ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

V. AVANISSIAN
XAVIER FERNIQUE

Sur l'analyticité des distributions harmoniques d'ordre infini

Annales de l'institut Fourier, tome 18, n° 2 (1968), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 1-9.

SUR L'ANALYTICITÉ DES DISTRIBUTIONS « HARMONIQUES D'ORDRE INFINI »

par V. AVANISSIAN et X. FERNIQUE

1. Introduction.

1.1. Une fonction $u(x_1, \ldots, x_d)$ à valeurs réelles définie dans un domaine D de $\mathbf{R}^d$ est dite « harmonique d'ordre infini » si elle est indéfiniment différentiable et si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes : (Δ^p désignant le laplacien itéré p fois)

i) pour tout compact K de D, on a :

$$\lim_{p \to \infty}\left(\sup_{x \in \mathrm{K}}\left[\frac{|\Delta^p u(x)|}{(2p)\,!}\right]^{\frac{1}{p}}\right) = 0.$$

ii) pour tout compact K de D, on a :

$$\lim_{p \to \infty}\left[\frac{\int_{\mathrm{K}} |\Delta^p u(x)|\; dx}{(2p)\,!}\right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

La condition i) est due à N. Aronszajn [1]. La condition ii) moins restrictive et son équivalence avec i) sont dues à P. Lelong [5]. Toutes les fonctions « harmoniques d'ordre infini » sont analytiques réelles dans D et sont prolongeables comme fonctions analytiques complexes dans la cellule d'harmonicité de D. La classe $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{D})$ des fonctions « harmoniques d'ordre infini » dans D contient évidemment les fonctions harmoniques et polyharmoniques d'ordre fini dans D. Si D est l'espace entier $\mathbf{R}^d$, $\mathcal{H}_\infty(\mathbf{R}^d)$ coïncide avec la classe des fonctions analytiques réelles dans tout $\mathbf{R}^d$ en vertu de l'inégalité :

$$|\Delta^p f(a_1, \ldots, a_d)| \leqslant (2p)! d^p (2\pi)^{-d} r^{-2p} \mathrm{M}(r),$$

où f est analytique réelle dans tout $\mathbf{R}^d$ et $\mathrm{M}(r)$ est le maximum de $|f(x_1 + iy_1, \ldots, x_d + iy_d)|$ dans le polydisque de centre $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{R}^d$ de rayon r dans l'espace des d variables complexes. Si D est différent de $\mathbf{R}^d$, toute fonction analytique réelle dans D n'est pas nécessairement de la classe $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{D})$.

Dans ce travail, on étudie la régularité des distributions qui vérifient une condition analogue à ii), (il en résultera d'ailleurs l'équivalence de i) et ii). Les principaux résultats ont fait l'objet d'une note aux Compte Rendus de l'Académie des Sciences [2].

1.2. *Notations.*

Les notations sont dans une large mesure celles utilisées couramment en théorie des distributions [6] : on note $\mathbf{R}^d$ l'espace numérique réel de dimension d, $x = (x_1, \ldots, x_d)$ l'un de ses points, et $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}_+ - \{0\}$. Pour tout ouvert G de $\mathbf{R}^d$, on note $\mathcal{D}(\mathrm{G})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans G; pour toute partie compacte K de $\mathbf{R}^d$, par exemple contenue dans G, on note $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ la partie de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d) = \mathcal{D}$ constituée par les fonctions dont le support est contenu dans K. La topologie de $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ étant définie par la famille (N_p) indexée par la famille $\mathbf{N}^d$ des d-uples d'entiers positifs $p = (p_1, \ldots, p_d)$ des semi-normes définies par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_\mathrm{K}, \qquad \mathrm{N}_p(\varphi) = \sup_{x \in \mathrm{K}} \left| \frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_d} \varphi}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}} \right|,$$

$\mathcal{D}(\mathrm{G})$ sera muni de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ où K parcourt une suite croissante de parties compactes de G dont les intérieurs $\mathring{\mathrm{K}}$ recouvrent G. L'espace des distributions sur G muni de sa topologie usuelle sera noté $\mathcal{D}'(\mathrm{G})$ (ou $\mathcal{D}'$ s'il n'y a pas de confusion possible). Rappelons qu'une distribution T sur G est dite fonction indéfiniment différentiable (resp. analytique) dans G s'il existe une fonction f indéfiniment différentiable (resp. analytique) dans G telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int f\varphi \, dx;$$

une telle fonction est évidemment unique, on identifie alors T et f.

