Annales de l'institut Fourier

Dieter Sondermann

Masse auf lokalbeschränkten Raümen

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 2 (1969), p. 33-113
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_33_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19, 2 (1969), 33-113.

MASSE AUF LOKALBESCHRÄNKTEN RÄUMEN

von Dieter SONDERMANN

EINLEITUNG 35

BEZEICHNUNGEN 39

1. *Maße auf lokalbeschränkten Räumen* 40

1.1. Lokalbeschränkte Räume 40
1.2. Definition eines Maßes 42
1.3. Verschiedene Topologien auf dem Raum der Maße 44
1.4. Klassifizierung der Maße nach Stetigkeitseigenschaften 46
1.5. Trägerfilter und Träger von Maßen 48
1.6. Maße mit endlichem Träger 50

2. *Fortsetzung eines Maßes. $\mathcal{L}^p$-Räume* 55

2.1. Fortsetzung eines Maßes auf die integrierbaren Funktionen 55
2.2. Integrierbare und meßbare Mengen 62
2.3. Äußeres und inneres Maß. N_p-Normen 68
2.4. Die $\mathcal{L}^p$-Räume ($1 \leqslant p < \infty$) 71
2.5. Konvergenzsätze 76
2.6. Integration vektorwertiger Funktionen 76
2.7. Maße auf lokalbeschränkten uniformen Räumen 80

3. *Beziehungen zu den « klassischen » Integrationstheorien* 82

3.1. Das Riemann-Integral für unstetige Maße 82
3.2. Das Daniell-Integral für σ-stetige Maße 83
3.3. Das Bourbaki-Integral für τ-stetige Maße 85
3.4. Eingliederung der abstrakten Theorie des Riemann-Integrals nach Loomis 87
3.5. Eingliederung der abstrakten Integrationstheorie nach Stone 90

4. *Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf einem lokalbeschränkten Raum* 93

4.1. Die $\mathfrak{B}$-Kompaktifizierung eines lokalbeschränkten Raumes.... 95
4.2. Charakterisierung der Stetigkeit von Maßen mit Hilfe des Darstellungssatzes 95

5. *Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und Stetigkeit seiner Maße*... 99

5.1. Verschiedene Kompaktheitsbegriffe in lokalbeschränkten Räumen 99
5.2. Einige Struktursätze 101
5.3. Maße mit pseudokompaktem Trägerfilter 103
5.4. Charakterisierung der $\mathfrak{B}$-reellkompakten Räume 107
5.5. Folgerungen bzgl. der Existenz meßbarer Kardinalzahlen 111

LITERATURVERZEICHNIS 112

Einleitung.

Neben die Theorie der Radonmaße auf lokalkompakten Räumen von Bourbaki [7] sind in den letzten Jahren eine Reihe von weiteren Maßtheorien auf topologischen Räumen getreten. Wir denken hierbei insbesondere an die Arbeiten von Alexandroff-Varadarajan [1], [41], Gould-Mahowald [17], Schwartz [37] und Krickeberg [27]. In diesen Arbeiten werden jeweils Maße auf allgemeineren topologischen Räumen als lokalkompakten betrachtet. Obwohl jeweils von unterschiedlichen Voraussetzungen ausgehend, ist doch allen diesen Theorien gemeinsam, daß sie nur spezielle Maße auf dem zugrunde liegenden topologischen Maßraum behandeln und daß man für den Spezialfall eines lokalkompakten Raumes nicht die volle Theorie der Radonmaße von Bourbaki zurückerhält. Den allgemeinsten Standpunkt nimmt Varadarajan ein — doch bei ihm werden nur beschränkte Maße behandelt. Die Hauptziele dieser Arbeit sind deshalb :

1° Erweiterung der Theorie der Radonmaße von Bourbaki auf vollständig reguläre (1) Räume;

2° Erweiterung der Maßtheorie von Varadarajan auf nicht beschränkte Maße.

Interessanterweise haben beide Probleme eine gemeinsame Lösung.

Das Problem 1° wird unter dem Gesichtspunkt behandelt, einen möglichst großen Teil der reichen Struktur, die für die Theorie der Radonmaße auf einem lokalkompakten Raum zur

(1) Die Beschränkung auf vollständig reguläre Räume in dieser Arbeit hat rein beweistechnische Gründe. Die gleichen Überlegungen lassen sich ebenfalls für beliebige topologische Räume durchführen, wobei lediglich einige Aussagen der beiden letzten Paragraphen leicht zu modifizieren sind. Durch den bekannten Prozeß der Quotientenbildung (vgl. auch Abschnitte 3.4 und 3.5) kann zudem der allgemeine Fall stets auf den hier behandelten zurückgeführt werden.

Verfügung steht, auf vollständig reguläre Räume zu übertragen. Die Struktureigenschaften der Radonmaße hängen aber eng mit der Struktur des Ringes $\mathfrak{K}$ aller stetigen reellen Funktionen mit kompaktem Träger zusammen. Um auf einem voelständig regulären Raum X einen Ring von stetigen Funktionen mit ähnlichen Struktureigenschaften, wie sie der Ring $\mathfrak{K}$ auf einem lokalkompakten Raum besitzt, zu definieren, muß man auf X ein System von Teilmengen auszeichnen, das die Rolle der kompakten Mengen in den lokalkompaktem Räumen übernimmt. Dies leistet der von Gould [16] eingeführte Begriff des « bounding system ». Anstelle der unter Umständen recht einschränkenden Voraussetzung der Lokalkompaktheit — man denke etwa an topologische Vektorräume — tritt dabei die schwächere Forderung nach der Existenz einer « beschränkten » Umgebung für jeden Punkt von X. M.a.W. : man ersetzt die lokale Kompaktheit durch lokale Beschränktheit. Das Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$ kann dabei je nach Problemstellung verschieden gewählt werden. Der Ring $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ aller stetigen, reellen und beschränkten Funktionen auf X mit beschränktem Träger läßt sich dann mit den gleichen Strukturen versehen wie der Ring $\mathfrak{K}$ auf einem lokalkompakten Raum. Definiert man ein Maß auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ als stetige Linearform auf $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$, so ist klar, daß dann auch der Raum der Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ als Dual von $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ analoge Strukturen besitzt wie der Raum der Radonmaße auf einem lokalkompakten Raum. Unter anderen Gesichtspunkten wurde das Problem 1° bereits von Kölzow [23]-[25] behandelt. Er betrachtet Paare $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ von Mengensystemen, wobei $\mathfrak{m}_2$ als Ersatz für die kompakten Mengen dient. Hierbei läßt sich $\mathfrak{m}_1$ als System der offenen Mengen einer Topologie deuten [24] und dann $\mathfrak{m}_2$ in eine (eineindeutige) Beziehung zu einem Beschränkungssystem bringen. Seine Untersuchungen beschränken sich auf τ-stetige Maße, obwohl sein Ansatz aufgrund der obigen Bemerkungen sowie der Def. 1.4.2 (*c*) dieser Arbeit auch die Untersuchung straffer Maße gestattet. Einen weiteren Ersatz für die kompakten Mengen führte bekanntlich Marczewski [30] (vgl. auch Pfanzagl-Pierlo [35]) ein. Die zugehörige Maßtheorie erfaßt jedoch im wesentlichen nur die straffen und beschränkten Maße.

Das Problem 2° führt auf ähnliche Überlegungen wie bei Problem 1°. Ausgangspunkt bei Varadarajan ist eine endlich-additive Mengenfunktion auf der von den z-Mengen eines topologischen Raumes X erzeugten Algebra $\mathfrak{K}$. Auch hier legt der Versuch, nicht beschränkte Maße auf X sinnvoll zu definieren, die Einführung eines Beschränkungssystems $\mathcal{B}$ auf X nahe. Anstelle der Algebra $\mathfrak{K}$ tritt dann der von den beschränkten z-Mengen erzeugte Ring $\mathfrak{K}_{\mathcal{B}}$. Analog können dann die Baireschen bzw. Borelschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$ definiert werden als der von den beschränkten z-Mengen bzw. abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen erzeugte σ-Ring. Dies entspricht im Falle eines lokalkompakten Raumes X mit den kompakten Mengen als Beschränkungssystem dem Standpunkt von Halmos [18]. Da sich die (verallgemeinerten) Maße auf dem Ring $\mathfrak{K}_{\mathcal{B}}$ und die stetigen Linearformen auf $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ eineindeutig entsprechen, führen die Probleme 1° und 2° in der Tat auf das gleiche Konzept von Maßen auf lokalbeschränkten Räumen.

Die Maße auf einem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ unterscheiden sich jedoch in einem wesentlichen Punkt von den Radonmaßen. Während diese stets straff sind, können die Maße auf $(X, \mathcal{B})$ rein-unstetig sein. Es ist daher eine Klassifizierung der Maße nach ihren Stetigkeitseigenschaften, wie sie von Le Cam [28] eingeführt worden ist, erforderlich. Die weiteren Aufgaben dieser Arbeit bestehen somit in:

3° Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf $(X, \mathcal{B})$ mit Hilfe der $\mathcal{B}$-Kompaktifizierung;

4° Untersuchung der Zusammenhänge zwischen der Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und der Stetigkeit seiner Maße.

Die Arbeit gliedert sich in fünf Paragraphen. § 1 ist den grundlegenden Eigenschaften eines lokalbeschränkten Raumes sowie des Raumes seiner Maße gewidmet. In § 2 wird das Maß μ auf die Menge der μ-integrierbaren Funktionen fortgesetzt und der zugehörige Maßraum $(X, \mathfrak{B}_{\mu}, \mu)$ abgeleitet. Die verwendete Fortsetzungsmethode ist rein funktionalanalytisch und *unabhängig* von dem speziellen Stetigkeitscharakter von μ. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß eine gemeinsame Konstruktion des Riemann- und des Lebesgue-

Integrals angegeben wird. In den Abschnitten 2.3 und 2.4 wird dann die Beziehung zu den Fortsetzungsmethoden von Daniell-Stone und Bourbaki mittels des Oberintegrals μ^* hergestellt. Es zeigt sich, daß beide Methoden äquivalent sind. Das eigentlich überraschende Ergebnis ist jedoch, daß die gleiche Fortsetzungsmethode auch für das Riemann-Integral durchführbar ist.

In § 3 werden die erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen der Integrationstheorien von Loomis [29], Daniell-Stone [11], [39] und Bourbaki [7] verglichen. Es zeigt sich, daß der in § 2 entwickelte Integralbegriff je nach Stetigkeitseigenschaft des zugrunde liegenden Maßes entweder dem Riemann-Integral nach Loomis oder dem ersten bzw. zweiten Stoneschen Integral oder, falls der Raum lokalkompakt ist, dem Bourbakischen Integral entspricht. Die in § 2 entwickelte Fortsetzungsmethode faßt demnach die genannten Integrationstheorien zusammen. Ferner wird gezeigt, daß sich die abstrakten Integrationstheorien von Loomis und Stone stets auf den konkreten Fall eines Maßes auf einem lokalbeschränkten uniformen Raum zurückführen lassen. Im Gegensatz zu der Rückführung auf die Theorie der Radonmaße mittels Kompaktifizierung durch Bauer [3], [4], wird hierbei der ursprüngliche Maßraum beibehalten, und es stimmen nicht nur die Äquivalenzklassen L_F^p, sondern auch die Räume $\mathcal{L}_F^p$ der p-fach integrierbaren Funktionen in der abstrakten und in der konkreten Theorie überein. Im Falle des zweiten Stone-Integrals (auch « abstraktes Bourbaki-Integral » genannt) machte Kölzow [23]-[25] bereits analoge Aussagen.

§ 4 bringt eine Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ mittels der $\mathfrak{B}$-Kompaktifizierung $X'_{\mathfrak{B}}$. § 5 untersucht die Zusammenhänge zwischen der Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und der Stetigkeit seiner Maße. In 5.4 werden insbesondere eine maßtheoretische Kennzeichnung der reellkompakten Räume oder Q-Räume von Hewitt [20] gegeben und damit die — leider falschen —Charakterisierungssätze von Go-Din Hu [15] und Knowles [22] richtiggestellt. Aus diesem Charakterisierungssatz folgen einige Resultate, die auch für Radonmaße auf lokalkompakten Räumen neu sind. Ferner enthält dieser Satz Ergebnisse der Arbeit von Choquet [9] als Spezialfall. Schließlich wirft der

Charakterisierungssatz neues Licht auf das « allgemeine Problem der Maßtheorie » — nämlich auf die Frage nach der Existenz meßbarer Kardinalzahlen.

Grundlegend für diese Untersuchungen waren die beiden Arbeiten von H. Bauer [3], [4], die die Beziehungen zwischen den abstrakten Integrationstheorien von Loomis und Stone und der Theorie der Radonmaße herstellen. Der Verfasser dankt seinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. H. Bauer, für sein Interesse und seine Anregungen, wodurch diese Arbeit sehr gefördert worden ist, sowie den Herren Prof. K. Jacobs und D. Kölzow für einige sehr wertvolle Hinweise.

Bezeichnungen.

Für jeden topologischen Raum X bezeichnet $\mathcal{C}(X)$ den Ring der stetigen reellen Funktionen auf X und $\mathcal{C}_b(X)$ den Teilring der beschränkten Funktionen. Ist Y ein Unterraum von X, so bezeichnet $g|Y \in \mathcal{C}(Y)$ die Restriktion von $g \in \mathcal{C}(X)$ auf Y.

Für jeden Vektorverband $\mathfrak{R}$ (bzgl. der üblichen Ordnung « $\leqslant$ ») von reellen Funktionen auf X bezeichnet $f \vee g$ das (punktweise) Supremum von f, $g \in \mathfrak{R}$. Analog $f \wedge g$ das Infimum. Mit dieser Schreibweise ist $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -f \vee 0$ sowie $|f| = f^+ + f^-$. $\mathfrak{R}_+$ oder $_+\mathfrak{R}$ bezeichnet die Menge aller $f \in \mathfrak{R}$ mit $f = f^+$. Für jedes $f \in \mathfrak{R}$ sei ferner:

$$\begin{aligned}
[f \leqslant \alpha] &:= \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\} \\
Z(f) &:= [f = 0] \\
E(f) &:= [f = 1] \\
P(f) &:= [f > 0].
\end{aligned}$$

$\mathcal{Z}(\mathfrak{R})$ bezeichnet das System $\{Z(f) : f \in \mathfrak{R}\}$. Analog $\mathcal{E}(\mathfrak{R})$ sowie $\mathcal{P}(\mathfrak{R})$. Die Elemente aus $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ werden *z-Mengen* (« zero-set » [13]) genannt. Die Dualräume von $\mathfrak{R}$ werden wie folgt bezeichnet:

$\mathfrak{R}'$ topologisches Dual;
$\mathfrak{R}^*$ algebraisches Dual;
$\mathfrak{R}^o$ ordnungstheoretisches Dual.

Eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ einer geordneten Menge heißt *aufsteigend* *filtrierend* (kurz : aufst. filtr.) bzw. *absteigend filtrierend* (kurz : abst. filtr.), wenn jede endliche Teilmenge von $\mathfrak{F}$ eine Majorante bzw. eine Minorante in $\mathfrak{F}$ besitzt. Ist $\mathfrak{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in A}$ speziell ein System von Teilmengen einer Menge X, so bedeutet die Schreibweise $S_\alpha \searrow \emptyset$, daß $\mathfrak{F}$ bzgl. « $\subset$ » abst. filtr. ist und gilt $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \emptyset$.

Die charakteristische Funktion einer Menge A wird mit 1_A bezeichnet.

1. Maße auf lokalbeschränkten Räumen.

1.1. *Lokalbeschränkte Räume.*

Die Forderung, daß jeder Punkt eines topologischen Raumes eine kompakte Umgebung besitze — m.a.W. daß der Raum lokalkompakt sei — ist u.U. recht weitgehend. Für einen separierten topologischen Vektorraum z.B. bedeutet diese Forderung bekanntlich, daß der Raum endlich-dimensional ist.

Man kann jedoch die Voraussetzung der Lokalkompaktheit abschwächen, ohne die wesentlichen Strukturen eines lokalkompakten Raumes zu verlieren, indem man für jeden Punkt nur die Existenz einer beschränkten Umgebung fordert. Dies ist der Sinn der folgenden Definitionen, die auf Gould [16] zurückgehen.

Definition 1.1.1. — (X, $\mathfrak{B}$) *heißt ein lokalbeschränkter Raum, wenn gilt:*

1. X *ist ein vollständig regulärer topologischer Raum;*

2. $\mathfrak{B}$ *ist eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen* B *von* X *mit folgenden Eigenschaften:*

(B1) $\mathfrak{B}$ *ist aufsteigend filtrierend*

(B2) $\mathfrak{B}$ *überdeckt* X $\left(\text{d.h. } X \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B\right)$

(B3) *Zu jedem* $B_i \in \mathfrak{B}$ *existieren ein* $B_j \in \mathfrak{B}$ *und eine stetige reelle Funktion* f *auf* X, *derart daß gilt:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_i \\ 0 & x \in \complement B_j \end{cases}$$

Definition 1.1.2. — *Eine Teilmenge des lokalbeschränkten Raumes* $(X, \mathfrak{B})$ *heißt genau dann* beschränkt, *wenn sie in einem Element von* $\mathfrak{B}$ *enthalten ist.*

Definition 1.1.3. — $(X, \mathfrak{B})$ *heißt ein* beschränkter Raum, *wenn* $(X, \mathfrak{B})$ *lokalbeschränkt und* X *als Teilmenge von* $(X, \mathfrak{B})$ *beschränkt ist. In diesem Fall heißt das Beschränkungssystem* $\mathfrak{B}$ entartet.

Man verifiziert leicht die folgenden Eigenschaften der beschränkten Teilmengen eines lokalbeschränkten Raumes:

Satz 1.1.4. — (Gould [16]):

(*a*) *Jede endliche Vereinigung von beschränkten Mengen sowie jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt;*

(*b*) *Der Abschluß einer beschränkten Menge ist beschränkt;*

(*c*) *Jeder Punkt von* X *besitzt eine beschränkte Umgebung;*

(*d*) *Jede relativ kompakte Menge ist beschränkt.*

Die Eigenschaft (*c*) insbesondere rechtfertigt die Bezeichnung « lokalbeschränkt » in Analogie zur Definition der lokalkompakten Räume. Diese können als spezielle lokalbeschränkte Räume aufgefaßt werden, in denen die kompakten Mengen ein Beschränkungssystem bilden. Genauer gilt:

Satz 1.1.5. — X *sei ein vollständig regulärer Raum und* $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}$ *das System aller kompakten Teilmengen von* X. *Dann gilt:* $(X, \mathfrak{B})$ *ist genau dann lokalbeschränkt, wenn* X *lokal kompakt ist, und das System* $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}$ *ist das gröbste Beschränkungssystem auf* X.

Beweis. — Die Bedingung ist notwendig, da nach Satz 1.1.4(*c*) und Def. 1.1.2 jeder Punkt von X eine relativ kompakte Umgebung besitzt. Umgekehrt erfüllt das System $\mathfrak{B}$ offensichtlich die Bedingungen (B1) und (B2). Da n. Vor. jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt, folgt (B3) aus der vollständigen Regularität von X. Der Rest der Behauptung folgt aus Satz 1.1.4 (*d*). □

Weitere *Beispiele* von lokalbeschränkten Räumen $(X, \mathfrak{B})$ sind:

(i) X sei ein metrischer Raum und $\mathfrak{B}$ das System aller abgeschlossenen Kugeln von X;

(ii) X sei ein separierter topologischer Vektorraum und $\mathfrak{B}$ ein aufsteigend filtrierendes System von symmetrischen konvexen Körpern in X, das X überdeckt. (Die Eigenschaft (B3) zeigt mit Hilfe des Minkowski-Funktionals);

(ii′) X sei ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, dessen Topologie durch die Familie der Halbnormen $(p_i)_{i \in \mathrm{I}}$ gegeben ist. $\mathfrak{B}^i$ sei das System

$$([p_i \leqslant n])_{n \in \mathrm{N}}$$

Dann ist für jedes $i \in \mathrm{I}$ $(\mathrm{X}, \mathfrak{B}^i)$ lokalbeschränkt;

(iii) X sei ein separierter topologischer Vektorraum und $\mathfrak{B}$ das System aller im üblichen Sinne beschränkten abgeschlossenen Teilmengen von X, d.h. aller abgeschlossenen Mengen, die von jeder Nullumgebung absorbiert werden. Dann gilt nach [26], S. 163, sowie Satz 1.1.4 (*c*) : $(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$ ist dann und nur dann lokalbeschränkt (im Sinne der Def. 1.1.1), wenn X quasinormierbar ist. In diesem Fall stimmt somit die Definition der Lokalbeschränktheit mit der von Köthe [26] für topologische Vektorräume gegebenen überein.

1.2. *Definition eines Maßes.*

I.f. bezeichne $(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$ stets einen lokalbeschränkten Raum X mit Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$. Für eine stetige Funktion f auf X bezeichne T_f den *Träger von* f, d.h. den Abschluß der Menge $[f \neq 0]$ in X. Mit $\mathcal{K}(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$ (oder kurz $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ oder $\mathcal{K}$) werde die Menge aller stetigen und beschränkten reellen Funktionen auf X, deren Träger (bzgl. $\mathfrak{B}$) beschränkt ist, bezeichnet. $\mathcal{K}(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$ ist wegen (B1) offensichtlich ein Unterring des Ringes $\mathcal{C}_b(\mathrm{X})$ aller stetigen und beschränkten reellen Funktionen auf X und ein Vektorverband bzgl. der induzierten Ordnung.

Man verifiziert leicht, daß das System

$$\mathfrak{B}_0 = (\mathrm{E}(g))_{g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}}$$

ebenfalls ein Beschränkungssystem auf X bildet, das zu $\mathfrak{B}$ äquivalent ist, d.h. die beschränkten Mengen in X bzgl. $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}$ stimmen überein. $\mathfrak{B}_0$ heißt das *kanonische Beschränkungssystem von* X.

Für jede nichtleere beschränkte Teilmenge Y von X bezeichne $\mathcal{K}(X, Y)$ den Banachraum aller Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$, deren Träger in Y enthalten ist, versehen mit der Topologie $\mathfrak{J}_Y^u$ der gleichmäßigen Konvergenz auf Y. Der Ring $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ist *p.* Def. die Vereinigung der aufsteigend filtrierenden Familie der Banachräume $\mathcal{K}(X, B)_{B \in \mathfrak{B}}$. Für $B_i \subset B_j$ ist die kanonische Injektion von $\mathcal{K}(X, B_i)$ in $\mathcal{K}(X, B_j)$ $\mathfrak{J}_{B_i}^u - \mathfrak{J}_{B_j}^u -$ stetig. Somit existiert der induktive Limes

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}^u = \lim_{B \in \mathfrak{B}} \operatorname{ind} \mathfrak{J}_B^u.$$

Nach [8], chap. 2, ist $\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}^u$ eine lokalkonvexe Hausdorff-Topologie auf $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, und $(\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}^u)$ ist als induktiver Limes von Banachräumen tonneliert [8], chap. 3.

$\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}^0$ bezeichne den ordnungstheoretischen Dualraum von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, d.h. $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}^0 = {}_+\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}^* - {}_+\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}^*$.

Definition 1.2.1. — *Maß auf* $(X, \mathfrak{B})$ *heißt jedes Element* $\mu \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}^0$. $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ *(oder* $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$*) bezeichne die Menge aller Maße auf* $(X, \mathfrak{B})$.

Nach [7], chap. II, ist $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ identisch mit der Menge aller relativ beschränkten Linearformen auf $\mathcal{K}(X, \mathfrak{B})$ und ein vollständiger Rieszscher Raum bzgl. der zu $\mathcal{K}$ dualen Ordnung.

Theorem 1.2.2. — $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ *ist der Dualraum von* $(\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}^u)$.

M.a.W.: Eine Linearform μ *auf* $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ *ist genau dann ein Maß auf* $(X, \mathfrak{B})$, *wenn sie folgender Bedingung genügt:*

$$(1) \qquad \forall B \in \mathfrak{B} \quad \exists M_B \geqslant 0, \quad \forall g \in \mathcal{K}(X, B) : |\mu(g)| \leqslant M_B \|g\|$$

Beweis. — Die Bedingung ist hinreichend. Sei nämlich μ eine Linearform auf $\mathcal{K}$ und $g \in \mathcal{K}_+$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{K}$ mit $|f| \leqslant g$: $T_f \subset T_g \subset B$ für ein $B \in \mathfrak{B}$. Aus (1) folgt die Existenz einer positiven Zahl M_B, derart daß gilt: $|\mu(f)| \leqslant M_B\|f\| \leqslant M_B\|g\|$. Somit ist μ relativ beschränkt.

Für den Beweis der Notwendigkeit genügt es zu zeigen, daß jede positive Linearform auf $\mathcal{K}$ stetig ist. Nach Axiom (B3) existiert zu jedem $B \in \mathfrak{B}$ ein $g_0 \in \mathcal{K}_+$ mit $B \subset E(g_0)$. Somit gilt für alle $g \in \mathcal{K}(X, B) : |g| \leqslant \|g\|\, g_0$. Für jede positive Linearform μ auf $\mathcal{K}$ und jede Funktion $g \in \mathcal{K}(X, B)$ folgt somit: $|\mu(g)| \leqslant \mu(|g|) \leqslant \mu(g_0)\|g\|$. □

Definition 1.2.3. — $\mathcal{M}_b(X, \mathfrak{B})$ (oder kurz $\mathcal{M}_b$) *bezeichne den Dualraum vom* $\mathcal{K}(X, \mathfrak{B})$ *versehen mit der Topologie* $\mathfrak{T}^u$ *der gleichmäßigen Konvergenz auf* X. *Die Elemente aus* $\mathcal{M}_b$ *heißen beschränkte Maße auf* $(X, \mathfrak{B})$.

Da für jedes Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$ auf X die Topologie $\mathfrak{T}^u$ gröber ist als die Topologie $\mathfrak{T}^u_{\mathfrak{B}}$, gilt nach Theor. 1.2.2. stets $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{M}$. $\mathcal{M}_b$ ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|\mu\| = \sup \{|\mu(g)| : \quad g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \ \|g\| \leqslant 1\}.$$

Ist $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt, so ist wegen $\mathfrak{T}^u_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{T}^u$ jedes Maß auf X beschränkt (s. Bsp. (ii) und (iii)).

1.2.4. — *Beispiele von Maßen:*

(i) Sei $(X, \mathfrak{B})$ lokalkompakt (d.h. $\mathfrak{B}$ sei das System der kompakten Teilmengen von X — vgl. Satz 1.1.5). Dann ist $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ die Menge aller Radonmaße auf X [7].

(ii) Sei $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt. Dann ist $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ die Menge $\mathcal{C}_b(X)$ aller stetigen und beschränkten reellen Funktionen auf X. Nach Theor. 1.2.2. ist $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B}) = \mathcal{M}_b(X)$ der Dualraum $\mathcal{C}'_b(X)$, d.h. die Menge aller Maße auf X im Sinne von Alexandroff-Varadarajan [1], [41].

(iii) Sei $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt und $\mathcal{M}^t(X, \mathfrak{B})$ die Menge aller Linearformen μ auf $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} = \mathcal{C}_b(X)$ mit der Eigenschaft:

$$(\varepsilon, K) \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \text{kp. } K \subset X \qquad \forall g \in \mathcal{C}_b(X): \\ \|g\| \leqslant 1, \qquad g|K = 0 \longrightarrow |\mu(g)| < \varepsilon.$$

Dann ist $\mathcal{M}^t(X, \mathfrak{B})$ die Menge aller Maße auf X im Sinne von L. Schwartz [37]. (Die Maße, die der (ε, K) Bedingung von Schwartz genügen, sind genau die straffen Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ — vgl. Def. 1.4.2 (*c*)).

1.3. *Verschiedene Topologien auf* $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$.

Für ein beliebiges System $\mathfrak{S}$ von beschränkten Teilmengen von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ist auf $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ die lokalkonvexe $\mathfrak{S}$-Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von $\mathfrak{S}$ erklärt ([8], chap. 3). $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}(X, \mathfrak{B})$ (oder kurz $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$) bezeichne den lokalkonvexen Raum $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ versehen mit der $\mathfrak{S}$-Topologie. Ist die Vereinigung der Mengen aus $\mathfrak{S}$ eine totale Teilmenge von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, so ist $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ hausdorffsch; überdeckt $\mathfrak{S}$ den Raum

$\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, so ist $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ außerdem quasivollständig, da $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ tonneliert ist ([8], chap. 3, p. 31).

Eine kompakte Teilmenge H in $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ heiße *strikt kompakt*, wenn ein $B \in \mathfrak{B}$ existiert mit $H \subset \mathcal{K}(X, B)$. Man betrachte folgende Systeme $\mathfrak{S}$ von Teilmengen aus $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$:

$\mathfrak{S}_1 :=$ System von einpunktigen Mengen, deren Vereinigung total ist in $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$;
$\mathfrak{S}_2 :=$ System aller einpunktigen Mengen von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$;
$\mathfrak{S}_3 :=$ System aller strikt kompakten Mengen von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$;
$\mathfrak{S}_4 :=$ System aller kompakten Mengen von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$;
$\mathfrak{S}_5 :=$ System aller beschränkten Mengen von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$.

Mit $\mathfrak{J}_i\,(i = 1 \ldots 5)$ werden die zugehörigen $\mathfrak{S}_i$-Topologien bezeichnet. Die $\mathfrak{J}_2$-Topologie heißt auch die *vage Topologie* auf $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$. Aufgrund der Definition der $\mathfrak{S}$-Topologie ist jede der fünf Topologien jeweils gröber als die folgende.

