

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

**Remarques sur les ouverts d'holomorphie d'un
produit dénombrable de droites**

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 1 (1969), p. 219-229

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_219_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LES OUVERTS D'HOLOMORPHIE D'UN PRODUIT DÉNOMBRABLE DE DROITES

par André HIRSCHOWITZ

On sait que la notion d'ouvert d'holomorphie, si féconde dans la théorie des variétés analytiques complexes, est dépourvue d'intérêt dans les espaces vectoriels réels de dimension finie, tout ouvert d'un tel espace étant d'holomorphie. Le but de cette note est de montrer sur un exemple qu'il n'en est pas nécessairement de même dans un espace vectoriel réel, de dimension infinie. Plus précisément nous allons caractériser les ouverts d'holomorphie des espaces $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes ou réels munis de la topologie de la convergence simple.

Nous supposons que le lecteur est familier avec la théorie des fonctions holomorphes telle qu'elle est exposée dans l'ouvrage [1] (et tout particulièrement chapitre II).

1. Les fonctions analytiques dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

DEFINITION 1. — *Soit E un espace vectoriel topologique complexe. Une application d'un ouvert Ω de E dans $\mathbb{C}$ est une fonction analytique si elle est continue et si sa restriction à toute droite affine est analytique.*

DEFINITION 2. — *Soit F un espace vectoriel topologique réel. Nous dirons qu'une application d'un ouvert Ω' de F dans $\mathbb{C}$ est une fonction analytique si au voisinage de tout point de Ω' , g coïncide avec la restriction à F d'une fonction analytique définie dans un ouvert du complexifié $F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de F .*

Notons que $F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est un espace vectoriel topologique de façon naturelle.

Nous prendrons pour E l'espace $\mathbb{C}^N$ muni de la topologie produit et pour F l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de la même topologie induite, et dont $\mathbb{C}^N$ est le complexifié. Un point de $\mathbb{C}^N$ sera noté $z = (z_i)_{i \in N}$ et un point de $\mathbb{R}^N$ $x = (x_i)_{i \in N}$.

DEFINITION 3. — Nous dirons que f analytique dans Ω ne dépend que des n premières variables si

$$z \in \Omega \quad z' \in \Omega \quad , \quad \forall i \leq n \quad z_i = z'_i \implies f(z) = f(z')$$

Nous dirons que f ne dépend que des n premières variables au voisinage de $z_0 \in \Omega$ s'il existe un voisinage V de z_0 tel que la restriction de f à $V \cap \Omega$ ne dépende que des n premières variables.

Nous employerons un langage analogue pour les fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

THEOREME 1. — Si f est analytique dans Ω , pour tout $z \in \Omega$, il existe n dépendant à priori de z tel que f ne dépende que des n premières variables au voisinage de z .

COROLLAIRE 1. — Si g est analytique dans $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$, pour tout $x \in \Omega'$ il existe n' dépendant à priori de x tel que g ne dépende que des n' premières variables au voisinage de x .

Le corollaire découle immédiatement de la définition 2 et du théorème 1.

Démonstration du théorème 1. — f étant continue en z , il existe un voisinage élémentaire V de z dans lequel f est définie et bornée.

$$V = \{z' \mid i \leq p \implies |z'_i - z_i| < \varepsilon\}.$$

Nous allons montrer que, dans V , f ne dépend que des p premières variables. Pour cela définissons h dans V par

$$h(z'_1, z'_2, \dots, z'_i, \dots) = f(z'_1, z'_2, \dots, z'_p, 0, 0, \dots).$$

h est manifestement continue (par exemple comme composée d'applications continues).

Pour montrer que f ne dépend que des p premières variables, montrons que $f = h$, et pour commencer que $f(z') = h(z')$ si presque toutes les composantes de z' sont nulles.

Soit $q > p, f(z'_1, \dots, z'_q, 0, 0, \dots)$ est une fonction analytique de $z'_{p+1}, z'_{p+2}, \dots, z'_q$ entière et bornée. Elle est donc constante. Mais V étant muni de la topologie de la convergence simple, l'ensemble des z' de V dont presque toutes les coordonnées sont nulles est partout dense dans V . Comme f et h sont continues, $f = h$ c.q.f.d.

THEOREME 2. — Si $n_f(z)$ désigne le plus petit entier vérifiant la conclusion du théorème 1, la fonction $z \mapsto n_f(z)$ est continue, donc constante sur toute composante connexe de Ω .

Démonstration. — Vu la définition de n_f cette fonction est évidemment semi-continue supérieurement.

