ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NOËL LEBLANC

Calcul symbolique dans le centre d'une algèbre de groupe

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 109-116

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 109 - 116

CALCUL SYMBOLIQUE DANS LE CENTRE D'UNE ALGÈBRE DE GROUPE

par Noël LEBLANC

Soit L l'algèbre de convolution des fonctions intégrables pour la mesure de Haar de $SU(n)$, le groupe des matrices unitaires d'ordre n, de déterminant un. Nous allons montrer qu'il existe des fonctions non analytiques qui opèrent dans l'algèbre des transformées de Gelfand du centre de l'algèbre L.

Les fonctions du centre de L satisfont la relation

$$f(g_1 g_2) = f(g_2 g_1) , \qquad \forall g_1 , g_2 \in SU(n) .$$

$f(g)$ ne dépend donc que des valeurs propres de la matrice g,

$$e^{it^{(1)}}, \dots , e^{it^{(n)}}$$

et on peut considérer f comme une fonction définie sur la restriction du tore T^n à la variété $\Sigma t^{(p)} = 0$. f devant en outre être symétrique par rapport à l'ensemble des variables, est donc en fait définie dans V, l'un quelconque des ensembles convexes limités par les hyperplans d'équation $t^{(p)} = t^{(q)}$.

F.A. Berezin et I.M. Gelfand ont montré [1] que le produit de convolution se met alors sous la forme

$$S(t)\,(f * g)\,(t) = \int_V \int_V f(x)\, g(y)\, S(x)\, S(y)\, K(x , y , t)\, dx\, dy ,$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur V et où

$$S(t) = \prod_{p<q} (e^{it^{(p)}} - e^{it^{(q)}}), \qquad \|f\|_1 = c_n \int_V |f(t)|\, |S(t)|^2\, dt .$$

Pour définir $K(x , y , t)$, nous noterons

$$sx = (x^{(i_1)}, \dots , x^{(i_n)}) \quad \text{si} \quad x = (x^{(1)}, \dots , x^{(n)})$$

et si $s = \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ i_1 \dots i_n \end{pmatrix}$ est une permutation quelconque. Pour un choix convenable de V, $S(t)$ est une fonction réelle positive sur V ; il existe alors une fonction réelle positive $G(x, y, t)$ dont le support, comme fonction de t, est l'enveloppe convexe $Z(x, y)$ des points de la forme $y + sx$, où s parcourt l'ensemble des permutations de n éléments. $G(x, y, t)$ atteint son maximum pour $t = y$; ses dérivées partielles d'ordre $(n-1)(n-2)/2$ ont des valeurs entières bornées et varient d'une unité sur certains des hyperplans $t^{(p)} = x^{(p)} + y^{(q)}$; le domaine où ces dérivées sont non nulles est enfin coupé en zéro ou deux points par une demi-droite quelconque issue de y. Alors, si $Z(x, y)$ ne rencontre aucun hyperplan $t^{(p)} = t^{(q)}$,

$$K(x, y, t) = a_n G(x, y, t) .$$

Plus généralement,

$$K(x, y, t) = a_n G(x, y, t) - a_n \sum_s G(x, y, st) ,$$

la somme étant étendue à toutes les permutations s pour lesquelles $G(x, y, t) \neq 0$.

Nous posons alors

$$K_n(x_1, \dots, x_n, t) = \int_V \dots \int_V K(x_1, x_2, w_1) K(w_1, x_3, w_2) \dots K(w_{n-2}, x_n, t)\, dw_1 \dots dw_{n-2} ,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$S(t)(f_1 * \dots * f_n)(t) = \int_V \dots \int_V f_1(x_1) \dots f_n(x_n) S(x_1) \dots S(x_n) K_n(x_1, \dots, x_n, t)\, dx_1 \dots dx_n ,$$

et nous nous proposons de démontrer tout d'abord :

Lemme. — *Soit* $X = \{t ; K_n(x_1, \dots, x_n, t) \neq 0\}$. *Alors,*

$$\sup_{t \in X} K_n(x_1, \dots, x_n, t) \sup_{t \in X} S(t) \int_X dt \leqslant A_n S(x_1) \dots S(x_n) .$$

Démonstration. — Nous posons

$$\bar{y} = \inf_{1 \leqslant k \leqslant n} \sup_{1 \leqslant p \leqslant n} |e^{iy^{(p)}} - e^{2ik\pi/n}|$$

et nous supposerons toujours, pour simplifier, que, pour toutes les variables, $k = n$.

