ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GABRIEL MOKOBODSKI
DANIEL SIBONY

Principe du minimum et maximalité en théorie du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 401-441
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_401_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967). 401-442.

PRINCIPE DU MINIMUM ET MAXIMALITÉ EN THÉORIE DU POTENTIEL

par Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY

Introduction.

La théorie du potentiel dont il s'agit ici est de *caractère local.* Une théorie locale du potentiel est en général la donnée sur un espace localement compact Ω d'un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions continues — dites harmoniques — avec possibilité de résoudre localement le problème de Dirichlet (existence d'une base d'ouverts réguliers) et un axiome de convergence du type : si (h_α) est un ordonné filtrant décroissant de fonctions harmoniques positives dans un ouvert U, inf (h_α) l'est aussi. On introduit alors les fonctions surharmoniques, les potentiels, etc. (cf. [3], [1], [6]). Dans ce travail on s'est posé un problème inverse : *étant donné un cône convexe* S *de fonctions s.c.i. sur* Ω *à quelles conditions* S *est-il le cône des fonctions surharmoniques dans* Ω *pour une certaine théorie locale du potentiel, à construire effectivement à partir de* S ?

Une première difficulté concernait les ouverts réguliers. Nous avions un excellent modèle de théorie locale du potentiel en considérant le cône convexe des fonctions croissantes s.c.i. sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbf{R}$; dans ce modèle, il n'y a aucun ouvert régulier, et toutes les fonctions harmoniques sont constantes. Toutefois la méthode de Perron-Wiener-Brelot pour résoudre le problème de Dirichlet est applicable, et tout ouvert relativement compact a une frontière résolutive, ce qui donne naissance à des familles de mesures harmoniques.

D'une manière simplifiée, une théorie locale du potentiel sur un espace localement compact Ω doit comporter :

a) un faisceau de cônes convexes de fonctions numériques, le faisceau des fonctions surharmoniques;

b) un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions numériques constitué par les fonctions harmoniques;

c) ces deux faisceaux étant reliés par la propriété que tout ouvert relativement compact est résolutif par la méthode de Perron-Wiener-Brelot.

Comme il est bien connu, on obtient la résolutivité des ouverts relativement compacts en utilisant la propriété d'additivité des réduites pour les fonctions surharmoniques positives et la densité dans tout espace $\mathcal{C}(K)$ (K compact $\subset \Omega$) de l'espace vectoriel engendré par les fonctions surharmoniques continues. Si l'on suppose que les constantes sont harmoniques, les hypothèses suivantes sur le cône S sont alors assez naturelles. S^+ désignera le cône des éléments $\geqslant 0$ de S.

1) S est un cône convexe de fonctions semi-continues inférieurement (s.c.i.), bornées dans Ω et vérifiant le principe du minimum :

(P.M) $\forall\, v \in S$, $\forall \omega$ ouvert relativement compact $\subset \Omega$, $\forall \lambda$ réel, on a :

$$(v \geqslant \lambda \text{ sur } \partial\omega) \Rightarrow (v \geqslant \lambda \text{ sur } \omega)$$

où $\partial\omega$ est la frontière topologique de ω.

2) Le cône S sépare l'espace Ω.

3) Il y a « assez » de fonctions continues dans S au sens que : si φ continue $\geqslant 0$ à support compact est inférieure à $v \in S^+$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $w \in S^+$, continue dans Ω avec : $\varphi \leqslant w \leqslant v + \varepsilon$.

Néanmoins il est clair que ces hypothèses sont insuffisantes pour faire une théorie locale du potentiel, comme on peut le voir sur des exemples évidents. Elles ne donnent, en effet, aucune information sur la structure du cône S lui-même.

Pour résoudre complètement le problème, nous avons donc introduit l'hypothèse suivante, qui se trouve être décisive dans la théorie :

4) *Le cône* S *est maximal dans l'ensemble des cônes convexes de fonctions s.c.i. bornées dans* Ω *vérifiant le principe du minimum.*

L'idée de la maximalité a été introduite pour la première fois dans un travail de Helms ([4]) où elle est utilisée différemment. Voici le plan de notre étude.

