Brian Steer

Une interprétation géométrique des nombres de Radon-Hurwitz

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 2 (1967), p. 209-218

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_209_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 209-218.

UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES DE RADON-HURWITZ

par Brian STEER

1. Introduction.

Depuis longtemps on sait que les nombres de Radon-Hurwitz $q(n, \mathbf{R})$ donnent le nombre le plus grand de champs linéaires vectoriels indépendants sur la sphère S^{n-1}. Le problème de savoir s'ils donnent aussi le nombre exact de champs continus linéairement indépendants sur la sphère n'a été résolu que récemment [1]. Si l'on définit la variété de Stiefel, $V_{n,k}$, comme la variété des k-repères orientés dans l'espace $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant k \geqslant 1$, ce problème équivaut à celui de déterminer quand le fibré $\pi_k : V_{n,k} \to V_{n,1} \cong S^{n-1}$ admet une section : le premier problème a été résolu sous cette forme-ci. La question analogue concernant les variétés de Stiefel complexes est traitée et complètement résolue dans [2] et [5]. Cependant les nombres qui s'y présentent ne sont pas ceux de Radon-Hurwitz et sont, en effet, plus compliqués et plus subtils. Néanmoins, les nombres de Radon-Hurwitz complexes possèdent une interprétation géométrique simple, apparentée au problème des champs vectoriels.

Soit F un des corps classiques $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, ou $\mathbf{H}$, et soit $d(F)$ la dimension de F en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$: $q(n, F)$ (le *nombre de Radon-Hurwitz associé à n et à* F) est l'entier k le plus grand, tel que l'algèbre de Clifford

$$C_k(F) = C_k(\mathbf{R}) \otimes F$$

(voir [3]) possède un module gradué irréductible $M = M^0 \oplus M^1$ où $M^0 \cong F^q \cong M^1$ et où q divise n. Rappelons aussi que si X est un CW-complexe fini et si η est un fibré vectoriel réel de dimension n sur X la *dimension géométrique* de η est l'entier k le plus petit tel que $\{\eta\} - n + k \in \mathrm{KO}(X)$ soit la classe d'un fibré vectoriel réel de dimension k sur X, où $\{\eta\}$ désigne la classe de η. On désigne par $\mathrm{P}^{n-1}(\mathrm{F})$ l'espace des sous-espaces de dimension 1 dans F^n. Désormais on utilisera le même symbole pour un fibré vectoriel réel ou complexe et la classe qu'il détermine dans KO(X) ou K(X).

THÉORÈME 1. — *La dimension géométrique de* $\tau(\mathrm{P}^{n-1}(\mathrm{F}))$, *fibré des vecteurs réels tangents à* $\mathrm{P}^{n-1}(\mathrm{F})$, *est* $d(\mathrm{F}).n - q(n, \mathrm{F})$.

F étant un des corps **R**, **C**, ou **H**, désignons par F_0^* l'ensemble des vecteurs de longueur 1 : la multiplication dans F induit sur F_0^* une structure de groupe; $\mathrm{F}_0^* \cong \mathrm{Z}_2$, Spin(2), Spin(3) respectivement. Soit $\mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{S}^{d(\mathrm{F}).n-1}$ la sphère des vecteurs de longueur 1 dans F^n. Le fibré tangent à $\mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{F})$ admet, d'une façon naturelle, une structure de F_0^*-fibré. Dans ce cadre M. F. Atiyah, que je remercie pour ses remarques à propos de cet article, a suggéré l'interprétation suivante, semblable mais pas tout-à-fait équivalente à celle du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Le fibré tangent à* $\mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{F})$, *en tant que* F_0^*-*fibré réel, admet un fibré réel trivial invariant de dimension* $q(n, \mathrm{F}) - 1$ *comme facteur direct et n'en admet point de dimension plus grande.*

2. Résultats positifs.

Au cas où $\mathrm{F} = \mathbf{R}$ le résultat est connu depuis longtemps : cependant ici on traitera les trois cas ensemble. Pour la démonstration il est utile d'introduire d'autres espaces. Munissons F^n du produit intérieur usuel (F^n est donc normé) et identifions F^n avec $\mathbf{R}^{d(\mathrm{F}).n}$ comme d'habitude. Désignons par $\mathrm{W}_{n,2}(\mathrm{F})$ l'espace $\{(x, y) \in \mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{F}) \times \mathrm{F}^n | \langle x, y\rangle = 0\}$. F_0^* agit sur cet espace. Notons : (i) deux vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{F}^n$ considérés comme des vecteurs réels (dans $\mathbf{R}^{d(\mathrm{F}).n}$) sont perpendiculaires si et seulement si leur produit intérieur $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ est imaginaire pur, (ii) $\tau(\mathrm{P}^{n-1}(\mathrm{F})) = \mathrm{W}_{n,2}(\mathrm{F})/\mathrm{F}_0^*$. De (ii) il s'ensuit que