D'après les résultats de Berezin et Gelfand rappelés ci-dessus, il existe t_0,

$$K_n(x_1, \ldots, x_n, t) \leqslant K_n(x_1, \ldots, x_n, t_0)$$

et, si T représente l'enveloppe convexe des points $t_0 + sx_n$, associés à toutes les permutations s,

$$T \subset X. \tag{1}$$

Posons alors $X = t_0 + X_0$, $X' = t_0 + 1/2\, X_0$, d'où

$$\int_{X'} dt = 2^{1-n} \int_X dt .$$

$K(x, y, t)$ étant localement un polynome en x, y, t, de degré $(n-1)(n-2)/2$, $K_n(x_1, \ldots, x_n, t)$ est localement un polynome de degré $n(n-1)(n-2)/2$. La restriction de $K_n(x_1, \ldots, x_n, t)$ à une droite passant par t_0 est alors une fonction $k(z)$ telle que :

$$k(z) \leqslant k(0) = K_n(x_1, \ldots, x_n, t_0)$$

dont les dérivées d'ordre $N \leqslant n(n-1)(n-2)$ sont des constantes, multiples entiers d'une constante a, bornées par une constante aM. Soient u, le plus petit nombre positif, et v, le plus grand nombre négatif tels que $k(u) = k(v) = 0$. On peut alors écrire

$$k(u/2) \geqslant a\,(u/2)^N, \qquad k(0) \leqslant aM\, u^N ,$$

$$k(v/2) \geqslant a\,(v/2)^N, \qquad k(0) \leqslant aM\, v^N .$$

On en déduit

$$k(u/2) \geqslant 2^{-n(n-1)(n-2)}\, M^{-1}\, k(0) ,$$

et, en remarquant que l'on a aussi

$$k(0) \geqslant a\, u^N,\ k(0) \geqslant a\, v^N,\ u^N \leqslant M\, v^N ,$$

d'où

$$u \leqslant M\, v , \qquad \text{et, de même,} \qquad v \leqslant M\, u .$$

Si $t' \in X'$, on peut alors écrire

$$N_1 \; K_n(x_1, \ldots, x_n, t') \geqslant K_n(x_1, \ldots, x_n, t_0)$$

$$N_2 \; S(t') \geqslant \sup_{t \in X} S(t)$$

où N_1 et N_2 sont des constantes.

D'après les propriétés d'algèbre de Banach de L,

$$\begin{aligned} c_n^{n-1} \; S(x_1) \ldots S(x_n) &= \int_X K_n(x_1, \ldots, x_n, t) \, S(t) \, dt \\ &\geqslant \int_{X'} K_n(x_1, \ldots, x_n, t) \, S(t) \, dt \\ &\geqslant N_1^{-1} \; N_2^{-1} \; 2^{1-n} \sup_{t \in X} K_n(x_1, \ldots, x_n, t) \\ &\qquad \sup_{t \in X} S(t) \int_X dt \,, \end{aligned}$$

ce qui est le lemme annoncé.

Corollaire. — *Soit* $\omega > 0$, *soit* $\Omega = \{t \,;\, \omega \leqslant S(t)\}$; *il existe une suite finie* $\{V_p\}_{p \geqslant 1}$ *recouvrant* Ω, *telle que, si* $x_j \in V_{p_j}$, *si*

$$U = \{t \,;\, \exists \; u_j \in V_{p_j} \,,\, K_n(u_1, \ldots, u_n, t) \neq 0\} \,,$$

$$p_j \leqslant p_k \quad \textit{implique} \quad \overline{x}_j \leqslant 2 \, \overline{x}_k \tag{2}$$

$$\sup_{t \in U} K_n(x_1, \ldots, x_n, t) \sup_{t \in U} S(t) \int_U dt \leqslant 2^n \, A_n \, S(x_1) \ldots S(x_n) \,. \tag{3}$$

Démonstration. — Ω étant compact, la continuité des fonctions K_n, S et S^{-1} implique la possibilité de passer du lemme à l'inégalité (3) en utilisant la continuité uniforme. On obtient (2) en ordonnant convenablement le découpage ainsi obtenu ou, si nécessaire, un découpage plus fin ; on note alors V_0, le complémentaire de Ω dans V, puis f_p, la restriction de f à V_p, et

$$f^m = f^{m-1} * f \,, \qquad \exp(if) - \delta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(if)^m}{m\,!} \,,$$

et on se propose de démontrer :

THEOREME. – *Il existe une constante* C_n *telle que, si* f *est une fonction du centre de* L *dont la transformée de Gelfand est réelle,*

$$\|\exp(if) - \delta\|_1 \leqslant C_n \left(1 + \|f\|_1^{(n^2+2n-1)/2}\right) .$$

COROLLAIRE. – *Les fonctions* F *telles que* $F(0) = 0$, $(n+1)^2/2$ *fois dérivables dans un voisinage de l'origine, opèrent dans l'algèbre des transformées de Gelfand du centre de l'algèbre* L.