Da der Raum $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ nach 1.2 tonneliert ist und die vage Topologie auf $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ nichts anderes ist als die schwache Topologie bzgl. der Dualität $\langle \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}} \rangle$, folgt aus [8], chap. 4, p. 65, unmittelbar das folgende Resultat:

Satz 1.3.1. — *Sei* H *eine Teilmenge von* $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) H *ist vag beschränkt.*

(ii) H *ist vag relativ kompakt.*

(iii) H *ist gleichgradig stetig.*

(iv)
$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \exists M_B \geqslant 0 \quad \forall \mu \in H \quad \forall g \in \mathcal{K}(X, B) : |\mu(g)| \leqslant M_B \|g\|.$$

Analog wie in [7], p. 62, folgt aus dem vorstehenden Satz:

Satz 1.3.2. — (*a*) *Die beschränkten Mengen der lokalkonvexen Räume* $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}_i}(X, \mathfrak{B})$ *sind die gleichen für* $i = 2, 3, 4, 5$.

(*b*) *Auf jeder vag beschränkten Teilmenge von* $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ *fallen die Topologien* $\mathfrak{J}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *zusammen.*

Beweis. — (*a*) Da jede der Topologien $\mathfrak{J}_i$ $(i = 2, 3, 4, 5)$ feiner ist als die vorhergehende, ist jede beschränkte Menge in $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}_i}$ $(i = 2 \ldots 5)$ vag beschränkt und somit nach Satz 1.3.1 gleichgradig stetig. Jede gleichgradig stetige Menge ist aber nach [8], chap. 3, p. 26, beschränkt bzgl. jeder $\mathfrak{S}$-Topologie.

(*b*) Da jede vag beschränkte Teilmenge von $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ gleichgradig stetig ist, folgt die Behauptung aus [6], chap. x, p. 29.

1.4. *Klassifizierung der Maße nach ihren Stetigkeitseigenschaften.*

Bekanntlich besitzt jedes Radonmaß μ auf einem lokalkompakten Raum X die folgende Stetigkeitseigenschaft auf dem Ring $\mathcal{K}(X)$ aller stetigen reellen Funktionen auf X mit kompaktem Träger: (M*) Für jedes aufst. filtr. System $H \subset \mathcal{K}(X)$, dessen obere Einhüllende zu $\mathcal{K}(X)$ gehört, gilt: $\mu\left(\sup_{g \in H} g\right) = \sup_{g \in H} \mu(g)$. Daß ein Maß auf $(X, \mathfrak{B})$ die Eigenschaft (M*) nicht zu besitzen braucht, selbst wenn X lokalkompakt ist, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 1.4.1. — $X = (0, 1)$ sei das offene Einheitsintervall mit der üblichen Topologie; βX seine Stone-Čech-Kompaktifizierung. Das Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$ sei entartet, also $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} = \mathcal{C}_b(0, 1)$. Für jedes $g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ bezeichne $\hat{g}$ die eindeutige stetige Fortsetzung auf βX. Auf $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ werde die Linearform μ definiert durch $\mu(g) := \hat{g}(x_0)$ für einen festen Punkt $x_0 \in \beta X \setminus X$. Offensichtlich ist μ positiv und somit ein Maß auf $(X, \mathfrak{B})$. μ genügt jedoch nicht der Bedingung (M*). Zu jedem $x \in X$ existiert nämlich ein $g_x \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $0 \leqslant g_x \leqslant 1$, $g_x(x) = 1$ und $\hat{g}_x(x_0) = 0$. Somit folgt:

$$1 = \mu(1) = \mu\left(\sup_{x \in X} g_x\right) \neq \sup_{x \in X} \mu(g_x) = 0.$$

Es ist somit eine Klassifizierung der Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ nach ihren Stetigkeitseigenschaften erforderlich, wie sie u.W. zuerst 1957 von Le Cam [28] für beschränkte Maße eingeführt worden ist. Für die i. allg. nicht beschränkten Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ versagt jedoch die Le Camsche Definition der « Straffheit », da die Träger eines Systems von stetigen Funktionen, das gleichmäßig auf den kompakten Mengen gegen Null strebt, « fortlaufen » und beliebig großes Maß annehmen können. Es ist jedoch klar, wie die Definition der Straffheit für nicht beschränkte Maße zu modifizieren ist, wobei sich zum ersten Mal die Bedeutung der Einführung des Beschränkungssystems $\mathfrak{B}$ auf X zeigt.

Für jedes $B \in \mathfrak{B}$ bezeichne $\mathfrak{I}_B$ die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{K}(X, B)$, die von der Familie der Halbnormen

$$p_K(g) = \sup_{x \in K} |g(x)| = \|g\|_K \quad (K \text{ kompakt} \subset B)$$

erzeugt wird. Da jedes $B \in \mathfrak{B}$ abgeschlossen ist, ist für $B_1 \subset B_2$ die kanonische Injektion von $\mathcal{K}(X, B_1)$ in $\mathcal{K}(X, B_2)$ $\mathfrak{I}^c_{B_1} - \mathfrak{I}^c_{B_2}$-stetig. Somit existiert nach [8], chap. 2, p. 72/76, der induktive Limes

$$\mathfrak{I}^c_{\mathfrak{B}} = \lim_{B \in \mathfrak{B}} \operatorname{ind} \mathfrak{I}^c_B$$

der lokalkonvexen Topologien $\mathfrak{I}^c_B$. Die lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{I}^c_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathcal{K}(X, \mathfrak{B})$ heiße die *Topologie der $\mathfrak{B}$-kompakten Konvergenz.* Aus der Eigenschaft des induktiven Limes sowie aus der Definition von $\mathfrak{I}^c_B$ folgt: Die Linearform μ auf $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ist genau dann stetig bzgl. der Topologie der $\mathfrak{B}$-kompakten Konvergenz, wenn gilt:

$$(2) \quad \forall B \in \mathfrak{B} \quad \exists \text{kp}. K \subset B \quad \exists M_B \geqslant 0 \quad \forall g \in \mathcal{K}(X, B): \quad |\mu(g)| \leqslant M_B \|g\|_K.$$

Spezialfälle der Topologie $\mathfrak{I}^c_{\mathfrak{B}}$:

(i) Ist $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt, so ist offenbar $\mathfrak{I}^c_{\mathfrak{B}}$ die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{C}_b(X)$.

(ii) Ist $(X, \mathfrak{B})$ lokalkompakt, so ist $\mathfrak{I}^c_{\mathfrak{B}}$ die « starke » Topologie auf $\mathcal{K}(X)$ ([7], p. 41), d.h. der induktive Limes der Topologien der gleichmäßigen Konvergenz auf den Banachräumen $\mathcal{K}(X, K)$ (K kp. in X).

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\Sigma_{\mathfrak{B}} := \{g \in \mathcal{K}(X, \mathfrak{B}) : \|g\| \leqslant 1\}$$
$$\Sigma_B := \{g \in \mathcal{K}(X, B) : \|g\| \leqslant 1\} \quad (B \in \mathfrak{B}).$$

Nunmehr lassen sich die Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ wie folgt klassifizieren:

Definition 1.4.2. — *Sei* μ *ein Maß auf* $(X, \mathfrak{B})$. *Dann heiße:*

(*a*) μ *σ-stetig* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ *Für jede absteigende Folge* $(g_n) \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ *mit* $g_n \searrow 0$ *gilt* $\mu(g_n) \to 0$;

(*b*) μ *τ-stetig* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ *Für jedes abst. filtr. System* $(g_\alpha) \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ *mit* $g_\alpha \searrow 0$ *gilt* $\mu(g_\alpha) \to 0$;

(*c*) μ *straff* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ μ *ist stetig auf* $\Sigma_{\mathfrak{B}}$ bzgl. *der Topologie der* $\mathfrak{B}$*-kompakten Konvergenz.*

Genügt μ keiner der Bedingungen (*a*)-(*c*), so heiße μ *unstetig.* $\mathcal{M}^\sigma$, $\mathcal{M}^\tau$, $\mathcal{M}^t$ bezeichne resp. die Teilmenge der σ-stetigen, τ-stetigen und straffen Maße von $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$. Dann gelten folgende Inklusionen: $\mathcal{M}^t \subset \mathcal{M}^\tau \subset \mathcal{M}^\sigma \subset \mathcal{M}$.

Hierbei bedarf nur die erste Inklusion einer Erläuterung; die restlichen sind aufgrund der Definitionen evident. Sei also (g_α) ein abst. filtr. System in $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, das gegen Null konvergiert. Offenbar gilt $(g_\alpha) \subset \mathcal{K}(X, B)$ für ein $B \in \mathfrak{B}$. Nach dem Satz von Dini [6], chap. x, strebt (g_α) gleichmäßig gegen Null auf den kompakten Teilmengen von B. Somit folgt aus der Straffheit von μ: $\lim_\alpha \mu(g_\alpha) = \lim_\alpha \mu(g_\alpha \wedge 1) = 0$.

SATZ 1.4.3. — S bezeichne eine der Mengen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^\sigma$, $\mathcal{M}^\tau$ oder $\mathcal{M}^t$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mu \in S$

(ii) $\mu^+, \mu^- \in S$

(iii) $|\mu| \in S$.

Der *Beweis* verläuft analog zu den entsprechenden Sätzen 7, 8 und 9 im Teil I von Varadarajan [41], wobei lediglich überall der Ring $\mathcal{C}(X)$ durch den Ring $\mathcal{K}(X, \mathfrak{B})$ zu ersetzen ist.

In 4.2 werden Charakterisierungen der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ mit Hilfe des Darstellungssatzes gegeben. Der Paragraph 5 ist den Zusammenhängen zwischen der Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und den Stetigkeitseigenschaften seiner Maße gewidmet.

1.5. *Trägerfilter und Träger von Maßen.*

Der Träger eines Radonmaßes μ ist bekanntlich das Komplement der größten offenen μ-Nullmenge. Die Existenz einer solchen Menge hängt mit der τ-Stetigkeit der Radonmaße zusammen. Aus diesem Grund definieren Varadarajan [41] und Krickeberg [27] den Träger nur für τ-stetige Maße. Daß diese Definition für allgemeinere Maße wie die in Abschnitt 1.2 definierten versagt, kann man sich leicht an dem nachstehenden Beispiel 1.5.2 klarmachen.

Der Begriff eines « Trägers » ist jedoch auch für nicht τ-stetige Maße sehr nützlich, wie sich insbesondere in den Paragraphen 4 und 5 zeigen wird. Da sich einem nicht τ-stetigen Maß jedoch keine ausgezeichnete Teilmenge von X als Träger zuordnen läßt, definieren wir:

Definition 1.5.1. — *(a) Sei* μ *ein Maß auf* $(X, \mathfrak{B})$. *Für eine beliebige Teilmenge* Y *von* X *bedeute die Aussage* « Y trägt μ », *daß für alle Funktionen* g *aus* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$, *welche auf* Y *verschwinden, gilt* $|\mu|(|g|) = 0$.

(b) Das System der Teilmengen

$$\mathfrak{J}_\mu := \{Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{K}) : Z \text{ trägt } \mu\}$$

heiße der Trägerfilter von μ.

Die Beschränkung auf z-Mengen in der Definition von $\mathfrak{J}_\mu$ ist notwendig, damit $\mathfrak{J}_\mu$ einen Filter bildet. Daß $\mathfrak{J}_\mu$ tatsächlich ein z-Filter [13] ist, wird in 5.3 mit Hilfe des Darstellungssatzes gezeigt.

Beispiel 1.5.2. — $(X, \mathfrak{B})$, βX und μ seien wie in Beipiel 1.4.1 definiert. Dann ist der Trägerfilter $\mathfrak{J}_\mu$ der z-Ultrafilter A^{x_0} (siehe [13], 6.5); d.h. das System aller z-Mengen in X mit x_0 als Adhärenzpunkt.

Das obige Beispiel zeigt, daß der Filter $\mathfrak{J}_\mu$ auf X nicht « fixiert » zu sein braucht, d.h. es kann gelten $\cap \mathfrak{J}_\mu = \emptyset$. Für τ-stetige Maße gilt jedoch:

Satz 1.5.3. — *Sei* $\mu \in \mathfrak{M}^\tau(X, \mathfrak{B})$. *Dann existiert eine kleinste nichtleere abgeschlossene Teilmenge von* X, *welche* μ *trägt, nämlich* $T_\mu = \cap \mathfrak{J}_\mu$. T_μ *heißt dann der* Träger von μ.

Beweis. — Sei $g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $T_\mu \subset Z(g)$. Man betrachte folgendes aufst. filtr. System in $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$:

$$\mathfrak{D} := \{f \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}} : 0 \leqslant f \leqslant |g|,\ Z \subset Z(f) \text{ für ein } Z \in \mathfrak{J}_\mu\}.$$

Wegen der vollständigen Regularität von X gilt $\sup \mathfrak{D} = |g|$. Aus der τ-Stetigkeit von $|\mu|$ folgt somit:

$$|\mu|(|g|) = \sup_{f \in \mathfrak{D}} |\mu|(f) = 0.$$

Da das System $\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ nach [16], p. 228, eine abgeschlossene

Basis von X bildet, ist T_μ die kleinste abgeschlossene Menge, die μ trägt. □

Der Träger T_μ läßt sich wie folgt lokal charakterisieren :

Satz 1.5.4. — *Der Punkt* $x_0 \in X$ *gehört genau dann zu* T_μ, *wenn zu jeder beschränkten Umgebung* V *von* x_0 *ein* $g \in \mathfrak{K}(X, V)$ *existiert mit* $\mu(g) \neq 0$.

Beweis. — Die Bedingung ist notwendig. Denn ang. es existiere eine beschränkte Umgebung V von x_0, derart daß für alle $g \in \mathfrak{K}(X, V)$ gilt $\mu(g) = 0$. Wegen der vollständigen Regularität von X existiert insbesondere ein $g_0 \in \mathfrak{K}(X, V)$ mit $g_0(x_0) = 1$. Jede Funktion $g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$, die auf $Z(g_0)$ verschwindet, gehört dann zu $\mathfrak{K}(X, V)$ und hat somit das Maß Null. Also gilt $Z(g_0) \in \mathfrak{I}_\mu$, aber $x_0 \notin Z(g_0)$. Somit $x_0 \notin T_\mu$.

Sei umgekehrt $x_0 \notin T_\mu$. Dann existiert ein $Z \in \mathfrak{I}_\mu$ und eine beschränkte Umgebung V von x_0 mit $V \cap Z = \emptyset$. Somit gilt für alle $g \in \mathfrak{K}(X, V) : g|Z = 0$. Also $\mu(g) = 0$. □

Satz 1.5.5. — *Wenn zwei Funktionen* $f, g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *auf einer Menge* $Z \in \mathfrak{I}_\mu$ *übereinstimmen, so gilt* $\mu(f) = \mu(g)$.

Beweis. — n. Vor. gilt $Z \subset Z(f - g)$. Somit folgt :

$$|\mu(f - g)| \leqslant |\mu|(|f - g|) = 0 \ \square.$$

Korollar 1.5.6. — *Ist die Funktion* $g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *positiv auf einer Menge* $Z \in \mathfrak{I}_\mu$, *so gilt*: $|\mu|(g) \geqslant 0$.

Beweis. — Aus $g = |g|$ auf Z und $\mathfrak{I}_\mu = \mathfrak{I}_{|\mu|}$ folgt :

$$|\mu|(g) = |\mu|(|g|) \geqslant 0 \ \square.$$

1.6. *Maße mit endlichem Träger.*

$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(X)$ bezeichne die Menge der Diracschen Maße auf X, d.h. die Menge der Maße δ_x, die durch die Linearformen $g \to g(x)$ $(g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}})$ auf $(X, \mathfrak{B})$ definiert sind.

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ sei der von $\mathcal{E}_0$ aufgespannte Vektorraum.

Satz 1.6.1. — *Das Maß* $\nu \in \mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ *gehört genau dann zu* $\mathcal{E}(X)$, *wenn der Träger* T_ν *existiert und endlich ist.*

Beweis. — Offenbar ist jedes Maß der Form

$$\nu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{x_j} \quad (\lambda_j \in \mathbf{R},\ x_j \in X)$$

τ-stetig. Somit existiert T_ν nach Satz 1.5.3. Aus der vollständigen Regularität von X und Satz 1.5.4 folgt außerdem $T_\nu = \{x_1 \dots x_n\}$.

Sei umgekehrt $T_\nu = \{x_1 \dots x_n\}$ der Träger des Maßes $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$. Dann ist $\nu(g) = 0$ für jede Funktion $g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $g(x_i) = 0$. D.h. aber $\delta_{x_i}(g) = 0$ für $i = 1 \dots n$. Somit ist ν nach einem bekannten Satz der linearen Algebra Linearkombination der δ_{x_i}. □

Aus der Theorie der Radonmaße ist bekannt, daß jedes positive Radonmaß auf einem lokalkompakten Raum X vag adhärent ist dem Kegel der positiven Maße auf X mit endlichem Träger ([10], p. 127). Dieser Sachverhalt ist jedoch nicht charakteristisch für Radonmaße. Wir zeigen, daß er auch für die Maße auf einem lokalbeschränkten Raum gilt. Doch auch diese Tatsache ist nur ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Zusammenhangs, der in Theorem 1.6.2 bewiesen wird. Dieses Theorem ist grundlegend für den Aufbau der Integrationstheorie in § 2.

Zur Formulierung des Theorems werden zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt:

X sei eine beliebige Menge und $\mathfrak{R}$ ein punktetrennender Vektorverband reeller Funktionen auf X mit den Eigenschaften:

$$(3) \qquad 1 \wedge g \in \mathfrak{R} \qquad \forall g \in \mathfrak{R};$$
$$(4) \qquad \forall x \in X \qquad \exists g \in \mathfrak{R} : \; g(x) \neq 0.$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ sei wie oben definiert. Dann bildet $\langle \mathcal{E}, \mathfrak{R} \rangle$ ein separiertes Dualsystem. Durch die Familie der Halbnormen $p(L) = |L(f)|$ $(f \in \mathfrak{R})$ wird auf $\mathfrak{R}^*$ eine uniforme Struktur $U_{\mathfrak{R}}$, die mit der schwachen Topologie $\sigma\langle \mathfrak{R}^*, \mathfrak{R} \rangle$ verträglich ist, definiert.

Theorem 1.6.2. — C *sei ein konvexer, spitzer und* $\sigma\langle \mathfrak{R}, \mathcal{E} \rangle$ *abgeschlossener Kegel in* $\mathfrak{R}$. $\mathcal{E}_C$ *und* $\mathfrak{R}^*_C$ *seien die entsprechenden dualen Kegel in* $\mathcal{E}$ bzw. $\mathfrak{R}^*$. $\gamma_{\mathfrak{R}}$ *bezeichne die Vervollständigung bzgl. der uniformen Struktur* $U_{\mathfrak{R}}$. *Dann gilt*:

$$\gamma_{\mathfrak{R}} \mathcal{E}_C = \mathfrak{R}^*_C.$$

Beweis. — (i) $\mathfrak{R}^*_C$ ist vollständig bzgl. $U_{\mathfrak{R}}$. Sei nämlich $\mathcal{F}$ ein Cauchyfilter auf $\mathfrak{R}^*_C$. Da n. Def. von $U_{\mathfrak{R}}$ jedes $f \in \mathfrak{R}$

auf $\mathfrak{R}_C^*$ gleichmäßig stetig ist, ist der Bildfilter $f(\mathcal{F})$ ein Cauchyfilter auf $\mathbf{R}$ und konvergiert somit gegen eine reelle Zahl $L_0(f)$. Die Linearform $f \to L_0(f)$ $(f \in \mathfrak{R})$ ist somit der Limes des Filters $\mathcal{F}$ in $\mathfrak{R}^*$. Da für $f \in C$ außerdem gilt $f(\mathcal{F}) \in \mathbf{R}_+$ und somit $L_0(f) \geqslant 0$, liegt L_0 in $\mathfrak{R}_C^*$.

(ii) Es gilt $\overline{\mathcal{E}}_C = \mathfrak{R}_C^*$. Da $U_{\mathfrak{R}}$ hausdorffsch ist, folgt aus (i): $\mathfrak{R}_C^*$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{R}^*$. Somit $\overline{\mathcal{E}}_C \subset \mathfrak{R}_C^*$. Ang. es existiert ein $L_0 \in \mathfrak{R}_C^* \setminus \overline{\mathcal{E}}_C$. Da $\overline{\mathcal{E}}_C$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge des lokalkonvexen Raumes $\mathfrak{R}^*$ ist, folgt nach einem bekannten Trennungssatz die Existenz einer abgeschlossenen Hyperebene H in $\mathfrak{R}^*$, die $\overline{\mathcal{E}}_C$ und L_0 streng trennt. H ist von der Form $H = \{L \in \mathfrak{R}^* : L(f) = 1\}$ für ein $0 \neq f \in \mathfrak{R}$. Es gilt also:

$$(a) \qquad \nu(f) < 1 \quad \text{für alle} \quad \nu \in \overline{\mathcal{E}}_C$$

und

$$(b) \qquad L_0(f) > 1.$$

Aus (a) folgt $\lambda . \nu(f) < 1$ für alle $\lambda > 0$, was nur mit

$$(c) \qquad \nu(f) \leqslant 0 \quad \text{für alle} \quad \nu \in \mathcal{E}_C$$

verträglich ist. Wir zeigen, daß aus (c) folgt: $-f \in C$. Denn falls $-f \notin C$, so liefert eine nochmalige Anwendung des Trennungssatzes diesmal auf den konvexen und n. Vor. $\sigma\langle\mathfrak{R}, \mathcal{E}\rangle$ abgeschlossenen Kegel C und den Punkt $-f \in \mathfrak{R}$ die Existenz einer abgeschlossenen Hyperebene H′ in $\mathfrak{R}$ der Form $\nu(h) = 1$ $(h \in \mathfrak{R})$, die C und $-f$ streng trennt. D.h. aber: es existiert ein $0 \neq \nu \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft:

$$(a') \qquad \nu(g) < 1 \quad \text{für alle} \quad g \in C$$

und

$$(b') \qquad \nu(-f) > 1.$$

Aus (a') folgt $\nu(\lambda g) = \lambda \nu(g) < 1$ für alle $\lambda > 0$ und somit $\nu(g) \leqslant 0$ für alle $g \in C$. D.h. aber $-\nu \in \mathcal{E}_C$. Somit folgt aus (c): $\nu(-f) = -\nu(f) \leqslant 0$ im Widerspruch zu (b'). Also liegt $-f$ in C. Für $L_0 \in \mathfrak{R}_C^*$ gilt somit $L_0(f) \leqslant 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu (b). Hiermit ist (ii) bewiesen. Da $U_{\mathfrak{R}}$ hausdorffsch ist, folgt aus (i) und (ii) die Behauptung. □

Korollar 1.6.3. — *Jedes positive Maß* μ *auf* $(X, \mathfrak{B})$ *ist vag (siehe* 1.3) *adhärent dem konvexen Kegel der positiven Maße auf* $(X, \mathfrak{B})$, *deren Träger endlich und in jeder Menge des Trägerfilters* $\mathfrak{J}_\mu$ *enthalten ist.*

Beweis. — Man wähle $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}_\mathfrak{B}$ und $C = \mathfrak{R}_+$. Dann ist $\mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ gleich $\mathfrak{R}_+^*$ und die vage Topologie auf $\mathcal{M}_+$ wird durch die uniforme Struktur $U_\mathfrak{R}$ gegeben. Damit folgt der erste Teil der Behauptung unmittelbar aus Theor. 1.6.2. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus der vollständigen Regularität von X und der Definition von $\mathfrak{J}_\mu$. □

Korollar 1.6.4. — *Jedes* $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ *ist vag adhärent der Menge aller* $\nu \in \mathcal{E}(X)$, *deren Träger in jedem* $Z \in \mathfrak{J}_\mu$ *enthalten ist.*

Beweis. — Dies folgt wegen $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und

$$\mathfrak{J}_\mu = \{Z = Z^+ \cup Z^- : Z^+ \in \mathfrak{J}_{\mu^+},\ Z^- \in \mathfrak{J}_{\mu^-}\}$$

unmittelbar aus Kor. 1.6.3. □

Korollar 1.6.5. — $\mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ *ist ein vag vollständiger konvexer Kegel in* $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$.

Beweis. — Man wähle $\mathfrak{R}$ und C wie in Kor. 1.6.3. □

Das Theorem 1.6.2 ist jedoch für die Zwecke der Maßtheorie noch nicht ausreichend, da in der Maßtheorie gewisse numerische Funktionen (vgl. Def. 2.1.1) eine Rolle spielen, die in dem Vektorverband $\mathfrak{R}$ in Theorem 1.6.2 nicht zugelassen sind. Zu diesem Zweck beweisen wir noch folgende Verallgemeinerung:

Satz 1.6.6. — $\mathfrak{K}$ *sei ein konvexer Kegel (mit Spitze* 0*) von numerischen Funktionen auf* X *mit der Eigenschaft:*

$$\forall\, 0 \neq \nu \in \mathcal{E}_+ \qquad \exists f \in \mathfrak{K} : \nu(f) \neq 0.$$

$U_\mathfrak{K}$ *sei die gröbste uniforme Struktur auf* $\mathcal{E}_+$, bzgl. *welcher alle Abbildungen der Form* $\nu \to \nu(f)$ *von* $\mathcal{E}_+$ *in den kompakten Raum* $\overline{\mathbf{R}}$ *für jedes* $f \in \mathfrak{K}$ *gleichmäßig stetig sind.*

Dann existiert zu jeder additiven, isotonen, reellen (und damit positiv homogenen) Funktion L *auf* $\mathfrak{K}$ *genau ein* *minimaler Cauchyfilter* $\mathfrak{F}_L$ *auf* $\mathcal{E}_+$ *mit*

$$L(f) = \lim_{\nu, \mathfrak{F}_L} \nu(f) \qquad \textit{für alle} \qquad f \in \mathfrak{K}.$$

Beweis. — $\overline{\mathcal{E}}_+$ bezeichne die Vervollständigung von $\mathcal{E}_+$ bzgl. $U_{\mathfrak{K}}$. Aufgrund der Eigenschaften des Kegels $\mathfrak{K}$ ist die uniforme Struktur $U_{\mathfrak{K}}$ hausdorffsch. Die Behauptung ist somit äquivalent mit: $L \in \overline{\mathcal{E}}_+$.

$\mathfrak{L}$ bezeichne die Menge aller additiven, isotonen, numerischen Funktionen M auf $\mathfrak{K}$. Dann läßt sich $\overline{\mathcal{E}}_+$ in $\mathfrak{L}$ einbetten. Ist $L \in \mathfrak{L} \setminus \overline{\mathcal{E}}_+$, so existiert eine Umgebung

$$V = V(L) = \{M \in \mathfrak{L} : |M(f_i) - L(f_i)| < \varepsilon, \quad f_i \in \mathfrak{K}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

von L mit $V(L) \cap \mathcal{E}_+ = \emptyset$. $\boldsymbol{f} : \mathfrak{L} \to \overline{\mathbf{R}}^n$ bezeichne die Abbildung

$$M \to (M(f_1), \ldots, M(f_n)) = : \boldsymbol{f}(M).$$

Dann sind die Mengen $\boldsymbol{f}(V)$ und $C : = \boldsymbol{f}(\mathcal{E}_+) \cap \mathbf{R}^n$ disjunkte, konvexe Teilmengen des $\mathbf{R}^n$. Aufgrund der Definition von V ist $\boldsymbol{f}(V)$ die offene ε-Umgebung des Punktes $\boldsymbol{f}(L)$ im $\mathbf{R}^n$. Somit existiert eine Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle a, x\rangle = 1\}$$

im $\mathbf{R}^n$, die $\boldsymbol{f}(V)$ und C trennt, d.h. es gilt

$$(a) \quad \langle a, \boldsymbol{f}(V)\rangle \leqslant 1 \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_+ : f_i(\nu) < \infty \quad \text{für} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$
$$(b) \qquad\qquad \langle a, \boldsymbol{f}(L)\rangle > 1.$$

Aus (a) folgt für jedes $\nu \in \mathcal{E}_+$ mit $f_i(\nu) < \infty$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ und jedes $\lambda \geqslant 0$:

$$\langle a, \boldsymbol{f}(\lambda\nu)\rangle = \lambda . \langle a, \boldsymbol{f}(\nu)\rangle \leqslant 1$$

und somit

$$(c) \qquad\qquad \langle a, \boldsymbol{f}(\nu)\rangle \leqslant 0.$$

Die Komponenten des Vektors a seien wie folgt geordnet:

$$a = (\underbrace{a_1, \ldots, a_k}_{\geqslant 0}, \underbrace{a_{k+1}, \ldots, a_n}_{<0})$$

Dann gehören die Funktionen

$$g : = \sum_{j=1}^{K} a_j f_j \qquad \text{und} \qquad h : = \sum_{j=K+1}^{n} (- a_j) f_j$$

ebenfalls zu $\mathcal{K}$, und aus (c) folgt: $g(\nu) \leqslant h(\nu)$ für alle $\nu \in \mathcal{E}_+$ mit $g(\nu) < \infty$. Für die Punktmaße $\nu = \delta_x$ $(x \in X)$ folgt insbesondere:

$$(d) \qquad g(x) \leqslant h(x) \qquad \forall x \in X : g(x) < \infty.$$

Aus (d) ergibt sich die Beziehung

$$g + (h \wedge g) = 2g.$$

Aufgrund der Voraussetzungen über L folgt hieraus:

$$L(g) = L(h \wedge g) \leqslant L(h).$$

Dies impliziert aber

$$\begin{aligned} 0 \geqslant L(g) - L(h) &= \sum_{j=1}^{K} a_j L(f_j) - \sum_{j=K+1}^{n} (-a_j) L(f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j L(f_j) = \langle a, f(L) \rangle \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (b). □

2. Fortsetzung eines Maßes. $\mathcal{L}^p$-Räume.

2.1. *Fortsetzung eines Maßes auf die integrierbaren Funktionen.*

Sei $(X, \mathcal{B})$ ein lokalbeschränkter Raum und μ ein positives (2) Maß auf $(X, \mathcal{B})$. P. Def. ist μ also eine positive Linearform auf dem Ring $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. Bezieht man den funktionalanalytischen Standpunkt zur Maßtheorie, wie er zuerst 1911 von Young [42] und 1918 von Daniell [11] sowie später von Stone [39], Bourbaki [7] und Loomis [29] eingenommen worden ist, so besteht die wesentliche Aufgabe einer Maßtheorie auf $(X, \mathcal{B})$ darin, das Elementarintegral $\mu|\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ auf eine größere Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ von μ-integrierbaren Funktionen fortzusetzen. Je nach Stetigkeit des Maßes μ (siehe 1.4) bieten sich hierzu die verschiedenen zitierten Integrationstheorien an. So ist für beliebiges $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ $(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ ein

(2) Die Voraussetzung der Positivität von μ bedeutet in Anbetracht des Satzes 1.4.3 keinen Verlust an Allgemeinheit.