La première partie est consacrée à des généralités sur le principe du minimum. On y montre que certaines propriétés des fonctions surharmoniques sont, en fait, attachées aux fonctions qui vérifient (P.M.). On démontre un critère local (Th. 7), d'appartenance à un cône maximal.

Dans la *deuxième partie,* on étudie les propriétés de la réduite. On définit les fonctions f surmédianes dans un ouvert U par la propriété :

$$\forall \nu \in S, \quad (f + \nu) \text{ vérifie (P.M.) dans U.}$$

On montre que pour tout ouvert ω à frontière compacte et toute $\nu \in S^+$ $(- R_v^{\partial\omega})$ est surmédiane s.c.i. dans ω (ν étant continue); ce qui permet de démontrer rapidement la propriété d'additivité de la réduite (th. 18) et de définir les mesures harmoniques. Les fonctions surmédianes dans un ouvert U ont le caractère local (th. 20 et 22). On montre ensuite que le cône des fonctions surmédianes dans un ouvert U est un cône maximal, qu'il contient assez de fonctions continues (prop. 25; lemme 26) et que toute u surmédiane s.c.i. dans ω peut s'écrire $u = \nu - R_v^{\partial\omega}$ dans ω' ouvert tel que $\omega' \subset \overline{\omega}' \subset \omega$ où $\nu \in S^+$ dépendant de ω'; donc u peut s'obtenir au moyen des seuls éléments de S.

Dans la *troisième partie,* on démontre que si S sépare fortement les points de Ω (axiome (G_1')), on peut construire une base d'ouverts réguliers et que (G_1') est en un sens nécessaire pour cela. Le théorème 34 caractérise alors les fonctions harmoniques et surharmoniques.

Dans la *quatrième partie,* sous les hypothèses que S est maximal et sépare Ω, on montre que l'axiome de convergence pour les fonctions harmoniques (ou plutôt médianes continues) équivaut à la condition portant uniquement sur S :

(G_3). $R_v^{\complement\overline{\omega}}$ est s.c.s. dans ω pour tout ω ouvert et toute $\nu \in S^+$.

Le théorème 42 donne six propriétés équivalentes à l'axiome de convergence. On démontre ensuite, moyennant (G_3) et sans ouverts réguliers, que S^+ est réticulé. On établit enfin des propriétés du cône des potentiels qui, moyennant les travaux ([7], [8], [9]) des deux auteurs, prouve que S est le cône des fonctions excessives s.c.i. bornées pour une théorie du potentiel associée à un noyau V qui applique $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans le cône des potentiels, qui vérifie le principe complet du maximum, admet une résolvante achevée, et s'obtient comme l'intégrale d'un semi-groupe fortement continu sous-markovien.

Nous donnons, dans la *cinquième partie* des critères pour qu'un cône de fonctions vérifiant le principe du maximum soit maximal. Le plus efficace (critère 2) repose sur l'unicité de la balayée de ε_x. Il est utilisé pour démontrer que, dans toute théorie locale (au sens précisé plus haut), le cône des surharmoniques bornées est maximal s'il sépare fortement l'espace Ω.

Dans un prochain article, nous montrerons que toute la théorie peut être faite sans que les constantes soient harmoniques. La maximalité sera alors considérée relativement à un principe du minimum où les constantes ne jouent aucun rôle.

Un intérêt de notre étude est d'approfondir le rôle du principe du minimum en théorie locale du potentiel. Ce principe, joint à la maximalité, permet d'obtenir nombre de résultats-clé avec des démonstrations particulièrement simples.

Nous traiterons dans un autre travail le cas où la théorie locale est donnée par un semi-groupe à générateur infinitésimal local, ou par des noyaux harmoniques.

Première partie

Notations et définitions.

Ici Ω est un espace topologique, localement compact, dont tout ouvert relativement compact admet une frontière non vide (ce qui entraîne, en particulier, que tout ouvert de Ω est non compact).

Pour toute partie A de Ω on désigne par $\mathcal{C}$ (A) l'espace des fonctions réelles continues sur A. On désigne par $\mathcal{C}_K(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

Soit U un ouvert quelconque de Ω.

DÉFINITIONS.