Démonstration. – Nous généralisons la méthode utilisée dans [2] qui donne d'ailleurs le résultat pour $n = 2$.

Nous choisissons d'abord ω pour que $\|f_0\|_1 \leqslant 1$, d'où

$$\|\exp(if) - \delta\|_1 \leqslant e \left\|\exp\left(i \sum_{p=1}^{N} f_p\right) - \delta\right\|_1 + e - 1 ,$$

ce qui permet, pour démontrer le théorème, de supposer que $f_0 = 0$, ce que nous supposerons pour alléger l'écriture. Alors,

$$\exp(if) - \delta = \sum_{q=1}^{N} \left[\exp\ i \sum_{p=0}^{q} f_p \ - \exp\left(i \sum_{p=0}^{q-1} f_p\right)\right] = \sum_{q=1}^{N} F_q .$$

$$\exp(if) - \delta - if = \sum_{q=1}^{N} \left[\exp\left(i \sum_{p=0}^{q} f_p\right) - \exp\left(i \sum_{p=0}^{q-1} f_p\right) - if_q\right]$$

$$= \sum_{q_1=1}^{N} \left[\exp\left(i \sum_{p=0}^{q_1} f_p\right) - \exp\left(i \sum_{p=0}^{q_1-1} f_p\right)\right.$$

$$- if_{q_1} * \exp\left(i \sum_{p=0}^{q_1-1} f_p\right) + \sum_{q_2=1}^{q_1-1}$$

$$\left. if_{q_1} * \left\{\exp\left(i \sum_{p=0}^{q_2} f_p\right) - \exp\left(i \sum_{p=0}^{q_2-1} f_p\right)\right\}\right]$$

$$= \sum_{N \geqslant q_1 \geqslant q_2 \geqslant 1} F_{q_1, q_2} .$$

De la même façon,

$$\exp(if) - \delta - if - \ldots - \frac{(if)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{N \geqslant q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_n \geqslant 1} F_{q_1, \ldots, q_n} . \tag{4}$$

$F_{q_1,\ldots,q_n} = f_{q_1} * \ldots * f_{q_n} * G_{q_1,\ldots,q_n}$, et la transformée de Gelfand $\hat{G}_{q_1,\ldots,q_n}$ de $G_{q_1,\ldots,q_n}$ satisfait, d'après la formule de Taylor, la relation

$$|\hat{G}_{q_1,\ldots,q_n}(\xi)| \leqslant 1 .$$

L'égalité de Parseval [3] implique alors

$$\|F_{q_1,\ldots,q_n}\|_2 \leqslant \|f_{q_1} * \ldots * f_{q_n}\|_2 .$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski et l'inégalité (3), on peut écrire

$$\|f_{q_1} * \ldots * f_{q_n}\|_2 \leqslant \int_V \ldots \int_V |f_{q_1}(x_1) \ldots f_{q_n}(x_n)|\, S(x_1) \ldots S(x_n) \left\| \frac{K_n(x_1, \ldots, x_n, t)}{S(t)} \right\|_2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$\leqslant 2^n A_n c_n^{-n} \|f_{q_1}\|_1 \ldots \|f_{q_n}\| \left[\sup_{t \in U} S(t)\right]^{-1} \left(\int_U dt\right)^{-1/2} ,$$

où $U = \{t\ ;\ \exists u_j \in V_{q_j},\ K_n(u_1, \ldots, u_n, t) \neq 0\}$.

$$\|F_{q_1,\ldots,q_n}\|_2 \leqslant 2^n A_n c_n^{-n} \|f_{q_1}\|_1 \ldots \|f_{q_n}\|_1 \left[\sup_{t \in U} S(t)\right]^{-1} \left(\int_U dt\right)^{-1/2} . \qquad (5)$$

Posons $U_f = U + e\|f\|_1 \bigcup_{q \leqslant q_n} V_q$. Si $H_{q_1,\ldots,q_n}$ est la restriction à U_f de $F_{q_1,\ldots,q_n}$, l'inégalité de Schwarz entraîne

$$\|H_{q_1,\ldots,q_n}\|_1 \leqslant \|F_{q_1,\ldots,q_n}\|_2 \sup_{t \in U_f} S(t) \left(\int_{U_f} dt\right)^{1/2} .$$

