ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCOS SEBASTIANI

S-parallélisabilité équivariante

Annales de l'institut Fourier, tome 20, nº 1 (1970), p. 21-35

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_21_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20,1 (1970), 21-35

S-PARALLELISABILITÉ ÉQUIVARIANTE

par Marcos SEBASTIANI

1. Dans ce travail on définit les notions de e-π-variété et de variété e-s-parallélisable pour les G-variétés (G fini), généralisations naturelles des notions classiques de π-variété (variété qui admet un plongement avec fibré normal trivial dans un espace euclidien) et de variété s-parallélisable (variété dont le fibré tangent est stablement trivial). Comme dans le cas classique il est évident que toute e-π-variété est e-s-parallélisable. On prouve que toute G-variété compacte *libre* (c. à. d., sur laquelle G opère librement) e-s-parallélisable est une e-π-variété. Mais, contrairement au cas classique, on montre qu'il existe des G-variétés compactes, connexes, sans bord, e-s-parallélisables qui ne sont pas des e-π-variétés. Pour les construire on prouve d'abord que si M est une e-π-variété compacte, sans bord, semi-libre (c. à. d., sur laquelle G opère librement en dehors de l'ensemble des points fixes) alors l'ensemble des points fixes de M est difféomorphe au bord d'une variété parallélisable. Finalement, on introduit et on calcule deux types de groupes de cobordisme de e-π-variétés. On donne aussi un exemple d'une G-variété qui est s-parallélisable comme variété mais qui n'est pas e-s-parallélisable.

Je remercie Mr. René Thom et Mr. Daniel Lehmann pour des entretiens qui m'ont été utiles pour la réalisation de ce travail. Ce travail a été exposé dans le séminaire de topologie de l'IHES de l'année 1968/69.

2. On reprend les groupes de cobordisme "normal" de W. Browder [6] *avec les notations de* [8] plus adaptés à ce qu'on va faire ici : si X est un CW complexe fini et ξ un fibré vectoriel réel sur X, on note $\Omega_*(X, \xi)$ le groupe des classes de cobordisme des triples (M, f, g) où M est une variété compacte sans bord et (f, g) est un morphisme du fibré *tangent* stable à M dans le fibré stable de ξ.

On a $\Omega_n(X, \xi) = \pi_{n+k}(T(\xi^\perp))$ où $\xi^\perp$ est un fibré tel que $\xi \oplus \xi^\perp$ soit trivial et T dénote l'espace de Thom ([6] et [5]).

Si (X , Y) est une paire d'espaces, on notera S(X/Y) la suspension réduite de l'espace X/Y avec Y comme point base. Si $Y = \emptyset$ on fait la convention usuelle $X/\emptyset = X +$ point et on écrit $S(X) = S(X/\emptyset)$.

Le cobordisme repéré Ω^r_* définit une théorie d'homologie généralisée qui s'identifie à l'homotopie stable π^S_*. La théorie de cohomologie correspondante est la cohomotopie stable π_S^* définie par

$$\pi_S^n(X, Y) = \lim \operatorname{ind}_k [S^k(X/Y), S^{k+n}]$$

([,] indique classes d'homotopie pointées) et pour laquelle $\pi_S^n(\text{point}) = \Pi_{-n}$ (où Π_* dénote l'anneau d'homotopie stable des sphères).

Si X est une variété différentiable compacte sans bord de dimension m, l'application identité $X \longrightarrow X$ et sa différentielle définissent un élément, appelé "classe fondamentale",

$$[X] \in \Omega_m(X, \tau(X)) .$$

PROPOSITION 2.1. – *Si* X *est une variété différentiable compacte sans bord de dimension m et si* $\tau = \tau(X)$ *est son fibré tangent, alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\Omega_n(X, \tau) = \pi_S^{m-n}(X)$$

pour tout n qui conserve les structures de Π_**-modules et qui envoie* [X] *dans la classe de l'application constante dans* $\pi_S^0(X)$.

Démonstration. – Supposons X plongée dans S^{m+k}, k grand. Soit U un voisinage tubulaire de X et soit ∂U son bord. Soit ν le fibré normal à X. Alors, $\Omega_n(X, \tau) = \pi_{n+k}(T(\nu))$. Mais pour k grand on a

$$\pi_{n+k}(T(\nu)) = \pi^S_{n+k}(T(\nu), p) = \pi^S_{n+k}(U, \partial U) =$$
$$= \pi^S_{n+k}(S^{m+k}, S^{m+k} - X) ,$$

où p est le point base de $T(\nu)$.