Montrons qu'elle est semi-continue inférieurement.

Soit $z \in \Omega$ et définissons p et V comme dans la démonstration du théorème 1. Nous allons montrer que $n_f(z) \leq \inf_{z' \in V} n_f(z')$ ou encore que $\forall z' \in V \quad n_f(z) \leq n_f(z')$.

Supposons donc $n_f(z') < p$.

Il existe donc ε' tel que f ne dépende que des $n_f(z')$ premières variables dans :

$$V' = \{z'' \mid i \leq n_f(z') \implies |z''_i - z'_i| < \varepsilon'\}.$$

Soit V'' l'ouvert de $\mathbb{C}^p$ qui est la trace de V .

Définissons dans V''

$$h_1(t_1, \dots, t_p) = f(t_1, \dots, t_p, 0, 0, \dots)$$

$$\text{et} \quad h_2(t_1, \dots, t_p) = f(t_1, \dots, t_{n_f(z')}, 0, 0, \dots)$$

ces deux fonctions coïncident sur la trace de V' . Comme elles sont analytiques, elles sont égales en vertu du théorème du prolongement analytique. Donc f ne dépend dans V que des $n_f(z')$ premières variables. c.q.f.d.

COROLLAIRE 2. — Si $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$ ouvert est connexe et si g est analytique dans Ω' , il existe n tel que, au voisinage de tout point de Ω' , g ne dépende que des n premières variables.

Le résultat étant en fait local (c'est la continuité de n_g) il découle du théorème 2 par l'intermédiaire de la définition 2.

Remarque. — Les théorèmes 1 et 2 n'entraînent pas qu'une fonction analytique dans un ouvert connexe ne dépende que d'un nombre fini de variables. Nous allons donner l'exemple d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}^N$ et d'une fonction analytique dans Ω qui localement ne dépend que de z_1 et globalement dépend de toutes les variables.

Soit dans le plan complexe la spirale logarithmique d'équation $\rho = e^\theta$ et $h(\theta)$ le point d'argument θ et de module e^θ .

Posons

$$K_0 = [h(0), h(2\pi)] \cup h[2\pi, 3\pi] \cup [h(3\pi), h(-3\pi)]$$

Soit S la similitude qui transforme $h(\theta)$ en $h\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$. Posons

$$K_n = S^n(K_0)$$

et
$$U_n = \left\{ z \mid d(z, K_n) < \frac{1}{4} \right\}$$

D'autre part, posons $C_1 = 1$, et pour $n \geq 2$ $C_n = (-1)^n + (n-1)i$. Posons encore

$V_0 = \mathbb{C}$ et notons V_n la boule de centre C_n et de rayon $\sqrt{2}$.

Posons enfin

$$W_n = U_n \times V_{n+1} \times V_n \times V_{n-1} \times \cdots \times V_2 \times V_1 \times V_0 \times V_0 \times \cdots$$

et
$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$$

On peut vérifier qu'une fonction logarithme de z_1 définie dans W_0 se prolonge à tout Ω en une fonction f qui ne dépend localement que de z_1 et globalement dépend de toutes les variables.

2. Les ouverts d'holomorphic de $\mathbb{C}^N$.

On donne en dimension finie au moins trois définitions d'un ouvert d'holomorphic équivalentes. Nous allons voir qu'il en est de même dans $\mathbb{C}^N$.

THEOREME 3. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^N$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) *il n'existe pas un couple d'ouverts Ω_1 et Ω_2 avec :*

a) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$

b) Ω_2 *est connexe et non contenu dans Ω .*

c) *Pour toute fonction u holomorphe dans Ω , il existe une fonction u_2 holomorphe dans Ω_2 telles que $u = u_2$ dans Ω_1 .*

ii) Ω *est holomorphiquement convexe.*

iii) *La trace de Ω sur toute variété affine de dimension 2 est localement pseudoconvexe. On dit alors que Ω est localement pseudoconvexe.*

$$-\log d(z, z') = -\log \left(\inf_{z+\lambda z' \notin \Omega} |\lambda| \right)$$

est plurisousharmonique dans $\Omega \times (\mathbb{C}^N - \{0\})$, (cf Lelong th 2-4-2).

