

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE HENRY

Prolongements de mesures de Radon

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 1 (1969), p. 237-247

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_237_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_237_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENTS DE MESURES DE RADON

par Jean-Pierre HENRY

Le résultat essentiel de cet article est le théorème I, p. 239.

1.

DEFINITION 1. — Soit X un espace topologique et $\mathcal{C}$ un clan de parties de X (un clan est stable par complémentation, et par intersections et réunions finies). Soit μ une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}_+$ (réels positifs).

Nous dirons que μ est additive si :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}, \quad \mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) \quad (A)$$

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des quasi-compacts fermés de X .

Nous dirons que μ est intérieurement régulière si :

$$\forall B \in \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists K \in \mathcal{K} : K \subset B \quad \text{et} \quad \mu^*(B - K) \leq \varepsilon \quad (R)$$

($\mathbf{R}_+ =$ ensemble des réels ≥ 0 , $\mathbf{R}_+^* =$ ensemble des réels > 0).

Enfin si μ est additive et intérieurement régulière, nous dirons que μ est une mesure de Radon sur le clan $\mathcal{C}$.

Si A est une partie de X , nous noterons par A^c la partie complémentaire.

Remarque 1. — Si le clan $\mathcal{C}$ contient tous les quasi-compacts fermés, la condition (R) devient la condition usuelle de régularité intérieure :

$$\forall B \in \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{C} : K \subset B \quad \text{et} \quad \mu(B - K) \leq \varepsilon$$

Les définitions 1 sont compatibles avec la définition usuelle des mesures de Radon comme le montre la :

PROPOSITION 1. — Soit μ une mesure de Radon sur un clan contenant la tribu borélienne de X , μ définit une mesure de Radon (au sens usuel) sur X .

Démonstration. — Du fait de la remarque précédente il suffit de montrer l'additivité dénombrable de μ . Celle-ci résultera du :

LEMME 1. — Soit μ une mesure de Radon sur un clan $\mathfrak{C}$ contenant les fermés de X . Alors pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties deux à deux disjointes appartenant à $\mathfrak{C}$, on a :

$$\mu_*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration du lemme. — Notons A la réunion des A_n . On a évidemment pour tout entier p :

$$\mu_*(A) \geq \mu\left(\bigcup_{n \leq p} A_n\right) = \sum_{n \leq p} \mu(A_n)$$

d'où l'inégalité :

$$\mu_*(A) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, en utilisant la régularité intérieure pour les A_n^c , on peut trouver des ouverts $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_n$ contenant A_n , tels que :

$$\mu(\mathcal{O}_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

Soit K un quasi-compact fermé contenu dans la réunion des $\mathcal{O}_n$ tel que :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n\right) \leq \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$$

K est recouvert par un nombre fini des ouverts $\mathcal{O}_n$, soit alors p tel que :

$$K \subset \bigcup_{n \leq p} \mathcal{O}_n$$

on a les inégalités :

$$\mu^*(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n\right) \leq \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n \leq p} \mu(\mathcal{C}_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

puis :

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$$

cette dernière inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, la démonstration du lemme est achevée.

THEOREME 1 (Enoncé). — Soit X un espace topologique, $\mathcal{C}_0$ un clan de parties de X , μ_0 une mesure de Radon sur le clan $\mathcal{C}_0$. On peut prolonger μ_0 en une mesure de Radon sur X .

Remarque 2. — D'après la proposition 1, il suffit de montrer que l'on peut prolonger μ_0 en une mesure de Radon sur un clan contenant la tribu borélienne.

DEFINITION 2. — Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des couples $(\mathcal{C}, \mu)$ où $\mathcal{C}$ est un clan de X et μ une mesure de Radon sur $\mathcal{C}$. On ordonne $\mathcal{G}$ par la relation :

$$(\mathcal{C}', \mu') \geq (\mathcal{C}, \mu)$$

si et seulement si :

- α) $\mathcal{C}$ est un sous-clan de $\mathcal{C}'$
- β) La restriction de μ' à $\mathcal{C}$ est μ .