1) *Une fonction* $v : \mathrm{U} \to \mathbf{R}$ *satisfait au principe du minimum dans l'ouvert* U *si pour tout ouvert* ω *relativement compact tel que* $\omega \subset \mathrm{U}$ *et tout* λ *nombre réel, on a*

$$(v \geqslant \lambda \ \textit{sur} \ \partial\omega) \Rightarrow (v \geqslant \lambda \ \textit{dans} \ \bar{\omega})$$

où $\partial\omega$ *désigne la frontière de l'ouvert* ω.

Remarquons qu'il est équivalent d'énoncer ainsi ce principe : pour tout ouvert relativement compact $\omega \subset \bar{\omega} \subset U$ on a :

$$\inf_{x \in \partial\omega} v(x) = \inf_{x \in \omega} v(x).$$

2) *L'ensemble des fonctions bornées de* U *dans* **R** *qui satisfont au principe du minimum sera désigné par* $P_m(U)$.

3) *L'ensemble des fonctions s.c.i. de* $P_m(U)$ *sera désigné par* $P_{m,\sigma}(U)$. *Pour toute fonction* v *de* U *dans* **R**, *on désigne par* $\hat{v}$ *la régularisée semi-continue inférieure* (s.c.i.) *de* v.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω.

a) *Si* (v_α) *est une famille quelconque d'éléments de* $P_m(\omega)$ *et si* $\inf_\alpha v_\alpha$ *est bornée, alors* $\inf v_\alpha \in P_m(\omega)$.

b) *Si* (v_α) *est un ordonné filtrant croissant d'éléments de* $P_{m,\sigma}(\omega)$ *et si* $\sup_\alpha v_\alpha$ *est bornée, alors* $\sup v_\alpha \in P_{m,\sigma}(\omega)$.

c) *Si* $v \in P_m(\omega)$, *alors* $\hat{v} \in P_{m,\sigma}(\omega)$.

d) *Les constantes sont dans* $P_m(\omega)$ *et si* $v \in P_m(\omega)$ *et* λ *est une constante, alors* $v + \lambda \in P_m(\omega)$. *Même propriété pour* $P_{m,\sigma}(\omega)$.

e) *Les propriétés* b) *et* d) *entraînent que* $P_{m,\sigma}(\omega)$ *est fermé pour la topologie de la convergence en graphe* (voir [4]).

f) *Soit* $v \in P_m(\omega)$, ω' *ouvert relativement compact tel que* $\bar{\omega}' \subset \omega$, *et* λ *constante. Alors si* $\lambda \geqslant v$ *sur* $\partial\omega'$, *la fonction*

$$w = \begin{cases} \lambda \text{ dans } \omega' \\ v \text{ dans } \omega \setminus \omega' \end{cases}$$

est un élément de $P_m(\omega)$.

Nous allons donner une propriété du cône $P_m(\Omega)$, qu'on utilise fréquemment en théorie locale des fonctions surharmoniques et qui en fait est attachée au cône des fonctions vérifiant le principe du minimum [3].

LEMME 1. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω. *On désigne par* $\mathcal{F}_{\omega,\infty}$ *le filtre sur* ω *des complémentaires des parties relativement compactes de* ω. *Soit* v

une fonction numérique bornée inférieurement et vérifiant le principe du minimum dans ω. *Alors, pour tout* $x \in \omega$, *on a :*

$$v(x) \geqslant \liminf_{\mathcal{F}_{\omega,\infty}} v.$$

Démonstration. — Soit $\lambda = \liminf_{\mathcal{F}_{\omega,\infty}} v$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \omega$ tel que :

$$\inf_{y \in \omega \setminus K} v(y) > \lambda - \varepsilon.$$

Soit ω' un voisinage relativement compact quelconque de K, avec $\overline{\omega}' \subset \omega$. Alors $\partial\omega' \subset \omega \setminus K$, et comme $v(y) \geqslant \lambda - \varepsilon$ pour tout $y \in \partial\omega'$, on a :

$$v(y) \geqslant \lambda - \varepsilon \qquad \text{pour tout } y \in \overline{\omega}'.$$

Ceci étant vrai pour tout ω', on a : $v(y) \geqslant \lambda - \varepsilon$ pour tout $y \in \omega$ et tout $\varepsilon > 0$; on en déduit le résultat.

LOCALISATION.