Elementarintegral im Sinne von Loomis; ist μ σ-stetig bzw. τ-stetig, so ist $(\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ außerdem ein erstes bzw. zweites Stonesches Elementarintegral. Ist schließlich $(X, \mathfrak{B})$ lokalkompakt, so steht die ausführliche Maßtheorie von Bourbaki [7] zur Verfügung.

Wir wollen jedoch von keiner der angeführten Fortsetzungsmethoden Gebrauch machen, da diese je nach dem Stetigkeitscharakter des Maßes μ unterschiedliche Integralkonstruktionen vorschreiben. Ziel dieses Paragraphen ist es vielmehr, eine *einzige* Fortsetzungsmethode, die für *jedes* Maß μ auf $(X, \mathfrak{B})$ *unabhängig* von seiner Stetigkeit anwendbar ist, zu entwickeln. Letztere geht lediglich in die Definition 2.1.1 ein. In § 3 werden die so erhaltenen Ergebnisse mit denen der oben zitierten Integrationstheorien verglichen, wobei sich zeigt, daß diese Spezialfälle der hier entwickelten allgemeinen Fortsetzungsmethode sind.

Das *Prinzip der Fortsetzung* eines jeden Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ auf die Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ der μ-integrierbaren Funktionen ist das folgende: Man bestimme $\mathcal{L}^1(\mu)$ als den *größten* Teilraum des Vektorraums $\mathbf{R}^X$ aller reellen Funktionen auf X, auf den sich μ unter Berücksichtigung seiner Stetigkeitseigenschaft *auf genau eine Weise positiv linear* fortsetzen läßt. Die erhaltenen Ergebnisse sind natürlich aufgrund der Definition 2.1.1 vom Stetigkeitscharakter von μ abhängig — die Methode selbst ist jedoch hiervon unabhängig.

Den Schlüssel zur Realisierung des angegebenen Fortsetzungsprinzips liefert das Theorem 1.6.2. Sei nämlich $\mathfrak{R} = \mathcal{L}^1(\mu)$ der gesuchte maximale Teilraum von $\mathbf{R}^X$ und $\tilde{\mu}$ die eindeutige Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}$. Wegen $\mathfrak{R} \supset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ist $\langle \mathcal{E}, \mathfrak{R} \rangle$ ein separiertes Dualsystem und somit das Theorem 1.6.2 anwendbar. Demnach existiert ein $U_{\mathfrak{R}}$-Cauchyfilter $\mathcal{F}_\mu$ auf $\mathcal{E}_+$, der gegen $\tilde{\mu}$ konvergiert; d.h. aber n. Def. von $U_{\mathfrak{R}}: \tilde{\mu}(f) = \lim_{\mathcal{F}_\mu} f$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Das Fortsetzungsproblem ist somit äquivalent zu der Aufgabe, einen möglichst feinen Cauchyfilter $\mathcal{F}_\mu$ auf $\mathcal{E}_+$ mit μ als Adhärenzpunkt zu bestimmen. Hierzu dient die folgende Definition:

Definition 2.1.1. — *Sei* μ *ein positives Maß auf dem lokalbeschränkten Raum* $(X, \mathfrak{B})$. *Eine numerische Funktion auf* X *heißt* μ*-Oberfunktion, wenn sie obere Einhüllende eines* *aufst. filtr. Systems* $\mathrm{H} \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *ist mit den folgenden Eigenschaften:*

(*a*1) H *ist endlich für* $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}^{\sigma}$;
(*a*2) H *ist abzählbar für* $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}^{\sigma} \setminus \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}^{\tau}$;
(*a*3) H *ist beliebig für* $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}^{\tau}$;
(*b*) $\sup\limits_{g \in \mathrm{H}} \mu(g) < \infty$.

$\mathfrak{U}^{\mu}$ bezeichne die Menge aller μ-Oberfunktionen. Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{U}^{\mu}$ einen konvexen Verbandskegel mit den Eigenschaften (3) und (4) (vgl. 1.6) bildet.

Satz 2.1.2. — *Durch die Definition*

$$\mu(h) := \sup \{\mu(g) : g \leqslant h, \ g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}\} \quad (h \in \mathfrak{U}^{\mu})$$

wird das Maß μ *eindeutig zu einem additiven, isotonen reellen Funktional auf* $\mathfrak{U}^{\mu}$/*fortgesetzt.*

Zum Beweis des Satz 2.1.2 dient folgendes Lemma:

Lemma 2.1.3. — *Sei* H *ein aufst. filtr. System in* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *wie in* Def. 2.1.1 *mit* $\sup \mathrm{H} = h \in \mathfrak{U}^{\mu}$. *Dann gilt:*

$$\mu(h) = \sup_{g \in \mathrm{H}} \mu(g).$$

Beweis (nach Jacobs [21]). — Sei $g_0 \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $g_0 \leqslant \sup\limits_{g \in \mathrm{H}} g$. Dann ist das System $\{g_0 - (g_0 \wedge g)\}_{g \in \mathrm{H}}$ abst. filtr. und konvergiert punktweise auf X gegen Null. Unter der jeweiligen Stetigkeitsvoraussetzung von μ folgt:

$$\inf_{g \in \mathrm{H}} \mu(g_0 - (g_0 \wedge g)) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \sup_{g \in \mathrm{H}} \mu(g) &\geqslant \sup \mu(g \wedge g_0) = \sup (\mu(g_0) - \mu(g_0 - (g_0 \wedge g)) \\ &= \mu(g_0) - \inf \mu(g_0 - (g_0 \wedge g)) \\ &= \mu(g_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt aber:

$$\sup_{g \in \mathrm{H}} \mu(g) \geqslant \sup_{g_0 \leqslant h} \mu(g_0) = : \mu(h).$$

Aus $\mathrm{H} \subset \{g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}} : g \leqslant h\}$ folgt « $\leqslant$ » und damit die Behauptung. □

Beweis des Satzes 2.1.2. — Aus den Definitionen folgt unmittelbar: μ ist reell und isoton.

Seien also $h_1, h_2 \in \mathfrak{U}^\mu$ und H_1, H_2 aufst. filtr. Systeme in $\mathcal{K}_\mathfrak{B}$ mit h_1 bzw. h_2 als obere Einhüllende. Dann ist auch $H_1 + H_2$ ein μ-zulässiges aufst. filtr. System, das gegen $h_1 + h_2 \in \mathfrak{U}^\mu$ konvergiert. Aufgrund des Lemmas 2.1.3 und der Linearität von μ auf $\mathcal{K}_\mathfrak{B}$ folgt daher:

$$\begin{aligned}\mu(h_1 + h_2) &= \sup_{g \in H_1 + H_2} \mu(g) = \sup_{g_i \in H_i} \{\mu(g_1) + \mu(g_2)\} \\ &= \sup_{g_1 \in H_1} \mu(g_1) + \sup_{g_2 \in H_2} \mu(g_2) = \mu(h_1) + \mu(h_2). \quad \square\end{aligned}$$

$\mathfrak{U}^\mu$, μ erfüllen somit die Voraussetzungen des Satzes 1.6.6. Folglich entspricht dem Funktional $\mu | \mathfrak{U}^\mu$ genau ein minimaler $U_{\mathfrak{U}^\mu}$-Cauchyfilter $\mathcal{F}_\mu$ auf $\mathcal{E}_+$, nämlich die Spur des Umgebungsfilters von $\mu \in \overline{\mathcal{E}}_+$ auf $\mathcal{E}_+$. N. Def. von $U_{\mathfrak{U}^\mu}$ bilden die Mengen

$$M_{h_1 \dots h_n, \varepsilon} := \{\nu \in \mathcal{E}_+ : |\mu(h_i) - \nu(h_i)| < \varepsilon, \ 1 \leqslant i \leqslant n)\}$$
$$(h_i \in \mathfrak{U}^\mu, \ \varepsilon > 0)$$

eine Basis von $\mathcal{F}_\mu$.

Für jedes $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$ sei

$$p(f) := \inf \{\mu(h) : f \leqslant h \in \mathfrak{U}^\mu\} \ (^3)$$

($\inf \emptyset = \infty$). Für die gesuchte Fortsetzung L des Maßes μ wird man wegen der Isotonie fordern: $L \leqslant p$ (4). Ist umgekehrt L eine beliebige Linearform auf einem linearen Unterraum $\mathcal{L}$ von $\mathbf{R}^X$, der $\mathcal{K}_\mathfrak{B}$ enthält, mit der Eigenschaft $L \leqslant p$, so folgt für alle $g \in \mathcal{K}_\mathfrak{B}$:

$$p(g) = -p(-g) \leqslant L(g) \leqslant p(g) = \mu(g).$$

Ferner gilt für jedes $0 \leqslant f \in \mathcal{L}$:

$$L(-f) \leqslant p(-f) \leqslant 0.$$

Also ist L eine positive Fortsetzung des Maßes μ.

(3) p ist ein Oberintegral auf $\mathbf{R}^X$, d.h. p ist eine subadditive (für $\mu \in \mathcal{M}^\sigma$ abzählbar subadditive), isotone, numerische Funktion auf $\mathbf{R}^X$. Man kann das Problem der Integralerweiterung des Elementarintegrals ($\mathcal{K}_\mathfrak{B}$, μ) auch unter folgendem Gesichtspunkt betrachten: Bestimme die Teilmenge $\mathcal{L}$ von $\mathbf{R}^X$, auf der p additiv und endlich ist. Dann ist Rest $_\mathcal{L}\, p$ eine positive, lineare Fortsetzung von μ auf $\mathcal{L}$, und somit ($\mathcal{L}$, p) eine Integralerweiterung von ($\mathcal{K}_\mathfrak{B}$, μ). Das Theorem 2.1.4 zeigt, daß dieser Erweiterungsprozeß mit dem oben formulierten Prinzip der maximalen Fortsetzung identisch ist.

(4) Man beachte, daß in diese Forderung die Stetigkeitseigenschaft von μ eingeht.

Die Lösung des Fortsetzungsproblems liefert nun das folgende Theorem, das gleichzeitig aufgrund der Aussage (iv) die Beziehung zu den eingangs erwähnten Integrationstheorien herstellt:

THEOREM 2.1.4. — *$\mathfrak{L}$ sei ein Vektorraum reeller Funktionen auf* X, *der* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *enthält. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Das Maß* μ *auf* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *kann auf genau eine Weise zu einer von* p *majorisierten* (positiven) *Linearform auf jeden linearen Teilraum* $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}$ *fortgesetzt werden.*

(ii) $\mathrm{L} = p$ *ist die einzige von* p *majorisierte (positive) Linearform auf* $\mathfrak{L}$.

(iii) p *ist reell und additiv auf* $\mathfrak{L}$.

(iv) $\forall f \in \mathfrak{L}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g,\ h \in \mathfrak{U}^{\mu}:\ -g \leqslant f \leqslant h,\ \mu(g+h) < \varepsilon.$

(v) *Der Bildfilter* $f(\mathfrak{F}_{\mu})$ *ist konvergent für alle* $f \in \mathfrak{L}$.

(vi) $\mathfrak{F}_{\mu}$ *ist ein* $\mathrm{U}_{\mathfrak{L}}$*-Cauchyfilter auf* $\mathfrak{E}_{+}$.

Beweis. — (i) $\rightarrow$ (ii): L bezeichne die n. Vor. existierende einzige lineare Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{L}$ mit $\mathrm{L} \leqslant p$. Zu zeigen ist: $\mathrm{L} = p$ auf $\mathfrak{L}$.

Die Menge $\mathfrak{M}$ aller linearen Teilräume $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$ mit $\mathrm{Rest}_{\mathfrak{L}'}\,\mathrm{L} = \mathrm{Rest}_{\mathfrak{L}'}\,p$ ist induktiv geordnet und wegen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{M}$ nicht leer. Nach dem Zornschen Lemma existiert somit ein maximales Element $\mathfrak{L}_0 \in \mathfrak{M}$. Angenommen es gilt $\mathfrak{L}_0 \neq \mathfrak{L}$. Dann existiert ein $f_0 \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{L}_0$ mit $\mathrm{L}(f_0) < p(f_0)$. Sei $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_0 + \mathbf{R} f_0$ und γ eine reelle Zahl mit $\mathrm{L}(f_0) < \gamma < p(f_0)$. Für $f = g + \alpha f_0 \in \mathfrak{L}'$ ist durch $\tilde{\mathrm{L}}(f) := \mathrm{L}(g) + \alpha\gamma$ eine lineare Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{L}'$ definiert. Aus $\gamma < p(f_0)$ folgt: $\alpha\gamma \leqslant \alpha p(f_0) = p(\alpha f_0)$ für jedes $\alpha \geqslant 0$. Ist $\alpha < 0$, so folgt aus $\mathrm{L}(f_0) < \gamma$ und $\mathrm{L} \leqslant p$: $\alpha\gamma < \mathrm{L}(\alpha f_0) \leqslant p(\alpha f_0)$. Somit gilt für jedes $f = g + \alpha f_0 \in \mathfrak{L}'$:

$$\alpha\gamma \leqslant p(\alpha f_0) \leqslant p(g + \alpha f_0) + p(-g) = p(f) - \mathrm{L}(g)$$

und somit

$$\tilde{\mathrm{L}}(f) = \mathrm{L}(g) + \alpha\gamma \leqslant p(f).$$

Also ist $\tilde{\mathrm{L}}$ eine von $\mathrm{Rest}_{\mathfrak{L}'}\,\mathrm{L}$ verschiedene, von p majorisierte Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{L}'$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}$.

(ii) $\rightarrow$ (iii): evident.

(iii) $\to$ (iv) : Da p reell ist auf $\mathfrak{L}$, existiert zu jedem $f \in \mathfrak{L}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \leqslant h \in \mathfrak{U}^\mu$ mit $\mu(h) - p(f) < \varepsilon/2$. Aus der Additivität von p auf $\mathfrak{L}$ folgt :

$$0 = p(0) = p(f + (-f)) = p(f) + p(-f)$$

und somit : $-p(-f) = p(f)$. Der Rest der Behauptung folgt daher aus :

$$p(f) = -p(-f) = -\inf_{-f \leqslant g \in \mathfrak{U}^\mu} \mu(g) = \sup_{-g \leqslant f} \mu(-g).$$

(iv) $\to$ (v) : Zu beliebigen $f \in \mathfrak{L}$ und $\varepsilon > 0$ seien die Funktionen $g, h \in \mathfrak{U}^\mu$ wie in (iv) definiert. Dann gilt n. Vor. sowie n. Def. des Filters $\mathcal{F}_\mu$:

$$\begin{aligned} |\mu(g) + \mu(h)| &< \varepsilon \\ |\nu(g) - \mu(g)| &< \varepsilon \quad \forall \nu \in \mathrm{M}_{g,\varepsilon} \\ |\nu'(h) - \mu(h)| &< \varepsilon \quad \forall \nu' \in \mathrm{M}_{h,\varepsilon} \end{aligned}$$

Hieraus folgt für alle $\nu, \nu' \in \mathrm{M}_{g.h,\varepsilon}$:

$$|\nu(f) - \nu'(f)| \leqslant \sup \{|\nu(h) + \nu'(g)|, |\nu(g) + \nu'(h)|\} < 3\varepsilon.$$

Somit ist $f(\mathcal{F}_\mu)$ ein Cauchyfilter auf $\mathbf{R}$ und damit konvergent.

(v) $\to$ (vi) : Dies ist eine bekannte Tatsache aus der Theorie der uniformen Räume (siehe z.B. [6], chap. 2).

(vi) $\to$ (i) : Wir zeigen zunächst die Existenz einer Fortsetzung $\mathrm{L} \leqslant p$ von μ auf den ganzen Raum $\mathfrak{L}$. Nach Theorem 1.6.2 ist die Vervollständigung von $\mathcal{E}_+$ bzgl. der uniformen Struktur $\mathrm{U}_{\mathfrak{L}}$ der Raum $\mathfrak{L}_+^*$. Somit ist $\mathrm{L} := \lim \mathcal{F}_\mu$ eine positive Linearform auf $\mathfrak{L}$, die μ fortsetzt. Für jedes $f \in \mathfrak{L}$ und $h \in \mathfrak{U}_\mu$ mit $f \leqslant h$ gilt außerdem :

$$\mathrm{L}(f) = \lim_{\mathcal{F}_\mu} f \leqslant \lim_{\mathcal{F}_\mu} h = \mu(h),$$

und somit

$$\mathrm{L}(f) \leqslant \inf_{f \leqslant h \in \mathfrak{U}^\mu} \mu(h) = p(f).$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit benötigen wir folgendes Lemma :

Lemma 2.1.5. — *Sei* L *eine Linearform auf einem linearen Teilraum* $\mathfrak{L}$ *von* $\mathbf{R}^X$ *mit der Eigenschaft* $\mathrm{L}(g) \leqslant p(g)$ *für alle* $g \in \mathfrak{L}$. $\mathfrak{K}$ *sei der von* $\mathfrak{L}$ *und* $\mathfrak{U}^\mu$ *erzeugte konvexe Kegel in* $\overline{\mathbf{R}}^X$. *Dann kann* L *zu einem reellen, additiven, isotonen Funktional*

L *auf* $\mathcal{K}$ *mit der Eigenschaft* $\tilde{L}(f) \leqslant p(f)$ *für alle* $f \in \mathcal{K}$ *fortgesetzt werden.*

Beweis. — Es ist $\mathcal{K} = \mathcal{L} + \mathfrak{U}^{\mu}$. Für $f = g + h \in \mathcal{K}$ setze man $\tilde{L}(f) := L(g) + p(h)$. $\tilde{L}$ ist additiv auf $\mathcal{K}$ und wegen $p(h) = \mu(h) < \infty$ reell. Ferner gilt:

$$\tilde{L}(f) = L(g) + p(h) \leqslant p(g) + p(h) = p(g + h) = p(f).$$

Sei $f_1 = g_1 + h_1 \leqslant g_2 + h_2 = f_2$. Dann folgt:

$$L(g_1 - g_2) + p(h_1) \leqslant p(g_1 - g_2) + p(h_1) = p(g_1 - g_2 + h_1) \leqslant p(h_2)$$

und damit

$$\tilde{L}(f_1) = L(g_1) + p(h_1) \leqslant L(g_2) + p(h_2) = \tilde{L}(f_2).$$

Somit ist $\tilde{L}$ isoton auf $\mathcal{K}$ und damit insbesondere eindeutig definiert. Aus $g = g + 0$ und $p(0) = 0$ folgt schließlich: $L(g) = \tilde{L}(g)$ für alle $g \in \mathcal{L}$. □

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun der Beweis wie folgt zu Ende führen:

Sei $\mathcal{L}'$ ein beliebiger linearer Teilraum $\subseteq \mathcal{L}$ und $L' \leqslant p$ eine Linearform auf $\mathcal{L}'$. $\mathcal{K}$ sei der von $\mathcal{L}' \cup \mathfrak{U}^{\mu}$ erzeugte konvexe Kegel in $\overline{\mathbf{R}}^{X}$ und $\tilde{L} \leqslant p$ die nach obigem Lemma existierende Fortsetzung von L auf $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ und $\tilde{L}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 1.6.6. Somit existiert ein minimaler $U_{\mathcal{K}}$-Cauchyfilter $\mathcal{F}_{\tilde{L}}$ auf $\mathcal{E}_+$ mit $\tilde{L} = \lim \mathcal{F}_{\tilde{L}}$. Nach [6], chap. 2, bilden die Mengen

$$\tilde{M}_{f,\varepsilon} = \{\nu \in \mathcal{E}_+ : |\tilde{L}(f) - \nu(f)| < \varepsilon\} \quad (f \in \mathcal{K},\ \varepsilon > 0)$$

eine Subbasis von $\mathcal{F}_{\tilde{L}}$. Aus $\tilde{L} \leqslant p$ folgt für jedes $h \in \mathfrak{U}^{\mu}$: $-p(-h) \leqslant \tilde{L}(h) \leqslant p(h) = \mu(h)$. Es ist aber wegen $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} \subset -\mathfrak{U}^{\mu}$:

$$-p(-h) = \sup_{\substack{h' \leqslant h \\ h' \in -\mathfrak{U}^{\mu}}} \mu(h') \geqslant \sup_{\substack{g \leqslant h \\ g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}}} \mu(g) = \mu(h).$$

Also ist $\tilde{L}(h) = \mu(h)$ und damit $\tilde{M}_{h,\varepsilon} = M_{h,\varepsilon}$ für alle $h \in \mathfrak{U}^{\mu}$. Somit ist der Filter $\mathcal{F}_{\tilde{L}}$ feiner als der Filter $\mathcal{F}_{\mu}$. Dieser ist aber n. Vor. ein Cauchyfilter bzgl. $U_{\mathcal{L}}$ und somit erst recht bzgl. der gröberen uniformen Struktur $U_{\mathcal{L}'}$. Also gilt für alle $g \in \mathcal{L}'$:

$$\tilde{L}(g) = \lim\nolimits_{\mathcal{F}_{\tilde{L}}} g = \lim\nolimits_{\mathcal{F}_{\mu}} g = L(g). \ \square$$

Korollar 2.1.6. — *Der Vektorraum*

$$\mathfrak{L}^1(\mu) := \{f \in \mathbf{R}^X : f(\mathfrak{F}_\mu) \quad \textit{konvergent}\}$$

ist der größte lineare Teilraum von $\mathbf{R}^X$, *auf den sich das Maß* $\mu | \mathfrak{K}_\mathfrak{B}$ *unter Berücksichtigung seiner Stetigkeitseigenschaft auf genau eine Weise positiv und linear fortsetzen läßt.*

Definition 2.1.7. — $\mathfrak{L}^1(\mu)$ *heißt der Raum der* μ*-integrierbaren reellen Funktionen auf* X. *Für jedes* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ *heißt*

$$\int f \, d\mu := \lim_{\nu, \mathfrak{F}_\mu} \nu(f) = \lim\nolimits_{\mathfrak{F}_\mu} f$$

das Integral von f (bzgl. μ).

Satz 2.1.8. — $\mathfrak{L}^1(\mu)$ *ist ein Vektorverband.*

Beweis. — Es genügt zu zeigen, daß mit f auch f^+ zu $\mathfrak{L}^1(\mu)$ gehört. Nach Theor. 2.1.4 (iv) existieren zu beliebigem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{U}^\mu$ mit $-g \leqslant f \leqslant h$ und $\mu(g + h) < \varepsilon$. Dann gehören die Funktionen $g_1 := g \wedge 0$ und $h_1 := h \vee 0$ ebenfalls zu $\mathfrak{U}^\mu$, und es gilt: $-g_1 \leqslant f^+ \leqslant h_1$ sowie $g_1 + h_1 \leqslant g + h$ und damit $\mu(g_1 + h_1) \leqslant \mu(g + h) < \varepsilon$. □

2.2. *Integrierbare und meßbare Mengen.*

Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{L}^1(\mu)$ der Vektorraum der reellen μ-integrierbaren Funktionen auf X.

Definition 2.2.1. — *Eine Teilmenge* $A \subset X$ *heißt* μ-integrierbar, *wenn ihre charakteristische Funktion* 1_A μ*-integrierbar ist.*

$\mathfrak{S}_\mu$ bezeichne das System aller μ-integrierbaren Teilmengen von X.

Satz 2.2.2. — $\mathfrak{S}_\mu$ *ist ein Ring. Durch*

$$\mu(A) := \int 1_A \, d\mu$$

wird ein (im Sinne von Loomis [29]*) vollständiger Inhalt auf* $\mathfrak{S}_\mu$ *definiert.*

Beweis. — Die Ringeigenschaft von $\mathfrak{S}_\mu$ folgt aus den Beziehungen

$$1_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \sup_k 1_{A_k}$$

sowie

$$1_{A \setminus B} = (1_A - 1_B)^+$$

und damit aus Satz 2.1.8. Ferner gilt für disjunkte Mengen $A_1 \ldots A_n \in \mathfrak{S}_\mu$:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \int 1_{\sum_k A_k}\, d\mu = \sum_k \int 1_{A_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Sei nun $M \subset X$, derart daß gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A, B \in \mathfrak{S}_\mu : A \subset M \subset B \wedge \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

N. Theor. 2.1.4 (iv) existieren Funktionen $g, h \in \mathfrak{U}^\mu$: $-g \leqslant 1_A \leqslant 1_M \leqslant 1_B \leqslant h$ sowie $\mu(g + h) < 3\varepsilon$. Somit gehört 1_M zu $\mathfrak{L}^1(\mu)$. Aus $1_A \geqslant 0$ folgt schließlich $\mu(A) = \lim_{\mathfrak{F}_\mu} 1_A \geqslant 0$. □

Nach Haupt-Pauc [19] heißt ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{Q}$ von Teilmengen eines lokalkompakten Raumes X *an* X *adaptiert*, wenn folgendes gilt:

(*a*) Jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ ist relativ kompakt;

(*b*) $\mathfrak{Q}$ enthält eine offene Basis von X;

(*c*) Mit Q gehören auch $\overline{Q}$ und $\mathring{Q}$ zu $\mathfrak{Q}$ und es gilt: $\mu(Q) = \mu(\overline{Q}) = \mu(\mathring{Q})$;

(*d*) $\forall Q \in \mathfrak{Q}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{off. } U \in \mathfrak{Q} : Q \subset U \wedge \mu(U \setminus Q) < \varepsilon$.

Es liegt nahe, diesen Begriff auf Inhalte auf lokalbeschränkten Räumen zu übertragen und einen Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ *an* $(X, \mathfrak{B})$ *adaptiert* zu nennen, wenn er die Eigenschaften:

(*a'*) Jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ ist beschränkt (bzgl. $\mathfrak{B}$)

sowie (*b*), (*c*) und (*d*) besitzt. Dann gilt:

SATZ 2.2.3. — *Ist das Maß* $\mu \in \mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ *unstetig, so ist der Inhalt* $\mu|\mathfrak{S}_\mu$ *an* $(X, \mathfrak{B})$ *adaptiert.*

Beweis. — Der Beweis verläuft analog zu Satz 7 in [3], wenn man überall die Funktionenmenge $\mathfrak{R}$ durch den Ring $\mathfrak{K}_\mathfrak{B}$ und « relativ-kompakt » durch « beschränkt » ersetzt. □

$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{B}}$ bezeichne das System aller beschränkten z-Mengen von $(X, \mathfrak{B})$;

$\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ bezeichne das System aller abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von $(X, \mathfrak{B})$.

Satz 2.2.4. — (i) *Für jedes* $\mu \in \mathcal{M}^{\sigma}_{\mathfrak{B}}$ *gilt:* $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{S}_{\mu}$;

(ii) *Für jedes* $\mu \in \mathcal{M}^{\tau}_{\mathfrak{B}}$ *gilt:* $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{S}_{\mu}$.

Beweis. — (i) Sei $Z = Z(g) \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{B}}$. Wegen

$$Z = \bigcap_n [|g| \leqslant n^{-1}]$$

und Axiom (B3) existiert eine aufsteigende Folge $(g_n) \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $-1_Z = \sup_n g_n$. Wegen $\sup_n \mu(g_n) \leqslant 0$ ist -1_Z eine μ-Oberfunktion. Somit gilt $1_Z \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(ii) Für jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge A von $(X, \mathfrak{B})$ gilt

$$-1_A = \sup \{g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}} : g \leqslant -1_A\} \in \mathfrak{U}^{\mu}. \square$$

Die Definition 1.4.2 legt folgende Klassifizierung der Inhalte $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ nach Additivitätseigenschaften nahe:

Definition 2.2.5. — *Der Inhalt* $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ *heiße:*

(*a*) σ-*additiv* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ *Für jede fallende Folge* $(Z_n) \subset \mathfrak{Z}_{\mathfrak{B}}$ *mit* $Z_n \searrow \emptyset$ *gilt* $\mu(Z_n) \to 0$.

(*b*) τ-*additiv* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ *Für jedes abst. filtr. System* $(Z_{\alpha}) \subset \mathfrak{Z}_{\mathfrak{B}}$ *mit* $Z_{\alpha} \searrow \emptyset$ *gilt* $\mu(Z_{\alpha}) \to 0$.