iv) *il existe n tel que si π_n désigne la projection de $\mathbb{C}^N$ sur l'espace des n premières variables:*

a) $\pi_n(\Omega)$ *est d'holomorphie.*

b) $\Omega = \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega)).$

v) *il existe une fonction f holomorphe dans Ω telle qu'on ne puisse trouver Ω_1 , et Ω_2 et f_2 holomorphe dans Ω_2 satisfaisant :*

a) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega.$

b) Ω_2 *est connexe et non contenu dans Ω .*

c) $f = f_2$ *dans Ω_1 .*

vi) *Pour tout point frontière x de Ω , il existe une fonction f analytique dans Ω telle qu'il n'existe pas Ω_1 et Ω_2 ouverts et f_2 analytique dans Ω_2 satisfaisant :*

a) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega.$

b) Ω_2 *est connexe, $x \in \Omega_2$ et $x \in \overline{\Omega_1}$.*

c) $f = f_2$ *dans Ω_1 .*

Démonstration. — Il est évident que

$$\text{ii)} \implies \text{iii)} \implies \text{iv)} \implies \text{v)} \implies \text{vi)} \implies \text{i)}.$$

i) $\implies$ ii), la démonstration est calquée sur celle donnée par Hörmander (lemme 2.5).

Rappelons qu'une famille fondamentale de bornés de C^N est formée par les parties de la forme $\{z \mid |z_i| \leq r_i\}$, et que tout borné est relativement compact.

Si K est un compact de Ω , $\hat{K}$ est contenu dans l'enveloppe convexe fermée de K , donc est borné (donc relativement compact dans C^N). Cette propriété est d'ailleurs vraie dans tout espace localement convexe.

En effet soit $\Gamma(K)$ l'enveloppe convexe fermée de K et $z_0 \notin \Gamma(K)$. D'après Hahn-Banach il existe une forme linéaire continue l telle que $(z_0 + l^{-1}(0)) \cap \Gamma(K) = \emptyset$. Posons $f_\theta(z) = e^{i\theta} l(z - z_0)$.

$f_\theta(\Gamma(K))$ est alors une partie convexe de C ne contenant pas 0. On peut donc trouver θ_0 tel que

$$\sup_{\alpha \in f_{\theta_0}(\Gamma(K))} (\operatorname{Re} \alpha) < 0.$$

$e^{f_{\theta_0}(z)}$ est analytique dans C^N , $e^{f_{\theta_0}(z_0)} = 1$

et
$$\sup_{z \in K} |e^{f_{\theta_0}(z)}| < 1.$$

Il nous faut donc montrer que $\hat{K}$ est fermé dans Ω . Pour cela nous allons montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans C^N tel que $\hat{K} + V$ soit contenu dans Ω , c'est-à-dire tel que $(\partial\Omega + V) \cap \hat{K} = \emptyset$. K étant compact, il est clair qu'il existe un ouvert $K + D$ de la forme $K + D = \{z \in C^N \mid \exists w \in K : i \leq n \implies |z_i - w_i| < \varepsilon\}$, avec $K + D \subset \Omega$. Nous allons montrer que $\hat{K} + D \subset \Omega$.

Soit r une suite de nombres positifs avec pour $i \leq n$, $r_i < \varepsilon$.

Posons

$$K_{t,r} = \{z \in C^N \mid w \in K : \forall i \mid |z_i - w_i| \leq t r_i\}, \quad 0 < t < 1$$

$K_{t,r}$ est fermé et borné donc compact.

Soit u une fonction analytique dans Ω .

Posons $\|u\|_{K_{t,r}} = M$. Comme u ne dépend localement que d'un nombre fini de variables on peut définir ses dérivées partielles par rapport aux variables z_i et si a désigne un multi-indice, on a d'après les inégalités de Cauchy :

$$\forall w \in \hat{K} \left| \frac{\partial^a u}{\partial z^a}(w) \right| t^{|a|} r^{|a|/a} \leq M.$$

Mais $\frac{\partial^a u}{\partial z^a}$ est analytique et cette inégalité est encore vraie si $w \in \hat{K}$.

$$\forall w \in \hat{K} \left| \frac{\partial^a u}{\partial z^a}(w) \right| t^{|a|} r^{|a|/a} \leq M.$$

Si on pose $D_r = \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z_i| < r_i\}$, on voit que la série de Taylor de u en w converge dans $w + D_r$ et même dans un voisinage de $w + D_r$ puisque u ne dépend que d'un nombre fini de variables. Ce résultat étant indépendant de r , la série de Taylor de u en w définit une fonction analytique dans $w + D$ qui coïncide avec u dans la composante connexe de $(w + D) \cap \Omega$ qui contient w . L'énoncé de i) nous assure alors que $w + D \subset \Omega$.

iii) $\implies$ iv).