PROPOSITION 2. — L'ensemble ordonné $\mathcal{G}$ est inductif.

Démonstration. — $\mathcal{G}$ est non vide puisque $(\mathcal{A}(X), 0)$ appartient à $\mathcal{G}$ (où 0 est la mesure nulle). Soit E un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{C}$ la réunion des clans de définition des éléments de E . C'est encore un clan. On définit alors μ sur $\mathcal{C}$ comme prolongement. Il est facile de voir que μ est positive et additive. Reste à montrer la régularité intérieure.

Soit B un élément de $\mathcal{C}$ et ε un réel strictement positif. On peut trouver (t, μ_t) élément de E tel que B appartienne au clan t .

μ_t étant intérieurement régulière, il existe un quasi-compact fermé K contenu dans B tel que :

$$\mu_t^*(B - K) \leq \varepsilon$$

Comme μ prolonge μ_t on en déduit :

$$\mu^*(B - K) \leq \varepsilon$$

Alors $(\mathfrak{G}, \mu)$ appartient à $\mathcal{G}$ et majore E .

COROLLAIRE. — Soit $(\mathfrak{G}_0, \mu_0)$ le couple d'un clan $\mathfrak{G}_0$ et d'une mesure de Radon μ_0 sur $\mathfrak{G}_0$, il existe un élément maximal $(\mathfrak{G}, \mu)$ de $\mathcal{G}$, tel que μ prolonge μ_0 .

Démonstration. — On utilise le lemme de Zorn.

LEMME 2. — Soit $\mathfrak{G}$ un clan de parties de X , et μ une application additive de $\mathfrak{G}$ dans $\mathbf{R}_+$. Soit A une partie de X , et $\mathfrak{G}'$ le clan engendré par $\mathfrak{G}$ et A . Soit μ' l'application de $\mathfrak{G}'$ dans $\mathbf{R}_+$:

$$\mu'(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu_*(C \cap A^c)$$

μ' est positive et additive et prolonge μ .

Démonstration. — Soit $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de parties contenant A et appartenant à $\mathfrak{G}$ telle que :

$$\mu_*(B_n - A) \leq \frac{1}{n}$$

Alors pour tout élément C de $\mathfrak{G}$ les inégalités suivantes sont évidentes :

$$\mu^*(C \cap A) \leq \inf_{B \in \mathfrak{G}, B \supset A} \mu(C \cap B) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p)$$

Montrons que $\mu^*(C \cap A) \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p)$:

Pour tout entier n , il existe une partie B contenant $C \cap A$, appartenant à $\mathfrak{G}$ telle que :

$$\mu^*(C \cap A) \geq \mu(B) - \frac{1}{n}$$

$C \cap B_n \cap B^c$ appartient à $\mathfrak{G}$ et est contenue dans $B_n \cap A^c$, donc par hypothèse sur les B_n :

$$\mu(C \cap B_n \cap B^c) \leq \frac{1}{n}$$

et donc :

$$\mu(B) \geq \mu(B \cup (C \cap B_n \cap B^c)) - \frac{1}{n}$$

Or $B \cup (C \cap B_n \cap B^c)$ contient tous les $C \cap B_p$ pour $p \geq n$, d'où :

$$\mu(B) \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p) - \frac{1}{n}$$

$$\mu^*(C \cap A) \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p) - \frac{2}{n}$$

cette dernière inégalité étant valable pour tout n , on peut écrire :

$$\mu^*(C \cap A) \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p)$$

d'où, finalement, les égalités valables pour toute partie C appartenant à $\mathfrak{G}$:

$$\mu^*(C \cap A) = \inf_{B \in \mathfrak{G}, B \supset A} \mu(C \cap B) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p)$$

On démontre, mutatis mutandis, de la même manière les égalités :

$$\mu_*(C \cap A^c) = \sup_{B \in \mathfrak{G}, B \supset A^c} \mu(C \cap B^c) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C \cap B_p^c)$$

Il est maintenant facile de voir que μ' prolonge μ .