Par la dualité généralisée [4], $\pi^S_{n+k}(S^{m+k}, S^{m+k} - X) = \pi_S^{m-n}(X)$, ce qui donne l'isomorphisme cherché. Cherchons l'image de

$$[X] \in \Omega_m(X, \tau)$$

par cet isomorphisme. L'élément correspondant dans

$$\pi_{m+k}(T(\nu)) = \pi_{m+k}(U/\partial U)$$

est donné par la projection naturelle

$$S^{m+k} \longrightarrow S^{m+k}/((S^{m+k} - U) \cup \partial U) = U/\partial U\ .$$

L'image de cet élément dans

$$\pi^S_{m+k}(U, \partial U) = \pi^S_{m+k}(S^{m+k}, S^{m+k} - X)$$

est l'image de la classe fondamentale de $\pi^S_{m+k}(S^{m+k})$ par l'homomorphisme naturel

$$\pi^S_{m+k}(S^{m+k}) \longrightarrow \pi^S_{m+k}(S^{m+k}, S^{m+k} - X)\ .$$

Par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi^S_{m+k}(S^{m+k}) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \pi^S_{m+k}(S^{m+k}, S^{m+k} - X) \arrow[d, leftrightarrow] \\ \pi^0_S(S^{m+k}) \arrow[r] & \pi^0_S(X) \end{tikzcd}$$

(dont les isomorphismes verticaux sont donnés par la dualité) on obtient la dernière affirmation de la Proposition.

COROLLAIRE 2.2. – *L'annulateur de* $[X]$ *dans* Ω^r_* *est nul.*

3. Soit G un groupe fini. On appelle G-*espace* un espace sur lequel G opère à gauche. Si l'espace est muni d'une structure différentiable invariante par G on l'appellera G-*variété*. On supposera G non trivial.

DEFINITION 3.1. – *Un* G-*fibré est un fibré vectoriel réel sur lequel* G *opère par des automorphismes de fibré.*

DEFINITION 3.2. – *Soit* $\alpha : G \longrightarrow GL(m, R)$ *une représentation linéaire de* G *et soit* X *un* G-*espace. Alors on définit le* G-*fibré* $\eta_\alpha(X)$ *comme étant le fibré*

$$X \times R^m \longrightarrow X$$

où G opère sur $X \times R^m$ par $g(x, u) = (gx, \alpha(g)u)$. Si α est la représentation triviale on écrit $\eta^m(X)$ pour $\eta_\alpha(X)$.

DEFINITION 3.3. – *Soit* M *une* G-*variété de dimension n. On dit que* M *est e-s-parallélisable si*

$$\tau(M) \oplus \eta^k(M) = \eta_\alpha(M)$$

pour k assez grand et $\alpha : G \longrightarrow GL(n + k, R)$ *convenable.*

DEFINITION 3.4. – *Soit* M *une* G-*variété de dimension n. On dit que* M *est une e-π-variété si elle admet un plongement équivariant dans un* G-*espace linéaire* R^{n+k} *tel que le* G-*fibré normal à ce plongement soit isomorphe à* $\eta^k(M)$.

Il est évident que toute *e-π*-variété est *e-s*-parallélisable.

PROPOSITION 3.3. – *Si* M *est une* G-*variété e-s-parallélisable compacte sur laquelle* G *opère librement alors* M *est une e-π-variété.*

Avant de la prouver on prouve le

LEMME 3.4. – *Soit* $p : X \longrightarrow Y$ *un revêtement fini,* X *et* Y *étant des complexes* CW *finis. Soit* ξ *un fibré vectoriel réel sur* Y *tel que* $p^*(\xi)$ *soit trivial. Alors* $\xi \oplus \xi \oplus \overset{t}{\ldots} \oplus \xi$ *est trivial pour t convenable.*

Démonstration. – On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{K}(Y) \otimes Q & \xrightarrow{p^*} & \widetilde{K}(X) \otimes Q \\ \mathrm{ch} \downarrow & & \downarrow \mathrm{ch} \\ \widetilde{H}^*(Y, Q) & \xrightarrow{p^*} & \widetilde{H}^*(X, Q) \end{array}$$

dont les lignes verticales sont des isomorphismes [1]. On sait que la ligne horizontale d'en bas est injective ; donc, il en va de même pour celle d'en haut. La classe de $\xi_C = \xi \otimes C$ dans $\widetilde{K}(Y)$ appartient au noyau de $p^* : \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$. On en déduit que $\xi_C \oplus \overset{t}{\ldots} \oplus \xi_C$ est stablement trivial comme fibré complexe pour t convenable. Mais puisque $\xi_C = \xi \oplus \xi$ comme fibrés réels on a que $\xi \oplus \overset{2t}{\ldots} \oplus \xi$ est stablement trivial comme fibré réel. Mais on peut supposer $2t > \dim Y + 1$. Alors $\xi \oplus \overset{2t}{\ldots} \oplus \xi$ est trivial d'après [2].