2.1 $$\tau(\mathrm{P}^{n-1}(\mathrm{F})) \oplus (d(\mathrm{F}) - 1) \cong \tau(\mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{F}))/\mathrm{F}_0^*.$$

Par exemple, dans le cas où $F = \mathbf{C}$ on définit

$$\varphi_{\mathbf{C}}: \quad W_{n,2}(\mathbf{C}) \times \mathbf{R} \to \tau(S^{2n-1})$$

par

$$\varphi_{\mathbf{C}}(x, y; \alpha) = (x, y + i\alpha x).$$

Supposons que $N = N^0 \oplus N^1$ ($N^0 \cong F^q \cong N^1$) soit un module gradué irréductible de dimension q sur F pour l'algèbre $C_k(F)$ et que $n = qr$. Soit $M = M^0 \oplus M^1$ la somme directe de r de ces modules gradués N. (Évidemment on peut supposer que $\|\nu . x\| = \|\nu\| . \|x\|$, $\nu \in M$, $x \in C_k(F)$.) Un tel module nous offre $k - 1$ champs linéaires réels indépendants et F_0^*-invariants sur la sphère $S^{n-1}(F)$ (et inversement, ce qui ne nous intéresse guère pour l'instant) de la manière suivante. Soient $\hat{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, des générateurs de longueur 1, comme dans [3], de l'algèbre de Clifford $C_k(\mathbf{R})$: $e_i = \hat{e}_i \otimes 1$ sont des générateurs pour $C_k(F)$ et $A_i = e_k^{-1} . e_i : \; M^0 \to M^0$, $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, satisfont aux équations

$$2.2 \quad A_i^2 = -1, \qquad A_i . A_j = - A_j . A_i \quad (i \neq j), \qquad A_i' = - A_i.$$

Il s'ensuit que $\langle x, A_i x\rangle$ et $\langle A_i x, A_j x\rangle$ $(j \neq i)$ sont imaginaires et donc que les vecteurs $x, A_1 x, \ldots, A_{k-1} x$ sont perpendiculaires entre eux. Le fibré trivial ainsi déterminé est le sous-fibré cherché et les résultats s'ensuivent, compte tenu de 2.1 ci-dessus et de l'existence du produit intérieur. L'irréductibilité implique que la représentation n'est pas triviale et donc que les A_i sont non nuls et linéairement indépendants.

3. Résultats négatifs.

Pour le cas où n est impair le problème se résoud aisément en utilisant les classes de Stiefel-Whitney. Supposons maintenant que n est pair. Le cas $F = \mathbf{R}$ du théorème 2 est contenu dans la solution au problème classique dans [1]. Pourtant ce cas particulier du théorème 1 n'en est pas car, *a priori*, il se peut qu'en stabilisant, on trouve un facteur direct trivial de dimension plus grande que prévue. Un cas particulier du corollaire 1.10, page 490 de [8] nie cette possibilité et, utilisant toujours [1], implique le théorème 1 quand $F = \mathbf{R}$. (Si l'on veut on peut démontrer ce résultat directement en modifiant une démonstration du résultat de J.F. Adams due à D.W. Anderson.)

Nous nous occuperons maintenant des deux cas $F = \mathbf{C}$ et $F = \mathbf{H}$ qui sont bien plus faciles à étudier que ne l'est le cas réel. Pour ceux-là il est utile de connaître $q(n, F)$ — ou du moins, d'en avoir une limite inférieure. On voit que

$$q(n, \mathbf{H}) \geqslant q(n, \mathbf{C})$$

et l'on peut rapidement déduire la valeur, bien connue d'ailleurs, de $q(n, \mathbf{C})$ des propositions 5.1 et 5.4 de [3] :