(*c*) *kompakt* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B \in \mathfrak{B}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{kp. } K \subset B : \mu(B \setminus K) \leqslant \varepsilon$.

Zwischen der Stetigkeit des Maßes μ auf $(X, \mathfrak{B})$ und der Additivität des zugehörigen Inhalts $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ besteht folgender Zusammenhang:

Satz 2.2.6. — *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ *und* $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ *der aus* μ *abgeleitete Inhalt. Dann gilt:*

(i) Das Maß μ ist σ-stetig $\Longleftrightarrow$ $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ ist σ-additiv.

(ii) Das Maß μ ist τ-stetig $\Longleftrightarrow$ $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ ist τ-additiv.

(iii) Das Maß μ ist straff $\Longleftrightarrow$ $\mu|\mathfrak{S}_{\mu}$ ist kompakt.

Beweis. — Wir beweisen zunächst (ii). Sei $(Z_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein abst. filtr. System in $\mathcal{Z}_{\mathcal{B}}$ mit $Z_\alpha \searrow \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{D} := \{g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}} : 0 \leqslant g \leqslant 1 \wedge g|Z_\alpha = 1 \text{ für ein } \alpha \in A\}$$

ein abst. filtr. System $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $g_\lambda \searrow 0$. Somit existiert n. Vor. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\mu(g_{\lambda_0}) < \varepsilon$. Nach Konstruktion von $\mathcal{D}$ gilt ferner $g_{\lambda_0}|Z_{\alpha_0} = 1$ für ein $\alpha_0 \in A$. Daraus folgt aber:

$$\mu(Z_\alpha) \leqslant \mu(Z_{\alpha_0}) \leqslant \mu(g_{\lambda_0}) < \varepsilon \quad \forall \alpha_0 < \alpha.$$

Sei umgekehrt $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein abst. filtr. System in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, das punktweise gegen Null strebt. O.B.d.A. sei $(g_\alpha) \subset \Sigma_B$ für ein $B \in \mathcal{B}$. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ $Z_\alpha := [g_\alpha \geqslant \varepsilon]$ $(\alpha \in A)$ ein abst. filtr. System in $\mathcal{Z}_{\mathcal{B}}$ mit $Z_\alpha \searrow \emptyset$. Also gilt n. Vor. $\mu(Z_\alpha) \to 0$. Nach Axiom (B3) existiert ein $g_0 \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $T_{g_\alpha} \subset E(g_0)$ für alle $\alpha \in A$. Somit folgt:

$$0 \leqslant \mu(g_\alpha) \leqslant \mu(1_{Z_\alpha}) + \mu(\varepsilon . 1_{T_{g_0}}) = \mu(Z_\alpha) + \varepsilon . \mu(T_{g_0}).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist hiermit (ii) bewiesen.

Der Beweis von (i) verläuft analog. (Das System $\mathcal{D}$ kann in diesem Fall abzählbar gewählt werden.)

Sei nun $\mu \in \mathcal{M}^t_{\mathcal{B}}$ und $B_i \in \mathcal{B}$. Nach Axiom (B3) existiert ein $B_j \in \mathcal{B}$ mit $B_i \subset \mathring{B}_j$. Aus der $\mathfrak{J}^c_{B_j}$-Stetigkeit von μ auf Σ_{B_j} folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{kp. } \tilde{K} \subset B_j \quad \forall g \in \Sigma_{B_j} : g|\tilde{K} = 0 \longrightarrow |\mu(g)| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt für die kompakte Menge $K = \tilde{K} \cap B_i \subset B_i$:

$$\mu(B_i \setminus K) \leqslant \mu(\mathring{B}_j \setminus \tilde{K}) = \sup \{\mu(g) : g \in \Sigma_{B_j}, \ g|\tilde{K} = 0\} \leqslant \varepsilon.$$

Sei umgekehrt $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein System in Σ_B, das gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von B gegen Null strebt. Dann existieren n. Vor. zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge K von B sowie ein $\alpha_0 \in A$, derart daß gilt $\mu(B \setminus K) \leqslant \varepsilon$ und $|g_\alpha| \leqslant \varepsilon . 1_K + 1_{B \setminus K}$ für alle $\alpha_0 < \alpha$.

Hieraus folgt aber:

$$|\mu(g_\alpha)| \leqslant \varepsilon . \mu(K) + \mu(B \setminus K) \leqslant \varepsilon . (\mu(K) + 1).$$

Hiermit ist auch (iii) bewiesen. □

Ist speziell $(X, \mathcal{B})$ beschränkt, so erhält man aus Satz 2.2.6 die entsprechenden Sätze 20, 24 und 29 von Varadarajan [41].

Je nach Additivität besitzt der Inhalt $\mu|\mathfrak{S}_\mu$ folgende Regularitätseigenschaften:

SATZ 2.2.7. — *Für jede Menge* $Q \in \mathfrak{S}_\mu$ *gilt*:

(i) $\mu(Q) = \sup\{\mu(Z) : Z \subset Q,\ Z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{B}}\}$, *falls* μ *strikt* (5) σ-additiv ist.

(ii) $\mu(Q) = \sup\{\mu(A) : A \subset Q,\ A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}\}$, *falls* μ *τ-additiv ist.*

(iii) $\mu(Q) = \sup\{\mu(K) : K \subset Q,\ K \text{ kp.}\}$, *falls* μ *kompakt ist.*

Beweis. — (i) Zu jedem $Q \in \mathfrak{S}_\mu$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert n. Theor. 2.1.4 (iv) eine Funktion $g \in -\mathfrak{U}^\mu$ mit $g \leqslant 1_Q$ und $\mu(1_Q - g) < \varepsilon$. N. Def. von $\mathfrak{U}^\mu$ ist g das Infimum einer absteigenden Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$. Sei nun δ eine beliebige positive Zahl. Dann ist die Menge

$$Z := [g \geqslant \delta] = \bigcap_n [g_n \geqslant \delta]$$

als Durchschnitt von abzählbar vielen beschränkten z-Mengen ebenfalls eine beschränkte z-Menge. Aus $g \leqslant 1_Z + \delta . 1_Q$ folgt

$$\mu(Q) < \mu(g) + \varepsilon \leqslant \mu(Z) + \delta . \mu(Q) + \varepsilon.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

(ii) Der Beweis verläuft analog wie in (i). Die Menge $A := [h \geqslant \delta] = \bigcap_\alpha [g_\alpha \geqslant \delta]$ leistet das Verlangte.

(iii) Nach (ii) existiert zu $Q \in \mathfrak{S}_\mu$ und $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge $A \subset Q$ mit $\mu(Q \setminus A) < \varepsilon$. A ist in einem $B \in \mathfrak{B}$ enthalten. N. Vor. existiert eine kompakte Menge $K_B \subset B$ mit $\mu(B \setminus K_B) \leqslant \varepsilon$. Für die kompakte Menge $K = K_B \cap A$ folgt somit: $K \subset A \subset Q$ sowie

$$\mu(Q \setminus K) < \mu(A \setminus K) + \varepsilon \leqslant \mu(B \setminus KB) + \varepsilon = 2\varepsilon. \ \square$$

SATZ 2.2.8. — *Ist* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(X, \mathfrak{B})$, *so ist der Inahlt* $\mu|\mathfrak{S}_\mu$ *ein Prämaß* [5] *und kann somit auf genau eine Weise zu einem vollständigen Maß* μ *auf den von* $\mathfrak{S}_\mu$ *erzeugten σ-Ring* $\mathfrak{B}_\mu$ *fortgesetzt werden.*

(5) Der Inhalt μ heißt strikt σ-additiv, falls μ σ-additiv, aber nicht τ-additiv ist.

Beweis. — Nach [5], S. 19, ist μ genau dann ein Prämaß, wenn gilt: (σ) Für jede absteigende Folge $(Q_n) \subset \mathfrak{S}_\mu$ mit $Q_n \searrow \emptyset$ gilt $\mu(Q_n) \to 0$. Ist $\mu \in \mathcal{M}^\sigma \setminus \mathcal{M}^\tau$, so folgt (σ) aus den Sätzen 2.2.6 (i) und 2.2.7 (i). Ist $\mu \in \mathcal{M}^\tau$, so gilt n. Satz 2.2.6 (ii) $\mu(Z_\alpha) \to 0$ für jedes System $(Z_\alpha) \subset \mathcal{Z}_{\mathfrak{B}}$ mit $Z_\alpha \searrow \emptyset$. Da jede Menge aus $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ Durchschnitt von beschränkten z-Mengen ist, folgt daraus $\mu(A_n) \to 0$ für jede Folge $(A_n) \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ mit $A_n \searrow \emptyset$. Die Bedingung (σ) folgt daher in diesem Fall aus Satz 2.2.7 (ii). Daß ein endliches Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{S}$ auf genau eine Weise zu einem Maß auf den von $\mathfrak{S}$ erzeugten σ-Ring fortgesetzt werden kann, ist eine wohlbekannte Tatsache der allgemeinen Maßtheorie (siehe z.B. [5], [18], [21]).

Diese Fortsetzung kann aber auch unabhängig davon mit dem in 2.3 eingeführten äußeren Maß μ^* durchgeführt werden, d.h. durch

$$\mu(B) := \mu^*(1_B) = \lim \sup_{\mathcal{F}_\mu} 1_B \quad (B \in \mathfrak{L}_\mu)$$

wird das Prämaß $\mu|\mathfrak{S}_\mu$ eindeutig zu einem Maß auf $\mathfrak{B}_\mu$ fortgesetzt. Die Vollständigkeit von μ schließlich folgt aus Theor. 2.1.4 (iv). Ist nämlich $A \subset B \in \mathfrak{B}_\mu$ mit $\mu(B) = 0$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h \in \mathfrak{U}^\mu$ mit $0 \leqslant 1_A \leqslant 1_B \leqslant h$ und $\mu(h) < \varepsilon$. Somit folgt $1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und damit $A \in \mathfrak{B}_\mu$. □

Definition 2.2.9 (Gould [16]):

(i) *Der von dem System* $\mathcal{Z}_{\mathfrak{B}}$ *aller beschränkten z-Mengen von* $(X, \mathcal{B})$ *erzeugte σ-Ring* $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_0(\mathcal{B})$ *heißt das System der* Baireschen Mengen *von* $(X, \mathcal{B})$.

(ii) *Der von dem System* $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ *aller abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von* $(X, \mathcal{B})$ *erzeugte σ-Ring* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{B})$ *heißt das System der* Borelschen Mengen *von* $(X, \mathcal{B})$.

Satz 2.2.10. — *Zu jedem* $\mu \in \mathcal{M}^\sigma(X, \mathcal{B})$ *gehört ein vollständiger Maßraum* $(X, \mathfrak{B}_\mu, \mu)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(*a*) Ist $\mu \in \mathcal{M}^\sigma \setminus \mathcal{M}^\tau$, so enthält $\mathfrak{B}_\mu$ die Baireschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$, und μ ist regulär auf $\mathfrak{B}_\mu$ bzgl. innerer Approximation mit beschränkten z-Mengen.

(*b*) Ist $\mu \in \mathcal{M}^\tau$, so enthält $\mathfrak{B}_\mu$ die Borelschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$, und μ ist regulär auf $\mathfrak{B}_\mu$ bzgl. innerer Approximation mit abgeschlossenen und beschränkten Mengen.

(c) Ist $\mu \in \mathcal{M}'$, so enthält $\mathfrak{B}_\mu$ die Borelschen Mengen von $(X, \mathscr{B})$, und μ ist regulär auf $\mathfrak{B}_\mu$ bzgl. innerer Approximation mit kompakten Mengen.

Beweis. — Der jeweils erste Teil der Behauptungen folgt unmittelbar aus den Sätzen 2.2.4 und 2.2.8 sowie aus Def. 2.2.9. Die Regularitätseigenschaften folgen aus folgender Überlegung: Das System aller Teilmengen von $\mathfrak{B}_\mu$, deren Maß wie angegeben approximierbar ist, bildet einen σ-Ring $\mathfrak{A}$, der n. Satz 2.2.7 jeweils den Ring $\mathfrak{S}_\mu$ enthält. Da $\mathfrak{S}_\mu$ aber $\mathfrak{B}_\mu$ erzeugt, ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\mu$. □

Der Satz 2.2.10 gestattet nun, folgende in der Maßtheorie wohlbekannte Sprechweise einzuführen: Ist $A(x)$ eine Aussage für alle $x \in X$, so ist die Aussage $A(x)$ μ-*fast überall* (μ-*f*.ü.) äquivalent zu $\mu\{x \in X : \neg A(x)\} = 0$. Somit können wir i.f. von Konvergenz, Definiertheit, Gleichheit etc. μ-fast überall auf X sprechen. Insbesondere heißen zwei μ-f.ü. auf X definierte Funktionen f, g μ-*äquivalent*, wenn gilt $f(x) = g(x)$ μ-f.ü. Mit diesem Begriff läßt sich die Klasse der μ-integrierbaren Funktionen wie folgt erweitern:

Definition 2.2.11. — *Eine numerische* μ-f.ü. *auf* X *definierte Funktion heißt* μ-*integrierbar, wenn sie einer Funktion aus* $\mathfrak{L}^1(\mu)$ μ-*äquivalent ist.*

Von dieser Möglichkeit, die Klasse der integrierbaren Funktionen zu erweitern, werden wir jedoch i.f. keinen Gebrauch machen, sondern uns auf die Betrachtung reeller, überall auf X definierter Funktionen beschränken.

Bemerkung. — Die Bestimmung von $\mathfrak{B}_\mu$ als den « μ-meßbaren » Mengen von $(X, \mathscr{B})$ entspricht dem Standpunkt von Halmos zur Meßbarkeit in lokalkompakten Räumen [18], § 51. In der Tat fallen die Definitionen der Baireschen und Borelschen Mengen gem. Def. 2.2.9 mit denen von Halmos zusammen, wenn $(X, \mathscr{B})$ lokalkompakt ist.

2.3. *Äußeres und inneres Maß.* N_p-*Normen.*

Im Gegensatz zu den Fortsetzungsmethoden von Stone [39] und Bourbaki [7] wurde die Fortsetzung des Maßes μ in 2.1 ohne Verwendung eines äußeren Maßes durchgeführt. Die

Bestimmung der $\mathscr{L}^1$-Räume (und damit der $\mathscr{L}^p$-Räume-siehe Def. 2.4.1) sowie der integrierbaren und meßbaren Mengen geschah vielmehr alleine mit Hilfe des in 2.1 definierten Filters $\mathscr{F}_\mu$.

Man kann den Filter $\mathscr{F}_\mu$ aber auch dazu verwenden, um auf natürliche Weise ein äußeres (und analog ein inneres) Maß auf der Menge aller reellen Funktionen auf X zu definieren. Mit Hilfe dieses äußeren Maßes können dann die Fortsetzungmethoden von Stone und Bourbaki angewendet werden. Es erhebt sich die Frage, wie sich die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse zu den in den beiden vorigen Abschnitten ohne Verwendung eines äußeren Maßes gewonnenen Resultaten verhalten. Es wird sich zeigen, daß beide übereinstimmen — und zwar für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathscr{B})$ *unabhängig* von seinem Stetigkeitscharakter.

I.f. sei μ ein beliebiges positives Maß auf $(X, \mathscr{B})$.

Definition 2.3.1. — *Für jede reelle Funktion f auf* X *heiße*:

(*a*) $\mu^*(f) = \int^* f\, d\mu := \limsup_{\mathscr{F}_\mu} f$

das äußere Maß *oder das* Oberintegral von f;

(*b*) $\mu_*(f) = \int_* f\, d\mu := \liminf_{\mathscr{F}_\mu} f$

das innere Maß *oder das* Unterintegral von f.

Aus der obigen Definition folgt unmittelbar:

Satz 2.3.2. — *Eine reelle Funktion f auf* X *ist genau dann integrierbar, wenn das Oberintegral und das Unterintegral von f übereinstimmen und endlich sind.*

Aus den Eigenschaften des oberen und unteren Limes einer numerischen Funktion auf einer gefilterten Menge (siehe z.B. [6], chap. 4) folgt unmittelbar:

Eigenschaften von μ^* und μ_* (6) : f, g seien beliebige reelle Funktionen auf X. Es gilt:

(α) $\mu_*(f) = -\mu^*(-f)$.

Diese Beziehung gestattet es, sich im weiteren im wesen-

(6) Man vergleiche die entsprechenden Resultate für Radonmaße [7], chap. 4.

tlichen auf die Untersuchung des Oberintegrals zu beschränken.

(β) $f \leqslant g \longrightarrow \mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$

(γ) $\mu^*(\alpha f) = \alpha\mu^*(f)$ für jede reelle Zahl $\alpha \geqslant 0$

(δ) $\mu_*(f) + \mu_*(g) \leqslant \mu_*(f+g) \leqslant \mu_*(f) + \mu^*(g)$
$\leqslant \mu^*(f+g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$.

(ε) Für jedes aufst. filtr. System $\mathrm{H} \subset \mathfrak{U}^\mu$ mit den Eigenschaften ($a1$) bzw. ($a2$) bzw. ($a3$) v. Def. 2.1.1 gilt:

$$\mu^*\left(\sup_{h\in \mathrm{H}} h\right) = \sup_{h\in \mathrm{H}} \mu^*(h)$$

Beweis. — Aus der Monotonie von μ^* (β) folgt: $\mu^*(\sup h) \geqslant \sup \mu^*(h)$. Somit ist die Behauptung evident für den Fall: $\sup \mu^*(h) = \infty$.

Sei also $\sup \mu^*(h) < \infty$ und $h_0 = \sup \mathrm{H}$. Jedes $h \in \mathrm{H}$ ist n. Def. von $\mathfrak{U}^\mu$ obere Einhüllende eines aufst. filtr. Systems $\mathrm{G}_h \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, das die gleichen Eigenschaften wie H besitzt. Dann ist das System $\mathrm{G}_0 = \bigcup_{h\in \mathrm{H}} \mathrm{G}_h$ aufst. filtr., enthalten in $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$, besitzt mit H und G_h ebenfalls die Eigenschaft ($a1$) bzw. ($a2$) bzw. ($a3$), und es gilt: $h_0 = \sup \mathrm{G}_0$. Ferner gilt:

$$\sup_{g\in \mathrm{G}_0} \mu(g) = \sup_{h\in \mathrm{H}} \sup_{g\in \mathrm{G}_h} \mu(g) = \sup_{h\in \mathrm{H}} \mu^*(h) < \infty.$$

Folglich gehört h_0 zu $\mathfrak{U}^\mu$. Aus $h_0 = \sup \mathrm{G}_0 \in \mathfrak{U}^\mu$ folgt nach Lemma 2.1.3:

$$\mu^*\left(\sup_{h\in \mathrm{H}} h\right) = \mu(h_0) = \sup_{g\in \mathrm{G}_0} \mu(g) = \sup_{h\in \mathrm{H}} \mu^*(h). \quad \square$$

(ζ) $\mu^*(f \vee g) + \mu^*(f \wedge g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$.

Aufgrund der Eigenschaften (β), (γ) und (δ) ist μ^* auf $\mathbf{R}^{\mathrm{X}}$ monoton, positiv homogen und konvex. Somit gelten nach [7], p. 11-12, die folgenden Ungleichungen von Minkowski und Hölder:

(η) Für jede reelle Zahl $p \geqslant 1$ gilt:

$$(\mu^*(|f+g|^p))^{1/p} \leqslant (\mu^*(|f|)^p)^{1/p} + (\mu^*(|g|^p))^{1/p}$$

(ϑ) Für reelle Zahlen $p, q \geqslant 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$\mu^*(|f \cdot g|) \leqslant (\mu^*(|f|^p))^{1/p} . (\mu^*(|g|^q))^{1/q}$$

Ist die Funktion g μ-integrierbar, so gilt zusätzlich:

(ι) $\mu^*(f+g) = \mu^*(f) + \mu(g)$

($\varkappa$) $\mu^*(f+g) = \mu^*(f \vee g) + \mu^*(f \wedge g)$

Für jede reelle Zahl $p \geqslant 1$ und jede reelle Funktion f auf X sei

$$\mathrm{N}_p^\mu(f) := (\mu^*(|f|^p))^{1/p}.$$

$\mathcal{F}^p(\mu)$ bezeichne die Menge aller reellen Funktionen f auf X mit $\mathrm{N}_p^\mu(f) < \infty$. Wegen der Eigenschaften (γ), (δ) und (η) von μ^* ist N_p^μ eine Halbnorm auf dem linearen Raum $\mathcal{F}^p(\mu)$. Mit $\mathcal{F}^p(\mu)$ wird i.f. stets der lokalkonvexe Raum $\mathcal{F}^p$ versehen mit der N_p-Halbnorm bezeichnet. Die Topologie von $\mathcal{F}^p$ heißt nach [7] auch die « Topologie der Konvergenz im p-ten Mittel ». Wegen der Ringeigenschaft von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ist offensichtlich für jedes $\mu \in \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ und jedes $1 \leqslant p < \infty$ $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ in $\mathcal{F}^p(\mu)$ enthalten und somit ein lokalkonvexer Teilraum von $\mathcal{F}^p(\mu)$.

Satz 2.3.3. — *Sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf $\mathcal{F}^p(\mu)$, der μ-f.ü. auf X gleichmäßig gegen die reelle Funktion f_0 konvergiert. Ferner existiere ein $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}$ und ein $\mathrm{M}_0 \in \mathfrak{F}$, derart daß für alle $f \in \mathrm{M}_0$ gilt $\mu(\mathrm{B} \setminus \mathrm{T}_f) = 0$. Dann gehört f_0 zu $\mathcal{F}^p(\mu)$ und $\mathfrak{F}$ konvergiert im p-ten Mittel gegen f_0.*

Beweis. — Nach Axiom (B3) existiert ein $g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}(g)$. N. Vor. existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\mathrm{M}_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ mit $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ μ-f.ü. für alle $f \in \mathrm{M}_\varepsilon$. Somit gilt für alle $f \in \mathrm{M}_\varepsilon \cap \mathrm{M}_0$:

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \,.\, g(x) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Daraus folgt aber: $\mathrm{N}_p(f - f_0) \leqslant \varepsilon \,.\, \mathrm{N}_p(g)$. Wegen $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{F}^p(\mu)$ ist $\mathrm{N}_p(g)$ endlich, womit die Behauptung bewiesen ist. □

2.4. *Die $\mathcal{L}^p$-Räume* $(1 \leqslant p < \infty)$.

Definition 2.4.1. — *Eine numerische μ-f.ü. auf X definierte Funktion heißt p-fach μ-integrierbar $(1 \leqslant p < \infty)$, wenn die Funktion $|f|^{p-1}.f$ μ-integrierbar ist.*

$\mathcal{L}^p(\mu)$ bezeichne den Vektorraum aller reellen und auf ganz X definierten p-fach μ-integrierbaren Funktionen. Offensichtlich gilt:

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{X} : |f|^{p-1}.f \in \mathcal{L}^1(\mu)\}.$$

Da μ^* auf $\mathfrak{L}^1$ endlich ist, ist $\mathfrak{L}^p$ offenbar ein lokalkonvexer Teilraum von $\mathfrak{F}^p(\mu)$. L^p bezeichne den $\mathfrak{L}^p$ zugeordneten normierten Raum, d.h. $\mathrm{L}^p := \mathfrak{L}^p/\mathfrak{N}^p$ mit

$$\mathfrak{N}^p = \{f \in \mathfrak{L}^p : \mathrm{N}_p(f) = 0\}.$$

Satz 2.4.2. — *Für jedes* $\mu \in \mathfrak{M}_+(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$ *und jede reelle Zahl* $p \geqslant 1$ *bezeichne* $h_p^\mu \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *den Abschluß von* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ *in dem lokalkonvexen Raum* $\mathfrak{F}^p(\mu)$. *Für jede positive reelle Funktion* f *auf* X *sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in h_p^\mu \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$

(ii) $-\infty < \mu_*(f^p) = \mu^*(f^p) < +\infty$

(iii) $f^p \in \mathfrak{L}^1(\mu)$

(iv) $f \in \mathfrak{L}^p(\mu)$.

Beweis. — Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 2.3.2; diejenige von (iii) und (iv) aus der Definition von $\mathfrak{L}^p(\mu)$. Es bleibt zu zeigen:

(iii) $\to$ (i): N. Theor. 2.1.4 (ii) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $h \in \mathfrak{U}^\mu$ mit $f^p \leqslant h$ und $\mu(h - f^p) < \varepsilon$. Mit Hilfe der elementaren Ungleichung

$$(a - b)^p \leqslant a^p - b^p \quad (0 \leqslant b \leqslant a,\ 1 \leqslant p < \infty)$$

folgt

$$\mathrm{N}_p(f - h^{1/p})^p = \mu^*((h^{1/p} - f)^p) \leqslant \mu(h - f^p) < \varepsilon.$$

Ferner existiert zu $h \in \mathfrak{U}^\mu$ n. Satz 2.1.2 ein $g \in {}_+\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $g \leqslant h$ und $\mu(h - g) < \varepsilon$. Hieraus folgt analog:

$$\mathrm{N}_p(h^{1/p} - g^{1/p})^p = \mu^*((h^{1/p} - g^{1/p})^p) \leqslant \mu(h - g) < \varepsilon.$$

Somit gilt

$$\mathrm{N}_p(f - g^{1/p}) \leqslant \mathrm{N}_p(f - h^{1/p}) + \mathrm{N}_p(h^{1/p} - g^{1/p}) < 2\varepsilon^{1/p}$$

mit $g^{1/p} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$.

(i) $\to$ (iv): Wegen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{L}^p \subset \mathfrak{F}^p$ genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{L}^p_+$ abgeschlossen ist in $\mathfrak{F}^p_+$. Diese Tatsache beweist man mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Lemma 2.4.3. — *Für beliebige positive reelle Funktionen* f, g *auf* X *gilt:*

$$\mathrm{N}_1(f^p - g^p) \leqslant p \,.\, \mathrm{N}_p(f - g) \,.\, (\mathrm{N}_p(f)^{p-1} + \mathrm{N}_p(g)^{p-1}).$$

Beweis. — (nach Stone [39]) Mit Hilfe des Mittelwertsatzes beweist man die folgende elementare Ungleichung von Mazur [31]:

$$|a^p - b^p| \leqslant p . a - b| . (a^{p-1} + b^{p-1}) \quad \forall a,\ b \in \mathbf{R}_+$$

Mit Hilfe der Ungleichungen von Hölder und Minkowski (Eigenschaften (η) und (ϑ) von μ^*) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_1(f^p - g^p) &\leqslant p . \mathrm{N}_p(f - g) . \mathrm{N}_q(f^{p-1} + g^{p-1}) \text{ mit } 1/p + 1/q = 1 \\ &\leqslant p . \mathrm{N}_p(f - g) . (\mathrm{N}_1(f^{(p-1)q})^{1/q} + \mathrm{N}_1(g^{(p-1)q})^{1/q}) \\ &= p . \mathrm{N}_p(f - g) . (\mathrm{N}_p(f)^{p/q} + \mathrm{N}_p(g)^{p/q}) \end{aligned}$$

Wegen $p/q = p - 1$ ist damit das Lemma bewiesen.

Sei nun $f_0 \in \mathcal{F}^p_+ \setminus \mathcal{L}^p_+$. Dann existiert n. Satz 2.3.2 eine reelle Zahl $\alpha > 0$ mit $\mu^*(f_0^p) - \mu_*(f_0^p) = \alpha$. Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}^p_+$ folgt dann aus (δ):

$$\mu^*(f^p) = \mu^*((f^p - f_0^p) + f_0^p) \geqslant \mu_*(f^p - f_0^p) + \mu^*(f_0^p)$$

sowie

$$\mu_*(f^p) = \mu_*(f_0^p + (f^p - f_0^p)) \leqslant \mu_*(f_0^p) + \mu^*(f^p - f_0^p).$$

Hieraus folgt:

$$\mu^*(f^p) - \mu_*(f^p) \geqslant \alpha - 2 . \mu^*(|f_0^p - f^p|).$$

N. Lemma 2.4.3 ist aber

$$\mu^*(|f_0^p - f^p|) = \mathrm{N}_1(f_0^p - f^p) < \alpha/2$$

für

$$\mathrm{N}_p(f_0 - f) < \delta = \frac{\alpha}{6p . \mathrm{N}_p(f_0)^{p-1}} \wedge 1.$$

Somit gilt für alle $f \in \mathrm{U}_\delta(f_0) = \{f \in \mathcal{F}^p_+ :\ \mathrm{N}_p(f_0 - f) < \delta\}$ $\mu_*(f^p) < \mu^*(f^p)$ und damit $f \notin \mathcal{L}^p_+$. □

Aus Satz 2.4.2 folgt nun unmittelbar das folgende Theorem, das die Verbindung zu den Fortsetzungsmethoden von Stone und Bourbaki herstellt.

THEOREM 2.4.4. — *Für jedes* $\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ *und jede reelle Zahl* $p \geqslant 1$ *ist der Raum* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *der Abschluß von* $\mathcal{K}(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ *in dem lokalkonvexen Raum* $\mathcal{F}^p(\mu)$.

Beweis. — Die folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz aufgrund der Beziehung $|f|^{p-1} . f = (f^+)^p - (f^-)^p$. □

Das Theorem 2.4.4 besagt also: Die p-fach integrierbaren Funktionen auf $(X, \mathfrak{B})$ sind genau die Limiten der konvergenten Folgen in $\mathcal{K}(X, \mathfrak{B})$ bzgl. der Topologie der Konvergenz im p-ten Mittel.