Démonstration de la proposition 3.3. – On sait qu'on peut plonger M de façon équivariante dans un G-espace linéaire R^m où G opère au moyen de $\beta : G \longrightarrow GL(m, R)$. Soit ν le G-fibré normal à M. Alors $\tau(M) \oplus \nu = \eta_\beta(M)$.

D'autre part, $\tau(M) \oplus \eta^k(M) \cong \eta_\alpha(M)$ pour k, α convenables. Donc, $\nu \oplus \eta_\alpha(M) \cong \eta_\beta(M) \oplus \eta^k(M)$. Alors, si on considère le plongement composé

$$M \subset R^m \subset R^m \times R^{n+k} = R^s \qquad (n = \dim M)$$

où G opère sur $R^s = R^m \times R^{n+k}$ par $g(u, v) = (\beta(g)u, \alpha(g)v)$, le fibré normal du nouveau plongement sera de la forme

$$\nu_1 \cong \nu \oplus \eta_\alpha(M) \cong \eta_\gamma(M)$$

où $\gamma : G \longrightarrow GL(m + k, R)$ est l'extension triviale de β.

Maintenant observons que, puisque G opère librement sur M, on peut définir le quotient par G, $\xi' = \xi/G$, de tout G-fibré ξ sur M. ξ' est un fibré sur M/G et $\xi = p^*(\xi')$ si $p : M \longrightarrow M/G$ est la projection canonique. En particulier, ξ' est trivial comme fibré si et seulement si $\xi \cong \eta^h(M)$ où $h = \dim \xi$.

Par le lemme 3.4 et puisque ν_1 est trivial *comme fibré* on a que $\nu_1' \oplus \overset{t}{\ldots} \oplus \nu_1'$ est trivial comme fibré sur M/G pour t convenable. Donc,

$$\nu_1 \oplus \eta_\gamma(M) \oplus \overset{t-1}{\ldots} \oplus \eta_\gamma(M) \cong \nu_1 \oplus \overset{t}{\ldots} \oplus \nu_1 \cong \eta^r(M)\ .$$

Alors, si on considère le plongement composé

$$M \subset R^s \subset R^s \times R^v \times \overset{t-1}{\ldots} \times R^v = R^u \qquad (v = m + k)$$

où G opère sur chaque facteur R^v au moyen de γ, on aura un fibré normal isomorphe à $\eta^{u-n}(M)$, c.q.f.d.

4. Maintenant, fixons une représentation linéaire α :

$$G \longrightarrow 0(m + 1)$$

telle que $\alpha(g)$ ne possède pas la valeur propre 1 si $g \neq 1$. On appelle aussi α, par abus de notation, l'extension triviale de α à R^{m+k}, $k \geqslant 1$.

Considérons les G-variétés *libres* compactes M plongées (de façon équivariante) dans R^{m+k} (G opère sur R^{m+k} au moyen de α) et *munies* d'un isomorphisme $\nu(M) \xrightarrow{\sim} \eta^r(M)$ (c. à. d., ce sont des *e-π*-variétés). On considère deux tels objets comme équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par une trans ormation affine équivariante. On peut alors définir la somme disjointe de deux tels objets. Aussi, la notion de *bord* d'un tel objet a un sens évident. On définit $-$ M en composant $\nu(M) \longrightarrow \eta^r(M)$ avec l'isomorphisme

$$\eta^r(M) \longrightarrow \eta^r(M)$$

qui consiste à changer de signe la dernière coordonnée. On dit que M et N sont cobordants si M + (− N) est un bord. Alors les classes de cobordisme d'objets sans bord forment un groupe abélien gradué qu'on notera $\Omega_*(\alpha)$.

Si on fait le même procédé mais en admettant que les variétés avec bord puissent avoir des points fixes *dans son intérieur*, on obtient un autre groupe gradué, noté $\Omega'_*(\alpha)$, et un épimorphisme évident p_* : $\Omega_*(\alpha) \longrightarrow \Omega'_*(\alpha)$.

Le produit cartésien fait de $\Omega_*(\alpha)$ et $\Omega'_*(\alpha)$ des Ω^r_*-modules.

Dans $\Omega_m(\alpha)$ il y a un élément distingué : la sphère S^m avec la trivialisation évidente de son fibré normal. Alors on a un homomorphisme

$$j_n : \Omega^r_n \longrightarrow \Omega_{n+m}(\alpha)$$

pour tout n : la multiplication par cet élément distingué.