Nous démontrerons qu'il existe n vérifiant iv) b), a) en découlant de façon évidente.

Soit z un point de Ω nous définirons l'ordre de Ω en z comme le plus petit n tel qu'il existe, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ tels que

$$\{z' \in \mathbb{C}^N \mid i \leq n \implies |z'_i - z_i| < \varepsilon_i\} \subset \Omega$$

LEMME. — si Ω localement pseudoconvexe est d'ordre n en 0, il est d'ordre au plus n dans la plus grande boule de centre 0 contenue dans $\Omega_n = \Omega \cap \mathbb{C}^n$.

Démonstration. — Soit r_1 le rayon de la plus grande boule B_1 de Ω_n centrée en 0 telle que Ω soit d'ordre au moins n dans cette boule et r_2 celui de la plus grande boule B_2 centrée en zéro et contenue dans Ω_n . Nous devons montrer que $r_1 = r_2$, ou encore que

$$B_2 \times \mathbb{C}^{N-[1,n]} = \Omega_2 \subset \Omega$$

Soit $\eta = (\eta_i) \in \Omega_2$. Posons $\zeta = (0, 0, \dots, 0, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots)$ (n zéros) et soit V le sous-espace vectoriel engendré par η et ζ .

Si $\eta \notin B_2$ et $\xi \neq 0$, V est de dimension 2 et $\Omega_V = \Omega \cap V$ est pseudoconvexe.

Posons $\delta_{\Omega_V}(z, \eta - \xi) = \inf \{ |\lambda| ; z + \lambda(\eta - \xi) \notin \Omega_V \}$

— $\log \delta_{\Omega_V}(z, \eta - \xi)$ est plurisousharmonique en z dans Ω_V

c'est-à-dire que

— $\log \delta_{\Omega_V}(\lambda \xi, \eta - \xi)$ est sousharmonique en $\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

Cette fonction est majorée puisque $B_1 \times \mathbb{C}^{N-[1,n]} \subset \Omega$. Elle est donc constante.

Comme $\delta_{\Omega_V}(0, \eta - \xi) > 1$, $\delta_{\Omega_V}(\xi, \eta - \xi) > 1$

ce qui prouve que $\eta \in \Omega$.

Le lemme étant démontré, supposons, pour la simplicité que $0 \in \Omega$. Soit Ω'_n la composante connexe de Ω_n qui contient 0. Nous allons voir que Ω contient $\Omega'_n \times \mathbb{C}^{N-[1,n]}$.

En effet, Ω est d'ordre au plus n dans Ω'_n , puisque l'ensemble des points de Ω'_n où Ω est d'ordre au plus n contient zéro, et contient avec tout point la plus grande boule centrée en ce point et contenue dans Ω'_n .

Montrons par l'absurde que, si $z \in \partial \Omega'_n \times \mathbb{C}^{N-[1,n]}$, $z \notin \Omega$. Si $z \in \Omega$ il existe $V = \{ z' \mid |z'_i - z_i| < \varepsilon \text{ pour } i \leq n \} \subset \Omega$.

Soit $t \in \Omega'_n \times \mathbb{C}^{N-[1,n]}$ tel que $|t_i - z_i| < \varepsilon/2$ pour $i \leq n$, et $t_i = z_i$ pour $i > n$.

Ω est d'ordre au plus n en t donc dans

$$\{ z' \mid |z'_i - t_i| < \varepsilon/2 \text{ (} i \leq n \text{)} \}$$

et en particulier en z d'où $\pi_n(z) \in \Omega'_n$ ce qui est absurde. Par conséquent $\Omega'_n \times \mathbb{C}^{N-[1,n]}$ est fermé dans Ω , donc est égal à Ω .

$$\Omega = \pi_n^{-1}(\Omega'_n) = \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega)) .$$

Remarque. — Cette dernière implication tient essentiellement à la structure de produit infini de l'espace envisagé. Par contre on peut démontrer que vi) $\implies$ iii) dans tout espace localement convexe. Je ne sais pas si i) $\implies$ ii) dans le cas général.

3. Les ouverts d'holomorphie de $\mathbb{R}^N$.

Revenons maintenant au cas de $\mathbb{R}^N$. Le corollaire 2 nous permet de démontrer un théorème de prolongement.