KOROLLAR 2.4.5. — *$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorverband.*

Beweis. — Aus $||f| - |g|| \leqslant |f - g|$ folgt

$$N_p(|f| - |g|) \leqslant N_p(f - g) < \varepsilon.$$

KOROLLAR 2.4.6. — *Für alle reellen Zahlen $p \geqslant 1$ und $q \geqslant 1$ gilt: Die Funktion f gehört genau dann zu $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn die Funktion $|f|^{\frac{p}{q}-1}.f$ zu $\mathcal{L}^q(\mu)$ gehört.*

Beweis. — Sei $g := |f|^{\frac{p}{q}-1}.f$. Dann gilt n. Def. von $\mathcal{L}^p$:

$$f \in \mathcal{L}^p \longleftrightarrow |f|^{p-1}.f \in \mathcal{L}^1 \longleftrightarrow |g|^{q-1}.g \in \mathcal{L}^1 \longleftrightarrow g \in \mathcal{L}^q. \square$$

Die Bedeutung des Korollars 2.4.6 das hier natürlich einfach aus der Definition der $\mathcal{L}^p$-Räume folgt, beruht darin, daß sich nun aufgrund des Theorems 2.4.4 die $\mathcal{L}^p$-Räume auch als Abschluß von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ in $\mathcal{F}^p(\mu)$ interpretieren lassen. Für den Spezialfall, daß $(X, \mathfrak{B})$ lokalkompakt ist, erhält man damit das Theorem 7 von Bourbaki [7], p. 139. Dieses Theorem, das ja die Definition der $\mathcal{L}^p$-Räume nach Bourbaki erst rechtfertigt, wird in [7] unter Benutzung des Theorems der abzählbaren Konvexität, der Vollständigkeit der $\mathcal{L}^p$-Räume sowie des Satzes von Lebesgue bewiesen. Diese Hilfsmittel stehen hier aber i. allg. nicht zur Verfügung — und werden auch nicht benötigt, wie der Beweis des Theorems 2.4.4 zeigt, bei dem lediglich die Ungleichungen von Minkowski und Hölder verwendet wurden. Es handelt sich hier also um einen allgemeineren Zusammenhang, der insbesondere nicht von der σ-Stetigkeit des zugrundeliegenden Maßes abhängt. Das bedeutet aber, daß sich auch für das Riemann-Integral (vgl. 3.1) die $\mathcal{L}^p$-Räume völlig analog zum Lebesgue-Integral definieren lassen — nämlich als Abschluß von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ in den lokalkonvexen Räumen $\mathcal{F}^p(\mu)$.

Die bisherigen Resultate galten für beliebige Maße μ auf $(X, \mathfrak{B})$ da — wie gesagt — keine Stetigkeitsannahmen über μ

benötigt wurden. Für σ-stetige Maße läßt sich nun das Theorem der abzählbaren Konvexität (Theorem 2.4.8) auf den $\mathscr{L}^p$-Räumen beweisen, aus dem dann die bekannten spezifisch maßtheoretischen Aussagen wie Vollständigkeit der $\mathscr{L}^p$-Räume, Monotones Konvergenztheorem und Satz von Lebesgue ([7], [39]) folgen.

Satz 2.4.7. — *Sei* $\mu \in \mathcal{M}^\sigma(X, \mathcal{B})$. *Dann gilt für jede aufsteigende Folge* $(f_n) \subset \mathscr{L}^1(\mu)$:

$$\mu^*\left(\sup_n f_n\right) = \sup_n \mu^*(f_n).$$

Beweis. — Wegen der Monotonie von μ^* ist nur zu zeigen « $\leqslant$ ». N. Theor. 2.1.4 (ii) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder natürlichen Zahl n ein $h_n \in \mathfrak{U}^\mu$ mit $f_n \leqslant h_n$ und

$$\mu(f_n) \leqslant \mu(h_n) \leqslant \mu(f_n) + \varepsilon . 2^{-n}.$$

Für die Funktionen $g_n := h_1 \vee \cdots \vee h_n \in \mathfrak{U}^\mu$ zeigt man mit Hilfe vollständiger Induktion (vgl. [7], p. 113) :

$$\mu(g_n) \leqslant \mu(f_n) + \varepsilon . (1 - 2^{-n}) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Da (g_n) eine aufsteigende Folge in $\mathfrak{U}^\mu$ ist, die die Folge (f_n) majorisiert, folgt aus (ε) :

$$\mu^*(\sup f_n) \leqslant \mu^*(\sup g_n) = \sup \mu(g_n) \leqslant \sup \mu(f_n) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist der Satz bewiesen. □

Theorem 2.4.8. — *Ist* $\mu \in \mathcal{M}^\sigma(X, \mathcal{B})$, *so gilt für jede Folge* $(f_n) \subset \mathscr{L}^p_+(\mu)$:

$$N_p\Big(\sum_n f_n\Big) \leqslant \sum_n N_p(f_n) \quad \text{(abzählbare Konvexität)}$$

Beweis. — Man betrachte die Funktionen $f := \sum_n f_n$ und $g_n := f_1 + \cdots + f_n \in \mathscr{L}^p$ $(n \in \mathbf{N})$. Dann gehören die Funktionen g_n^p zu $\mathscr{L}^1$ und es gilt $f^p = \sup_n g_n^p$. N. Satz 2.4.7 gilt $\mu^*(f^p) = \sup_n \mu(g_n^p)$. Wegen $N_p(g_n) \leqslant \sum_{K=1}^n N_p(f_k)$ folgt somit :

$$N_p(f) = \sup_n N_p(g_n) \leqslant \sup_n \sum_{K=1}^n N_p(f_k). \; □$$

Satz 2.4.9. — *Ist* $\mu \in \mathcal{M}^{\sigma}(X, \mathcal{B})$, *so ist der lokalkonvexe Raum* $\mathcal{L}^{p}(\mu)$ *vollständig und der zugehörige normierte Raum* $L^{p}(\mu)$ *ein Banachraum.*

Beweis. — Dies folgt aufgrund des Theorems 2.4.8 völlig analog wie in [7], pp. 127. □

2.5. *Konvergenzsätze.*

Für jedes Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ gilt der folgende Konvergenzsatz :

Satz 2.5.1. — *Sei* $\mathcal{F}$ *ein Filter auf* $\mathcal{L}^{p}(\mu)$, *der* μ-f.ü. *auf* X *gleichmäßig gegen die reelle Funktion* f_0 *konvergiert. Ferner existiere ein* $B \in \mathcal{B}$ *und ein* $M_0 \in \mathcal{F}$, *derart daß gilt* $\mu(B \setminus T_f) = 0$ *für alle* $f \in M_0$. *Dann ist* f_0 *p-fach* μ-*integrierbar und* $\mathcal{F}$ *konvergiert im p-ten Mittel gegen* f_0.

Beweis. — Der Satz folgt unmittlebar aus Satz 2.3.3 und Theor. 2.4.4. □

Ist das Maß μ σ-additiv, so steht das Theorem der abzählbaren Konvexität (Theorem 2.4.8) zur Verfügung. Mit seiner Hilfe lassen sich nun für die $\mathcal{L}^{p}$-Räume die bekannten Konvergenzsätze der Maßtheorie, nämlich :

Monotones Konvergenztheorem (Satz von Beppo Levi)
Fatou'sches Lemma
Satz von Lebesgue

beweisen. Die Beweise verlaufen aufgrund des Theorems 2.4.8 völlig analog wie bei den entsprechenden Aussagen für Radonmaße (siehe [7], p. 136-38), so daß auf deren Ausführung verzichtet werden kann. Für die Banachräume L^{p} läßt sich das Monotone Konvergenztheorem verschärfen zu der Aussage :

Satz 2.5.2. — *Ist* $\mu \in \mathcal{M}^{\sigma}(X, \mathcal{B})$, *so ist* $L^{p}(\mu)$ *ein vollständiger Vektorverband.*

Der Beweis verläuft ebenfalls analog zu [7], p. 134.

2.6. *Integration vektorwertiger Funktionen.*

Gegeben sei ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_{+}(X, \mathcal{B})$ und ein Banachraum F über **R**. F^{X} bezeichne die Menge aller Abbildungen von X in F. $\mathcal{K}_F(X, \mathcal{B})$ oder kurz $\mathcal{K}_F$ sei die Menge aller $g \in F^X$ der Form:

(6) $$g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \quad (a_i \in F,\ g_i \in \mathcal{K}(X, \mathcal{B})).$$

Für $F = \mathbf{R}$ gilt offenbar $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}$.

Für jedes $a \in F$ bezeichne $|a|$ die Norm von a. Setzt man für jedes $1 \leqslant p < \infty$ und jede Abbildung $f \in F^X$.

$$N_p(f) := \mu^*(|f|^p)^{1/p},$$

so ist wegen der Eigenschaften (γ), (δ) und (η) von μ^* N_p eine Halbnorm auf dem Vektorraum

$$\mathcal{F}_F^p = \mathcal{F}_F^p(\mu) := \{f \in F^X : N_p(f) < \infty\}.$$

Satz 2.6.1. — $\mathcal{K}_F$ *ist ein linearer Unterraum des lokalkonvexen Raumes* $\mathcal{F}_F^p$.

Beweis. — Sei g von der Gestalt (6). Dann gilt wegen $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{F}^p$:

$$N_p(g) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_p(a_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} |a_i| N_p(g_i) < \infty. \ \square$$

Definition 2.6.2. — (*a*) $\mathcal{L}_F^1 = \mathcal{L}_F^1(\mu)$ *bezeichne den Abschluß von* $\mathcal{K}_F$ *in dem lokalkonvexen Raum* $\mathcal{F}_F^1(\mu)$.

(*b*) Für jede reelle Zahl $p \geqslant 1$ heiße

$$\mathcal{L}_F^p = \mathcal{L}_F^p(\mu) := \{f \in F^X : |f|^{p-1} f \in \mathcal{L}_F^1(\mu)\}$$

die Menge der *p-fach integrierbaren Abbildungen von* X *in* F. Aufgrund des Theorems 2.4.4 stimmt die obige Definition für den Fall $F = \mathbf{R}$ mit der in 2.1 bzw. 2.4 gegebenen überein. Für jede Abbildung $f \in F^X$ und jedes $\nu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{x_j} \in \mathcal{E}$ ist

$$\nu(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

wohl definiert in F. Man kann somit jedes $f \in F^X$ auch als eine lineare Abbildung $\nu \to \nu(f)$ von $\mathcal{E}$ in F auffassen. Ist $\mathcal{F}_\mu$ der nach 2.1 dem Maß μ zugeordnete Filter auf $\mathcal{E}_+$, so ist folglich $f(\mathcal{F}_\mu)$ eine Filterbasis auf F.

Theorem 2.6.3. — *Für alle* $g \in \mathcal{L}^1_F(\mu)$ *ist* $g(\mathcal{F}_\mu)$ *konvergent.*

Beweis. — Da F ein Banachraum ist, genügt es z.z.: $g(\mathcal{F}_\mu)$ ist ein Cauchyfilter auf F.

(a) Sei zunächst $g \in \mathcal{K}_F$, also $g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ mit $a_i \in F$ und $g_i \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$. Dann gilt für jedes $\nu \in \mathcal{E}$ die Beziehung:

$$\nu(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(g_i).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} |\nu(g) - \nu'(g)| &= \Big|\sum_i a_i(\nu(g_i) - \nu'(g_i))\Big| \\ &\leqslant \sum_i |a_i|\,|\nu(g_i) - \nu'(g_i)| \\ &< \varepsilon \sum_i |a_i| \quad \forall \nu,\ \nu' \in M_{g_1 \dots g_n,\, \varepsilon}. \end{aligned}$$

(b) Zu $f \in \mathcal{L}^1_F$ und $\varepsilon > 0$ existiert n. Def. von $\mathcal{L}^1_F$ ein g aus $\mathcal{K}_F$ mit

$$N_1(f - g) = \limsup_{\nu,\, \mathcal{F}_\mu} \nu(|f - g|) < \varepsilon.$$

Somit existiert ein $M_0 \in \mathcal{F}_\mu$, so daß für alle $\nu \in M_0$ gilt:

$$|\nu(f) - \nu(g)| \leqslant \nu(|f - g|) < \varepsilon.$$

Daraus folgt zusammen mit (a):

$$|\nu(f) - \nu'(f)| < 3\varepsilon \quad \forall \nu,\ \nu' \in M_0 \cap M_{g_1 \dots g_n,\, \varepsilon'}$$

mit $\varepsilon' = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^{-1}$, falls wenigstens ein $a_i \neq 0$, und $\varepsilon' = \varepsilon$ sonst. □

Bekanntlich wird von Bourbaki [7], p. 75 bzw. 140, das Integral der μ-integrierbaren Funktionen mit Werten in einem Banachraum F definiert als die stetige Fortsetzung von $\mathcal{K}_F$ auf $\mathcal{L}^1_F$ derjenigen Linearform $g \to \int g\, d\mu$ auf $\mathcal{K}_F$ mit der Eigenschaft

$$\left\langle \int g\, d\mu,\ z' \right\rangle = \int \langle g,\ z' \rangle\, d\mu \quad \forall g \in \mathcal{K}_F \quad \forall z' \in F'.$$

Das Theorem 2.6.3 gestattet nun die folgende einfache Integraldefinition:

Definition 2.6.4. — *Für jedes* $f \in \mathfrak{L}^1_F(\mu)$ *heiße*

$$\int f\,d\mu := \lim_{\mathcal{F}_\mu} f$$

das Integral von f (bzgl. μ).

Man verifiziert leicht, daß das so definierte Integral die Eigenschaft besitzt, die bei Bourbaki als Definition verwendet wird.

Satz 2.6.5. — *Für jedes* $f \in \mathfrak{L}^1_F$ *und jedes* $z' \in F'$ *gilt:*

$$(7) \qquad \langle \int f\,d\mu,\ z'\rangle = \int \langle f,\ z'\rangle\,d\mu.$$

Beweis. — Für jedes $\nu \in \mathcal{E}$ ist die Beziehung (7) evident. Aus der Stetigkeit von z' auf F folgt:

$$\lim_{\nu, \mathcal{F}_\mu} \nu(\langle f,\ z'\rangle) = \lim_{\nu, \mathcal{F}_\mu} \langle \nu(f),\ z'\rangle = \langle \lim_{\mathcal{F}_\mu} f,\ z'\rangle. \ \square$$

Satz 2.6.6. — *Für jedes* $f \in \mathfrak{L}^1_F$ *gilt:*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu = N_1(f).$$

Beweis. — Für $\nu \in \mathcal{E}_+$ gilt $|\nu(f)| \leqslant \nu(|f|)$. Hieraus folgt:

$$|\lim_{\mathcal{F}_\mu} \nu(f)| = \lim_{\mathcal{F}_\mu} |\nu(f)| \leqslant \lim_{\mathcal{F}_\mu} \nu(|f|). \ \square$$

Satz 2.6.7. — *Wenn die Funktion* f *zu* $\mathfrak{L}^p_F$ *gehört, so gehört die Funktion* $|f|$ *zu* $\mathfrak{L}^p$. *Die Abbildung* $f \to |f|$ *von* $\mathfrak{L}^p_F$ *in* $\mathfrak{L}^p$ *ist gleichmäßig stetig* (bzgl. *der Topologie der Konvergenz* im p-ten *Mittel*).

Beweis. — N. Def. von $\mathfrak{L}^p_F$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{K}_F$ mit $N_1(|f|^{p-1}f - g) < \varepsilon$. Die Funktion $|g|$ gehört zu $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ und es gilt:

$$N_1(|f|^p - |g|) \leqslant N_1(|f|^{p-1}f - g) < \varepsilon.$$

Aus Theor. 2.4.4 folgt somit $|f| \in \mathfrak{L}^p$. Für $f, g \in \mathfrak{L}^p_F$ gilt ferner:

$N_p(|f| - |g|) \leqslant N_p(f-g)$, woraus die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung $f \to |f|$ folgt. □

2.7. *Maße auf lokalbeschränkten uniformen Räumen.*

Jeder lokalbeschränkte Raum $(X, \mathfrak{B})$ ist p. Def. vollständig regulär und somit uniformisierbar. Bisher wurde nur die Topologie von $(X, \mathfrak{B})$ benutzt, ohne auf eine spezielle uniforme Struktur Bezug zu nehmen. Zeichnet man jedoch auf $(X, \mathfrak{B})$ eine feste, mit der Topologie von X verträgliche, uniforme Struktur U aus und ersetzt den bisher betrachteten Ring $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ durch den Unterring $\mathfrak{K}(X, U, \mathfrak{B})$ aller U-gleichmäßig stetigen, beschränkten, reellen Funktionen auf X mit $\mathfrak{B}$-beschränktem Träger, so läßt sich das bisher behandelte maßtheoretische Konzept unter Beibehaltung aller Definitionen und Sätze ohne weiteres ausdehnen auf Maße, die nur auf Unterringen der Baireschen Mengen definiert sind. Wir definieren also :

Definition 2.7.1. — $(X, U, \mathfrak{B})$ *heißt ein lokalbeschränkter uniformer Raum, wenn gilt:*

1. U *ist eine separierte uniforme Struktur auf* X;

2. $\mathfrak{B}$ *ist eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen* B *von* X *mit folgenden Eigenschaften:*

(B1) $\mathfrak{B}$ *ist aufsteigend filtrierend*

(B2) $\mathfrak{B}$ *überdeckt* X

(B3) *Zu jedem* $B_i \in \mathfrak{B}$ *existieren ein* $B_j \in \mathfrak{B}$ *und eine gleichmäßig stetige reelle Funktion* f *auf* X, *derart daß gilt:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_i \\ 0 & x \in \complement B_j \end{cases}$$

$\mathfrak{K}(X, U, \mathfrak{B})$ sei die Menge aller gleichmäßig stetigen, beschränkten, reellen Funktionen auf X mit beschränktem Träger. Auf $\mathfrak{K}$ sind die Topologien $\mathfrak{J}^u_{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{J}^s_{\mathfrak{B}}$ wie in Abschnitt 1.2 bzw. 1.4 definiert. Der Raum der Maße $\mathfrak{M}(X, U, \mathfrak{B})$ ist der Dualraum von $(\mathfrak{K}, \mathfrak{J}^u_{\mathfrak{B}})$ und hängt nun außer vom Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$ auch von der Uniformität U ab. Alle Definitionen und Sätze der vorigen Abschnitte behalten ihre Gültigkeit, wobei überall der Ring $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ durch den Ring $\mathfrak{K}(X, U, \mathfrak{B})$ zu ersetzen ist.

Insbesondere sind die Baireschen Mengen von $(X, U, \mathfrak{B})$ analog zu Def. 2.2.9 definiert als der σ-Ring, der von dem System

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}(U, \mathfrak{B}) &= \{Z \subset X : Z = g^{-1}(0) \text{ für ein } g \in \mathcal{K}(X, U, \mathfrak{B}), \\ &\qquad\qquad Z \text{ beschränkt bzgl. } \mathfrak{B}\} \\ &= \{Z \in \mathfrak{Z}(\mathcal{K}) : Z \text{ beschränkt}\}\end{aligned}$$

erzeugt wird. Das System $\mathfrak{Z}(U, \mathfrak{B})$ ist identisch mit dem System aller Mengen der Form $(g) : = [g = 1]$ für ein $g \in \mathcal{K}(X, U, \mathfrak{B})$, so daß die Baireschen Mengen von $(X, U, \mathfrak{B})$ auch als der von dem System der « Eins »-Mengen von $\mathcal{K}(X, U, \mathfrak{B})$ erzeugte σ-Ring definiert werden können. Somit hängen die Baireschen Mengen von $(X, U, \mathfrak{B})$ außer von $\mathfrak{B}$ nun auch von der uniformen Struktur U ab, und sind i. allg. echt enthalten in den Baireschen Mengen von $(X, \mathfrak{B})$ (ohne Berücksichtigung von U). Dagegen sind die Borelschen Mengen von $(X, U, \mathfrak{B})$ von der spezielle uniformen Struktur U unabhängig, da sie nach Def. 2.2.9 von dem System $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ der abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen erzeugt werden und somit nur von der Topologie von X abhängen. Hierin äußert sich die Tatsache, daß die τ-stetigen Maße auf $(X, U, \mathfrak{B})$ stets auf genau eine Weise auf den Ring $\mathcal{K}(X, \mathfrak{B})$ fortsetzbar sind. Genauer gilt :

Satz 2.7.2. — *Jedes τ-stetige Maß auf $(X, U, \mathfrak{B})$ läßt sich auf genau eine Weise zu einem τ-stetigen Maß auf $(X, \mathfrak{B})$ fortsetzen.*

Beweis. — Jede positive stetige Funktion auf einem uniformen Raum ist obere Einhüllende der von ihr majorisierten gleichmäßig stetigen Funktionen. Hieraus folgt, daß für jedes $g \in \mathcal{K}_+(X, \mathfrak{B})$ ein aufst. filtr. System $H \subset \mathcal{K}(X, U, \mathfrak{B})$ existiert mit $g = \sup H$. Ferner existiert zu g nach (B3) ein $g_0 \in \mathcal{K}(X, U, \mathfrak{B})$ mit $g \leqslant \|g\| \cdot g_0$. Somit gilt :

$$\sup_{h \in H} \mu(h) \leqslant \|g\| \cdot \mu(g_0) < \infty.$$

Folglich ist g gemäß Def. 2.1.1 eine μ-Oberfunktion, falls μ τ-stetig. Nach Lemma 2.1.3 ist somit μ auf genau eine Weise zu einer positiven Linearform auf $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ - \mathcal{K}_+$ fortsetzbar, die nach Abschnitt 2.3 (ε) τ-stetig ist. Also gilt $\mu \in \mathcal{M}^\tau(X, \mathfrak{B})$. □

Die Einführung einer uniformen Struktur auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ bedeutet somit nur für unstetige und σ-stetige Maße eine Erweiterung in maßtheoretischer Hinsicht. Ist speziell $\mathfrak{B}$ ein System kompakter Mengen, d.h. ist X lokalkompakt, so ist ebenfalls die Maßtheorie auf $(X, \mathfrak{B})$ von der speziellen uniformen Struktur unabhängig, da wegen der eindeutigen Uniformisierbarkeit der kompakten Mengen gilt: $\mathfrak{K}(X, U, \mathfrak{B}) = \mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ für alle verträglichen U auf X.

3. Beziehungen zu den « klassischen » Integrationstheorien.

3.1. *Das Riemann-Integral für unstetige Maße.*

Für jedes positive Maß μ auf $(X, \mathfrak{B})$ erfüllt das Tripel $(X, \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ die Voraussetzungen der Theorie des Riemann-Integrals nach Loomis [29]. Somit sind die Loomisschen Resultate anwendbar, und es erhebt sich die Frage, in welchem Zusammenhang diese mit den in 2.1 und 2.2 gewonnenen Ergebnissen stehen.

Nach Loomis leitet sich aus $(X, \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ ab:

(*a*) Das System $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ der μ-quadrierbaren Teilmengen von X;

(*b*) Der vollständige Inhalt $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{Q}$;

(*c*) Das System $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ der bzgl. μ (eigentlich) Riemann-integrierbaren Funktionen auf X;

(*d*) Das Riemann-Integral $\bar{\mathrm{I}}(g) = \int g \, d\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{G}$.

Satz 3.1.1. — *Für jedes unstetige* (7) *positive Maß* μ *auf* $(X, \mathfrak{B})$ *gilt:*

(i) $\mathfrak{S}_\mu$ *sei das System der nach* 2.2 μ*-integrierbaren Mengen von* X *und* μ *der zugehörige Inhalt. Dann gilt*

$$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{Q}(\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$$

und die Inhalte μ *und* $\tilde{\mu}$ *stimmen überein.*

(7) Ist μ stetig, so wird μ wegen des Prinzips der Maximalität der Fortsetzung über die Riemann-integrierbaren Funktionen hinaus auf die Lebesgue-integrierbaren fortgesetzt. In diesem Fall gilt somit $\mathfrak{Q} \subset \bar{\mathfrak{S}}_\mu$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ und die Restriktionen von μ auf $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathcal{G}$ stimmen mit $\tilde{\mu}$ bzw. $\bar{\mathrm{I}}$ überein.

(ii) $\mathcal{L}^1(\mu)$ *sei der Vektorverband der nach* 2.1 μ*-integrierbaren Funktionen auf* X. *Dann gilt*

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{G}(\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$$

und die Integrale μ *und* $\bar{\mathrm{I}}$ *stimmen überein.*

Beweis. — Wir zeigen zunächst (ii). N. Vor. ist $\mu \in \mathcal{M}_{\mathfrak{B}} \setminus \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\sigma}$. Folglich, da $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ein Vektorverband ist, gilt $\mathcal{U}^{\mu} = \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$. N. Theor. 2.1.4 (iv) besteht somit $\mathcal{L}^1(\mu)$ genau aus denjenigen reellen Funktionen f auf X mit der Eigenschaft:

$$(8) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists g,\, h \in \mathcal{K} : g \leqslant f \leqslant h \wedge \mu(h - g) < \varepsilon.$$

Das ist aber gerade die Definition der zweiseitigen Vervollständigung im Sinne von Loomis $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{V}(\mathcal{K}, \mu)$. Wegen $\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{K}} = \mathcal{L}^1$ bleibt nur zu zeigen: Jedes $f \in \overline{\mathcal{K}}$ ist Riemann-integrierbar. Für jedes $f \in \overline{\mathcal{K}}$ gilt aber: (a) f ist μ-meßbar im Sinne von Loomis [29], S. 171; (b) f ist beschränkt; (c) f verschwindet im Komplement einer μ-quadrierbaren Menge. (c) ist nach Bauer [3], S. 452, äquivalent zu:

$$(c') \qquad \exists k \in \mathcal{K}_+ : k(x) < 1 \longrightarrow f(x) = 0.$$

Beweis von (c'): Zu den Funktionen g, h in (8) existieren nach Axiom (B3) Funktionen g_0, $h_0 \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $\mathrm{T}_g \subset \mathrm{E}(g_0)$ und $\mathrm{T}_h \subset \mathrm{E}(h_0)$. Für die Funktion $k := |g_0| \vee |h_0| \in \mathcal{K}_+$ gilt dann:

$$k(x) < 1 \longrightarrow x \in \complement(\mathrm{T}_g \cup \mathrm{T}_h) \longrightarrow 0 = g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) = 0.$$

Hiermit ist (c') gezeigt. Jede Funktion f mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) ist aber nach Bauer [3], S. 452, Riemann-integrierbar.

Die Identität von μ und $\bar{\mathrm{I}}$ folgt aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung von μ auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ gem. Theor. 2.1.4 (i).

(i) folgt unmittelbar aus (ii) aufgrund der Beziehungen:

$$\mathrm{A} \in \mathfrak{S}_{\mu} \longleftrightarrow 1_{\mathrm{A}} \in \mathcal{L}^1(\mu) \longleftrightarrow 1_{\mathrm{A}} \in \overline{\mathcal{K}} \longleftrightarrow \mathrm{A} \in \mathcal{Q}. \quad \square$$

3.2. *Das Daniell-Integral für* σ*-stetige Maße.*

Für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^{\sigma}(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$ erfüllt das Tripel $(\mathrm{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ die Voraussetzungen der Integrationstheorien von Daniell [11] bzw. Stone [39]; denn nach Lemma 2.1.3 gilt für jede aufsteigende Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $\sup g_n \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$:

$$\text{(M)} \qquad \mu\left(\sup_n g_n\right) = \sup_n \mu(g_n).$$

μ ist somit ein Daniell- bzw. erstes Stone-Integral auf $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$. Von μ ausgehend definiert man nach dem ersten Stoneschen Integrationsprozeß [39/1] für jede positive numerische Funktion f auf X ein Oberintegral $\overline{\mu}(f)$ wie folgt: $\sigma(f)$ bezeichne die Menge aller aufsteigenden Folgen $(g_n) \subset \mathcal{K}_+$ mit $f \leqslant \sup_n g_n$; man definiert (vgl. [4], p. 56):

$$\text{(9)} \qquad \overline{\mu}(f) = \begin{cases} +\infty & (\sigma(f) = \emptyset) \\ \inf\limits_{(g_n) \in \sigma(f)} \left(\sup\limits_n \mu(g_n)\right) & (\sigma(f) \neq \emptyset) \end{cases}$$

F sei ein Banachraum mit der Norm $|a|$ für $a \in \mathrm{F}$. Für jede Abbildung f von X in F und jede reelle Zahl $p \geqslant 1$ setzt man nach Stone:

$$\tilde{\mathrm{N}}_p(f) := (\overline{\mu}(|f|^p))^{1/p}.$$

Mit Hilfe von $\tilde{\mathrm{N}}_p$ werden bei Stone genau wie in Abschnitt 2.6 die Mengen $\tilde{\mathcal{F}}^p_{\mathrm{F}} = \tilde{\mathcal{F}}^p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ und $\tilde{\mathcal{L}}^p_{\mathrm{F}} = \tilde{\mathcal{L}}^p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ definiert. Allerdings läßt Stone als Elemente von $\tilde{\mathcal{F}}^p_{\mathrm{F}}$ und $\tilde{\mathcal{L}}^p_{\mathrm{F}}$ auch Funktionen zu, die nur μ-f.ü. auf X erklärt sind. $\mathcal{F}^p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ und $\mathcal{L}^p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ bezeichne daher die Menge aller reellen Funktionen aus $\tilde{\mathcal{F}}^p_{\mathrm{F}}$ bzw. $\tilde{\mathcal{L}}^p_{\mathrm{F}}$, die auf ganz X definiert sind.