Comme le clan $\mathfrak{G}'$ n'est autre que l'ensemble :

$$\mathfrak{G}' = \{(C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c) / C_1, C_2 \in \mathfrak{G}\}$$

On aura pour toute partie C élément de $\mathfrak{G}'$, qui s'écrit :

$$C = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)$$

avec C_1, C_2 éléments de $\mathfrak{G}$:

$$\mu'(C) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C_1 \cap B_p) + \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(C_2 \cap B_p^c)$$

Et sous cette forme l'additivité de μ' est facile à vérifier, ainsi que le fait que μ' prolonge μ .

PROPOSITION 3. — Soit μ une mesure de Radon sur un clan $\mathfrak{C}$, et A une partie fermée de X ; $\mathfrak{C}'$ le clan engendré par $\mathfrak{C}$ et A , μ' l'application de $\mathfrak{C}'$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par :

$$\mu'(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu_*(C \cap A^c)$$

alors μ' est une mesure de Radon sur $\mathfrak{C}'$, qui prolonge μ .

Démonstration. — On sait déjà par le lemme 2 que μ' est additive et prolonge μ .

Montrons la *régularité intérieure* :

Soit C un élément de $\mathfrak{C}'$, que l'on peut écrire

$$C = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)$$

avec C_1 et C_2 éléments de $\mathfrak{C}$.

Pour tout entier n on peut trouver un quasi compact fermé K_1^n contenu dans C_1 tel que :

$$\mu^*(C_1 - K_1^n) \leq \frac{1}{n}$$

Alors $K_1^n \cap A$ est un quasi-compact fermé contenu dans $C_1 \cap A$ tel que :

$$\mu'^*(C_1 \cap A - K_1^n \cap A) \leq \mu'^*(C_1 - K_1^n) \leq \mu^*(C_1 - K_1^n) \leq \frac{1}{n}$$

Il existe aussi un quasi-compact fermé K_2^n contenu dans $C_2 \cap B_n^c$ tel que :

$$\mu^*(C_2 \cap B_n^c - K_2^n) \leq \frac{1}{n}$$

K_2^n est contenu a fortiori dans $C_2 \cap A^c$ et vérifie les inégalités :

$$\mu'(C_2 \cap A^c) \leq \mu(C_2 \cap B_n^c) + \frac{1}{n} \leq \mu_*(K_2^n) + \frac{2}{n}$$

finalement le quasi-compact fermé $K_1^n \cup K_2^n$ est contenu dans C et vérifie :

$$\mu'(C) \leq \mu_*(K_1^n \cup K_2^n) + \frac{3}{n}$$

Comme μ' prolonge μ :

$$\mu_*(K_1^n \cup K_2^n) \leq \mu'_*(K_1^n \cup K_2^n)$$

et on peut écrire :

$$\mu'_*(C - K_1^n \cup K_2^n) \leq \frac{3}{n}$$

On en déduit la régularité intérieure de μ' .

COROLLAIRE. — *Les éléments maximaux $(\mathfrak{G}, \mu)$ de $\mathfrak{G}$ sont des mesures de Radon définies sur des clans contenant les fermés de X .*

LEMME 3. — *Soit μ une mesure de Radon sur un clan contenant les fermés de X . On peut prolonger μ en une mesure de Radon sur un clan contenant la tribu borélienne.*

Démonstrations. — Soit $\mathfrak{G}' = \{C \in \mathfrak{G}(X) / \mu_*(C) = \mu_*(C)\}$.

On définit μ' sur $\mathfrak{G}'$ comme la restriction à $\mathfrak{G}'$ de μ_* .