THÉORÈME 2. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω *et soient* $u \in P_m(\omega)$ *et* $v \in P_m(\Omega)$ *tels que :*

$$\liminf_{y \in \omega,\, y \to x \in \partial\omega} u(y) \geqslant v(x) \qquad \textit{pour tout } x \in \partial\omega$$

Alors, la fonction w *définie par :*

$$w(x) = \begin{cases} \inf(u, v)(x) & \text{si } x \in \omega \\ v(x) & \text{si } x \in \complement\omega \end{cases}$$

appartient à $P_m(\Omega)$.

Démonstration. — Soit ω_1 ouvert relativement compact de Ω et soit $\lambda = \inf_{y \in \partial\omega_1} w(y)$. Comme on a : $v \geqslant w$ dans Ω, on en déduit $v(y) \geqslant \lambda$ pour tout $y \in \partial\omega_1$. Sur $\overline{\omega}$ définissons $\hat{u}$ par :

$$\hat{u}(x) = \liminf_{y \in \omega,\ y \to x} u(y) \qquad \text{pour tout } x \in \overline{\omega}.$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$U = \{ x \in \overline{\omega};\ \hat{u}(x) > \lambda - \varepsilon \},$$

est un voisinage de $\partial\omega \cap \overline{\omega}_1$ dans $\overline{\omega}$. Soit alors V un voisinage compact de $\partial\omega \cap \bar{\omega}_1$ dans $\bar{\omega}$ tel que $V \subset U$ et soit $\omega_2 = \omega_1 \cap (\omega - V)$. C'est un ouvert dont l'adhérence est contenue dans ω et $u(x) \geqslant \lambda - \varepsilon$ pour tout $x \in \partial\omega_2$; par suite, $u(x) \geqslant \lambda - \varepsilon$ pour tout $x \in \bar{\omega}_2$ et aussi pour tout $x \in \bar{\omega}_1 \cap \omega$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $u \geqslant \lambda$ dans $\bar{\omega}_1 \cap \omega$ d'où l'on déduit le résultat.

Cette propriété joue un grand rôle dans toute théorie locale du potentiel, et nous l'utiliserons fréquemment dans la suite.

Montrons maintenant qu'à tout *cône convexe* de fonctions vérifiant le principe du minimum est associée une famille de mesures $\geqslant 0$, chacune portée par la frontière d'un ouvert. Plus précisément :

PROPOSITION 3. — *Soit* S *un cône convexe de fonctions bornées s.c.i. vérifiant le principe du minimum dans* Ω, *tel que* $1 \in S$.

Alors, pour tout ouvert ω *relativement compact et tout* $x \in \omega$, *il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *sur le compact* $\partial\omega$ *telle que :* $\int s\,d\mu \leqslant s(x)$ *pour toute* $s \varepsilon S$ et $\mu(1) = 1$.

Démonstration. — $\mathcal{C}(\partial\omega)$ désignant l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\partial\omega$ on définit l'application p de $\mathcal{C}(\partial\omega)$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$p(f) = \inf\{\, v(x);\ v \in S,\ v \geqslant f \text{ sur } \partial\omega \,\};$$

p est une forme sous-linéaire. En effet, en tout point de Ω on a l'inégalité $\inf\{\, v \varepsilon S;\ v \geqslant f + g \text{ sur } \partial\omega \,\} \leqslant \inf\{\, \omega \varepsilon S;\ \omega \geqslant f \text{ sur } \partial\omega \,\} + \inf \{\, u \in S,\ u \geqslant g \text{ sur } \partial\omega \,\}$, où f et $g \in \mathcal{C}(\partial\omega)$. Soit $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $f \leqslant 0$. On a alors $p(f) \leqslant 0$; de plus (les constantes $\geqslant 0$ sont dans S) on a : $p(1) = 1$, p est finie d'après le principe du minimum.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe μ forme linéaire $\geqslant 0$ sur $\mathcal{C}(\partial\omega)$, c'est-à-dire une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $\partial\omega$ telle que $\mu(f) \leqslant p(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$ et $\mu(1) = 1$.

Pour démontrer que $\int s\,d\mu \leqslant s(x)$ pour toute $s \in S$, il suffit de prendre $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$ avec $f \leqslant s$ sur $\partial\omega$ et de remarquer que

$$\int f\,d\mu \leqslant s(x).$$

CÔNES MAXIMAUX.