$$q(n, \mathbf{C}) = 2s + 2$$

où s est l'entier le plus grand tel que 2^s divise n. Dans ce qui suit on écrira τ indifféremment pour le fibré tangent réel à $P^{n-1}(\mathbf{C})$ ou à $P^{n-1}(\mathbf{H})$ et on écrira τ_F pour ce fibré muni de la structure complexe (resp. symplectique) naturelle : en outre, η (resp. ζ) désignera le fibré vectoriel complexe (resp. symplectique) canonique de dimension 1 sur $P^{n-1}(\mathbf{C})$ (resp. $P^{n-1}(\mathbf{H})$). On a $\tau_{\mathbf{C}} \oplus 1_{\mathbf{C}} = n\eta$, $\tau_{\mathbf{H}} \oplus 1_{\mathbf{H}} = n\zeta$.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif k, $\lambda^j V$ désigne la puissance extérieure j-ième de V, $1 \leqslant j < \infty$, et $\lambda V = 1 \oplus \lambda^1 V \oplus \lambda^2 V \oplus \cdots$ (la somme est finie puisque la dimension de V est finie) : on a $\lambda(V \oplus W) = \lambda V \otimes \lambda W$. Des opérations λ^j, λ en sont induites sur (i) les classes des représentations orthogonales ou unitaires des groupes compacts et (ii) les classes des fibrés vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ au-dessus d'un CW-complexe fini; voir par exemple [4] ou [6] ou bien le travail original de A. Grothendieck. Il convient de considérer d'abord $F = \mathbf{C}$. Soient j_k la classe de l'inclusion naturelle de $SO(k)$ dans $SO(2n)$ — ou indifféremment de $\mathrm{Spin}(k)$ dans $\mathrm{Spin}(2n)$ —, $k \leqslant 2n$, et $\rho(k)$ la classe de la représentation unitaire de $SO(k)$ — ou de $\mathrm{Spin}(k)$ — induite par l'inclusion naturelle de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{C}^k$. On a

$$j_k^*(\rho(2n)) = \rho(k) + (2n - k)$$

et par conséquent $j_k^*(\lambda\rho(2n) = 2^{2n-k}\lambda\rho(k)$. Soient ξ le fibré vectoriel associé au fibré principal universel sur

$$B_{\mathrm{Spin}(2n-1)} = B(2n - 1)$$

et $\varphi : P^{n-1}(\mathbf{C}) \to B(2n-1)$ une application qui classifie le fibré $\tau \oplus 1$, si bien que $\tau \oplus 1 \cong \varphi^*\xi$. Le résultat peut se démontrer en n'utilisant que l'opération λ, mais il est plus commode d'employer la représentation spinorielle

$$\Delta(k) : \quad \mathrm{Spin}(2k-1) \to \mathrm{U}(2^{k-1}).$$

(De toute manière l'existence d'une structure spinorielle pour τ est essentielle pour la démonstration.) Si $\pi : \mathrm{Spin}(m) \to \mathrm{SO}(m)$ est l'application galoisienne naturelle [3], il nous conviendra de confondre — comme précédemment — $\mathrm{R}(\mathrm{SO}(m))$ avec son image $\pi^*(\mathrm{R}(\mathrm{SO}(m)) \subset \mathrm{R}(\mathrm{Spin}(m))$ et d'utiliser, comme avant, le même symbole pour une représentation et sa classe. On sait (voir [6]) que

$$\lambda\rho(2k-1) = 2\,(\Delta(k))^2. \tag{3.1}$$

Puisque $\tau \oplus 1 \cong \varphi^*\xi$ admet une structure spinorielle unique la classe $\Delta(n)(\tau \oplus 1) = \varphi^*\Delta(n)\xi$ est bien définie. Le générateur de $\mathrm{K}(\mathrm{B}(2n-1))$ qui correspond à $\rho(2n-1)$ par l'isomorphisme naturel entre $\mathrm{R}(\mathrm{Spin}(2n-1))$ et $\mathrm{K}(\mathrm{B}(2n-1))$ est $c\xi$ le complexifié du fibré ξ. La formule 3.1 implique que $2(\Delta(n)(\tau \oplus 1))^2 = \lambda\varphi^*c\xi = c\varphi^*\lambda_{\mathbf{R}}\xi$ où l'on écrit $\lambda_{\mathbf{R}}$ pour distinguer l'opérateur λ dans le corps réel de celui (écrit toujours λ) dans le corps complexe. La classe $\lambda c(\tau \oplus 1)$ est ainsi divisible par 2 et, de plus, est un carré. La formule 3.1 implique d'ailleurs ceci pour tout fibré réel qui admet une structure spinorielle, et en particulier pour le fibré μ si $\tau \oplus 1 = \mu \oplus k$.