On voit que $\mathfrak{G}'$ contient $\mathfrak{G}$ et que μ' prolonge μ . $\mathfrak{G}'$ est stable par complémentation et μ' est croissante et intérieurement régulière. Montrons que $\mathfrak{G}'$ est stable par réunions finies :

Si C_1 et C_2 sont des éléments de $\mathfrak{G}'$, ε un réel positif et B_1, B'_1, B_2, B'_2 des éléments de $\mathfrak{G}$ tels que :

$$B_1 \subset C_1 \subset B'_1 \quad \text{et} \quad B_2 \subset C_2 \subset B'_2$$

$$\mu(B'_1 - B_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \mu(B'_2 - B_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors il est clair que :

$$B_1 \cup B_2 \subset C_1 \cup C_2 \subset B'_1 \cup B'_2$$

$$\mu(B'_1 \cup B'_2 - B_1 \cup B_2) \leq \varepsilon$$

Ce qui permet de montrer que $C_1 \cup C_2$ appartient à $\mathfrak{G}'$.

L'additivité de μ' se montre par des calculs du même genre. Enfin grâce au lemme 1 on sait qu'une réunion dénombrable de parties deux à deux disjointes et éléments de $\mathfrak{G}'$ appartient à $\mathfrak{G}'$. $\mathfrak{G}'$ est donc une tribu et contient tous les boréliens puisqu'elle contient les fermés.

PROPOSITION 4. — *Les éléments maximaux de $\mathfrak{E}$ définissent des mesures de Radon sur X.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition 1, du lemme 3 et du corollaire de la proposition 3.

Démonstration du théorème. — Résulte de la proposition 4 et du corollaire de la proposition 2.

2. Applications et exemples.

1) THEOREME 2. — *Relèvement d'une mesure par une application continue.*

Soit X un espace topologique quasi-compact et π une application continue surjective de X sur Y. Soit ν une mesure de Radon sur Y. Il existe une mesure de Radon μ sur X dont l'image $\pi\mu$ par π soit ν .

Démonstration. — Soit $\mathfrak{C}_0$ le clan des images réciproques de boréliens de Y. Comme π est surjective, l'application : $B \longmapsto \pi^{-1}(B)$ est injective et l'on peut définir μ_0 sur $\mathfrak{C}_0$ par :

$$\mu_0(\pi^{-1}(B)) = \nu(B)$$

μ est additive. Montrons la régularité intérieure :

Soit B un borélien de Y, ε un réel strictement positif.

On peut trouver un fermé L de Y contenu dans B, tel que :

$$\nu(B - L) \leq \varepsilon$$

alors $\pi^{-1}(L)$ est un quasi compact fermé de X, contenu dans $\pi^{-1}(B)$ tel que

$$\mu_0(\pi^{-1}(B) - \pi^{-1}(L)) \leq \varepsilon$$

On montre ainsi que μ_0 est une mesure de Radon sur $\mathfrak{C}_0$.

Par le théorème 1 on prolonge μ_0 en une mesure de Radon μ sur X. Alors par construction de μ_0 , $\pi\mu = \nu$.

2) Mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

X est l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbf{R}$, muni de la topologie usuelle. $\mathfrak{T}_0$ est le clan des réunions finies d'intervalles. μ_0 fait correspondre à tout intervalle sa longueur :

$$\mu_0([a, b]) = \mu_0([a, b]) = \mu_0([a, b[) = \mu_0(]a, b]) = b - a.$$

On vérifie trivialement la régularité intérieure. Il existe alors une mesure de Radon μ sur X qui prolonge μ_0 . Comme $\mathfrak{T}_0$ contient une base d'ouverts ce prolongement est d'ailleurs unique : c'est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

3) Produits de mesures.