Soit $M \subset R^{m+k}$ une G-variété plongée qui représente un élément de $\Omega_n(\alpha)$. Alors, $M \subset R^{m+k} - R^{k-1}$. Mais $R^{m+k} - R^{k-1} = S^m \times R^k$ comme G-variétés. La projection naturelle $S^m \times R^k \longrightarrow S^m$ restreinte à M nous donne une application équivariante $M \longrightarrow S^m$. Comme

$$\tau(M) \oplus \eta^{m+k-n}(M) = \eta_a(M) \qquad \text{et} \qquad \tau(S^m) \oplus \eta^k(S^m) = \eta_a(S^m)$$

cette application se relève à un morphisme équivariant

$$\tau(M) \oplus \eta^{m+k-n}(M) \longrightarrow \tau(S^m) \oplus \eta^k(S^m)\,.$$

Si on passe au quotient par l'action de G on obtient une application $M/G \longrightarrow L_a$ (où $L_a = S^m/G$) et un relèvement de cette application à un morphisme des fibrés tangents stables, c'est-à-dire, un élément de $\Omega_n(L_a, \tau(L_a))$. Cette correspondance nous donne un isomorphisme canonique $\Omega_n(\alpha) = \Omega_n(L_a, \tau(L_a))$. Par la proposition 2.1 il en résulte un isomorphisme

$$\lambda_n : \Omega_n(\alpha) \longrightarrow \pi_S^{m-n}(L_a) .$$

Soit finalement

$$\mu_n : \Omega_n^r \longrightarrow \pi_S^{-n} = \Pi_n$$

l'isomorphisme canonique.

PROPOSITION 4.5. – *On a un diagramme exact et commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_n^r & \xrightarrow{j_n} & \Omega_{n+m}(\alpha) & \xrightarrow{p_{m+n}} & \Omega'_{n+m}(\alpha) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mu_n} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{m+m}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda'_{n+m}} & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_S^{-n} & \longrightarrow & \pi_S^{-n}(L_a) & \longrightarrow & \widetilde{\pi}_S^{-n}(L_a) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes, λ'_{n+m} est déduit de λ_{n+m} par passage au quotient et la ligne horizontale d'en bas est la suite exacte habituelle (associée à l'application $L_a \longrightarrow$ point) dans la cohomologie extraordinaire donnée par la cohomotopie stable.

Démonstration. – Soit W^n une G-variété plongée de façon équivariante dans R^{m+k} et munie d'un isomorphisme

$$\nu(W) \longrightarrow \eta^r(W) \quad (n + r = m + k) .$$

On suppose que ∂W ne contient pas de points fixes. Soit F l'ensemble des points fixes de W. Soit $e_1, \ldots, e_{m+k}$ la base canonique de R^{m+k}. Alors, puisque l'action de G sur $\nu(W)$ et $\tau(F)$ est triviale, on a que pour tout $x \in F$, $x + e_1, \ldots, x + e_{m+1}$ sont des vecteurs tangents à W et normaux à F. Donc, les champs $x + e_{m+2}, \ldots, x + e_{m+k}$ $(x \in F)$ sont des sections de

$$\tau(F) \oplus \nu(W)|F = \tau(F) \oplus \eta^r(F)$$

et font de F une variété repérée.

Soit U un voisinage tubulaire de F dans W stable par l'action de G. Alors ∂U est une G-variété plongée dans R^{m+k} et son fibré normal est de la forme

$$\nu(\partial U) = (\nu(W)|\partial U) \oplus \eta^1(\partial U) = \eta^{r+1}(\partial U) .$$

On peut maintenant énoncer le

LEMME 4.6. — F *admet un voisinage tubulaire stable* U *tel que* ∂U *représente dans* $\Omega_{n-1}(\alpha)$ *le même élément que* $F \times S^m$.

La démonstration du lemme 4.6 est directe d'après ce qu'on vient de voir. On peut même, au moyen d'une isotopie équivariante, obtenir

$$U = \{x + t_1 e_1 + \cdots + t_{m+1} e_{m+1} | x \in F , |t_1| \leqslant \varepsilon, \ldots , |t_{m+1}| \leqslant \varepsilon\}.$$

Revenant à la démonstration de la proposition 4.5, la commutativité du premier rectangle découle du fait que $\lambda_m(S^m)$ est la classe de l'application constante dans $\pi_S^0(L)$ et que λ_* est un homomorphisme de $\Omega_*^r = \Pi_*^S$-modules (proposition 2.1).