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, on pose :

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_x |\varphi(x)|,$$

$$\|\varphi\|_{L^2} = \left[\int |\varphi(x)|^2 \, dx\right]^{1/2},$$

$$\Lambda^m \varphi = \frac{\partial^{md}}{\partial x_1^m \ldots \partial x_d^m} \varphi \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Remarquons que la famille :

$$\left(\left[\int |\Lambda^m \varphi|^2 \, dx\right]^{1/2}\right)_{m \in \mathbf{N}}$$

est une famille de semi-normes continues sur $\mathcal{D}$ et que la famille de leurs carrés est une famille de formes quadratiques positives continues sur $\mathcal{D}$.

1.3. *Topologie sur* $\mathcal{D}_K$.

Il sera utile pour la suite de définir la topologie de $\mathcal{D}_K$ par la suite des semi-normes $(\|\Delta^m \varphi\|_{L^2})_{m \in \mathbf{N}}$. Elle sera en effet équivalente à la topologie définie par la famille $(N_p)_{p \in \mathbf{N}^d}$, en vertu des inégalités classiques suivantes :

Lemme. — *Si dans* $\mathbf{R}^d$, *le cube*

$$\{x \in \mathbf{R}^d \mid |x_j| < r, \ j = 1, \ldots, d\}$$

contient le compact K, *alors pour tout élément* φ *de* $\mathcal{D}_K$, *on a* :

$$(1) \qquad \|\varphi\|_{L^2} \leqslant r^{d/2} \|\varphi\|_\infty,$$

$$(2) \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant d, \qquad \|\varphi\|_\infty \leqslant r \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right\|_\infty,$$

$$(3) \qquad \|\varphi\|_\infty \leqslant r^{d/2} \left[\int |\Lambda^1 \varphi|^2 \, dx\right]^{1/2},$$

$$(4) \qquad \forall m \in \mathbf{N}, \qquad \|\Lambda^m \varphi\|_{L^2} \leqslant r^d \|\Lambda^{m+1} \varphi\|_{L^2},$$

$$(5) \qquad \forall m \in \mathbf{N}, \qquad \|\Lambda^{2m} \varphi\|_{L^2} \leqslant (2\pi)^{2m(d-1)} \|\Delta^m \varphi\|_{L^2},$$

Démonstration du lemme. — Toutes ces inégalités sont classiques; pour la démonstration des trois premières, nous renvoyons à ([4], III, 1.2). La quatrième s'en déduit immédiatement : il suffit en effet, par substitution de la vérifier dans le cas où $m = 0$, elle résulte alors de (1) et (3); nous démontrons la cinquième : en désignant par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, on a :

$$\|\Lambda^{2m}\varphi\|^2_{L^2} = \int \left|\frac{\partial^{2md}\varphi}{\partial x_1^{2m} \ldots \partial x_d^{2m}}\right|^2 dx = \int \left|\mathcal{F} \frac{\partial^{2md}}{\partial x_1^{2m} \ldots \partial x_d^{2m}} \varphi\right|^2 dy$$

$$= \int \prod_{j=1}^{d} |2\pi y_j|^{4m} |\mathcal{F}\varphi|^2 \, dy \leqslant (2\pi)^{4m(d-1)} \int \left[\sum_{j=1}^{d} (2\pi y_j)^2\right]^{2m} |\mathcal{F}\varphi|^2 \, dy$$

$$= (2\pi)^{4m(d-1)} \int |\mathcal{F}\Delta^m\varphi|^2 \, dy = (2\pi)^{4m(d-1)} \int |\Delta^m\varphi|^2 \, dy$$

$$= (2\pi)^{4m(d-1)} \|\Delta^m\varphi\|^2_{L^2}.$$

Les inégalités (2) et (3) montrent bien que toute semi-norme de la famille $(N_p)_{p \in \mathbf{N}^d}$ est majorée par une semi-norme continue de la forme $\varphi \longmapsto \|\Lambda^m\varphi\|_{L^2}$; la famille de ces semi-normes engendre donc la topologie de $\mathfrak{D}_K$. L'inégalité (4) montre alors que pour toute famille finie (m_i, a_i), $(m_i \in \mathbf{N},\ a_i \in \mathbf{R}_+^*)$, il existe un couple (m, a) de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\{\varphi \in \mathfrak{D}_K \mid \|\Lambda^m\varphi\|_{L^2} \leqslant a\} \subset \bigcap_i \{\varphi \in \mathfrak{D}_K \mid \|\Lambda^{m_i}\varphi\|_{L^2} \leqslant a_i\}.$$

Ceci montre que l'ensemble des Λ-boules :

$$\{\varphi \in \mathfrak{D}_K \mid \|\Lambda^m\varphi\|_{L^2} \leqslant \alpha\}_{m \in \mathbf{N},\ \alpha > 0}$$

constitue une base des voisinages de l'origine dans $\mathfrak{D}_K$.