SATZ 3.2.1. — *Sei μ ein strikt* (8) *σ-stetiges Maß auf* $(\mathrm{X}, \mathfrak{B})$. *Für jeden Banachraum* F *und jedes* $1 \leqslant p < \infty$ *sei* $\mathcal{L}^p_{\mathrm{F}}(\mu)$ *der in* 2.6 *definierte lokalkonvexe Raum versehen mit der* N_p-*Halbnorm. Dann ist*

$$\mathcal{L}^p_{\mathrm{F}}(\mu) = \mathcal{L}^p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$$

und die Halbnormen N_p *und* $\tilde{\mathrm{N}}_p$ *(und somit die Integrale der p-fach integrierbaren Abbildungen von* X *in* F*) stimmen auf* $\mathcal{L}^p_{\mathrm{F}}$ *überein.*

Beweis. — (*a*) Sei zunächst $p = 1$ und $\mathrm{F} = \mathbf{R}$. Es gilt folgendes Kriterium für Integrierbarkeit im Sinnes des 1.

(8) Ist μ τ-stetig, so entspricht die Fortsetzungsmethode in § 2 wegen der Maximalität der Fortsetzung dem zweiten STONEschen Integrationsprozeß (siehe 3.3).

Stone-Integrals [23] : Eine positive reelle Funktion f auf X ist genau dann μ-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine aufsteigende Folge $(h_n) \subset \mathcal{K}_+$ und eine fallende Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_+$ existieren mit $\inf g_n \leqslant f \leqslant \sup h_n$ und

$$\sup \mu(h_n) - \inf \mu(g_n) < \varepsilon.$$

Dies ist aber gerade die Aussage (iv) des Theorems 2.1.4. Somit folgt : $\mathcal{L}^1_+(\mu) = \mathcal{L}^1_+(X, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ und damit die Äquivalenz der $\mathcal{L}^1$-Räume. N. Theor. 2.1.4 (ii) gilt außerdem :

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \inf_{f \leqslant h \in \mathfrak{U}^\mu} \mu(h) = \inf_{(h_n) \in \sigma(f)} \sup_n \mu(h_n) = \bar{\mu}(f).$$

Somit stimmen die Halbnormen N_1 und $\tilde{N}_1$ auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ überein.

(*b*) Da die Definitionen der $\mathcal{L}^p$-Räume nach Stone und nach 2.4 identisch sind, folgt aus der Äquivalenz der $\mathcal{L}^1$-Räume auch die Gleichheit der $\mathcal{L}^p$-Räume. Die Gleichheit der Halbnormen N_p und $\tilde{N}_p$ auf $\mathcal{L}^p$ folgt aus der Beziehung

$$|f| \in \mathcal{L}^p \longrightarrow |f|^p \in \mathcal{L}^1$$

und $\mu^* = \bar{\mu}$ auf $\mathcal{L}^1$.

(*c*) Für einen beliebigen Banachraum F folgt die Äquivalenz der $\mathcal{L}^p_F$-Räume für $p = 1$ aus der Übereinstimmung der N_1-Halbnormen auf $\mathcal{L}^1$ und für $1 < p < \infty$ aus den übereinstimmenden Definitionen. □

3.3. *Das Bourbaki-Integral für τ-stetige Maße.*

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}^\tau_+(X, \mathfrak{B})$ ist das Tripel $(X, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ ein stonesches Elementarintegral mit der stärkeren Stetigkeitseigenschaft : Für jedes aufst. filtr. System $(g_\alpha) \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $\sup_\alpha g_\alpha \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ gilt (Lemma 2.1.3) :

$$(\mathrm{M}^*) \qquad \mu\left(\sup_\alpha g_\alpha\right) = \sup_\alpha \mu(g_\alpha).$$

Somit ist der zweite Stonesche Integrationsprozeß [39/IV] anwendbar. Anstelle des in (9) definierten Oberintegrals tritt dabei das wie folgt definierte Oberintegral $\bar{\mu}^*$: Für jede positive numerische Funktion f auf X bezeichne $\tau(f)$ die

Menge aller aufst. filtr. Systeme $H \subset \mathcal{K}_+$ mit $f \leqslant \sup_{g \in H} g$; man definiert (vgl. [4], p. 61) :

$$\overline{\mu}^*(f) := \begin{cases} +\infty & (\tau(f) = \emptyset) \\ \inf\limits_{H \in \tau(f)} \sup\limits_{g \in H} \mu(g) & (\tau(f) \neq \emptyset) \end{cases}$$

Für jedes $1 \leqslant p < \infty$ und jede Abbildung f von X in einen Banachraum F setzt man nach Stone :

$$\tilde{N}_p^*(f) := (\overline{\mu}^*(|f|^p))^{1/p}.$$

Ersetzt man in den Definitionen der Räume $\mathcal{F}_F^p$ und $\mathcal{L}_F^p$ nach dem ersten Integrationsprozeß jeweils die Halbnormen $\tilde{N}_p$ durch $\tilde{N}_p^*$, so erhält man die Räume $\mathcal{F}_F^{p*}$ und $\mathcal{L}_F^{p*}$. Nach [4], p. 61, gelten die Inklusionen $\mathcal{L}_F^p \subset \mathcal{L}_F^{p*}$ und die Halbnormen $\tilde{N}_p$ und $\tilde{N}_p^*$ stimmen auf $\mathcal{L}_F^p$ überein.

SATZ 3.3.1. — *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_+^\tau(X, \mathcal{B})$. *Für jeden Banachraum* F *und jedes* $1 \leqslant p < \infty$ *sei* $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ *der in* 2.6 *definierte lokalkonvexe Raum versehen mit der* N_p*-Halbnorm. Dann ist*

$$\mathcal{L}_F^p(\mu) = \mathcal{L}_F^{p*}(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$$

und die Halbnormen N_p *und* $\tilde{N}_p^*$ *(und somit die Integrale der p-fach integrierbaren Abbildungen von* X *in* F*) stimmen auf* $\mathcal{L}_F^p$ *überein.*

Beweis. — Es genügt, den Satz für den Fall $p = 1$ und $F = \mathbf{R}$ zu beweisen. Die restlichen Überlegungen verlaufen analog wie beim Beweis des Satzes 3.2.1.

Das Kriterium für Integrierbarkeit einer positiven reellen Funktion f auf X im Sinne des zweiten Stone-Integrals lautet [23] : Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren ein aufst. filtr. System $H \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ sowie ein abst. filtr. System $G \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit

$$\inf_{g \in G} g \leqslant f \leqslant \sup_{h \in H} h \qquad \text{und} \qquad \sup_{h \in H} \mu(h) - \inf_{g \in G} \mu(g) < \varepsilon.$$

Diese Bedingung ist für $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^\tau$ jedoch wiederum genau analog zu der Bedingung (iv) des Theorems 2.1.4 Somit stimmen die reellen μ-integrierbaren Funktionen nach 2.1 und nach Stone überein. Ferner folgt aus Theor. 2.1.4 (ii) für jedes $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu)$:

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \inf_{f \leqslant h \in \mathfrak{U}^\mu} \mu(h) = \inf_{H \in \tau(f)} \sup_{h \in H} \mu(h) = \overline{\mu}^*(f). \ \square$$

Wir betrachten noch gesondert den Spezialfall, daß $(X, \mathfrak{B})$ lokalkompakt ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ der Ring aller stetigen reellen Funktionen auf X mit kompakten Träger, und jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ ist ein Radonmaß. Da wegen $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}$ (siehe Satz 1.1.5) die Topologien $\mathfrak{T}^u_{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{T}^c_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ übereinstimmen, ist jedes Radonmaß straff — also speziell τ-stetig. Aufgrund der Äquivalenz der Bourbakischen Integralerweiterung für Radonmaße mit dem zweiten Stoneschen Integrationsprozeß, liefert der Satz 3.3.1 die Übereinstimmung der $\mathcal{L}^p_F$-Räume nach 2.6 und nach Bourbaki [7].

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(X)$ bezeichne die Menge aller numerischen, nach unten halbstetigen Funktionen auf X. Das System $\mathfrak{U}^{\mu}_{+}$ besteht dann n. Def. 2.1.1 und nach Bourbaki [7], p. 106, aus allen $h \in \mathcal{J}_{+}(X)$ mit $\mu(h) < \infty$. Somit liefert Theorem 2.1.4 (iv) folgendes Integrationskriterium:

Satz 3.4. — *Eine positive Funktion f auf X ist genau dann μ-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nach oben halbstetige reelle Funktion g mit kompaktem Träger und eine nach unten halbstetige integrierbare Funktion h existieren, so daß gilt $0 \leqslant g \leqslant f \leqslant h$ und $\int (h - g)\, d\mu < \varepsilon$.*

Man vergleiche die analoge Aussage des Theorems 3 in [7], p. 147. Aus Theor. 2.1.4 (ii) folgt außerdem für jedes $f \in \mathcal{L}^1_{+}(\mu)$:

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \inf_{f \leqslant h \in \mathfrak{U}^{\mu}} \mu(h) = \inf_{\substack{f \leqslant h \\ h \in \mathfrak{J}_{+}}} \sup_{\substack{g \leqslant h \\ g \in \mathfrak{K}}} \mu(g).$$

Dies ist aber gerade die Definition des Oberintegrals nach Bourbaki [7], p. 106.

Hiermit ist noch einmal direkt die Äquivalenz des Bourbaki-Integrals in lokalkompakten Räumen mit dem in § 2 entwickelten Integralbegriff gezeigt.

3.4. *Eingliederung der abstrakten Theorie des Riemann-Integrals nach Loomis.*

In 3.1 wurde gezeigt, daß für jedes unstetige Maß μ die Integrationstheorie auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ äquivalent ist zu der abstrakten Theorie des Riemann-Integrals nach Loomis angewandt auf $(X, \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$. In diesem

Abschnitt soll gezeigt werden, daß auch die Umkehrung gilt. D.h. genauer: Zu jeder positiven Linearform I auf einem Vektorverband $\mathfrak{R}$ von reellen Funktionen, die auf einer beliebigen Menge X definiert sind, existiert ein lokalbeschränkter uniformer Raum $(X, U, \mathfrak{B})$ und ein $\mu \in \mathfrak{M}(X, U, \mathfrak{B})$, (vgl. Abschnitt 2.7) derart daß die Integrationstheorie auf $(X, U, \mathfrak{B})$ bzgl. μ äquivalent ist zu der Loomisschen Theorie angewandt auf $(X, \mathfrak{R}, I)$.

Es dedeutet somit keinen Verlust an Allgemeinheit gegenüber dem Standpunkt von Loomis, stets von dem konkreten Fall eines Maßes auf einem lokalbeschränkten Raum auszugehen. Der « konkrete » Standpunkt hat zudem den Vorteil, daß die zusätzliche Struktur, die durch die Einführung einer Topologie und eines Beschränkungssystems auf der Menge X erzeugt wird, präzisere Aussagen (vgl. Abschnitt 2.2) als im abstrakten Fall ermöglicht.

Im Gegensatz zur Konkretisierung der Loomisschen Theorie mittels Kompaktifizierung durch Bauer [3], bei der der ursprüngliche Definitionsbereich der Funktionen aus $\mathfrak{R}$ durch Einführung von idealen Punkten zu einem lokalkompakten Raum erweitert wird, wird bei der Konkretisierung durch Einführung einer lokalbeschränkten Struktur auf X der Definitionsbereich von $\mathfrak{R}$ beibehalten.

Ausgangspunkt der Loomisschen Theorie sind ([3], [29]):

1° Eine beliebige Menge X mit Elementen $x, y, \ldots$;

2° Ein Vektorverband $\mathfrak{R}$ von reellen Funktionen $f, g, \ldots$ auf X mit der Eigenschaft:

$$1 \wedge g \in \mathfrak{R} \qquad \forall g \in \mathfrak{R} \tag{10}$$

3° Eine positive Linearform I auf $\mathfrak{R}$.

Nach Bauer [3], S. 470-71, bedeutet es in Hinblick auf die Loomissche Theorie keine Einschränkung, über $\mathfrak{R}$ die folgenden drei Zusatzvoraussetzungen zu machen:

(11) Jede Funktion aus $\mathfrak{R}$ ist beschränkt;

(12) $\mathfrak{R}$ ist punktetrennend auf X;

(13) $\forall x \in X \quad \exists g \in \mathfrak{R} : g(x) \neq 0.$

Mit H. Bauer bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_0$ den Teilverband aller beschränkten Funktionen $g_0 \in \mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft:

(14) $$\exists h \in \mathfrak{R}_+ : h(x) < 1 \longrightarrow g_0(x) = 0.$$

Nach [4], p. 63, genügt $\mathfrak{R}_0$ ebenfalls den Bedingungen (10) bis (13). Mit Hilfe des Vektorverbandes $\mathfrak{R}_0$ läßt sich folgende lokalbeschränkte uniforme Struktur auf X einführen:

$U_{\mathfrak{R}}$ sei die gröbste uniforme Struktur auf X, bzgl. welcher alle Funktionen aus $\mathfrak{R}$ auf X gleichmäßig stetig sind. Wegen (12) und (13) ist $U_{\mathfrak{R}}$ separiert.

Lemma 3.4.1. — *Das System*

$$\mathfrak{B} = (\mathrm{E}(g))_{g \in \mathfrak{R}_0}$$

bildet ein Beschränkungssystem auf dem separierten uniformen Raum X.

Beweis. — (B1) folgt unmittelbar aus der Verbandseigenschaft und (B2) aus der Eigenschaft (13) von $\mathfrak{R}_0$. Sei nun $\mathrm{B}_i = \mathrm{E}(g)$ für ein $g \in \mathfrak{R}_0 \subset \mathcal{C}_u(\mathrm{X})$. Wegen (14) existiert ein $h \in \mathfrak{R}_+$ mit $\mathrm{T}_g \subset \mathrm{E}(h)$. Aufgrund der Verbandseigenschaft von $\mathfrak{R}$ läßt sich $h \in \mathfrak{R}_0$ wählen. Somit folgt für $\mathrm{B}_j = \mathrm{E}(h \wedge 1) \in \mathfrak{B}$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathrm{B}_i \\ 0 & x \in \mathrm{CB}_j. \end{cases} \quad \square$$

Satz 3.4.2. — *Zu* $(\mathrm{X}, \mathfrak{R}, \mathrm{I})$ *mit den Eigenschaften* 1°-3° *existieren eindeutig ein lokalbeschränkter uniformer Raum* $(\mathrm{X}, \mathrm{U}, \mathfrak{B})$ *und ein* $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathrm{X}, \mathrm{U}, \mathfrak{B})$ *derart daß gilt:*

(i) *Das System* $\mathfrak{S}_\mu$ *der nach* 2.2 μ*-integrierbaren Mengen von* X *ist identisch mit dem System* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, \mathrm{I})$ *der nach* Loomis I-*quadrierbaren Mengen. Die Inhalte* μ *und* $\tilde{\mu}$ *stimmen überein.*

(ii) *Das System* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *der nach* 2.1 μ*-integrierbaren Funktionen auf* X *ist identisch mit dem System* $\mathcal{G}(\mathfrak{R}, \mathrm{I})$ *der nach* Loomis *Riemann-integrierbaren Funktionen, und die Integrale* μ *und* $\bar{\mathrm{I}}$ *stimmen überein.*

Beweis. — Wie bereits gezeigt, ist X versehen mit der uniformen Struktur $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\mathfrak{R}}$ und dem Beschränkungssystem $\mathfrak{B} = (\mathrm{E}(g))_{g \in \mathfrak{R}_0}$ ein lokalbeschränkter uniformer Raum gem.

Def. 2.7.1 Mit Hilfe von [33] zeigt man, daß jede Funktion $g \in \mathfrak{K} = \mathfrak{K}(X, U, \mathfrak{B})$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathfrak{R}_0$ approximiert werden kann. Folglich läßt sich die Linearform $I_0 = \mathrm{Rest}_{\mathfrak{R}_0} I$ auf genau eine Weise zu einer positiven Linearform μ auf $\mathfrak{K}$ und damit zu einem positiven Maß auf $(X, U, \mathfrak{B})$ fortsetzen.

$\mathfrak{V}(\mathfrak{R}, I) = \overline{\mathfrak{R}}$ bezeichne die zweiseitige Vervollständigung von $\mathfrak{R}$ bzgl. I im Sinne von Loomis. Dann gilt n. Theor. 2.1.4 (iv): $\mathfrak{L}^1(\mu) = \mathfrak{V}(\mathfrak{K}, \mu) =: \overline{\mathfrak{K}}$.

Wir zeigen: $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{I}(\mathfrak{R}, I)$ Da jedes $f \in \mathfrak{K}$ durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden kann und der Bedingung (14) genügt, ist nach [3], Kor. 2 zu Satz 2, f Riemann-integrierbar. Hieraus folgt $\overline{\mathfrak{K}} \subset \overline{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$.

Sei umgekehrt $f \in \mathfrak{I}$. Aus [3], Satz 2, folgt: f gehört genau dann zu $\mathfrak{I}$, wenn f^+ und f^- zu $\mathfrak{I}$ gehören. Sei also o.B.d.A. $f \in \mathfrak{I}_+$. Aus $\mathfrak{I} \subset \overline{\mathfrak{R}}$ folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g, h \in \mathfrak{R}_+ : g \leqslant f \leqslant h \wedge I(h - g) < \varepsilon.$$

Aus [3], Satz 2 u. Lemma 2, sowie aus der Verbandseigenschaft von $\mathfrak{R}$ folgen die Existenz einer natürlichen Zahl n sowie einer Funktion $k_0 \in \mathfrak{R}_0 : |f(x)| \leqslant n$ für alle $x \in X$ und $T_f \subset E(k_0)$. Dann gehören die Funktionen $h_0 = h \wedge nk_0$ sowie $g_0 = g \wedge nk_0$ zu $\mathfrak{R}_0$ und es gilt: $g_0 \leqslant f \leqslant h_0$ sowie $I(h_0 - g_0) \leqslant I(h - g) < \varepsilon$. Also gilt $f \in \overline{\mathfrak{R}}_0$. Aus $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{K}$ folgt aber $\overline{\mathfrak{R}}_0 \subset \overline{\mathfrak{K}}$, folglich $f \in \overline{\mathfrak{K}}$.

Die Gleichheit der Integrale $\mu(f)$ und $\bar{I}(f)$ ergibt sich aus der Übereinstimmung auf $\mathfrak{R}_0$, der Eindeutigkeit der Fortsetzung auf $\mathfrak{K}$ und weiter wegen Theor. 2.1.4 (i) auf $\mathfrak{L}^1(\mu)$. Hiermit ist (ii) vollständig bewiesen.

Zum Beweis von (i) genügt es, zu bemerken, daß nach [3], Satz 2, die Teilmenge A von X genau dann I-quadrierbar ist, wenn 1_A zu $\mathfrak{I}(\mathfrak{R}, I)$ gehört. □

3.5. *Eingliederung der abstrakten Integrationstheorie von M. H. Stone.*

In 3.2 und 3.3 wurde gezeigt, daß die Integrationstheorie auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ für jedes σ-stetige bzw. τ-stetige Maß μ dem ersten bzw. zweiten Stoneschen

Integrationsprozeß angewandt auf $(X, \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}, \mu)$ entspricht. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt läßt sich zeigen, daß auch hier die Umkehrung gilt (Satz 3.5.1).

Somit ist es auch in diesem Fall kein Verlust an Allgemeinheit, Maße stets auf lokalbeschränkten Räumen zu betrachten. Die Konkretisierung der abstrakten Integrationstheorie von Stone hat zudem den Vorteil, daß durch die zusätzliche Struktur auf dem « Meßraum » X präzisere Aussagen-insbesondere über Regularitätseigenschaften (vgl. Abschnitt 2.3) — als im abstrakten Fall gemacht werden können.

Ausgangspunkt der Stoneschen Integrationstheorie ist bekanntlich wie bei Loomis ein Tripel $(X, \mathfrak{R}, I)$ mit den Eigenschaften 1°-3° in 3.4. Von I wird zusätzlich gefordert :

(M) Für jede aufsteigende Folge $(g_n) \subset \mathfrak{R}$ mit $\sup g_n \in \mathfrak{R}$ gilt :

$$I\left(\sup_n g_n\right) = \sup_n I(g_n)$$

bzw.

(M*) Für jedes aufst. filtr. System $H \subset \mathfrak{R}$ mit $\sup H \in \mathfrak{R}$ gilt :

$$I\left(\sup_{g \in H} g\right) = \sup_{g \in H} I(g).$$

Wir setzen außerdem voraus, daß $\mathfrak{R}$ den Bedingungen (12) und (13) genügt (dies kann stets durch Äquivalenzklassenbildung in X erreicht werden).

Für jeden Banachraum F und jede reelle Zahl $p \geqslant 1$ bezeichne :

(i) $\mathcal{L}_F^p(X, \mathfrak{R}, I)$ den lokalkonvexen Raum aller im Sinne des *ersten* Stone-Integrals p-fach integrierbaren Abbildungen von X in F versehen mit der Halbnorm $\tilde{N}_p$ (vgl. 3.2); $L_F^p(X, \mathfrak{R}, I)$ den $\mathcal{L}_F^p$ zugeordneten normierten Raum.

(ii) $\mathcal{L}_F^{p*}(X, \mathfrak{R}, I)$ den lokalkonvexen Raum aller im Sinne des *zweiten* Stone-Integrals p-fach integrierbaren Abbildungen von X in F versehen mit der Halbnorm $\tilde{N}_p^*$ (vgl. 3.3); $L_F^{p*}(X, \mathfrak{R}, I)$ den $\mathcal{L}_F^{p*}$ zugeordneten normierten Raum. Es gilt der folgende Darstellungssatz :

SATZ 3.5.1. — *Zu* $(X, \mathfrak{R}, I)$ *mit den Eigenschaften* 1°-3° *existieren eindeutig ein lokalbeschränkter uniformer Raum*

$(X, U, \mathfrak{B})$ *und ein positives Maß* μ *auf* $(X, U, \mathfrak{B})$, *derart daß gilt:*

(i) *Genügt* I *der Bedingung* (M), *so ist* μ σ*-stetig. Die lokalkonvexen Räume* $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ *und* $\mathcal{L}_F^p(X, \mathfrak{R}, I)$ *sowie die Banachräume* $L_F^p(\mu)$ *und* $L_F^p(X, \mathfrak{R}, I)$ *sind identisch, und für jedes* $f \in \mathcal{L}_F^p$ *stimmen die Integrale überein.*

(ii) *Genügt* I *der Bedingung* (M*), *so ist* μ τ*-stetig. Die lokalkonvexen Räume* $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ *und* $\mathcal{L}_F^{p*}(X, \mathfrak{R}, I)$ *sowie die Banachräume* $L_F^p(\mu)$ *und* $L_F^{p*}(X, \mathfrak{R}, I)$ *sind identisch, und für jedes* $f \in \mathcal{L}_F^p$ *stimmen die Integrale überein.*

Beweis. — Wie in 3.4 bezeichne $\mathfrak{R}_0$ den Teilverband aller Funktionen aus $\mathfrak{R}$, die der Bedingung (14) genügen. I_0 bezeichne die Restriktion von I auf $\mathfrak{R}_0$. Von $(X, \mathfrak{R}_0, I_0)$ leiten sich nach Stone ab: das Oberintegral $\bar{I}_0$, die Halbnormen $\tilde{N}_p^0$ sowie die Räume $\mathcal{F}_F^p(I_0), \mathcal{L}_F^p(I_0)$ und $L_F^p(I_0)$. H. Bauer hat in [4] gezeigt, daß für jede positive numerische Funktion f auf X gilt $\bar{I}(f) = \bar{I}_0(f)$ und daß die Räume $\mathcal{F}_F^p(I_0)$, $\mathcal{L}_F^p(I_0)$ und $L_F^p(I_0)$ mit den jeweils entsprechenden Räumen $\mathcal{F}_F^p(I)$, $\mathcal{L}_F^p(I)$ und $L_F^p(I)$ übereinstimmen. Der lokalbeschränkte Raum $(X, U, \mathfrak{B})$ sowie das Maß μ werden wie in 3.4 konstruiert. Da jede Funktion $g \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(X, U, \mathfrak{B})$ durch Funktionen aus $\mathfrak{R}_0$ gleichmäßig approximiert werden kann, stimmen die oberen Einhüllenden aller nicht endlichen aufst. filtr. Systeme in $\mathfrak{R}_0$ und in $\mathcal{K}$ überein. Insbesondere gelten die Bedingungen (M) und (M*) auch für die Fortsetzung μ von $I_0|\mathfrak{R}_0$ auf $\mathcal{K}$. Somit ist μ σ-bzw. τ-stetig, falls I der Bedingung (M) bzw. (M*) genügt.

Aufgrund dieser Bemerkungen lassen sich nun die Aussagen (i) und (ii) völlig analog wie die entsprechenden Aussagen der Sätze 3.2.1 bzw. 3.3.1 beweisen. □

Die Sätze 3.3.1 und 3.5.1 (ii) sind den Aussagen von Kölzow [23]-[25] über das zweite Stone-Integral über einem Elementar-Integral $(X, \mathfrak{R}, I)$ analog. Für das von Kölzow statt eines Beschränkungssystems benutzte System $\mathfrak{m}_2$ wird in [25] folgende Beziehung zur Bauerschen Kompaktifizierung X' von X bzgl. $\mathfrak{R}$ [4] bewiesen: $\mathfrak{m}_2$ besteht aus den Durchschnitten aller kompakten Teilmengen von X' mit X (wenn die unwesentlichen Voraussetzungen (11)-(13) für $\mathfrak{R}$ gemacht werden).

4. Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf einem lokalbeschränkten [9] Raum.

4.1. *Die $\mathfrak{B}$-Kompaktifizierung eines lokalbeschränkten* [9] *Raumes.*

H. Bauer hat in [3] und [4] gezeigt, daß zu jeder Menge X und zu jedem Vektorverband $\mathfrak{R}$ von reellen beschränkten Funktionen auf X mit den Eigenschaften (12) und (13) ein bis auf Homöomorphien eindeutig bestimmter lokalkompakter Raum $X'_{\mathfrak{R}}$ existiert mit den Eigenschaften:

(i) X ist eine dichte Teilmenge von $X'_{\mathfrak{R}}$;

(ii) Jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ kann auf genau eine Weise zu einer auf $X'_{\mathfrak{R}}$ stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktion g' fortgesetzt werden;

(iii) Die Menge $\mathfrak{R}'$ der stetigen Fortsetzungen aller Funktionen $g \in \mathfrak{R}$ besitzt auf $X'_{\mathfrak{R}}$ die Eigenschaften (12) und (13);

(iv) Die Funktion g_0 aus $\mathfrak{R}$ genügt genau dann der Bedingung (14), wenn ihre stetige Fortsetzung auf $X'_{\mathfrak{R}}$ einen kompakten Träger besitzt.

Konkretisiert man den « abstrakten » Ausgangspunkt $(X, \mathfrak{R})$ des Satzes von Bauer durch Einführung der Topologie $\mathfrak{J}_{R}$ [10] sowie des Beschränkungssystems $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_0)$, wie in 3.4 ausgeführt, so erhält man den folgenden « konkreten » Darstellungssatz:

Theorem 4.1.1. (Bauer [3], [4]; Gould [16]). — *Zu jedem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ existiert ein lokalkompakter Raum $X'_{\mathfrak{B}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1° X *ist ein dichter Unterraum von* $X'_{\mathfrak{B}}$;

2° *Jede Funktion* $g \in \mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ *läßt sich auf genau eine*

[9] Der einfacheren Darstellung halber beschränkt sich die folgende Darstellung auf lokalbeschränkte Räume im Sinne der Def. 1.1.1. Die Ergebnisse lassen sich jedoch leicht auf lokalbeschrankte uniforme Raume gem. Def. 2.7.1 übertragen, wenn man im folgenden überall den Ring $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ durch den Ring $\mathfrak{K}(X, U, \mathfrak{B})$ (vgl. Abschnitt 2.7) ersetzt.

[10] $\mathfrak{J}_{\mathfrak{R}}$ ist die zu der uniformen Struktur $U_{\mathfrak{R}}$ (vgl. Abschnitt 3.4) gehörende Topologie und somit die gröbste Topologie, bzgl. welcher alle Funktionen aus $\mathfrak{R}$ stetig sind.

Weise zu einer Funktion g' *des Ringes* $\mathfrak{K}(X'_{\mathfrak{B}})$ *aller stetigen reellen Funktionen mit kompaktem Träger auf* $X'_{\mathfrak{B}}$ *fortsetzen. Die Ringe* $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ *und* $\mathfrak{K}(X'_{\mathfrak{B}})$ *sind isomorph*;

3° *Eine Teilmenge von* $(X, \mathfrak{B})$ *ist genau dann beschränkt, wenn ihr Abschluß in* $X'_{\mathfrak{B}}$ *kompakt ist.*

Durch die Eigenschaften 1°-3° ist $X'_{\mathfrak{B}}$ bis auf Homöomorphien, die X punktweise festlassen, eindeutig bestimmt.

1. *Beweisskizze* (nach H. Bauer [3]). — $\overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ bezeichne die Menge aller reellen Funktionen auf X, die durch Funktionen aus dem Ring $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ gleichmäßig approximiert werden können. Dann ist die Menge $\mathfrak{A} := \{f \in \mathbf{R}^X : f = \alpha + \bar{g},\ \bar{g} \in \overline{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}},\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ eine hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene Algebra mit Einheit. $\hat{X}_{\mathfrak{A}}$ sei der Raum der maximalen Ideale von $\mathfrak{A}$ nach Gelfand-Šilov [12]. Das System $(\overline{Z(g)})_{g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}}$ hat entweder einen leeren Durchschnitt, falls $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt ist, oder ist Umgebungsbasis eines eindeutig bestimmten Punktes $\omega \in \hat{X}_{\mathfrak{A}}$. Der Raum

$$X'_{\mathfrak{B}} := \hat{X}_{\mathfrak{A}} \setminus \bigcap_{g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}} \overline{Z(g)}$$

besitzt die zitierten Eigenschaften.