D'autre part, il est évident que $p_{n+m} \circ j_n = 0$. Mais le lemme 4.6 implique Ker $p_{n+m} \subset \mathrm{I}m\, j_n$, parce que ∂W et $-\partial U$ représentent le même élément de $\Omega_*(\alpha)$. Donc, $\mathrm{I}m\, j_n = \mathrm{Ker}\, p_{n+m}$.

On sait que p_{n+m} est surjective et, puisque μ_n et λ_{n+m} sont des isomorphismes, j_n est injective et λ_{n+m} passe au quotient et définit l'isomorphisme λ'_{n+m}.

COROLLAIRE 4.7. — *Soit* M *une e-π-variété sans bord sur laquelle* G *opère de façon semilibre. Alors l'ensemble* F *des points fixes de* M *est difféomorphe au bord d'une variété parallélisable.*

Démonstration. — Supposons F non-vide. Comme l'action est semi-libre on peut supposer M plongée de façon équivariante et avec fibré normal isomorphe à $\eta^r(M)$ dans R^{m+k}, en choisissant α convenablement. Par le lemme 4.6, $S^m \times F$ a la même classe dans $\Omega_{n+m}(\alpha)$ ($n = \dim F$) que ∂U, où U est un voisinage tubulaire stable de F dans M. Mais $-\partial U$ est le bord de M $-$ int U, et donc sa classe dans $\Omega_{n+m}(\alpha)$ est nulle. Alors $S^m \times F$ est nul dans $\Omega_{n+m}(\alpha)$ et, puisque j_n est injective, on a que F est bord d'une variété parallélisable.

PROPOSITION 4.8. — *Soit* G *un groupe cyclique fini. Alors il existe une* G*-variété (compacte, connexe, sans bord, semi-libre) e-s-parallélisable* M *qui n'est pas une e-π-variété.*

Démonstration. – Cette proposition résulte du corollaire 4.7 et des deux lemmes suivants.

LEMME 4.9. – *Soit* F^n *une variété (compacte, connexe, sans bord) repérée qui représente un élément* [F] *de* $\Pi_n = \Omega_n^r$ *d'ordre premier avec l'ordre de* G. *Alors il existe une* G-*variété (compacte, connexe, sans bord) e-s-parallélisable sur laquelle* G *opère de façon semi-libre et dont l'ensemble des points fixes est* F.

LEMME 4.10. – *Soit t un entier positif. Alors, pour un n convenable, il existe une variété (compacte, connexe, sans bord) repérée* F^n *qui représente un élément de* Π_n *d'ordre premier avec t et qui n'est pas difféomorphe au bord d'une variété parallélisable.*

Démonstration du lemme 4.9. – Soit E_G un espace fibré universel pour le groupe G et pour les dimensions $\leqslant m$, et soit $B_G = E_G/G$ le classifiant. On peut supposer que E_G et B_G admettent des structures de complexes CW finis. Soit ξ le fibré vectoriel sur B_G de dimension $m + 1$ associé à $E_G \longrightarrow B_G$ au moyen d'une représentation α : $G \longrightarrow O(m + 1)$ telle que $\alpha(g)$ ne possède pas la valeur propre 1 si $g \neq 1$ (ce qui existe toujours quand G est cyclique). Soit $L_a = S^m/G$.

Il existe une application continue équivariante $f : S^m \longrightarrow E_G$ qui induit au quotient une application $f' : L_a \longrightarrow B_G$. L'application f se relève à un morphisme équivariant

$$(f, f_0) : \tau(S^m) \oplus \eta^1(S^m) = \eta_a(S^m) \longrightarrow \eta_a(E_G)$$

qui par passage au quotient définit un morphisme

$$(f', f_0') : \tau(L_a) \oplus \eta^1(L_a) \longrightarrow \xi\ .$$

On a donc un diagramme commutatif de morphisme de fibrés

$$\begin{array}{ccc} (S^m, \tau(S^m) \oplus \eta^1(S^m)) & \xrightarrow{(f, f_0)} & (E_G, \eta_a(E_G)) \\ \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi' \\ (L_a, \tau(L_a) \oplus \eta^1(L_a)) & \xrightarrow{(f', f_0')} & (B_G, \xi) \end{array}$$

où π et π' sont les projections naturelles. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_m(S^m, 0) & \xrightarrow{(f, f_0)_*} & \Omega_m(E_G, 0) \\ \Big\downarrow \pi_* & & \Big\downarrow \pi'_* \\ \Omega_m(L_a, \tau(L_a)) & \xrightarrow{(f', f'_0)_*} & \Omega_m(B_G, \xi) \end{array}$$