(1) et (2) permettent en outre d'écrire

$$\sup_{t \in U_f} S(t) \leqslant (e\,\|f\|_1)^{n(n-1)/2} \sup_{t \in U} S(t) ,$$

$$\int_{U_f} dt \leqslant (e\,\|f\|_1)^{n-1} \int_U dt .$$

En reportant les trois dernières inégalités dans (5),

$$\|H_{q_1,\ldots,q_n}\|_1 \leqslant 2^n\ A_n\ c_n^{-n}\ \|f_{q_1}\|_1 \ldots \|f_{q_n}\|_1\ (e\ \|f\|_1)^{(n^2-1)/2}\ ;$$

on utilise alors la formule de Stirling pour écrire

$$\|F_{q_1,\ldots,q_n}\|_1 \leqslant \|H_{q_1,\ldots,q_n}\|_1 + \|f_{q_1}\|_1 \ldots \|f_{q_n}\|_1\ ,$$

et, d'après l'égalité (4),

$$\|\exp(if) - \delta\|_1 \leqslant C_n\ (1 + \|f\|_1^{(n^2+2n-1)/2})\ .$$

Remarque. – D'après F.A. Berezin et I.M. Gelfand [1], on pourra encore établir les relations (1), (2), (3), (4), (5), si on remplace $SU(n)$ par un groupe de Lie simple compact G. On démontre alors que *les fonctions* F *telles que* $F(0) = 0$, $(n+2)^2/2$ *fois dérivables dans un voisinage de l'origine, opèrent dans l'algèbre des transformées de Gelfand du centre de l'algèbre de groupe des groupes* $SU(n+1)$, $Sp(2n)$, $SO(2n+1)$, $SO(2n)$. (Ce dernier résultat est vérifié pour tout $n \geqslant 1$, si on exclut les groupes $SO(2)$ et $SO(4)$ qui ne sont pas simples).

Si G est un groupe de Lie semi-simple compact quelconque, on pourra encore établir un théorème analogue en remarquant que le centre de l'algèbre de groupe du groupe G est isomorphe au centre de l'algèbre de groupe de $G_1 \times \ldots \times G_m$ où les $G_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ sont des groupes de Lie simples pour lesquels la méthode précédente s'applique. Si le produit de convolution dans G_i s'écrit

$$S^i(t)\ (f * g)\ (t) = \int_{V^i}\int_{V^i} f(x)\ g(y)\ S^i(x)\ S^i(y)\ K^i(x\,,y\,,t)\ dx\ dy\ ,$$

le produit de convolution dans G se met sous la forme

$$S(t)\ (f * g)\ (t) = \int_V \int_V f(x)\ g(y)\ S(x)\ S(y)\ K(x\,,y\,,t)\ dx\ dy\ ,$$

avec

$$S(t) = S^1(t^1) \times \ldots \times S^m(t^m)\ ,$$

$$f(t) = f(t^1\,,\ldots,t^m)\ ,$$

$$V = V^1 \times \ldots \times V^m\ ,$$

$$K(x\,,y\,,t) = K^1(x^1\,,y^1\,,t^1) \times \ldots \times K^m(x^m\,,y^m\,,t^m)\ ,$$

$$dt = dt^1 \ldots dt^m\ .$$

Les variables se séparent donc et on peut écrire les relations (1), (2), (3), séparément pour chacune d'elles, avec $n = n^1 + \ldots + n^m$: si l'on a défini $K^i_{n^i}$ pour établir le lemme dans G_i, on définit ici K_n.

On note alors $f_{p_1, \ldots, p_m}$, la restriction de f à $V^1_{p_1} \times \ldots \times V^m_{p_m}$, et on peut supposer comme précédemment que ces restrictions de f sont nulles si l'un des indices est nul. On ordonne alors les multi-indices $(p_1, \ldots, p_m)$ en ne tenant compte que de l'ordre des indices p_1, et on écrit la relation (4) à l'ordre n^1. On réordonne alors les multiindices en ne tenant compte que de p_2, et on prolonge la relation (4) jusqu'à l'ordre $n^1 + n^2$, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre n. On peut alors achever la démonstration comme précédemment.

Remarque. – Le résultat obtenu ici ne se conserve pas par dualité d'espace riemanien symétrique : les fonctions intégrables sur SL(2, C)/SU(2) forment par exemple une algèbre de convolution isomorphe (cf. par exemple [1]) à la sous algèbre des fonctions radiales de $\mathbf{R}^3$, munie du produit de convolution usuel, satisfaisant

$$\int_0^\infty |f(t)|\, sh^2\, t\, dt < \infty .$$

Les transformées de Gelfand correspondantes sont donc des fonctions analytiques et le résultat obtenu ici ne peut être conservé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F.A. Berezin et I.M. Gelfand, *Trudy Moskov. Mat. Obsc.* 5, (1956), p. 311-351 *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 21, (1962), p. 193-238.

[2] N. Leblanc, *C.R. Acad. Sc. Paris* 264, (1967), p. 672-674.

[3] F. Peter et H. Weyl, *Math. Ann.* 97, (1927), p. 737-755.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1969

Noël Leblanc
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 – Orsay