Introduisons maintenant la notion de *cône maximal.*

PROPOSITION 4. — *L'ensemble des cônes convexes de fonctions numériques, s.c.i. bornées, satisfaisant au principe du minimum est non vide (il contient le cône des fonctions constantes) et inductif pour l'ordre défini par l'inclusion. Il admet donc des éléments maximaux.*

Démonstration évidente (Zorn).

Lorsqu'on parlera d'un cône convexe maximal, il s'agira toujours d'un de ces éléments maximaux.

PROPOSITION 5. — *Soit* S *un cône convexe maximal* $S \subset P_{m,\sigma}(\Omega)$. *Alors :*

a) *les constantes sont dans* S.

b) (s_1 et $s_2 \in S$) $\Rightarrow$ ($\inf(s_1, s_2) \in S$).

Démonstration. — La propriété a) est évidente. Quant à b) elle résulte de l'égalité :

$$\inf_{1\leq i\leq n} v_i + \inf_{1\leq j\leq m} u_j = \inf_{i,j} (v_i + u_j)$$

vraie pour des fonctions numériques finies quelconques.

Remarque. — Il est évident que, pour démontrer qu'une fonction s.c.i. f appartient au cône maximal S il suffit de démontrer que pour toute $s \in S$, $s + f \in P_{m,\sigma}(\Omega)$.

PROPOSITION 6. — *Soit* S *un cône convexe maximal* $S \subset P_{m,\sigma}(\Omega)$; ω *un ouvert de* Ω, *et* S_ω *l'ensemble des restrictions des éléments de* S *à* ω. *Soit* C *un cône convexe de fonctions numériques tel que* $S_\omega \subset C \subset P_{m,\sigma}(\omega)$. *Alors pour toute* $v \in S$ *et toute* $u \in C$ *telle que :*

$$\liminf u(y) \geq v(x) \quad \forall x \in \partial\omega,$$

la fonction w *définie dans* Ω *par* $w = \begin{cases} \inf(u, v) \text{ dans } \omega, \\ v \text{ dans } \complement\omega. \end{cases}$ *est un élément de* S.

Démonstration. — La fonction w est manifestement s.c.i. D'autre part, pour toute $v' \in S$, on a, en posant $s = v + v'$ et $t = v'_\omega + u$ (v'_ω étant la restriction de v' à ω) :

$$s \in P_m(\Omega),\ t \in P_m(\omega) \quad \text{et} \quad \liminf_{\substack{y \to x \in \partial\omega \\ y \in \omega}} t(y) \geq s(x) \quad \forall x \in \partial\omega.$$

L'application du théorème 2 permet d'écrire : $w + v' \in P_m(\Omega)$. D'après la maximalité du cône S, on a donc $w \in S$.

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant établir un critère local qui montre que la propriété d'appartenir à un cône maximal séparant est une propriété locale.

THÉORÈME 7. — (« Critère local ») *Soit pour tout point* $x \in \Omega$ *une famille* $\mathcal{M}_x$ *de mesures* $\geqslant 0$ *telles que* $\mu(\{x\}) = 0$ *pour tout* $\mu \in \mathcal{M}_x$ *et que pour tout* ω *ouvert relativement compact contenant* x, *il existe* $\mu \in \mathcal{M}_x$ *à support dans* $\bar{\omega}$ *avec :*

$$\int s\, d u \leqslant s(x) \qquad \forall s \in S.$$

Soit f *fonction s.c.i. bornée telle que :* $\forall x \in \Omega$, $\forall \omega$ *ouvert* $\ni x$, ω *compact,* $\exists\, \mu \in \mathcal{M}_x$ *portée par* $\bar{\omega}$, *avec* $\int f d\mu \leqslant f(x)$. *Si on suppose que* S *sépare les points de* Ω, *alors* $f \in S$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que la proposition 3 assure l'existence de $\mathcal{M}_x$ pour tout $x \in \Omega$. Il suffit maintenant de démontrer que $f + s \in P_m(\Omega)$ pour toute $s \in S$. Soit ω un ouvert relativement compact et soit $\delta_{S'}$ la frontière de Choquet de $\bar{\omega}$ associée à la famille de fonctions $S + \mathbf{R}^+_\cdot f$ restreinte à $\bar{\omega}$ ([5]). Manifestement, aucun point de ω n'est dans cette frontière. Donc $\delta_{S'} \subset \partial\omega$. Comme d'après un résultat connu ([2]) les éléments de $(S + R^+ f)_{|\bar{\omega}}$ atteignent leur minimum dans $\delta_{S'}$ (qui est non vide car S sépare) donc dans $\partial\omega$, on a :

$$(s + f \geqslant \lambda \text{ sur } \partial\omega) \Rightarrow s + f \geqslant \lambda \quad \text{dans} \quad \omega$$

et on conclut grâce à la maximalité de S.

