexe (en plus du fait qu'il soit de Ludwig); soient $N \in F(K)$, et a un point extrêmal de K, qui ne soit pas dans N; soit f la fonction définie sur K, qui vaut 1 au point a, et 0 ailleurs, et soit g la fonction sur K. qui vaut 0 sur N et 1 ailleurs; d'après le théorème d'Edwards il existe $h \in A(K)$ avec $f \leqslant h \leqslant g$. donc $h(a) = 1$; On en déduit que $a \in N^*$.

Les points extrémaux de K sont donc dans $N \cup N^*$, et le théorème de Krein-Milman montre alors que K est l'enveloppe convexe de $N \cup N^*$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : Désignons par $c(A)$ l'enveloppe convexe d'une partie A de K. Supposons maintenant que pour toute face $N \in F(K)$, $c(N \cup N^*) = K$. Soient M et N deux faces exposées de K; on a l'inclusion évidente :

$$(M \wedge N) \vee (M \wedge N^*) \supset c\{(M \cap N) \cup (M \cap N^*)\}.$$

Comme $K = c(N \cup N^*)$, et comme M est une face de K,

les points extrémaux de M se répartissent entre N et N^*, d'où :

$$M = c\{(M \cap N) \cup (M \cap N^*)\}$$

Et, par ailleurs $M \supset (M \wedge N) \vee (M \wedge N^*)$.

On obtient donc finalement, pour $M, N \in F(K)$:

$$M = (M \wedge N) \vee (M \wedge N^*).$$

Cette propriété aura évidemment encore lieu dans le treillis complémenté isomorphe G(K); mais alors, d'après le corollaire 14, G(K) est booléien, et donc aussi F(K).

Proposition (25). — *Soit* K *un simplexe*; *dire que* K *est de Ludwig équivaut à dire qu'il est de dimension finie.*

Démonstration. — En effet si K est un simplexe, et est de Ludwig, les atomes de G(K) sont deux à deux orthogonaux, donc en nombre, fini et engendrent $A_+(K)$; donc K est de dimension finie; la réciproque est évidente.

9. Deux propriétés de stabilité des convexes de Ludwig.

Théorème (26). — *Soient* K *un convexe de Ludwig,* N *une face exposée de* K, *non vide et distincte de* K; *avec la notation* T_N *introduite dans* (I), *les convexes* $K_N = T_N(K)$ *et* $\tilde{N} = T_N(N^*)$ *sont des convexes de Ludwig.*

Démonstration. — Soit $v \in E_N$, avec $\{v\} = T_N(N)$; soit C le cône convexe de sommet v engendré par K_N; et soit φ la jauge continue du chapeau K_N de C; On a déjà vu que $\tilde{N} = T_N(N^*) = \{x \in C, \varphi(x) = 1\}$, et on sait que : $\chi_N = \varphi \circ T_N$.

(1) Soit $M \in F(K_N)$; il est clair que $M' = T_N^{-1}(M) \cap K$ est une face exposée de K. Pour montrer que $A_+^1(M, K_N)$ a un plus grand élément, il suffit de prouver que $\chi_{M'}$ est constante sur $V_N(K)$ et passe donc au quotient, c'est-à-dire se factorise par T_N.

i) Si $v \in M$, on a $N \subset M'$ et $V_N(K) \subset V_{M'}(K)$; par conséquent $\chi_{M'}$ s'annule sur $V_N(K)$.

ii) Si $\nu \notin M$, on aura $M \subset \tilde{N}$, et par suite $M' \subset N^*$ ou $N \subset M'^*$. On voit alors que $(1 - \chi_M)$ s'annule sur $V_N(K)$ et que χ_M est constante sur $V_N(K)$.

(2) Le fait que $\tilde{N}$ est un convexe de Ludwig, sera démontré dans la proposition suivante, compte tenu de ce que K_N est somme affine de ν et de $\tilde{N}$.

Définition (27). — *Soient* K *un convexe compact et* $K_1, \ldots, K_n$ *une famille finie de parties convexes compactes de* K; *on dira alors que* K *est somme affine des* K_i *si tout point de* K *s'écrit de manière unique comme barycentre de masses ponctuelles* μ_i, *avec* μ_i *portée par* K_i. *On notera alors* $K = \bigoplus_1^n K_i$.

On a alors la propriété suivante (d'ailleurs caractéristique).

Soit $f_i (i \leqslant 1 \leqslant n)$ une famille de fonctions telles que $f_i \in A(K_i)$, il existe une unique $f \in A(K)$, qui coïncide avec chaque f_i sur K_i.

De là on déduit que les K_i sont des faces exposées de K.

Théorème (28). — *Soient* K *un convexe compact et* $K_1, \ldots, K_n$ *une suite finie de faces exposées de* K, *telles que* $K = \bigoplus_1^n K_i$. *Alors* K *est de Ludwig si, et seulement si tous les* K_i *sont de Ludwig.*

Démonstration abrégée :

i) Si tous les K_i sont des convexes de Ludwig, soit N une face exposée de K. On voit que $A_+^1(N, K)$ a un plus grand élément, la fonction $f \in A(K)$ telle que f/K_i soit le plus grand élément de $A_+^1(N \cap K_i, K_i)$.

ii) Si K est de Ludwig, et si $1 \leqslant i \leqslant n$, considérons N une face exposée de K_i; il est clair que N est une face exposée de (K); soit f le plus grand élément de $A_+^1(N, K)$, on voit que f/K_i est le plus grand élément de $A_+^1(N, K_i)$.

10. Quelques exemples.

1) Les exemples les plus triviaux de convexes de Ludwig sont, d'une part les simplexes de dimension finie, d'autre part

les convexes compacts « lisses », (c'est-à-dire, avec nos notations, tels que pour $N \in F(K)$ et $N \neq K$, $N \neq \emptyset$, $V_N(K)$ est un hyperplan fermé). On obtient une classe un peu moins évidente en prenant les sommes affines finies de convexes compacts de l'un de ces deux types.

2) Il est très facile de décrire tous les convexes de Ludwig à deux dimensions; on a d'une part les triangles, et d'autre part, les convexes compacts lisses.

3) Pour la dimension 3, c'est un peu plus délicat; il y a quatre classes de convexes de Ludwig : les convexes lisses, les tétraèdres les sommes affines d'un point et d'un convexe lisse de dimension 2, et enfin des convexes plus complexes qu'on peut décrire de la manière suivante :

Un convexe K de ce type s'incrit dans un prisme triangulaire, de manière à ce que la trace de chaque arête du prisme soit une face exposée non vide de K, que chaque arête du prisme soit tangente à la surface de K; et enfin, en tout point de la surface de K, n'appartenant pas à une arête du prisme, K admet un plan tangent.

On obtient ainsi des exemples de convexes de Ludwig qui ne sont pas somme affine de convexes « lisses » et de simplexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Ludwig, Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories II, *Commun. Math. Phys.*, 4, 331-348 (1967).

[2] G. Ludwig, Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories III, *Commun. Math. Phys.*, 9, 1-12 (1968).

[3] J. M. Bony, Représentations intégrales sur les cônes faiblement complets, Séminaire Initiation à l'Analyse t. 3 (1963-64).

[4] L. Asimow, Universally weel-capped cones, *Pacific J. of Math.*, Vol 26, n° 9, (1968).

[5] D. A. Edwards, Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 261, (1965), 2798-2800.

Manuscrit reçu le 19 janvier 1970.

Alano Ancona,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5e.