Il est facile de voir, puisque f est homotopiquement triviale, que $(f, f_0)_* = 0$. Donc,

$$(f', f'_0)_* \circ \pi'_* = \pi'_* \circ (f, f_0)_* = 0.$$

En particulier $(f', f'_0)_* (\pi_*([S^m])) = 0$ (voir § 2). Mais par le procédé classique on peut prouver que $\pi_*([S^m]) = t \cdot [I_a]$ si t = ordre de G. Donc, $(f', f'_0)_*(t[L_a]) = 0$. Alors, si s est l'ordre de $[F] \in \Pi_n$, on aura

$$t(f', f'_0)_* ([F] \cdot [L_a]) = [F] \cdot (f', f'_0)_* (t[L_a]) = 0 \quad \text{et}$$

$$s(f', f'_0)_* ([F] \cdot [L_a]) = (f', f'_0)_* (s[F] \cdot [L_a]) = 0 .$$

Comme s est premier avec t,

$$(f', f'_0)_* ([F] \cdot [L_a]) = [F] \cdot (f', f'_0)_* ([L_a]) = 0 .$$

Donc,

$$[F \times L_a, \bar{f}, \bar{f}_0] = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_{m+n}(B_G, \xi) ,$$

où $(\bar{f}, \bar{f}_0)$ est la composition du morphisme canonique

$$\tau(F \times L_a) \oplus \eta^1(F \times L_a) \longrightarrow \eta^{n+1}(L_a) \oplus \tau(L_a)$$

avec le morphisme (f', f'_0).

Soit $(F \times L_a, \bar{f}, \bar{f}_0) = \partial(W, h, h_0)$. Alors l'image réciproque de $E_G \longrightarrow B_G$ par h, $\widetilde{W} = h^*(E_G)$, est une G-variété avec $\partial\widetilde{W} = F \times S^m$ et munie d'un isomorphisme

$$\tau(\widetilde{W}) \oplus \eta^r(\widetilde{W}) \longrightarrow \eta_a(\widetilde{W}) \oplus \eta^{n+r+1}(\widetilde{W})$$

qu'induit sur $F \times S^m$ l'isomorphisme naturel

$$\tau(F \times S^m) \oplus \eta^{r+1}(F \times S^m) \longrightarrow \eta_a(F \times S^m) \oplus \eta^{n+r+1}(F \times S^m) .$$

Donc, la G-variété M obtenue en identifiant le bord de $F \times B^{m+1}$ avec le bord de $\widetilde{W}$ est une G-variété *e-s*-parallélisable dont l'ensemble des points fixes est F.

Démonstration du lemme 4.10. – Soit $p > 3$ un nombre premier qui ne divise pas t. On sait que p divise l'ordre de Θ_n/bP_{n+1} pour $n = 2p(p-1) - 2$ [2]. Soit F une sphère homotopique de dimension n dont la classe dans $\Theta_n/bP_{n+1} \subset \Pi_n$ est d'ordre exactement p. Alors F munie d'un repère convenable représente un élément d'ordre p de Π_n, mais F n'est pas difféomorphe au bord d'une variété parallélisable.

5. Maintenant on va donner un exemple d'une G-variété connexe, compacte, sans bord, qui est s-parallélisable mais qui n'est pas e-s-parallélisable. La variété est $S^2 \times S^2$ et le groupe Z_2, qui opère en conservant l'orientation.

Soit T le générateur de Z_2. On définit une action de Z_2 sur S^2 par

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, x_3)$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées dans R^3 d'un point de S^2. Alors S^2/Z_2 s'identifie à S^2. Soit $p : S^2 \longrightarrow S^2 = S^2/Z_2$ la projection canonique. Soit $\bar{\xi} = \bar{E} \xrightarrow{\bar{\pi}} S^2$ "le" fibré vectoriel réel non-trivial de dimension 3 sur S^2. Soit $\xi = p^*(\bar{\xi})$, $\xi = E \xrightarrow{\pi} S^2$ l'image réciproque de $\bar{\xi}$ par p. Comme p est de degré 2 et

$$\pi_2(B_{SO(3)}) = \pi_1(SO(3)) = Z_2 ,$$

on a que ξ est trivial.

D'autre part, Z_2 opère sur $\bar{E} \times S^2$ par $T(x, y) = (x, Ty)$ et $E \subset \bar{E} \times S^2$ est stable par cette action. Donc, Z_2 opère sur E et $\bar{E} = E/Z_2$. En particulier, ξ est un Z_2-fibré.