Remarque. — Soit S un cône maximal (convexe). Alors, si S^+ est l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de S, on a : $S^+ + \mathbf{R} = S$; autrement dit les constantes sont dans S.

Cette propriété entraîne que dans la théorie des fonctions harmoniques que nous construirons à partir de S, les constantes seront harmoniques. Cela tient à la nature du principe du minimum dont nous sommes partis. Nous donnerons ultérieurement la notion de principe du minimum (et la notion de cône maximal correspondante) qui permet d'éviter cette limitation et qui présente, entre autres avantages, celui d'être intrinsèque, c'est-à-dire invariante par multiplication par une fonction continue > 0, ce qui n'est pas le cas de la notion précédente de maximalité.

Exemple. — Considérons dans $\mathbf{R}^+$ le cône S des fonctions concaves croissantes, bornées $\geqslant 0$. S est le cône des fonctions surharmoniques continues bornées $\geqslant 0$ pour une théorie du potentiel, où les fonctions harmoniques sur un intervalle sont les fonctions affines. $\mathbf{R} + \mathrm{S}$ n'est pas maximal. Posons

$$\mathrm{S}' = \left\{ \frac{s}{f}, \quad s \in \mathbf{R} + \mathrm{S} \right\}$$

où f est la fonction $x \to 1 + x$. S' est maximal.

Deuxième partie

Théorie locale.

Nous allons dans cette partie construire un faisceau de cône de fonctions surmédianes qui joueront le rôle de fonctions surharmoniques.

La réduite. — Nous allons auparavant établir quelques propriétés de la réduite.

DÉFINITION. — *Pour toute fonction numérique bornée $\varphi \geqslant 0$ sur Ω et toute partie $\mathrm{A} \subset \Omega$ on appelle réduite de φ sur* A *la fonction numérique :*

$$\mathrm{R}_\varphi = \inf_{\substack{v \in \mathrm{S}^+ \\ v \geqslant \varphi \text{ sur } \mathrm{A}}} v.$$

On écrira plus simplement R_φ au lieu de $\mathrm{R}_\varphi^\Omega$.

LEMME 8. — *Soit (φ_α) une famille filtrante décroissante de fonctions numériques s.c.s. (semi-continues supérieurement) $\geqslant 0$ à support compact dans Ω, et soit $\varphi = \inf_\alpha \varphi_\alpha$. Alors :* $\mathrm{R}_\varphi = \inf_\alpha \mathrm{R}_{\varphi_\alpha}$

Démonstration. — Soit $v \in \mathrm{S}^+$, $v \geqslant \varphi$ dans Ω; soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme de Dini il existe α tel que le support de φ_α soit dans un voisinage compact K du support de φ et tel que $\varphi \leqslant \varphi_\alpha \leqslant v + \varepsilon$. Donc $\mathrm{R}_{\varphi_\alpha} \leqslant v + \varepsilon$ d'où le résultat.

Propriétés immédiates :

a) $$R_{\varphi_1+\varphi_2} \leqslant R_{\varphi_1} + R_{\varphi_2}\,; \quad R_{\lambda\varphi} = \lambda\, R_\varphi \ (\lambda > 0)$$

b) $$(\varphi_1 \leqslant \varphi_2) \Rightarrow R_{\varphi_1} \leqslant R_{\varphi_2}.$$

LEMME 9. — *Soit $x \in \Omega$, $\mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x. Pour tout $v \in S^+$ on a :*

$$v(x) = \lim_{\omega \in \mathcal{B}_x} R_v^{\complement\omega}(x) = \sup_{\omega \in \mathcal{B}_x} R_v^{\complement\omega}(x).$$

Démonstration. — Il suffit pour cela que S vérifie seulement le principe du minimum, même s'il n'est pas maximal. En effet, soit $\lambda < v(x)$; comme v est s.c.i. il existe ω relativement compact, $\omega \in \mathcal{B}_x$ tel que $v(y) > \lambda$ sur $\bar{\omega}$ donc aussi sur $\partial\omega$. Par suite $R_v^{\complement\omega}(y) \geqslant \lambda$ pour tout $y \in \omega$ $R_v^{\complement\omega} = R_v^{\partial\omega}$ dans ω (voir lemme ci-dessous).