Si l'on suppose que la dimension géométrique de τ est plus petite que $2n-2r$ (c'est-à-dire $\tau \oplus 1 = \mu \oplus (2r-1)$ pour un fibré μ quelconque) il existe une application

$$\psi : \quad P^{n-1}(\mathbf{C}) \to B(2n-2r-1)$$

telle que $j_0\psi$ soit homotope à φ (où

$$j : \mathrm{B}(2n-2r-1) \to \mathrm{B}(2n-1)$$

est induite de l'inclusion naturelle de $\mathrm{Spin}(2n-2r-1)$ dans $\mathrm{Spin}(2n-1)$). En ce cas $\mu \cong \psi^*\xi'$, où ξ' est le fibré vectoriel universel de dimension $2n-2r-1$ sur $\mathrm{B}(2n-2r-1)$, et $\tau \oplus 1 \cong \psi^*\xi' \oplus 2r$. La classe

$$2^{-2r-1}\lambda c(\tau \oplus 1) = (1/2)\lambda c\psi^*\xi' \in \mathrm{K}(P^{n-1}(\mathbf{C}))$$

est donc un carré, $\Delta(n-r)\psi^*\xi'$ étant une racine carrée. Mais $j^*\Delta(n) = 2^r\Delta(n-r)$ et par conséquent

$$\Delta(n-r)\psi^*\xi' = 2^{-r}\Delta(n)(\tau \oplus 1).$$

Pour montrer que $2^{-2r-1}\lambda c(\tau \oplus 1)$ n'est pas un carré il nous suffit de prouver que 2^r ne divise pas $\Delta(n)(\tau \oplus 1)$, ce que l'on se propose de faire pour $r = s + 1$. En général si μ est le fibré vectoriel (de dimension $2n+1$) sur un CW-complexe fini X associé à un fibré principal de groupe Spin$(2n+1)$, la dimension géométrique de μ est plus petite que $2n - 2r$ seulement s'il existe $\alpha \in K(X)$ tel que

$$\lambda c(\mu - (2r+1)) = 2\alpha^2, \tag{3.2}$$

ou bien seulement s'il existe $\beta \in K(X)$ tel que

$$2^{r+1}\beta = \Delta(n)\mu. \tag{3.3}$$

La condition 3.2 a été employée d'abord par S. Feder dans son article [7].

$\Delta(n) \in K(B(2n-1))$ n'étant pas une classe stable, $\Delta(n)(\tau \oplus 1)$ est moins facile à calculer que ne l'est $\lambda c(\tau \oplus 1)$. On le calculera — à un facteur ± 1 près — en prenant une racine carrée de $(1/2)\ \lambda c(\tau \oplus 1)$. Soit r: $R(G) \to RO(G)$, r: $K(X) \to KO(X)$ l'homomorphisme additif obtenu en ignorant la structure complexe et θ: $R(G) \to R(G)$, θ: $K(X) \to K(X)$ les homomorphismes définis par la conjugaison complexe.

Puisque $cr = 1 + \theta$ on voit que

$$\begin{aligned} c\lambda_{\mathbf{R}}(\tau + 2) &= \lambda c(\tau + 2) = \lambda cr(\tau_{\mathbf{C}} + 1_{\mathbf{C}}) \\ &= \lambda((\tau_{\mathbf{C}} + 1_{\mathbf{C}}) + (\bar{\tau}_{\mathbf{C}} + 1_{\mathbf{C}})) = \lambda(n\eta + n\bar{\eta}) \\ &= \lambda(n\eta).\lambda(n\bar{\eta}) = (\lambda(\eta))^n.(\lambda(\eta^{-1}))^n \\ &= (1+\eta)^n((1+\eta)^n/\eta^n) = (1+\eta)^{2n}\eta^{-n} \\ &= (2+\alpha)^{2n}(1+\alpha)^{-n}, \end{aligned}$$

où $\alpha = \eta - 1$, et $\bar{\eta} = \theta(\eta)$. On sait que $K(P^{n-1}(\mathbf{C})) = \mathbf{Z}[\alpha]/(\alpha)^n$. Il en résulte que

$$\Delta(n)(\tau \oplus 1) = \pm (1/2)(2+\alpha)^n(1+\alpha)^{-n/2}. \tag{3.4}$$

Il nous faut maintenant un lemme.