THEOREME 4. — Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$ et L un fermé tel que

1) $\Omega - L$ soit connexe

2) pour tout x dans $\Omega \cap L$, il existe un voisinage V de x et un entier n_0 tels que

$x' \in V \cap L$ et $n \geq n_0 \implies \pi_n^{-1}(\pi_n(x')) \cap (\Omega - L)$ est connexe non vide.

Alors toute fonction analytique dans $\Omega - L$ se prolonge de manière unique en une fonction analytique dans Ω .

Démonstration. — Soit f analytique dans $\Omega - L$. f ne dépend localement que des p premières variables d'après le corollaire 2.

Pour n suffisamment grand ($n > p$) : f est localement constante sur $\pi_n^{-1}(\pi_n(x)) \cap (\Omega - L)$ et dès que $n > \sup(n_0, p)$, f est constante sur $\pi_n^{-1}(\pi_n(x)) \cap (\Omega - L)$.

Prolongeons f à Ω par $\tilde{f}$ définie sur L par

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[\pi_n^{-1}(\pi_n(x)) \cap (\Omega - L)]$$

S'il existe un prolongement de f à Ω c'est nécessairement $\tilde{f}$.

Il nous reste à montrer que $\tilde{f}$ est analytique.

Soit $x \in \Omega \cap L$. On peut supposer que V est contenu dans Ω et que f ne dépend que des q premières variables dans V ($q > \sup(n_0, p)$). $\tilde{f}(x) = f(x + \xi)$ avec $\xi_i = 0$ pour $i \leq q$ et f est analytique dans un voisinage de $x + \xi$. Donc, dans un voisinage de x ,

$$\tilde{f}(x') = \tilde{f}(x' + \xi) = f(x' + \xi)$$

est analytique.

Cas particuliers.

1) L est "localement compact" c'est-à-dire $\forall x \in L$, il existe un voisinage fermé V de x tel que $V \cap L$ soit compact.

2) L est un sous-espace affine fermé de codimension infinie.

Le théorème 4 prouve donc qu'il existe des ouverts de $\mathbb{R}^N$ qui ne sont des ouverts d'holomorphie en aucun sens du terme.

Nous allons maintenant mettre en évidence un autre phénomène : les trois classes d'ouverts d'holomorphie connexes définies par les conditions i) v) et vi) du théorème 3 sont distinctes deux à deux dans $\mathbb{R}^N$. Nous dirons donc qu'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^N$ est

de type (1) s'il vérifie la condition v)

de type (2) s'il vérifie la condition vi)

de type (3) s'il vérifie la condition i).

Il est clair qu'une fonction analytique dans Ω qui ne dépend que des n premières variables se prolonge (*de façon éventuellement multiforme*) à $\pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))$. On peut donc énoncer :

THEOREME 5. — *Pour qu'un ouvert connexe Ω soit de type (1) il faut et il suffit qu'il existe n tel que $\Omega = \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))$.*

On a de même le résultat évident :

THEOREME 6. — *Pour qu'un ouvert Ω connexe soit de type (2) il faut et il suffit que $\Omega = \bigcap_n \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))$.*

Exemple. — Posons

$$U_n =]n, n + 2[\quad n > 0 \quad V_n = U_{n+1} \times U_n \times \cdots \times U_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

et $\Omega = \bigcup_{n > 0} V_n$. Il est facile de voir que Ω est connexe, de type (2) mais pas de type (1).

Enfin on a le

THEOREME 7. — *Pour qu'un ouvert Ω connexe soit de type (3) il faut et il suffit que $\Omega = \sqrt[n]{\bigcap_n \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))}$,*

En particulier il suffit que $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$.

En effet tout ouvert Ω_2 dans lequel se prolongent toutes les fonctions analytiques dans Ω est contenu dans $\bigcap_n \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))$. Si $\Omega = \sqrt[n]{\bigcap_n \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))}$ on a donc $\Omega_2 \subset \Omega$.

Réciproquement toute fonction analytique dans Ω se prolonge à $\Omega_2 = \bigcap_n \pi_n^{-1}(\pi_n(\Omega))$. Il est donc bien nécessaire pour que Ω soit de type (3) que $\Omega_2 = \Omega$.

Exemple. — Soit $\Omega = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|}{2^i(1 + |x_i|)} < \frac{1}{4} \right\}$. Il est facile de voir que Ω est de type (3) mais n'est pas de type (2).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. HORMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*, Toronto-New-York-London, (1966).
- [2] P. LELONG, *Fonctions entières de type exponentiel*, Université de Montréal, Séminaire 1966.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1968

André HIRSCHOWITZ

Faculté des sciences de Nice

Parc Valrose — Nice