LEMME 10. — *Soit $v \in S^+$, ω un ouvert quelconque de Ω. Pour tout $y \in \omega$ on a :*

$$R_v^{\complement\omega}(y) = \inf_{\substack{w \in S^+ \\ \liminf w(z) \geqslant v(x) \\ \omega \ni z \to x \in \partial\omega\ \forall x}} w(y) = R_v^{\partial\omega}(y)$$

Démonstration. — Le lemme résulte simplement du théorème 2. En effet : Soit $u \in S^+$, $u \geqslant v$ sur $\partial\omega$. La fonction

$$w = \begin{cases} \inf(u, v) \text{ dans } \omega, \\ v \text{ dans } \complement\omega, \end{cases}$$

est dans S^+ et $w \geqslant v$ dans $\complement\omega$.

Les hypothèses. — On suppose maintenant que le cône maximal S vérifie les conditions suivantes :

(G_1) S sépare les points de Ω.

(G_2) Pour toute $v \in S^+$, toute φ continue $\geqslant 0$ à support compact sur Ω, tout $\varepsilon > 0$, il existe $w \in S^+$, w continue telle que :

$$\varphi \leqslant w \leqslant v + \varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Cette condition exprime qu'il y a « suffisamment » de fonctions continues dans le cône S^+ (donc dans S puisque les éléments de S^+ s'obtiennent par simple translation d'éléments de S).

Conséquences. — Nous allons déduire de (G_2) que la réduite d'une fonction continue $\geqslant 0$ à support compact est continue. Montrons auparavant la

PROPOSITION 11. — *Pour toute famille* (v_α) *filtrante décroissante d'éléments de* S^+, *on a :* $\widehat{\inf v_\alpha} \in S^+$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que pour toute

$$u \in S^+, u + \widehat{\inf v_\alpha} \in P_m(\Omega).$$

Soit d'abord $u \in S_c$, on a évidemment : $u + \widehat{\inf v_\alpha} = \widehat{u + \inf v_\alpha}$ de sorte que $u + \widehat{\inf v_\alpha}$ satisfait au principe du minimum (cf. propriété a) et c) du n° 2, première partie). Soit maintenant $u \in S^+$ quelconque, et soit ω un ouvert relativement compact dans Ω. D'après (G_2), il existe une famille (u_i) d'éléments continus de S^+ tels que, les restrictions $u_i|_\omega$ forment une famille filtrante croissante et $u|_\omega = \sup_i u|_\omega$; Par suite, dans ω,

$$u + \widehat{\inf v_\alpha} = \sup u_i + \widehat{\inf v_\alpha} = \sup (u_i + \widehat{\inf v_\alpha}).$$

Et comme on a vu que $u_i + \widehat{\inf v_\alpha}$ satisfait au principe du minimum dans ω, il en est de même de $u + \widehat{\inf_\alpha v_\alpha}$. Donc $u + \widehat{\inf v_\alpha} \in P_m(\Omega)$.

Remarque. — Il est faux qu'une fonction s.c.i. bornée f dans Ω telle que $f \in P_m(\omega)$ pour tout ω dans une base d'ouverts de Ω, soit telle que $f \in P_m(\Omega)$.

En revanche, si f est telle que $f + u \in P_m(\omega)$ pour tout $u \in S$ (maximal) séparant et tout ω d'une base d'ouverts, alors $f + u \in P_m(\Omega)$ et par suite $f \in S$.

Le principe du minimum dont nous sommes partis n'est donc « local » que relativement à un cône de fonctions S.