2. *Beweisskizze.* — $X'_{\mathfrak{B}}$ läßt sich auch direkt mit Hilfe der maximalen Ideale von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ konstruieren. Und zwar versehe man die Menge $\mathfrak{M}$ aller maximalen Ideale von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit der Stoneschen « Hüllen-Kern-Topologie » $\mathfrak{J}_{hk}$ (siehe z.B. [13], 7M); d.h. mit der Topologie, für die die Mengen

$$A(f) = \{M \in \mathfrak{M} : f \in M\} \quad (f \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}})$$

eine abgeschlossene Basis bilden. Die Konstruktion verläuft dann weitgehend analog zu der des Stoneschen Strukturraumes $\mathfrak{M}_A$ eines kommutativen Ringes A mit Einheit ([13], 7M). An die Stelle der fehlenden Einheit in $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ treten dabei die « lokalen Einheiten » [16]. Analog wie man mit Hilfe der Eins in A die Kompaktheit von $\mathfrak{M}_A$ zeigt, beweist man mit Hilfe der lokalen Einheiten die Lokalkompaktheit von $\mathfrak{M}$. Die restlichen Überlegungen verlaufen dann ähnlich wie bei Gelfand-Šilov [12]. Da der Raum $(\mathfrak{M}, \mathfrak{J}_{hk})$ die Eigenschaften 1°-3°

besitzt, ist er wegen der Eindeutigkeit der Existenz dem oben konstruierten Raum $X'_{\mathfrak{B}}$ homöomorph. □

Bemerkung 4.1.2 :

(i) $X'_{\mathfrak{B}}$ ist derjenige $\mathcal{B}$-kompakte Raum (siehe 5.1), in den X $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$-einbettbar ist. Deshalb wird $X'_{\mathfrak{B}}$ i.f. auch als die *$\mathcal{B}$-Kompaktifizierung* von $(X, \mathcal{B})$ bezeichnet.

(ii) Ist $(X, \mathcal{B})$ beschränkt, so ist wegen $\mathcal{K}(X, \mathcal{B}) = \mathcal{C}_b(X)$ $\mathfrak{M}$ der Raum der maximalen Ideale von $\mathcal{C}_b(X)$, und somit fällt die $\mathcal{B}$-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{B})$ in diesem Fall mit der Stone-Čech-Kompaktifizierung zusammen (vgl. [16]).

(iii) Ist $(X, \mathcal{B})$ lokalkompakt (und damit nach 5.1 $\mathcal{B}$-kompakt), so ist $X = X'_{\mathfrak{B}}$.

4.2. *Charakterisierung der Stetigkeit von Maßen mit Hilfe des Darstellungssatzes.*

$(X, \mathcal{B})$ bezeichne wie üblich einen lokalbeschränkten Raum und $X'_{\mathfrak{B}}$ seine $\mathcal{B}$-Kompaktifizierung nach 4.1. Für jedes $g \in \mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ sei $g' \in \mathcal{K}(X'_{\mathfrak{B}})$ die stetige Forstsetzung von g auf $X'_{\mathfrak{B}}$. Da die Ringe $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{K}(X'_{\mathfrak{B}})$ algebraisch und verbandstheoretisch isomorph sind, sind auch ihre ordnungstheoretischen Dualräume $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{M}(X'_{\mathfrak{B}})$ isomorph; und zwar ist die Abbildung $\Phi(\mu) = \mu'$ definiert durch

$$\mu'(g') := \mu(g) \quad (g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}})$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ auf $\mathcal{M}(X'_{\mathfrak{B}})$ (vgl. [4]). Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X'_{\mathfrak{B}})$ sei $(X', \mathfrak{B}'_{\mu}, \mu')$ der n. Satz 2.2.10 zu μ' gehörende vollständige Maßraum. Da $X'_{\mathfrak{B}}$ lokalkompakt ist, ist jedes Maß μ' auf $X'_{\mathfrak{B}}$ ein Radonmaß und somit τ-stetig. Nach Satz 2.2.10 enthält daher $\mathfrak{B}'_{\mu}$ die Borelmengen $\mathfrak{B}'$ und erst recht die Baireschen Mengen $\mathfrak{B}'_0$ von $X'_{\mathfrak{B}}$. Die Restriktion von μ' auf $\mathfrak{B}'$ bzw. $\mathfrak{B}'_0$ ist somit ein Borelmaß bzw. ein Bairesches Maß auf $X'_{\mathfrak{B}}$ im Sinne von Halmos [18]. Zwischen den Baireschen Mengen $\mathfrak{B}_0$ bzw. den Borelmengen $\mathfrak{B}$ von $(X, \mathcal{B})$ und $\mathfrak{B}'_0$ bzw. $\mathfrak{B}'$ bestehen nach Gould [16] folgende Beziehungen :

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}'_0 \cap X \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \cap X.$$

In diesem Abschnitt sollen die Beziehungen zwischen den

Maßen auf $(X, \mathfrak{B})$ und den entsprechenden Maßen auf $X'_{\mathfrak{B}}$ untersucht und mit ihrer Hilfe die Stetigkeitseigenschaften der Maße auf $(X, \mathfrak{B})$ charakterisiert werden. Spezialfälle der folgenden Ergebnisse sind die Charakterisierungssätze von Bauer [2], Le Cam [28] und Knowles [22]. Wir folgen der letzteren Darstellung und lösen zugleich das von Knowles aufgeworfene Problem, wie die Charakterisierungssätze für nicht endliche Maße verallgemeinert werden können.

Hierfür erweist sich folgende Begriffsbildung von Halmos als nützlich :

Definition 4.2.1. (Halmos [18], p. 74). — *Eine Teilmenge* X_0 *eines Maßraumes* $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *heißt* μ*-dicht* (« μ*-thick* ») *in* X, *wenn für alle* $S \in \mathfrak{S}$ *gilt* $\mu_*(S \setminus X_0) = 0$.

Theorem 4.2.2. — *Für jedes* $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu \in \mathcal{M}^\sigma(X, \mathfrak{B})$.

(ii) X *ist* μ'_0*-dicht in* $(X'_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{B}'_0)$.

(iii) $\mu'_0(B'_0) = 0$ *für jede Bairesche Menge* $B'_0 \subset X'_{\mathfrak{B}} \setminus X$.

(iv) $\mu'_0(K'_0) = 0$ *für jede kompakte* G_δ*-Menge* $K'_0 \subset X'_{\mathfrak{B}} \setminus X$.

Beweis. — Aufgrund des Satzes 1.4.3 genügt es, die Behauptung für $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ zu beweisen. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt unmittlebar aus Def. 4.2.1. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Regularität von μ'_0. Somit bleibt zuzeigen :

(i) $\to$ (iv) : Sei K'_0 eine kompakte G_δ-Menge in $X' \setminus X$. Dann existiert eine fallende Folge $(g'_n) \subset \mathcal{K}(X')$ mit $g'_n \searrow 1_{K'_0}$. Für die Restriktionen $g_n = g'_n | X \in \mathcal{K}$ gilt somit $g_n \searrow 0$. Hieraus folgt aber n. Vor.

$$\mu'_0(K'_0) = \lim_n \mu'(g'_n) = \lim_n \mu(g_n) = 0.$$

(iii) $\to$ (i) : Sei $(g_n) \subset \mathcal{K}_+$ eine fallende Folge mit $g_n \searrow 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gehören die Mengen $B'_n = [g'_n \geqslant \varepsilon]$ zu $\mathfrak{B}'_0$. Die Menge $B' = \bigcap_n B'_n$ ist somit eine Bairesche Menge in X', die wegen $g_n \searrow 0$ in $X' \setminus X$ enthalten ist. Somit gilt n. Vor.

$$\lim_n \mu'_0(B'_n) = \mu'_0(B') = 0.$$

Da (g'_n) eine fallende Folge in $\mathcal{K}(X')$ ist, existiert eine Bairesche Menge B'_0 in X' mit $T_{g'_n} \subset B'_0$ für alle n und $\mu'_0(B'_0) < \infty$. Somit gilt

$$g'_n \leqslant \|g_1\| \,.\, 1_{B'_n} + \varepsilon \,.\, 1_{B'_0 \setminus B'_n}$$

Hieraus folgt

$$\mu(g_n) = \mu'(g'_n) \leqslant \|g_1\| \,.\, \mu'_0(B'_n) + \varepsilon \,.\, \mu'_0(B'_0). \ \square$$

Bei der folgenden Charakterisierung der τ-stetigen Maße verlagert sich das Interesse von den Baireschen Maßen auf $X'_{\mathcal{B}}$ auf die Borelschen Maße. Es gilt:

Theorem 4.2.3. — *Für jedes* $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu \in \mathcal{M}^{\tau}(X, \mathcal{B})$.

(ii) X *ist* μ'*-dicht in* $(X'_{\mathcal{B}}, \mathfrak{B}')$.

(iii) $\mu'(B') = 0$ *für jede Borelmenge* $B' \subset X'_{\mathcal{B}} \setminus X$.

(iv) $\mu'(K') = 0$ *für jede kompakte Menge* $K' \subset X'_{\mathcal{B}} \setminus X$.

Beweis. — Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt wiederum unmittelbar aus Def. 4.2.1. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Tatsache, daß jedes Maß μ' auf dem lokalkompakten Raum $X'_{\mathcal{B}}$ straff und somit das zugehörige Borelmaß $\mu'|\mathfrak{B}'$ *n.* Satz 2.2.10 (*c*) kompakt-regulär ist. Der Rest des Beweises verläuft analog zu dem des vorigen Satzes, indem man überall Folgen durch gefilterte Systeme und « Bairesch » durch « Borelsch » ersetzt und beachtet, daß der beliebige Durchschnitt der Mengen $B'_\alpha = [g'_\alpha \geqslant \varepsilon]$ kompakt und somit borelsch ist. $\square$

Theorem 4.2.4. — *Folgende Aussagen sind äquivalent für jedes* $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$:

(i) $\mu \in \mathcal{M}^{t}(X, \mathcal{B})$.

(ii) *Zu jeder relativ kompakten offenen Menge* $U' \subset X'_{\mathcal{B}}$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine kompakte Menge* $K \subset X$ *mit* $\mu'(U' \setminus K) \leqslant \varepsilon$.

(iii) X *ist* μ'*-dicht und* μ'*-meßbar (im Sinne von Bourbaki* [7]*) in* $X'_{\mathcal{B}}$.

Beweis. — (i) $\rightarrow$ (ii): N. Theor. 4.1.1 ist die Menge $U' \cap X$ offen und beschränkt in X. Aus Axiom (B3) und der Straffheit von μ folgt die Existenz einer Menge $B \in \mathcal{B}$ mit $U = U' \cap X \subset B$, derart daß gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{kp. } K \subset B \quad \forall g \in \Sigma_B : g|K = 0 \longrightarrow |\mu(g)| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\mu'(U' \setminus K) &= \sup\{\mu'(g') : g' \leqslant 1_{U' \setminus K},\ g' \in \mathcal{K}(X'_{\mathcal{B}})\}\\ &\leqslant \sup\{\mu(g) : g \leqslant 1_{U \setminus K},\ g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}\}\\ &\leqslant \sup\{\mu(g) : g \in \Sigma_B,\ g|K = 0\} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

(ii) $\rightarrow$ (iii): Sei K' kp. $\subset X'$ und U' eine relativ kompakte offene Menge, die $K' \setminus X$ enthält. N. Vor. existiert zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $\mu'(U' \setminus K) \leqslant \varepsilon$. Die Funktion $1_{U' \setminus K}$ ist nach unten halbstetig und gehört somit zu $\mathcal{U}^{\mu'}$. Somit folgt $0 \leqslant 1_{K' \setminus X} \leqslant 1_{U' \setminus K}$ mit $\mu'(_{U' \setminus K}) \leqslant \varepsilon$. Also ist die Menge $(X' \setminus X) \cap K' = K' \setminus X$ *n.* Theor. 2.1.4 (iv) μ'-integrierbar für alle kompakten Teilmengen K' von X'. Daraus folgt aber nach [7], p. 170/77, die μ'-Meßbarkeit von X.

Hiermit ist gleichzeitig gezeigt, daß für jede kompakte Menge $K' \subset X' \setminus X$ gilt: $\mu'(K') = \mu'(K' \setminus X) = 0$. Also ist *n.* Theor. 4.2.3 X μ'-dicht in $X'_{\mathcal{B}}$.

(iii) $\rightarrow$ (i): Sei $B \in \mathcal{B}$ und $(g_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \Sigma_B$ ein System, das gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von B gegen Null strebt. Aus (iii) sowie der Regularität von μ' (Satz 2.2.10) folgt: $\mu'(\overline{B}) = \mu'^*(\overline{B} \cap X) = \mu'(B) = \sup\{\mu'(K) : K \text{ kp} \subset B\}$. Somit existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset B$ sowie ein $\alpha_0 \in A$, derart daß gilt $\mu'(\overline{B} \setminus K) < \varepsilon$ sowie

$$|g_\alpha(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in K \qquad \forall \alpha_0 < \alpha.$$

Für die stetigen Fortsetzungen g' auf $X'_{\mathcal{B}}$ gilt somit:

$$|g'_\alpha| \leqslant \varepsilon . 1_K + 1_{\overline{B} \setminus K} \qquad \forall \alpha_0 < \alpha.$$

Hieraus folgt

$$|\mu(g_\alpha)| = |\mu'(g'_\alpha)| \leqslant \varepsilon . \mu'(K) + \mu'(\overline{B} \setminus K) < \varepsilon . (\mu'(K) + 1). \quad \square$$

Aufgrund der Isomorphie von $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{M}(X'_{\mathcal{B}})$ folgt unmittelbar aus obigem Theorem:

Korollar 4.2.5. — *Es gilt* $\mathcal{M}^\tau(X, \mathcal{B}) = \mathcal{M}^t(X, \mathcal{B})$ *genau dann, wenn* X *universell meßbar ist in* $X'_{\mathcal{B}}$.

5. Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und Stetigkeit seiner Maße.

Bekanntlich hat die Topologie eines topologischen Maßraumes Auswirkungen auf die Stetigkeitseigenschaften seiner Maße. Ein bekanntes Resultat dieser Art besagt z.B., daß jedes (σ-additive) Maß auf einem polnischen Raum straff ist (siehe etwa [21], [32]). Doch schon die Tatsache, daß jedes Radonmaß auf einem lokalkompakten Raum straff ist, läßt sich nicht mehr alleine durch die Topologie von X erklären. Es gibt nämlich auf lokalkompakten und nicht σ-kompakten Räumen nach [36] nicht reguläre Bairesche Maße, die somit nicht straff sein können. Bei der Straffheit der Radonmaße spielt vielmehr neben der Topologie von X das Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$ der kompakten Mengen von X eine wesentliche Rolle. M.a.W.: Die Straffheit der Radonmaße ist eine Struktureigenschaft des lokalbeschränkten Raumes $(X, \mathfrak{B})$.

Umgekehrt lassen sich gewisse topologische Räume, wie z.B. die kompakten und pseudokompakten Räume, durch die Stetigkeitseigenschaften ihrer Maße charakterisieren [14],[41]. Da die Maße auf einem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ wesentlich von dem Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$ abhängen, hängen Struktursätze dieser Art ebenfalls neben der Topologie von X notwendig von $\mathfrak{B}$ ab, was auf Begriffe wie $\mathfrak{B}$-Kompaktheit etc. führt, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

5.1. *Verschiedene Kompaktheitsbegriffe in lokalbeschränkten Räumen.*

$(X, \mathfrak{B})$ bezeichne wie üblich einen lokalbeschränkten Raum. Mit $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ oder kurz $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ werde der Ring aller stetigen reellen (nicht notwendig beschränkten) Funktionen auf X mit beschränkten Träger bezeichnet. Als natürliche Topologie auf $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ betrachten wir stets die in 1.4 definierte Topologie $\mathcal{T}^c_{\mathfrak{B}}$ der $\mathfrak{B}$-kompakten Konvergenz. Der bisher betrachtete Ring $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ ist somit der Teilring aller beschränkten Funktionen aus $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$.

Nach Gillman-Jerison [13] heißt ein Ideal I in einem Ring $\mathfrak{R}$ von reellen Funktionen auf X *fixiert*, wenn ein $x \in X$

existiert mit $f(x) = 0$ für alle $f \in I$. Ein maximales Ideal M in $\mathfrak{R}$ heißt *reell*, wenn $\mathfrak{R}/M$ isomorph zu $\mathbf{R}$ ist.

Definition 5.1.1. — *Der lokalbeschränkte Raum* $(X, \mathfrak{B})$ *heißt:*

(*a*) *$\mathfrak{B}$-kompakt* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ *Jedes maximale Ideal in* $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ *ist fixiert.*

(*b*) *$\mathfrak{B}$-pseudokompakt* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B}) = \mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$.

(*c*) *$\mathfrak{B}$-reellkompakt* $\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ *Jedes reelle maximale Ideal in* $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ *ist fixiert.*

Beispiel 5.1.2. — Nach Gould [16], p. 233, ist jedes maximale Ideal in dem Ring $\mathfrak{K}(X)$ aller stetigen reellen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem lokalkompakten Raum X fixiert. Somit ist jeder lokalkompakte Raum $(X, \mathfrak{B})$ $\mathfrak{B}$-kompakt. In Satz 5.1.4 wird gezeigt, daß auch die Umkehrung gilt.

Bemerkung 5.1.3. — Ist $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt und gilt somit $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}} = \mathcal{C}(X)$ sowie $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}} = \mathcal{C}_b(X)$, so fallen die obigen Definitionen mit den üblichen Definitionen von Kompaktheit etc. zusammen (vgl. [13]). In diesem Fall kann man somit i.f. überall das Präfix « $\mathfrak{B}$ » fortlassen.

Satz 5.1.4. — *Für jeden lokalbeschränkten Raum* $(X, \mathfrak{B})$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist $\mathfrak{B}$-kompakt.

(ii) $X = X'_{\mathfrak{B}}$.

(iii) Jede beschränkte Teilmenge von $(X, \mathfrak{B})$ ist relativ kompakt.

(iv) X ist $\mathfrak{B}$-pseudokompakt und $\mathfrak{B}$-reellkompakt.

Beweis. — (i) $\to$ (ii) : N. Theor. 4.1.1 ist $X'_{\mathfrak{B}}$ homöomorph zur Menge $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ versehen mit der Stoneschen Topologie $\mathfrak{J}_{hk}$. Da aber nach Definition der $\mathfrak{B}$-Kompaktheit jedes $M \in \mathfrak{M}$ fixiert ist, gilt somit $X'_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{M} = X$.

(ii) $\to$ (iii) : N. Theor. 4.1.1 3° ist für jede beschränkte Teilmenge A von $(X, \mathfrak{B})$ $\overline{A}$ kompakt in $X'_{\mathfrak{B}} = X$.

(iii) $\to$ (iv) : Für jede Funktion $f \in \tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ ist T_f abgeschlossen und beschränkt in $(X, \mathfrak{B})$, also n. Vor. kompakt. Somit gilt $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B}) = \mathfrak{K}(X) = \mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$, wobei $\mathfrak{K}(X)$ den Ring der stetigen reellen Funktionen auf X mit kompaktem Träger bezeichnet. Nach [16], p. 233, ist aber jedes maximale Ideal in $\mathfrak{K}(X)$ fixiert. Somit ist X $\mathfrak{B}$-reellkompakt und wegen $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ $\mathfrak{B}$-pseudokompakt.

(iv) $\rightarrow$ (i) : N. Vor. ist jedes reelle maximale Ideal in $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ fixiert. Die maximalen Ideale in $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ sind aber sämtlich reell. Somit ist X $\mathfrak{B}$-kompakt. □

Nach Theorem 4.1.1 existiert zu jedem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathfrak{B})$ ein $\mathfrak{B}$-kompakter Raum, in den X $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$-einbettbar ist. Gould hat in [16] gezeigt, daß zu jedem lokalbeschränkten Raum außerdem ein $\mathfrak{B}$-reellkompakter Raum $\upsilon_{\mathfrak{B}}X$ existiert, in den X $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$-einbettbar ist. $\upsilon_{\mathfrak{B}}X$ ist isomorph zur Menge $\mathfrak{M}_r(\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}})$ aller reellen maximalen Ideale in $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$. Aufgrund der Beziehungen

$$\upsilon_{\mathfrak{B}}X = \mathfrak{M}_r(\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}) \subset \mathfrak{M}(\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}) = X'_{\mathfrak{B}}$$

kann $\upsilon_{\mathfrak{B}}X$ mit einem (dichten) Teilraum von $X'_{\mathfrak{B}}$ identifiziert werden. Macht man diese Identifizierung, so besteht folgender Zusammenhang zwischen $X'_{\mathfrak{B}}$ und $\upsilon_{\mathfrak{B}}X$: Für jedes $f \in \tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ aufgefaßt als Abbildung in den kompakten Raum $\overline{\mathbf{R}}$ bezeichne $\bar{f}$ die eindeutig bestimmte stetige (nicht notwendig endliche) Fortsetzung von f auf $X'_{\mathfrak{B}}$. Dann gilt :

$$(16) \qquad \upsilon_{\mathfrak{B}}X = \{x \in X'_{\mathfrak{B}} : |\bar{f}(x)| < \infty \quad \forall f \in \tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}\}$$

5.2. *Einige Struktursätze.*

Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß jedes σ-stetige Maß auf einem lokalbeschränkten Raum τ-stetig ist. Diese Bedingung ist für beschränkte Räume wohlbekannt ([32], [41]). Die Bedeutung des Satzes 5.2 beruht jedoch darin, daß die Bedingung unabhängig ist von dem Beschränkungssystem $\mathfrak{B}$. Da die Sätze von Go-Din Hu und Knowles (siehe 5.4) falsch sind, ist es u.W. immer noch ein ungelöstes Problem, ob die Bedingung auch notwendig ist.

Satz 5.2.1. — *Ist* X *ein vollständig regulärer Lindelöf-Raum, so gilt* $\mathcal{M}^{\sigma}(X, \mathfrak{B}) = \mathcal{M}^{\tau}(X, \mathfrak{B})$ *für jedes Beschränkungssystem* $\mathfrak{B}$ *auf* X.

Beweis. — Sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiges Beschränkungssystem auf X und K′ eine kompakte Menge in $X'_{\mathfrak{B}}\setminus X$. Nach den Theoremen 4.2.2 und 4.2.3 ist die Behauptung bewiesen, falls eine kompakte z-Menge $Z' \subset X'_{\mathfrak{B}}\setminus X$ existiert, die K′ enthält. Ist dies nicht der Fall, so ist

$$\mathfrak{F} = (Z' \cap X)_{K' \subset Z'}$$

ein z-Filter auf X, dessen abzählbare Durchschnitte nicht leer sind. Da X ein Lindelöf-Raum ist, ist dann aber $\mathfrak{F}$ nach [13], 8H, fixiert, d.h. $\cap \mathfrak{F} = K' \cap X \neq \emptyset$ im Widerspruch z. Vor. □

Der Satz 5.2.1 gilt insbesondere für jeden σ-kompakten und jeden seperablen metrischen Raum.

Die folgenden Sätze liefern eine maßtheoretische Kennzeichnung der $\mathfrak{B}$-kompakten und $\mathfrak{B}$-pseudokompakten lokalbeschränkten Räume. Ist $(X, \mathfrak{B})$ speziell beschränkt, so erhält man die klassischen Sätze von Alexandroff-Glicksberg [14], [41].

Satz 5.2.2. — *Der lokalbeschränkte Raum* $(X, \mathfrak{B})$ *ist genau dann* $\mathfrak{B}$*-kompakt, wenn gilt* $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B}) = \mathcal{M}^t(X, \mathfrak{B})$.

Beweis. — Aus Satz 5.1.4 (ii) und Theorem 4.2.4 folgt unmittelbar die Notwendigkeit der Bedingung. Ist umgekehrt X nicht $\mathfrak{B}$-kompakt, so existiert *n.* Satz 5.1.4 (ii) ein Punkt $x_0 \in X'_{\mathfrak{B}}\setminus X$. Für das Maß $\mu(g) := g'(x_0)$ $(g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}})$ folgt dann nach Theor. 4.2.4:

$$0 = \mu'^*(\{x_0\}\setminus X) = \mu'(\{x_0\}\setminus X) = \delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1. \ \square$$

Betrachtet man die Theorie der Radonmaße auf lokalkompakten Räumen nach Bourbaki von dem übergeordneten Standpunkt der Maßtheorie auf lokalbeschränkten Räumen, so zeigt der soeben bewiesene Satz, daß die Radonmaße einen wichtigen Spezialfall innerhalb dieser Theorie darstellen. Nach Satz 5.1.4 sind nämlich die lokalkompakten Räume (mit den kompakten Mengen als Beschränkungssystem) genau die $\mathfrak{B}$-kompakten Räume. Diese sind aber nach Satz 5.2.2 genau diejenigen Räume, auf denen jedes Maß straff ist. *Somit ist die Theorie der Radonmaße nach Bourbaki die allgemeinste Maßtheorie mit dieser Eigenschaft.*

Satz 5.2.3. — *Der lokalbeschränkte Raum* $(X, \mathfrak{B})$ *ist genau dann* $\mathfrak{B}$*-pseudokompakt, wenn gilt* $\mathcal{M}(X, \mathfrak{B}) = \mathcal{M}^{\sigma}(X, \mathfrak{B})$.

Der Beweis des Satzes 5.2.3 folgt unmittelbar aus dem folgenden Lemma sowie aus Theorem 4.2.2.

Lemma 5.2.4. — $(X, \mathfrak{B})$ *ist* $\mathfrak{B}$*-pseudokompakt genau dann, wenn die leere Menge die einzige kompakte* G_δ*-Menge in* $X'_{\mathfrak{B}} \setminus X$ *ist.*

Beweis. — Sei $K' = Z'(f')$ $(f' \in \mathcal{C}(X'))$ eine kompakte G_δ-Menge in $X'_{\mathfrak{B}} \setminus X$. Dann existiert ein $g' \in \mathfrak{K}(X')$ mit $K' \subset E(g')$. Die Funktion

$$h'(x) := \begin{cases} \left|\dfrac{g'(x)}{f'(x)}\right| & x \notin K' \\ +\infty & x \in K' \end{cases}$$

ist stetig auf X' und hat einen kompakten Träger. Somit gehört die Restriktion $h = h'|X$ zu $\tilde{\mathfrak{K}}_+(X, \mathfrak{B})$. N. Vor. existiert eine natürliche Zahl n mit $h(x) \leqslant n$ für alle $x \in X$. Da h' die stetige Fortsetzung von h ist, gilt dann $h'(x) \leqslant n$ für alle $x \in X'$. Somit $K' = \emptyset$.

Um zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, nehmen wir an, daß eine Funktion $g \in \tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ existiert, die nicht beschränkt ist, und betrachten ihre stetige Fortsetzung $\bar{g}$ auf $X'_{\mathfrak{B}}$. Da T_g *n.* Vor. beschränkt ist, ist $T_{\bar{g}}$ *n.* Theor. 4.1.1 3° kompakt in X'. Somit sind die Mengen der Form $Z'_n = [|\bar{g}| \geqslant n]$ kompakte G_δ-Mengen auf X', deren endliche Durchschnitte nicht leer sind. Somit ist die Menge

$$Z' = \bigcap_n [|\bar{g}| \geqslant n] = [|\bar{g}| = \infty]$$

eine nichtleere kompakte G_δ-Menge in $X'_{\mathfrak{B}} \setminus X$. □

5.3. *Maße mit pseudokompakten Trägerfilter.*

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Maße $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ auf den Ring $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ fortsetzbar sind. Das Theorem 5.3.6 liefert hierfür notwendige und hinreichende Bedingungen.

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ bezeichne $\mathfrak{I}_\mu$ den Trägerfilter sowie T_μ den Träger von μ, falls dieser existiert (siehe 1.5). $T_{\mu'}$ sei der Träger des zu μ gehörenden Maßes $\mu' = \Phi(\mu)$

auf $X'_{\mathfrak{B}}$ (siehe 4.2). Da jedes Maß auf $X'_{\mathfrak{B}}$ nach Satz 5.2.2 straff ist, folgt aus Satz 1.5.3 die Existenz von $T_{\mu'}$. Zwischen dem Trägerfilter $\mathfrak{J}_\mu$ und $T_{\mu'}$ besteht folgender Zusammenhang:

Satz 5.3.1. — *Die Menge* $Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ *gehört genau dann zu* $\mathfrak{J}_\mu$, *wenn ihr Abschluß in* $X'_{\mathfrak{B}}$ *den Träger* $T_{\mu'}$ *enthält.*

Beweis. — Sei $Z \in \mathfrak{J}_\mu$. Da $X'_{\mathfrak{B}}$ lokalkompakt ist, existiert zu jedem Punkt $x_0 \notin \overline{Z}$ eine kompakte Umgebung V' von x_0 mit $V' \cap \overline{Z} = \emptyset$. Für jedes $g' \in \mathfrak{K}(X'_{\mathfrak{B}}, V')$ gehört die Restriktion $g = g'|X$ zu $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ und verschwindet auf Z. Somit gilt $\mu'(g') = \mu(g) = 0$. Also folgt aus Satz 1.5.4 $x_0 \notin T_{\mu'}$.