Les inégalités (4) et (5) permettent alors d'utiliser comme base les Λ-boules d'indice pair, puis les Δ-boules. Ceci démontre :

Proposition 1. — *Pour tout voisinage* V *de l'origine dans* $\mathfrak{D}_K$, *il existe un couple* (m, a) *de* $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ *tel que :*

(6) $$\{\varphi \in \mathfrak{D}_K \mid \|\Delta^m\varphi\|_{L^2} \leqslant a\} \subset V.$$

2. Distributions « harmoniques d'ordre infini ».

2.1. Définition 1. — *Soient* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbf{R}^d$, $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels strictement positifs* *et* ρ *un nombre réel positif ou nul; on dira qu'une distribution* T *appartient à* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ *si elle vérifie la propriété suivante :*

$$(7) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \qquad \limsup_{p\to\infty} \left[\frac{|\langle \Delta^p T, \varphi \rangle|}{\lambda_p}\right]^{1/p} \leqslant \rho.$$

On remarquera que $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ est stable par dérivation.

DÉFINITION 2. — *On dit qu'une distribution* T *est « harmonique d'ordre infini » dans* G *si elle est élément de*

$$A_\infty[((2p\,!))_{p\in\mathbf{N}}, 0, G].$$

On dit qu'une fonction f *sur* G *est « harmonique d'ordre infini » dans* G *au sens des distributions si la distribution* T *qui lui est canoniquement associée l'est.*

On remarquera que toute fonction « harmonique d'ordre infini » au sens ii) l'est aussi au sens des distributions.

2.2. PROPOSITION 2. — *Soit* T *un élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$; *alors pour tout nombre* σ *strictement supérieur à* ρ, *la suite* $\left(\frac{1}{\lambda_n}\sigma^{-n}\Delta^n T\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite bornée dans* $\mathcal{D}'(G)$; *pour tout sous-ensemble ouvert* Ω *relativement compact de* G, *il existe un couple* (p_0, a) *de* $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ *tel que :*

$$(8) \quad \forall (\varphi, n) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathbf{N}, \qquad |\langle \Delta^n T, \varphi \rangle| \leqslant a\lambda_n\sigma^n \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2}$$

Démonstration. — Pour tout entier positif n, considérons l'application $R_{\sigma,n}$ de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par :

$$R_{\sigma,n}(\varphi) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\lambda_p\sigma^p} |\langle \Delta^p T, \varphi \rangle|;$$

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}(G)$, la suite $(R_{\sigma,n}(\varphi))_{n\in\mathbf{N}}$ converge en croissant vers une limite $R_\sigma(\varphi)$ en vertu de (7). La suite

$$\left(\frac{\langle \Delta^n T, \varphi \rangle}{\lambda_n\sigma^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

a alors tous ses termes majorés par $R_\sigma(\varphi)$; d'où le premier résultat ([6], Th. IX, p. 72; [3], Corr. 1. P. 22.). La même référence montre alors qu'il existe un nombre M et un voisinage V de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ tels que :

$$\forall(\varphi, n) \in V \times \mathbf{N}, \qquad |\langle \Delta^n T, \varphi \rangle| \leqslant \lambda_n \sigma^n M;$$

appliquons la proposition 1 à la trace de V sur $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}$; il existe un couple (p_0, a) de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}} \quad \text{et} \quad \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2} \leqslant a \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, \\ |\langle \Delta^n T, \varphi \rangle| \leqslant \lambda_n \sigma^n M;$$

par homogénéité, on déduit :

$$\forall(\varphi, n) \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}} \times \mathbf{N}, \qquad |\langle \Delta^n T, \varphi \rangle| \leqslant \lambda_n \sigma^n M a \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2};$$

c'est le deuxième résultat.