Choisissons une métrique riemannienne sur $\bar{\xi}$, laquelle se relève dans une métrique de ξ invariante par Z_2. Soit $\bar{M}$ le fibré en sphères de $\bar{\xi}$ et soit M celui de ξ. Alors Z_2 opère sur M et $\bar{M} = M/Z_2$. L'ensemble des points fixes de M est $S^2 + S^2$. Puisque ξ est trivial en tant que fibré, M est difféomorphe à $S^2 \times S^2$. Alors M est s-parallélisable ; on va prouver maintenant que M n'est pas e-s-parallélisable.

Observons d'abord que, puisque $\dim \bar{\xi} = 3$, $\bar{\xi}$ admet une section jamais nulle. En normalisant et relevant cette section on obtient une section équivariante

$$f : S^2 \longrightarrow M$$

de ξ (parce que $\xi = p^*(\bar{\xi})$). Alors f est un plongement équivariant ; soit ν son G-fibré normal. On voit facilement que

$$\nu \oplus \eta^1(S^2) = \xi$$

comme G-fibrés.

Supposons M *e-s*-parallélisable ; c. à. d.,

$$\tau(M) \oplus \eta^k(M) = \eta_\alpha(M)$$

où $\alpha = \alpha(T) \in SO(k+4)$. En regardant la fibre sur un point fixe on voit qu'on peut prendre

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On a maintenant

$$\eta_\alpha(S^2) = f^*(\eta_\alpha(M)) = f^*(\tau(M)) \oplus \eta^k(S^2) =$$
$$= \tau(S^2) \oplus \nu \oplus \eta^k(S^2) = \eta_\beta(S^2) \oplus \xi \ ,$$

où

$$\beta = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(k+1) \ .$$

On va prouver que l'isomorphisme $\eta_\alpha(S^2) = \eta_\beta(S^2) \oplus \xi$ conduit à une contradiction.

Soient S^2_+ et S^2_- les hémisphères supérieur et inférieur de S^2 et identifions $S^2_+ \cap S^2_-$ avec S^1. Comme $\bar{\xi}|S^2_+$ et $\bar{\xi}|S^2_-$ sont triviaux on a

$$\xi|S^2_+ = \eta^3(S^2_+) \quad \text{et} \quad \xi|S^2_- = \eta^3(S^2_-) \ .$$

Donc, on a un système $u = (u_1, u_2, u_3)$ de sections indépendantes de ξ au-dessus de S^2_+ et un autre $v = (v_1, v_2, v_3)$ sur S^2_-, tels que

$$T(u(x)) = u(T(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in S^2_+ \quad \text{et}$$

$$\mathrm{T}(\nu(x)) = \nu(\mathrm{T}(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_- .$$

Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{k+1})$ le système canonique de sections de $\eta_\beta(\mathrm{S}^2)$. Alors (s, u) est un système de sections indépendantes de $\eta_\beta(\mathrm{S}^2) \oplus \xi$ sur S^2_+ ; et de même (s, ν) sur S^2_-, et

$$\mathrm{T}(s(x), u(x)) = (s(\mathrm{T}x), u(\mathrm{T}x))\alpha \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_+ ;$$

$$\mathrm{T}(s(x), \nu(x)) = (s(\mathrm{T}x), \nu(\mathrm{T}x))\alpha \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_- .$$

Alors, on a

$$(s(x), \nu(x)) = (s(x), u(x))\mathrm{A}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{S}^1$$

où $\mathrm{A} : \mathrm{S}^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(k+4)$ vérifie $\mathrm{A}(-x) = \alpha \mathrm{A}(x)\alpha$ pour tout $x \in \mathrm{S}^1$. On peut supposer aussi que $\mathrm{A}(1) = \mathrm{I}$.

Soit $r = (r_1, \ldots, r_{k+4})$ le système canonique de sections de $\eta_\alpha(\mathrm{S}^2)$ transporté à $\eta_\beta(\mathrm{S}^2) \oplus \xi$ au moyen de l'isomorphisme de plus haut. Alors,

$$\mathrm{T}r(x) = r(\mathrm{T}x)\alpha \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2 .$$

On peut donc écrire

$$r(x) = (s(x), u(x))\mathrm{A}_1(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_+ \quad \text{et}$$

$$r(x) = (s(x), \nu(x))\mathrm{A}_2(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_-$$

où $\mathrm{A}_1 : \mathrm{S}^2_+ \longrightarrow \mathrm{SO}(k+4)$ et $\mathrm{A}_2 : \mathrm{S}^2 \longrightarrow \mathrm{SO}(k+4)$ vérifient

$$\mathrm{A}_1(\mathrm{T}x) = \alpha \mathrm{A}_1(x)\alpha \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_+ \quad \text{et}$$

$$\mathrm{A}_2(\mathrm{T}x) = \alpha \mathrm{A}_2(x)\alpha \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{S}^2_- .$$

Comme $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2^{-1}$ et $\mathrm{B}^2 = \mathrm{S}^2_+ = \mathrm{S}^2_-$, on voit que A admet une extension à une application $\mathrm{B} : \mathrm{B}^2 \longrightarrow \mathrm{SO}(k+4)$ qui vérifie $\mathrm{B}(-x) = \alpha \mathrm{B}(x)\alpha$ pour tout $x \in \mathrm{B}^2$. B^2 désigne la boule de dimension 2).