Sei umgekehrt $T_{\mu'} \subset \overline{Z}$. Dann gilt für jedes $g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $g|Z = 0$: $g'|\overline{Z} = 0$. N. Satz 1.5.5 folgt hieraus aber: $|\mu'|(|g'|) = |\mu|(|g|) = 0$. Also gilt $Z \in \mathfrak{J}_\mu$. □

Korollar 5.3.2. — *Der Punkt* $x_0 \in X'_{\mathfrak{B}}$ *gehört genau dann zu* $T_{\mu'}$, *wenn* x_0 *Adhärenzpunkt von* $\mathfrak{J}_\mu$ *ist.*

Beweis. — Da das System $\overline{Z}$ eine abgeschlossene Basis von $X'_{\mathfrak{B}}$ bildet, gilt:

$$T_{\mu'} = \bigcap_{T_{\mu'} \subset \overline{Z}} \overline{Z} = \bigcap_{Z \in \mathfrak{J}_\mu} \overline{Z}. \ \square$$

Korollar 5.3.3. — $\mathfrak{J}_\mu$ *ist genau dann ein z-Filter* [13] *auf* X, *wenn* μ *nicht das Nullmaß ist.*

Beweis. — (i): Nach [16], p. 229, gilt für $Z_i, Z_j \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$: $\overline{Z}_i \cap \overline{Z}_j = \overline{Z_i \cap Z_j}$. Für $Z_i, Z_j \in \mathfrak{J}_\mu$ folgt daher aus Satz 5.3.1: $T_{\mu'} \subset \overline{Z}_i \cap \overline{Z}_j = \overline{Z_i \cap Z_j}$. Somit $Z_i \cap Z_j \in \mathfrak{J}_\mu$. (ii): Für $Z \in \mathfrak{J}_\mu$ und $Z \subset Z'$ folgt *n.* Satz 5.3.1: $T_{\mu'} \subset \overline{Z} \subset \overline{Z}'$. Somit $Z' \in \mathfrak{J}_\mu$. Die Behauptung folgt nun aus der leicht einzusehenden Tatsache: $\mu = 0 \longleftrightarrow \emptyset \in \mathfrak{J}_\mu$. □

Korollar 5.3.4. — *Existiert der Träger* T_μ *von* μ, *so gilt* $T_\mu = T_{\mu'} \cap X$.

Beweis. — Aus Kor. 5.3.2 folgt:

$$T_{\mu'} \cap X = \Big(\bigcap_{Z \in \mathfrak{J}_\mu} \overline{Z}\Big) \cap X = \bigcap_{Z \in \mathfrak{J}_\mu} Z = T_\mu. \ \square$$

Definition 5.3.5. — *Der Trägerfilter* $\mathfrak{I}_\mu$ *eines Maßes* μ *auf* $(X, \mathfrak{B})$ *heißt* $\mathfrak{B}$*-pseudokompakt genau dann, wenn für alle* $g \in \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathfrak{B})$ *ein* $Z \in \mathfrak{I}_\mu$ *existiert, so daß die Funktion* g *auf* Z *beschränkt ist.* $\mathcal{M}_0(X, \mathfrak{B})$ *bezeichne die Menge aller* $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$ *deren Trägerfilter* $\mathfrak{B}$*-pseudokompakt ist.*

Theorem 5.3.6. — *Für jedes* $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{B})$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) μ *ist fortsetzbar zu einer positiven Linearform auf* $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathfrak{B})$.

(ii) $\mathfrak{I}_\mu$ *ist* $\mathfrak{B}$*-pseudokompakt.*

(iii) $T_{\mu'} \subset \upsilon_{\mathfrak{B}} X$.

Beweis. — (i) $\rightarrow$ (ii): $\tilde{\mu}$ bezeichne die Fortsetzung von μ auf $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{B}}$. Für jede Funktion $g \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{B}}$ existiert nach [16], p. 239, eine natürliche Zahl $n = n(g)$, derart daß gilt

$$\tilde{\mu}((|g| - n)^+) = 0.$$

Somit gilt für die Funktion $h_0 := (|g| - n)^+ \wedge 1 \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{B}}$ erst recht $\mu(h_0) = 0$. Für die stetige Fortsetzung h_0' auf $X'_{\mathfrak{B}}$ gilt dann: $h_0' = (|g'| - n)^+ \wedge 1 \in \mathcal{K}_+(X'_{\mathfrak{B}})$ und $\mu'(h_0') = 0$. Hieraus folgt nach [7], p. 69:

$$T_{\mu'} \subset Z'(h_0') = [|g'| \leqslant n] \subset \overline{[|g| \leqslant n + 1]}.$$

Also gehört nach Satz 5.3.1 die z-Menge $[|g| \leqslant n + 1]$ zu $\mathfrak{I}_\mu$.

(ii) $\rightarrow$ (iii): Sei $x_0 \in X'_{\mathfrak{B}} \setminus \upsilon_{\mathfrak{B}} X$. Dann existiert nach (16) ein $f \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{B}}$ mit $|\overline{f}(x_0)| = \infty$. N. Vor. existieren aber ein $Z \in \mathfrak{I}_\mu$ und eine natürliche Zahl n mit $|f(x)| \leqslant n$ für alle $x \in Z$. Somit gilt für die stetige Fortsetzung $\overline{f}$ von f auf $X'_{\mathfrak{B}}: |\overline{f}(x)| \leqslant n$ für alle $x \in \overline{Z}$. Folglich ist $x_0 \notin \overline{Z}$ und somit n. Kor. 5.3.2 $x_0 \notin T_{\mu'}$.

(iii) $\rightarrow$ (i): Sei $f \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathfrak{B}}$ unf $\overline{f}$ die stetige Fortsetzung von f auf $X'_{\mathfrak{B}}$. Da T_f beschränkt, ist $T_{\overline{f}}$ n. Theor. 4.1.1 3° kompakt und somit ebenfalls die Menge $K' = T_{\overline{f}} \cap T_{\mu'}$. N. Vor. liegt K' in $\upsilon_{\mathfrak{B}} X$. Da die Restriktion von $\overline{f}$ auf $\upsilon_{\mathfrak{B}} X$ nach (16) reell ist, ist somit $\overline{f}|K'$ beschränkt. Somit ist wegen

$$|\mu'(\overline{f})| \leqslant \int_{X'_{\mathfrak{B}}} |\overline{f}|\, d\mu' = \int_{K'} |\overline{f}|\, d\mu' \leqslant \|\overline{f}\|_{K'} . \mu'(K') < \infty$$

$\bar{f}$ μ'-integrierbar und $\tilde{\mu}(f) := \mu'(\bar{f})$ $(f \in \tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}})$ eine positive Fortsetzung von μ auf $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$. □

KOROLLAR 5.3.7. — $\mathcal{M}_0(X, \mathfrak{B})$ *ist der ordnungstheoretische Dualraum von* $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$.

Beweis. — Ist $\mathfrak{J}_\mu$ $\mathfrak{B}$-pseudokompakt, so auch $\mathfrak{J}_{\mu^+}$ und $\mathfrak{J}_{\mu^-}$. Folglich kann *n.* Theor. 5.3.6 jedes $\mu \in \mathcal{M}_0$ zu einer relativ beschränkten Linearform auf $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ fortgesetzt werden. Ist umgekehrt $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_+ - \tilde{\mu}_-$ eine relativ beschränkte Linearform auf $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ und $\mu = \mathrm{Rest}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}} \tilde{\mu}$ das zugehörige Maß, so ist $\mathfrak{J}_\mu = \{Z : Z = Z^+ \cup Z^-,\ Z^+ \in \mathfrak{J}_{\mu^+},\ Z^- \in \mathfrak{J}_{\mu^-}\}$ $\mathfrak{B}$-pseudokompakt. □

KOROLLAR 5.3.8. — $\mathcal{M}_0(X, \mathfrak{B}) \subset \mathcal{M}^\sigma(X, \mathfrak{B})$.

Beweis. — Nach Gould [16], p. 241, ist jede positive Linearform auf $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ σ-stetig. Die Behauptung folgt somit aus Theor. 5.3.6 und Satz 1.4.3. □

KOROLLAR 5.3.9. — *Die Fortsetzung von* $\mu \in \mathcal{M}_0$ *auf* $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ *ist eindeutig.*

Beweis. — Für jedes $f \in \tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ gilt: $\tilde{\mu}(f) = \sup_n \mu(f \wedge n)$. □

Für den Spezialfall eines entarteten Beschränkungssystems $\mathfrak{B}$ folgt aus der Äquivalenz der Aussagen (i) und (iii) in Theorem 5.3.6 das Theorem 14 (1) von Choquet [9].

Sei nun I eine beliebige Menge und $\mathbf{R}^\mathrm{I}$ die Menge aller reellen Funktionen auf I. Nach Choquet [9] heißt eine positive Linearform L auf $\mathbf{R}^\mathrm{I}$ *elementar*, wenn ein δ-Ultrafilter (oder « reeller » Ultrafilter [13]) $\mathfrak{A}$ auf I existiert mit $L(f) = \lim_{\mathfrak{A}} f$ für alle $f \in \mathbf{R}^\mathrm{I}$. Mit Hilfe des Theorems 5.3.6 läßt sich nun ein einfacher Beweis des folgenden Satzes von Choquet ([9], Theor. 8) geben:

SATZ 5.3.10 (Choquet). — *Jede positive Linearform auf* $\mathbf{R}^\mathrm{I}$ *läßt sich auf genau eine Weise als endliche Linearkombination mit positiven Koeffizienten von elementaren Linearformen darstellen.*

Beweis. — Sei $\mu_L = \mathrm{Rest}_{\mathfrak{K}(I)}\, L$ das von L induzierte Radonmaß auf I und μ_L' das μ_L eineindeutig entsprechende (positive) Radonmaß auf βI. Nach [7], p. 242, exerc. 16, hat μ_L' einen endlichen Träger, der *n.* Theor. 5.3.6 in υI enthalten ist. Jeder Punkt von υI ist aber nach [13] 8.7 Limes genau eines δ-Ultrafilters auf, womit die Behauptung bewiesen ist. □

5.4. *Charakterisierung der $\mathfrak{B}$-reellkompakten Räume.*

Go-Din Hu [15] und Knowles [22] haben folgende Charakterisierung der reellkompakten Räume oder Q-Räume von Hewitt [20] zu beweisen versucht:

$$(17) \qquad X \text{ reellkompakt} \iff \mathcal{M}^{\sigma}(X) = \mathcal{M}^{\tau}(X).$$

Aus dieser Aussage, angewandt auf einen diskreten Raum mit der Mächtigkeit des Kontinuums, würde die Nichtmeßbarkeit des Kontinuums folgen. Sowohl der Beweis von Go-Din Hu als auch der von Knowles sind jedoch — obwohl auf ganz unterschiedlichen Beweisideen beruhend — falsch. Vermutlich ist die Aussage (17) auch falsch, denn die in (17) verwendeten Maße im Sinne von Alexandroff-Varadarajan (siehe Bsp. 1.2.4 (ii)) sind Elemente des Duals von $\mathcal{C}_b(X)$. Die Eigenschaft der Reellkompaktheit eines Raumes X ist aber eine Struktureigenschaft des Ringes $\mathcal{C}(X)$ (vgl. [13], [20]). Für eine maßtheoretische Charakterisierung der reellkompakten Räume können somit u.E. nur diejenigen Maße auf X in Frage kommen, die auf $\mathcal{C}(X)$ fortsetzbar sind. Diese werden aber gerade durch das Theorem 5.3.6 gekennzeichnet.

In der Tat läßt sich mit Hilfe des Theorems 5.3.6 eine maßtheoretische Kennzeichnung (Theor. 5.4.1 (ii)) der $\mathfrak{B}$-reellkompakten — und damit für beschränkte Räume $(X, \mathfrak{B})$ der reellkompakten — Räume geben.

Es sei daran erinnert, daß $\tilde{\mathfrak{K}}^{0}$ den ordnungstheoretischen und $\tilde{\mathfrak{K}}'$ den topologischen Dualraum (bzgl. der Topologie der $\mathfrak{B}$-kompakten Konvergenz) von $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ bezeichnet.

THEOREM 5.4.1. — *Für jeden lokalbeschränkten Raum* $(X, \mathfrak{B})$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist $\mathfrak{B}$-reellkompakt.*

(ii) $\mathcal{M}_0(X, \mathfrak{B}) \subset \mathcal{M}^{t}(X, \mathfrak{B})$.

(iii) $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})^o = \mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})'$.

(iv) *Jede positive Linearform auf* $\mathfrak{K}(X, \mathfrak{B})$ *hat einen* $\mathfrak{B}$*-kompakten Träger.*

Beweis. — (i) $\to$ (iv) : Sei $\tilde{\mu}$ eine positive Linearform auf $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ und $\mu = \mathrm{Rest}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}} \tilde{\mu}$ das zugehörige Maß. N. Theor. 5.3.6 (iii) gilt dann $T_{\mu'} \subset \cup_{\mathfrak{B}} X = X$. Aus Theorem 4.2.3 folgt die τ-Stetigkeit von μ und somit *n.* Satz 1.5.3 die Existenz von T_μ. Aus Kor. 5.3.4 folgt ferner : $T_\mu = T_{\mu'} \cap X = T_{\mu'}$. Sei nun A eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $(X, \mathfrak{B})$. Dann ist $A \cap T_\mu$ eine abgeschlossenene und beschränkte Teilmenge des lokalbeschränkten Unterraums $(T_\mu, \mathfrak{B} \cap T_\mu)$ von $(X, \mathfrak{B})$. N. Satz 5.1.4 ist die Behauptung bewiesen, wenn gezeigt ist : $A \cap T_\mu$ kompakt. N. Theor. 4.1.1 ist $\overline{A}$ kompakt in $X'_{\mathfrak{B}}$. Somit ist die Menge $\overline{A} \cap T_{\mu'}$ kompakt. Wegen $T_{\mu'} \subset X$ folgt aber :

$$\overline{A} \cap T_{\mu'} = (\overline{A} \cap T_{\mu'}) \cap X = A \cap T_\mu.$$

(iv) $\to$ (iii) : Eine Linearform $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ ist nach 1.4 genau dann stetig bzgl. der Topologie der $\mathfrak{B}$-kompakten Konvergenz, wenn gilt :

$$(18) \quad \forall B \in \mathfrak{B} \quad \exists \mathrm{kp}.K \subset B \quad \exists M_B \geqslant 0 \quad \forall g \in \mathfrak{K}(X, B) : \quad |\tilde{\mu}(g)| \leqslant M_B . \|g\|_K .$$

Es gilt stets : $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}^o$. Sei nämlich $g \in \mathfrak{K}_+$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{K}$ mit $|f| \leqslant g$: $T_f \subset T_g \subset B$ für ein $B \in \mathfrak{B}$ und somit nach (18) : $|\tilde{\mu}(|f|)| \leqslant M_B \|f\|_K \leqslant M_B \|g\|_K$. Also ist $\tilde{\mu}$ relativ beschränkt.

Sei nun umgekehrt $\tilde{\mu}$ eine positive Linearform auf $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$. N. Vor. ist T_μ $\mathfrak{B}$-kompakt. Somit ist *n.* Satz 5.1.4 die Menge $K_B = B \cap T_\mu$ kompakt für jedes $B \in \mathfrak{B}$. Nach Axiom (B3) existiert eine positive Funktion h_0 aus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}$ mit $K_B \subset E(h_0)$. Für jedes $h \in \mathfrak{K}(X, B)$ gilt somit $|h| \leqslant \|h\|_{K_B} . h_0$ auf T_μ. Daraus folgt aber *n.* Kor. 1.5.6 und Kor. 5.3.9 :

$$|\tilde{\mu}(g)| = |\sup_n \mu(g \wedge n)| \leqslant \sup_n \mu(|g \wedge n|) \leqslant \mu(h_0) . \|g\|_{K_B} \quad \forall g \in \mathfrak{K}(X, B).$$

Somit ist (18) mit $K = K_B$ und $M_B = \mu(h_0)$ erfüllt.

(iii) $\to$ (ii) : Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung

$\mathfrak{M}_0(X, \mathfrak{B}) = \tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})^o = \tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})'$ (Kor. 5.3.7) und der Definition der Straffheit in 1.4.

(ii) $\to$ (i) : Ang. es existiert ein Punkt $x_0 \in \upsilon_{\mathfrak{B}}X \setminus X$. Da X $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$-einbettbar ist in $\upsilon_{\mathfrak{B}}X$, wird durch

$$\tilde{\mu}(f) := \bar{f}(x_0) \quad (f \in \tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}})$$

eine positive Linearform auf $\tilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$ erklärt. Das Maß $\mu = \mathrm{Rest}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}} \tilde{\mu}$ gehört somit *n.* Theor. 5.3.6 zu $\mathfrak{M}_0(X, \mathfrak{B})$. Andererseits gilt für die kompakte Menge $\{x_0\} \subset X'_{\mathfrak{B}} \setminus X$ und das zu μ gehörende Borelmaß $\mu' = \delta_{x_0}$ auf $X'_{\mathfrak{B}} : \mu'(\{x_0\}) = 1$. Somit ist nach Theorem 4.2.4 μ nicht straff. □

Ist speziell $(X, \mathfrak{B})$ beschränkt, so ist $\tilde{\mathfrak{K}}(X, \mathfrak{B})$ der Ring $\mathcal{C}(X)$ aller stetigen reellen Funktionen auf X versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Das Theorem 5.4.1 nimmt dann folglich die folgende Gestalt an :

Satz 5.4.2. — *Für jeden vollständig regulären Raum* X *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist reellkompakt.*

(ii) $\mathfrak{M}_0(X) \subset \mathfrak{M}^t(X)$.

(iii) $\mathcal{C}(X)^o = \mathcal{C}(X)'$.

(iv) *Jede positive Linearform auf* $\mathcal{C}(X)$ *ist stetig.*

(v) *Jede positive Linearform auf* $\mathcal{C}(X)$ *hat einen kompakten Träger.*

Wir bringen nun einige *Anwendungen des Satzes* 5.4.2.

Zunächst folgt aus dem Satz 5.4.2 die folgende Charakterisierung der reellkompakten Räume innerhalb der Klasse der lokalkompakten von Choquet ([9], Theor. 17) :

Satz 5.4.3. (Choquet). — *Ein lokalkompakter Raum* X *ist genau dann reellkompakt, wenn die Menge* $\mathfrak{M}_+^K(X)$ *der positiven Maße auf* X *mit kompaktem Träger schwach vollständig ist bzgl. der Dualität mit* $\mathcal{C}(X)$.

Beweis. — $\mathfrak{M}_+^K(X)$ ist mit dem Kegel $\mathcal{C}'_+(X)$ identisch ([7], p. 156) und liegt *n.* Theor. 1.6.2 schwach dicht in dem vollständigen Kegel $\mathcal{C}^*_+(X)$. Folglich ist die Bedingung des Satzes von Choquet derjenigen des Satzes 5.4.2 (iv) äquivalent. □

Ist X speziell ein diskreter Raum, so folgt das Theorem 10 von Choquet [9].

Mit Hilfe des Satzes 5.4.2 lassen sich ferner verschiedene Ergebnisse aus der Theorie der Radonmaße (z.B. [7], Chap. 4, § 4 No. 8 sowie exerc. 16) für lokalkompakte und reellkompakte Räume verschärfen. Wir bringen zwei Beispiele :

SATZ 5.4.4. — *Sei* X *lokalkompakt und reellkompakt (spez. : σ-kompakt). Dann gilt: Das Radonmaß* μ *auf* X *ist genau dann zu einer relativ beschränkten Linearform auf* $\mathcal{C}(X)$ *fortsetzbar, wenn der Träger von* μ *kompakt ist.*

Nach Satz 5.4.2 kann diese Aussage nicht für beliebige lokalkompakte Räume richtig sein. In der Tat liefert der Raum Ω aller abzählbaren Ordnungszahlen versehen mit der Ordnungstopologie ein Gegenbeispiel.

Beispiel 5.4.5. Sei $\Omega = W(\omega_1)$ der Raum aller Ordnungszahlen, die kleiner sind als die erste nicht abzählbare Ordnungszahl ω_1 ([13], 5. 11-13). Versehen mit der Ordnungstopologie ist Ω lokalkompakt und pseudokompakt. Für alle $f \in \mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}_b(\Omega)$ bezeichne $\bar{f}$ die stetige Fortsetzung von f auf $\beta\Omega = W(\omega_1 + 1)$. Dann ist die positive Linearform

$$\mu(f) := \bar{f}(\omega_1) \quad (f \in \mathcal{C}_b(\Omega))$$

ein Radonmaß auf Ω, das trivialerweise auf $\mathcal{C}(\Omega)$ fortsetzbar ist, aber keinen kompakten Träger hat. Aus Satz 5.4.2 folgt außerdem : μ ist nicht stetig auf $\mathcal{C}(\Omega)$ und Ω ist nicht reellkompakt.

SATZ 5.4.6. — *Sei* X *eine Menge, deren Kardinalzahl nicht stark unerreichbar ist* [40]. *Dann hat jede positive Linearform* L *auf* $\mathbf{R}^X$ *einen endlichen Träger.* M.a.W. : L *ist von der Gestalt :*

$$L(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . f(x_j) \quad (\lambda_j \geqslant 0,\ x_j \in X)$$

für alle $f \in \mathbf{R}^X$.

Beweis. — Jeder diskrete Raum, dessen Kardinalzahl nicht stark unerreichbar ist, ist nach [13], chapt. 12, reellkompakt. Somit folgt die Behauptung aus Satz 5.4.2 (v). □

5.5. *Folgerungen bzgl. der Existenz meßbarer Kardinalzahlen.*

Eine Kardinalzahl m nennen wir mit Gilman-Jerison [13], 12.1, *meßbar*, wenn eine Menge X mit der Mächtigkeit m und ein zweiwertiges σ-additives Maß μ auf der Potenzmenge von X existiert mit $\mu(X) = 1$ und $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$. Die Kardinalzahl m heiße dagegen *reell-meßbar*, wenn ein reellwertiges m-additives Maß $\mu \neq 0$ auf der Potenzmenge von X existiert mit $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$.

Die Frage nach der Existenz solcher Kardinalzahlen ist ein wohlbekanntes ungelöstes Problem. Mit Hilfe des Satzes 5.4.2 lassen sich nun die nicht-meßbaren Kardinalzahlen wie folgt charakterisieren :

Satz 5.5.1. — *Die Kardinalzahl einer Menge* X *ist genau dann nicht-meßbar, wenn jede positive Linearform auf* $\mathbf{R}^X$ *einen endlichen Träger hat.*

Beweis. — Da ein diskreter Raum genau dann reellkompakt ist, wenn seine Kardinalität nicht-meßbar ist [13], 12.2, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 5.4.2 (v). □

Mit Hilfe eines neueren Resultats von Solovay [38] läßt sich nun folgende Aussage über die Existenz reell-meßbarer Kardinalzahlen machen :

Satz 5.5.2. — *Läßt sich unter der Voraussetzung der axiomatischen Mengentheorie von* Zermelo-Fraenkel (ZF) *und der Gültigkeit des Auswahlaxioms* (AC) *beweisen, daß jede positive Linearform auf* $\mathbf{R}^X$ (X *beliebige Menge*) *einen endlichen Träger hat* (L), *so ist damit auch die Nichtexistenz einer reellmeßbaren Kardinalzahl bewiesen — und umgekehrt.*

Beweis. — N. Vor. gilt : (ZF) + (AC) impliziert (L). (L) impliziert *n.* Satz 5.5.1 die Nichtexistenz einer (zweiwertig) meßbaren Kardinalzahl ($\neg\exists$ 2MC). Somit ist die Theorie (ZF) + (AC) + ($\exists$ 2MC) inkonsistent. Dann ist nach Solovay [38], Theor. 2, auch die Theorie (ZF) + (AC) + ($\exists$ RMC $\leqslant 2^{\aleph_0}$) inkonsistent. Insbesondere impliziert also (ZF) + (AC) die Nichtmeßbarkeit des Kontinuums. Dann impliziert nach Ulam [40], Satz 3, (ZF) + (AC) aber auch die Nichtexistenz einer reellmeßbaren Kardinalzahl. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus Satz 5.5.1. □

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. D. Alexandroff, Additive set functions in abstract spaces, *Mat. Sbornik* n.S. 8, 307-348 (1940); n.S. 9, 563-628 (1941).

[2] H. Bauer, Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble. *C.R. Acad. Sci. Paris* 238, 1171-73 (1954).

[3] H. Bauer, Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße. *Math. Zeitschr.* 65, 448-82 (1956).

[4] H. Bauer, Sur l'équivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M. H. Stone. *Bull. Soc. math. France*, 85, 51-75 (1957).

[5] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie Bd. I. Berlin 1964.

[6] N. Bourbaki, Topologie Générale, Chap. I-X, *Actual. Scient. et Ind.*, 1142, 1143, 1235, 1045, 1084, Paris (jeweils letzte Ausgabe).

[7] N. Bourbaki, Intégration Chap. I-IV, *Actual. Scient. et Ind.* 1175, Paris, 1965.

[8] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques Chap. I-V. *Actual. Scient. et Ind.*, 1189, 1229 Paris, 1966/64.

[9] G. Choquet, Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 17, 1 383-93 (1968).

[10] P. Courrège, Théorie de la Mesure, *Centre Docum. Univers.*, Paris, 1965.

[11] P. J. Daniell, A general form of integral, *Ann. of Math.* (2) 29, 279-294 (1918).

[12] I. Gelfand, u. G. Šilov, Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Raumes, *Rec. math. Moscou* n.S. 9, 25-38 (1941).

[13] L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions, Princeton, 1960.

[14] I. Glicksberg, The representation of functionals by integrals, *Duke Math. J.* 19, 253-61 (1952).

[15] Go-din Hu, Measures on σ-topological and topological spaces. Mat. Sbornik n.S. 60 (102), 257-69 (1963).

[16] G. G. Gould, A Stone-Čech-Alexandroff-Type Compactification and its Application to Measure Theory. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 14, 221-44 (1964).

[17] G. G. Gould, u. M. Mahowald, Measures on completely regular spaces, *Journ. of Lond. Math. Soc.* 37, pp. 103 (1962).

[18] P. R. Halmos, Measure Theory, Princeton 1950.

[19] O. Haupt, u. Chr. Pauc, Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. *Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math. nat.* Kl. 1955, 189-218 (1956).

[20] E. Hewitt, Rings of real-valued continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64, 54-99 (1948).

[21] K. Jacobs, Maß und Integral, *Vorl. Ausarb.*, Erlangen (1966).

[22] J. D. KNOWLES, Measures on topological spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 17, 139-56 (1967).
[23] D. KÖLZOW, Charakterisierung der Maße, welche zu einem Integral im Sinne von Stone oder von Bourbaki gehören, *Arch. d. Math.* 16, 200-7 (1965).
[24] D. KÖLZOW, Topologische Eigenschaften des abstrakten Integrals im Sinne von Bourbaki, *Arch. d. Math.* 17, 244-52 (1966).
[25] D. KÖLZOW, Charakterisierung der Maße, welche zu einem Integral im Sinne von Bourbaki gehören II, *Normalität. Arch. d. Math.* 18, 45-60 (1967).
[26] G. KÖTHE, Topologische Lineare Räume I, Berlin 1960.
[27] K. KRICKEBERG, Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure. *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, Berkeley 1967.
[28] L. LE CAM, Convergence in distribution of stochastic processes, *Univ. Calif. Publ. Stat.* 2, 11, 207-36 (1957).
[29] L. H. LOOMIS, Linear functionals and content. *Amer. Journ. Math.* 76, 168-82 (1954).
[30] E. MARCZEWSKI, On compact measures. *Fund. Math.* 40, 113-24 (1953).
[31] S. MAZUR, Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, Studia Math. 1, 83-85 (1929).
[32] J. NEVEU, Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Paris 1964.
[33] G. NÖBELING und H. BAUER, Allgemeine Approximations-kriterien mit Anwendungen, *J. Ber. Deutsch. Math.-Verein.* 58, 54-72 (1955).
[34] G. NÖBELING und H. BAUER, Über die Erweiterungen topologischer Räume, *Math. Annalen* 130, 20-45 (1955).
[35] J. PFANZAGL und W. PIERLO, Compact Systems of Sets, Lect. Notes in Math. 16, Berlin-Heidelberg-New York (1966).
[36] K. A. ROSS and K. STROMBERG, Baire sets and Baire measures, *Arkif för Matem.* 6, Nr. 8, 151-60 (1965).
[37] L. SCHWARTZ, Les Mesures de Radon dans les Espaces Topologiques Arbitraires, *Vorl. Ausarb.*, Paris 1964.
[38] R. SOLOVAY, Real-valued measurable cardinals, lect. notes prep. in conn. with the Summer Inst. ax. set theory, UCLA (1967).
[39] M. H. STONE, Notes on Integration I-IV, *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA, 34, 336-42, 447-55, 483-90 (1948); 35, 50-58 (1949).
[40] S. ULAM, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, *Fund. Math.* 16, 140-50 (1930).
[41] V. S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces (russ.), *Mat. Sbornik* n.S. 55 (97), 33-100 (1961); Übers. (engl.): *Transl. Amer. Math. Soc.* (2) 78, 161-228 (1965).
[42] W. H. YOUNG, A new method in the theory of integration, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 9, 15-50 (1911).

Manuscrit reçu le 30 juin 1969.

Dieter SONDERMANN,
Mathematisches Institut der Universität
Erlangen, Bismarckstraße (Allemagne).