Corollaire 1. — *Soient* T *un élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$, σ *un nombre strictement supérieur à* ρ *et* K *un sous-ensemble compact de* G; *il existe alors un voisinage* V *de l'origine dans* $\mathbf{R}^d$ *et un couple* (p_0, a) *de* $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ *tels que :*

$$\forall(\varphi, x, n) \in \mathcal{D}(V) \times K \times \mathbf{N}, \\ |(\Delta^n T * \varphi)(x)| \leqslant a \lambda_n \sigma^n \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2} \tag{9}$$

Démonstration. — On choisit un voisinage V relativement compact de l'origine dans $\mathbf{R}^d$ tel que $(K - V)$ soit un sous-ensemble ouvert relativement compact de G noté Ω. Soient x un élément de K et φ un élément de $\mathcal{D}$ ayant son support dans V; la fonction $t \longmapsto \varphi(x - t)$ a alors son support dans Ω. Appliquons donc la proposition 2 : (8) s'écrit :

$$|\Delta^n T * \varphi(x)| = |\langle \Delta^n T_t, \varphi(x - t) \rangle| \leqslant a \lambda_n \sigma^n \|\Delta^{p_0}\varphi(x - t)\|_{L^2} \\ = a \lambda_n \sigma^n \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2};$$

d'où le résultat.

Théorème 1. — *Toute distribution* T *élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ *est une fonction* (*au sens usuel*) *indéfiniment différentiable.*

Démonstration. — Soient σ un nombre strictement supérieur à ρ, Ω un sous-ensemble ouvert relativement compact de G et T un élément de $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ de sorte qu'on puisse appliquer la formule (8). Soit de plus H le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^d)$ engendré algébriquement par les $\Delta^{p_0}\varphi$ où φ parcourt

$\mathfrak{D}(\Omega)$. La formule (8) appliquée à $n = p_0$ montre que T est une forme linéaire continue sur H pour la topologie induite par celle de $L^2(\mathbf{R}^d)$. Elle peut donc se prolonger en une forme linéaire $\hat{T}$ continue sur $L^2(\mathbf{R}^d)$; les propriétés élémentaires de cet espace montrent que cette forme linéaire $\hat{T}$ est définie par une fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$; pour tout élément φ de $\mathfrak{D}(\Omega)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\langle \Delta^{p_0}T, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} &= \langle T, \Delta^{p_0}\varphi\rangle_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} = \langle T, \Delta^{p_0}\varphi\rangle_{H^*,H} = \langle \hat{T}, \Delta^{p_0}\varphi\rangle_{L^2(\mathbf{R}^d)}\\ &= \int f(x)\Delta^{p_0}\varphi(x)\,dx = \langle f, \Delta^{p_0}\varphi\rangle_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} = \langle \Delta^{p_0}f, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}},\end{aligned}$$

ceci signifiant que $\Delta^{p_0}(T - f)$ est nul dans Ω au sens des distributions.

Comme l'opérateur Δ^{p_0} est analytique hypoelliptique, $T - f$ est en fait une fonction indéfiniment différentiable dans Ω et T est une fonction localement de carré sommable dans Ω. La stabilité de $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ montrant qu'il en est de même pour toutes les dérivées de T, on en déduit ([6], p. 191, Th. XIX) que T est dans Ω une fonction indéfiniment différentiable; d'où le résultat en utilisant une suite croissante d'ouverts relativement compacts recouvrant G.

THÉORÈME 2. — *Soit* T *une distribution élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$; *pour toute partie compacte* K *de* G *et tout* σ *strictement supérieur à* ρ, *il existe un nombre* $c = c(K, \sigma)$ *et un entier* $k = k(K, \sigma)$ *positifs tels que :*

$$(10)\quad \forall (x, n) \in K \times \mathbf{N}, \qquad |(\Delta^n T)(x)| \leqslant c\sigma^n(\lambda_n + \lambda_{n+k}\sigma^k)$$

Démonstration. — Soient V un voisinage relativement compact de l'origine dans $\mathbf{R}^d$ et (p_0, a) un couple de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tels qu'on puisse appliquer aux données de l'énoncé la formule (9). Soient de plus k un entier strictement supérieur à p_0, γ une fonction de $\mathfrak{D}(V)$ et E_k la solution élémentaire de l'opérateur Δ^k; un argument élémentaire de prolongement montre que γE_k qui a son support dans V est assez régulière pour qu'on puisse la substituer à φ dans la formule (9); comme par ailleurs la différence $(\Delta^k(\gamma E_k) - \delta)$ est une fonction ζ indéfiniment différentiable à support compact contenu dans V à laquelle on peut aussi appliquer la formule (9), on obtient :