Lemme (3.5) — *Le plus grand commun diviseur des entiers d_i, $0 \leqslant i \leqslant 2k-1$, où d_i est le coefficient de x^i dans la série* *formelle* $(2+x)^{2k}(1+x)^{-k}$, *est* $2^{s+1}m$ *où* m *est un entier impair et* s *est tel que* 2^s *divise* k *mais* 2^{s+1} *ne le divise pas.*

Écrivons

$$(2+x)^{2k}-x^{2k}=\sum_{i=0}^{2k-1} c_i x^i \equiv p(x)$$

et

$$(1+x)^{-k}=\sum_{i=0}^{\infty} e_i x^i.$$

On sait que $e_0 = 1$ et $c_i = 2^{2k-i}\binom{2k}{i}$. D'abord on remarque que, d'après le lemme 8.1 de [1], $p(1) = 3^{2k} - 1 \equiv 2^{s+2} \bmod 2^{s+3}$ et que, évidemment, $p(-1) = 0$. Notons par ν la valuation 2-adique des entiers (définie par $\nu(m) = r$ où 2^r est la puissance de 2 la plus grande qui divise m) et appelons c_{2i} $(0 \leqslant i < k)$ les coefficients pairs et $c_{2i-1} (1 \leqslant i \leqslant k)$ les coefficients impairs du polynôme $p(x)$. Les deux faits que l'on vient de remarquer impliquent que

(3.6)

(i) $\qquad \nu(c_{2i-2}) \leqslant \nu(c_{2i-1}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,$

(ii) $\qquad \nu(c_{2i-1}) > \nu(c_{2i}), \qquad 1 \leqslant i < k.$

Il s'ensuit que

(3.7)

(i) $\qquad \nu(c_{2k-2}) = \nu(c_{2k-1}) = s+1,$

(ii) $\qquad \nu(c_j) > \nu(c_{2k-2}), \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2k-3.$

Donc 2^{s+1} divise chaque c_i et d_i, $0 \leqslant i \leqslant 2k-1$. Mais puisque $d_{2k-2} = \sum_{i+j=2k+2} e_i c_j$ et $e_0 = 1$, 3.7 (ii) montre que

$$\nu(d_{2k-2}) = \nu(c_{2k-2}):$$

c'est-à-dire, que 2^{s+2} ne divise pas d_{2k-2}.

En écrivant $n = 2k$ (rappelons que n est pair !) la démonstration du résultat pour $P^{n-1}(\mathbf{C})$ se voit achevée.

Pour les espaces projectifs quaternioniens, on considère $\varphi : P^{n-1}(\mathbf{H}) \to B(4n-1)$ classifiant le fibré $\tau \oplus 3$. Tout comme dans le cas $F = \mathbf{C}$, $\tau \oplus 4$ est le fibré réel obtenu en ignorant la structure quaternionienne de $\tau_{\mathbf{H}} \oplus 1_{\mathbf{H}} = n\zeta$, ou bien en ignorant la structure complexe induite de la structure quaternionienne. ζ étant un fibré vectoriel quaternionien de dimension 1 est à fortiori un fibré complexe de dimension 2, et on sait que $K(P^{n-1}(\mathbf{H})) = \mathbf{Z}[\beta]/(\beta)^n$ où $\beta = \zeta - 2$. Le même calcul que ci-dessus montre que $\Delta(2n)(\tau \oplus 3) = \pm(1/2)(4+\beta)^n$, et achève la démonstration des théorèmes.

4. Remarques.

Les résultats du paragraphe 2 pour les cas où $F = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$ peuvent être étendus tout comme est étendu le résultat pour le cas réel au paragraphe 15B de [3] : ceci en dépit de la remarque qui s'y trouve !

Les conditions 3.3 du paragraphe 3 s'appliquent également aux fibrés normaux des expaces $P^{n-1}(\mathbf{C})$ et $P^{n-1}(\mathbf{H})$. En faisant les calculs pour ces fibrés de la même manière que pour les fibrés tangents, on retrouve les théorèmes de [4] sur les espaces projectifs; ce qui soulève la question de connaître les relations entre les conditions 3.2 et 3.3 et les conditions générales données par les théorèmes de [4].