D'autre part, le fait que $\bar{\xi}$ soit non-trivial nous dit que le lacet $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{SO}(k+4)$ défini par $\gamma(t) = \mathrm{A}(e^{\pi i t})$ n'est pas homotopiquement trivial. La contradiction résulte alors du lemme suivant.

LEMME 5.11. — *Soit* H *un groupe topologique connexe par arcs. Soit* $\alpha \in \mathrm{H}$ *tel que* $\mathrm{C}_\alpha = \{\beta \in \mathrm{H} \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}$ *soit aussi connexe par* arcs. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow$ H *un lacet (pointé à l'élément neutre* I *de* H) *pour lequel il existe une famille continue de chemins* $\gamma_s : [0,1] \longrightarrow$ H, $0 \leqslant s \leqslant 1$, *telle que* $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_1 =$ *constante, et* $\gamma_s(1) = \alpha\gamma_s(0)\alpha^{-1}$ *pour tout s. Alors* γ *est un lacet homotopiquement trivial.*

On applique ce lemme avec H $=$ SO$(k+4)$ et α et γ définis comme avant, tenant compte du fait que $\alpha^2 = $ I.

Démonstration du lemme 5.11. – D'abord il est visible que γ est homotope, comme lacet, au lacet $+_0 +_1^{-1}$ où $+_0(t) = \gamma_t(0)$ et $+_1(t) = \gamma_t(1)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Soit $\beta = \gamma_1(t)$. Alors $\alpha\beta = \beta\alpha$. Soit $\mu : [0,1] \longrightarrow C_\alpha$ un chemin reliant I à β. Alors γ est homotope comme lacet à la composition du lacet $+'_0$ avec le lacet $+_1'^{-1}$ où $+'_0 = +_0\mu^{-1}$ et $+'_1 = +_1\mu^{-1}$. Il suffit donc de voir que $+'_0$ est homotope comme lacet à $+'_1$. On a $+'_1(t) = \alpha +'_0(t)\alpha^{-1}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Soit $\varepsilon : [0,1] \longrightarrow$ H un chemin reliant I avec α. Alors la famille $+'_s(t) = \varepsilon(s) +'_0(t)\, \varepsilon(s)^{-1}$ donne la déformation voulue.

Remarque. – L'action de Z_2 sur $S^2 \times S^2$ qu'on a construit est une action topologiquement exotique dont l'ensemble des points fixes est de la forme $S^2 \times \{p, q\}$ où p et q sont deux points de S^2.

Problème 1. – Trouver un exemple d'une G-variété *libre s*-parallélisable qui ne soit pas *e-s*-parallélisable.

Problème 2. – Trouver un exemple d'une G-variété *e-s*-parallélisable semi-libre qui ne soit pas une *e-π*-variété mais dont l'ensemble des points fixes soit bord d'une variété parallélisable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces, *Proc. of Symp. in Pure Mathematics n° 3, Am. Math. Soc.,* 1961.

[2] M. KERVAIRE and J. MILNOR, Groups of homotopy spheres, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 504-537.

[3] L.S. PONTRJAGYN, Smooth manifolds and their applications to homotopy theory, *Amer, Math. Soc. Translations,* Series 2 vol. 11.

[4] G.W. WHITEHEAD, Generalized homology theories, *Trans. Amer. Math. Soc.* 102 (1962), 227-283.

[5] R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, 28 (1954), 17-86.

[6] W. BROWDER, Surgery and the theory of differentiable transformation groups, *Proc. of the Conference on Transformation Groups, New Orleans 1967,* 1-46, Springer 1968.

[7] P. CONNER and E. FLOYD, *Differentiable Periodic Maps,* Springer 1964.

[8] M. SEBASTIANI, Une nouvelle démonstration d'un théorème de R. Thom. *C.R. Acad. Sc. Paris Ser A,* 269 (1969), 229-232.

Manuscrit reçu le 16 septembre 1969

Marcos SEBASTIANI
IHES
35, route de Chartres
91 - Bures-sur-Yvette