$$\begin{aligned}
|(\Delta^n T)(x)| = |(\Delta^n T * \delta)(x)| &= |(\Delta^n T * \Delta^k(\gamma E_k))(x) - (\Delta^n T\zeta)(x)| \\
&\leqslant |(\Delta^{n+k} T * \gamma E_k)(x) + |(\Delta^n T * \zeta)(x)| \\
&\leqslant a[\lambda_{n+k}\sigma^{n+k}||\Delta^{p_0}(\gamma E_k)||_{L^2} + \lambda_n \sigma^n ||\Delta^{p_0}\zeta||_{L^2}] \\
&\leqslant \sup(||\Delta^{p_0}(\gamma E_k)||_{L^2}, ||\Delta^{p_0}\zeta||_{L^2}) a(\lambda_n\sigma^n + \lambda_{n+k}\sigma^{n+k}) \\
&\leqslant c\sigma^n(\lambda_n + \lambda_{n+k}\sigma^k) ;
\end{aligned}$$

c'est le résultat.

Théorème 3. — *Soient* $\lambda = (\lambda_n)_{n\in \mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels strictement positifs tels que :*

$$\text{(11)} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right]^{1/n} \leqslant 1 ;$$

alors, pour tout sous-ensemble ouvert G *de* $\mathbf{R}^d$ *et tout nombre positif* ρ, *pour qu'une distribution* T *appartienne à* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ *il faut et il suffit qu'elle possède les deux propriétés suivantes :*

a) T *est une fonction indéfiniment différentiable.*

b) *Pour toute partie compacte* K *de* G, *on a :*

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in K} \frac{|(\Delta^n T)(x)|}{\lambda_n}\right]^{1/n} \leqslant \rho.$$

Démonstration. — Si T est un élément de $A_\infty(\lambda, \rho, G)$, la propriété a) résulte du théorème 1 ; la propriété b) résulte du théorème 2 puisque la relation (11) montre que :

$$\limsup_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_n}\right)^{1/n} \leqslant 1$$

la réciproque est immédiate.

Corollaire 2. — *Pour qu'une distribution soit « harmonique d'ordre infini » sur un ouvert* G *de* $\mathbf{R}^d$, *il faut et il suffit qu'elle coïncide (au sens des distributions) avec une fonction harmonique d'ordre infini au sens usuel dans* G.

Remarque. — Soit dans l'ouvert D de $\mathbf{R}^d$ une fonction u indéfiniment différentiable vérifiant la condition ii). On vérifie immédiatement que la distribution associée vérifie la définition 2. Le théorème 3 montre alors que la fonction u

vérifie la condition i); d'où *une nouvelle démonstration de l'équivalence* i) $\rightleftharpoons$ ii).

Corollaire 3. — *Soit* T *une distribution sur* $\mathbf{R}^d$; *pour que la fonction*

$$(12) \qquad \varphi \longmapsto \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{|\langle\Delta^n \mathrm{T}, \varphi\rangle|}{(2n)\,!}\right]^{1/n}$$

soit bornée sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, *il faut et il suffit qu'elle soit identiquement nulle.*

En effet, le théorème 3 montre que si la fonction (12) est bornée, la distribution T est une fonction analytique [1] dans tout $\mathbf{R}^d$; on sait alors que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in \mathrm{K}} \frac{|\Delta^n \mathrm{T}(x)|}{(2n)\,!}\right]^{1/n} = 0$$

pour tout compact K de $\mathbf{R}^d$; on en déduit le résultat.

[1] La condition : $\limsup_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(2n)\,!}|\Delta^n f(x)|\right]^{1/n} \leqslant \mathrm{M}(x), \sup_{x\in\mathrm{K}} \mathrm{M}(x) < \infty$, pour tout compact K inclus dans G caractérise en effet les fonctions analytiques dans G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn, Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, *C.R.*, 205 (1937).

[2] V. Avanissian et X. Fernique, Sur les distributions harmoniques d'ordre infini, *C.R.*, 204 (1967), p. 1056.

[3] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Ch. III, Hermann, (1964).

[4] X. Fernique, Processus linéaires, processus généralisés, *Ann. Inst. Fourier*, 17, 1 (1967).

[5] P. Lelong, Sur la définition des fonctions harmoniques d'ordre infini, *C.R.*, 223 (1946), p. 372.

[6] L. Schwartz, Théorie des distributions, édition 1966, Hermann, Paris.

Manuscrit reçu le 11 octobre 1967

V. Avanissian et X. Fernique
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université de Strasbourg
67-Strasbourg.