Soient X et Y deux quasi-compacts, μ une mesure de Radon sur X , ν une mesure de Radon sur Y . Sur $X \times Y$ muni de la topologie produit il existe une mesure de Radon λ telle que pour tout couple de parties (B, C) , B μ -mesurable, C ν -mesurable, $B \times C$ soit λ -mesurable de mesure $\mu(B) \times \nu(C)$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{T}_0$ le clan engendré par les produits $B \times C$, où B est μ -mesurable. On définit λ_0 de $\mathfrak{T}_0$ dans $\mathbf{R}_+$ par :

$$\lambda_0 : (B_1 \times C_1) \cup \dots \cup (B_n \times C_n) \longmapsto \sum_{p=1}^{p=n} \mu(B_p) \times \nu(C_p)$$

quand les $B_p \times C_p$ sont deux à deux disjointes. Comme on peut mettre tout élément de $\mathfrak{T}_0$ sous une telle forme, λ_0 est bien définie.

λ_0 est additive et intérieurement régulière, donc prolongeable en une mesure de Radon λ (d'ailleurs unique puisque $\mathfrak{T}_0$ contient une base d'ouverts) sur $X \times Y$, qui répond à la question.

4) Un contre-exemple.

Voici maintenant un exemple d'un espace topologique X , d'un clan $\mathfrak{T}_0$, d'une application additive μ_0 de $\mathfrak{T}_0$ dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant la condition, plus faible que (R), suivante :

(R') Pour toute partie B du clan $\mathfrak{T}_0$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un quasi-compact fermé K contenu dans B et tel que :

$$\mu_{0*}(B - K) \leq \varepsilon$$

et μ_0 n'admettant pas de prolongement qui soit une mesure de Radon sur X .

X sera l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1, muni de la topologie habituelle.

On définit la relation d'équivalence ρ entre deux rationnels par : $a \rho b$ si dans l'expression de a et b sous forme de fractions réduites, a et b ont même dénominateur.

$\mathfrak{T}_0$ sera l'ensemble des parties finies et des complémentaires de parties finies de X , saturées pour la relation d'équivalence ρ . $\mathfrak{T}_0$ est bien un clan.

On définit μ_0 , application de $\mathfrak{T}_0$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$\mu_0(B) = 0$ si B est une partie finie

$\mu_0(B) = 1$ si B est complémentaire d'une partie finie.

L'additivité de μ_0 est alors facile à vérifier.

Montrons que (R') est vérifiée : Soit B un élément de $\mathfrak{T}_0$.

Si B a un nombre fini d'éléments, il n'y a pas de problème.

Si B est complémentaire d'une partie finie, il existe un entier n tel que B contienne tous les éléments de X dont l'expression sous forme de fraction réduite à un dénominateur supérieur à n .

Si on désigne par p_m le $m^{\text{ème}}$ nombre premier, $\frac{1}{n} + \frac{1}{p_m}$ pour tout entier $m \geq n$ est, une fois réduit, de dénominateur plus grand que p_m , donc que m . Soit K l'ensemble des éléments de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où :

$$a_0 = \frac{1}{n}, a_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{p_{n+1}}, \dots, a_r = \frac{1}{n} + \frac{1}{p_{n+r}}, \dots$$

qui est une suite convergente vers $\frac{1}{n}$ — K est un compact de X , contenu dans B et qui rencontre toute partie infinie appartenant à $\mathfrak{T}_0$. Tout élément de $\mathfrak{T}_0$ contenu dans $B - K$ est donc fini, donc de mesure nulle et :

$$\mu_{0*}(B - K) = 0$$

Mais μ_0 n'est pas prolongeable en une mesure de Radon, puisque X de mesure 1 est réunion dénombrable des parties A_n , éléments de $\mathfrak{T}_0$, où A_n est définie par :

$$A_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \right\},$$

qui sont de mesure nulle.

Manuscrit reçu le 31 janvier 1969

Jean-Pierre HENRY

Centre de Recherche Mathématique

Ecole Polytechnique

Rue Descartes

Paris 5e