Le théorème célèbre de Riemann-Roch sous la forme que lui donnent M. F. Atiyah et F. Hirzebruch dans leur article « Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds » [*Bull. Amer. Math. Soc.*, 65 (1959) 276-81] nous indique la réponse à cette question. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre deux variétés orientables pour la théorie cohomologique $K(X)$, et soit $f^{H}_{*}\colon H_*(X) \to H_*(Y)$ l'homomorphisme classique de Gysin et de Thom. X et Y étant orientables pour la théorie $K(X)$, il existe $c_1(X) \in H_2(X; \mathbf{Z})$ telle que la réduction de $c_1(X)$ mod 2 est $w_2(X)$, la deuxième classe de Stiefel-Whitney de X, et parallèlement pour Y. Désignons par

$$\mathrm{ch}\colon\ K(X) \to H^*(X, \mathbf{Q})$$

la transformation naturelle multiplicative (dite caractère de Chern) entre ces deux théories. Atiyah et Hirzebruch montrent qu'il existe un homomorphisme additif (qui est fonctoriel d'après le paragraphe 12 de [3]) $f^{K}_{*}\colon K(X) \to K(Y)$ tel que, pour toute classe $\alpha \in K(X)$

$$4.1 \qquad \mathrm{ch}(f^{K}_{*}(\alpha))e^{c_1(Y)/2}\hat{A}(Y) = f^{H}_{*}(\mathrm{ch}(\alpha)e^{c_1(X)/2}\hat{A}(X)).$$

En prenant Y = un point, Atiyah et Hirzebruch retrouvent des théorèmes d'intégralité et en particulier que

$$4.2 \qquad \hat{A}(X)e^{c_1(X)/2}\,\mathrm{ch}(\alpha)[X]$$

est un entier, ou [X] désigne la classe fondamentale homologique de X.

Soit α un fibré vectoriel réel sur X de dimension $2n+1$ qui possède une structure spinorielle. La classe $\Delta(n)(\alpha)$ peut alors être définie. Puisque $\mathrm{ch}(\Delta(n)(\alpha)) = 2^n \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Cosh}\,(x_i/2)$ (x_i sont des classes cohomologiques formelles telles que

$$p_k(\alpha) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{où} \quad p_k(\alpha)$$

est la k-ième classe de Pontrjagin du fibré α et $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ est le k-ième produit symétrique élémentaire), l'équation 4.2 appliquée à $\Delta(n)(\alpha) \in K(X)$ entraîne que

$$2^n\hat{A}(X)e^{c_1(X)/2} \prod_{i=1}^{n} \cosh\,(x_i/2)\ [X]$$

est un entier, ce qui est un cas important d'un théorème de K. Mayer [9]. Si, maintenant, la dimension géométrique de α est plus petite que $2n$, $\alpha = \eta \oplus 2r (r \geqslant 1)$ et, par conséquent, $2^{n-r}\hat{A}(X)e^{c_1(X)/2} \prod_{i=1}^{n} \cosh\,(x_i/2)\ [X]$ est un entier. La condition 3.3 (condition de divisibilité) est par conséquent aussi forte que la condition de Mayer (condition d'intégralité) pour les fibrés vectoriels spinoriels. Elle a d'ailleurs l'avantage d'être plus simple et plus élémentaire et d'être applicable aussi aux cas où les groupes K(X) n'ont que des éléments d'ordre fini. (Toutefois on regrette que l'application aux espaces projectifs réels ne donne aucun résultat intéressant, ni pour le fibré tangent, ni pour le fibré normal !)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Adams, Vector fields on spheres, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 603-632.

[2] J. F. Adams and G. Walker, On complex Stiefel manifods, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 61 (1965), 81-103.

[3] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3, (1964), Supplement 1, 3-38.

[4] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, Théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 383-396.
[5] M. F. Atiyah and J. A. Todd, On complex Stiefel manifols, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 56 (1960), 342-353.
[6] R. Bott, Lectures on K(X), notes polycopies, Harvard University (1962).
[7] S. Feder, Immersions and Embeddings in complex projective spaces, Topology 4 (1965) 143-158.
[8] I. M. James and E. Thomas, An approach to the enumeration problem for non-stable vector bundles, *J. Math.* and *Mech*, 14 (1965), 485-506.
[9] K. Mayer, Elliptische Differentialoperatoren und Ganzzahligkeitssätze für characteristische Zahlen, Topology 4 (1965), 295-313.

Manuscrit reçu le 14 février 1967.

Brian Steer,
Hertford College,
Oxford (Angleterre).