PROPOSITION 12. — *Pour toute fonction numérique* $\varphi \geqslant 0$ *sur* Ω, *continue à support compact, on a* $R_\varphi \in S^+$, *et* R_φ *est continue.*

Démonstration. — a) R_φ est s.c.i. dans Ω ; en effet : $R_\varphi \geqslant \varphi$, donc $\widehat{R}_\varphi \geqslant \varphi$ et par suite $\widehat{R}_\varphi = R_\varphi$, car d'après la proposition précédente $\widehat{R}_\varphi \in S^+$.

b) R_φ est s.c.s. dans Ω ; en effet : soit $\varepsilon > 0$ et $v \in S^+$, $v \geqslant \varphi$ dans Ω. D'après (G_2), il existe $w \in S^+$, w continue, telle que :

$$\varphi \leqslant w \leqslant v + \varepsilon \quad \text{dans } \Omega.$$

Donc : $R_\varphi = \inf \{ u \in S^+ ; u \text{ continue}, u \geqslant \varphi \}$. Par suite R_φ est s.c.s.

COROLLAIRE 13. — *Pour toute $v \in S^+$, il existe (u_α), un ordonné filtrant croissant d'éléments continus de S^+ tel que :*

$$v = \sup_\alpha u_\alpha.$$

Démonstration. — Il suffit de prendre un ordonné filtrant croissant (φ_α) de fonctions continues $\geqslant 0$ à support compact dans Ω tel que $v = \sup \varphi_\alpha$, et de considérer les fonctions $v_\alpha = R_{\varphi_\alpha}$

COROLLAIRE 14. — *Pour toute φ fonction numérique sur Ω, s.c.s. et $\geqslant 0$ à support compact, R_φ est s.c.s. dans Ω.*

Démonstration. — Soit (φ_α) l'ordonné filtrant décroissant des fonctions continues $\geqslant 0$ à support contenu dans K compact dans Ω, tel que $\mathring{K}$ contienne le support de φ, telles que $\varphi_\alpha \geqslant \varphi$ et $\inf \varphi_\alpha = \varphi$. On a : $R_\varphi = \inf R_{\varphi_\alpha}$. En effet, soit $v \in S^+$, $v \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$. On a $v + \varepsilon > \varphi$ dans Ω. Il existe α tel que $v + \varepsilon \geqslant \varphi_\alpha \geqslant \varphi$ (on se place dans le compact K). Donc $v + \varepsilon \geqslant R_{\varphi_\alpha}$ donc $v \geqslant \inf R_{\varphi_\alpha}$, R_φ est donc bien s.c.s.

COROLLAIRE 15. — *Soit u une fonction numérique bornée sur Ω telle que $(u + v) \in P_m(\Omega)$ pour toute $v \in S$. Alors $\hat{u} + v \in P_{m,\sigma}(\Omega)$. et $\hat{u} \in S$.*

Démonstration. — Soit $v \in S^+$, v continue. On a :

$$\hat{u} + v = \widehat{u + v} \in P_{m,\sigma}(\Omega), \quad \text{donc} \quad \hat{u} \in S.$$

Pour $v \in S$, v quelconque, on considère un ordonné filtrant croissant (v_i) d'éléments continus de S^+ tel que $v = \sup v_i$.

Nous allons maintenant démontrer l'additivité de la réduite, afin d'obtenir les mesures harmoniques.

Auparavant, on introduit la notion de fonctions surmédianes, dans un ouvert ω et on montre qu'il y a suffisamment de telles fonctions dans tout ouvert ; les fonctions surmédianes s.c.i. dans un ouvert ω apparaîtront dans la suite comme les fonctions surharmoniques bornées dans ω.

DÉFINITION. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω. *Une fonction numérique* f *sur* ω, *bornée sera dite surmédiane dans* ω, *si pour tout* $v \in S$, *on a* $f + v \in P_m(\omega)$.

Remarques. — 1) On montrera plus loin que la propriété pour une fonction d'être surmédiane est une propriété locale.

2) Il est manifeste que tout élément de S est une fonction surmédiane dans Ω et que S est l'ensemble de toutes les surmédianes s.c.i. dans Ω.

THÉORÈME 16. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω *tel que* $\partial\omega$ *soit compact. Alors pour toute* $v \in S^+$, v *continue dans* Ω, *la fonction* $(-R_v^{\partial\omega})$ *est surmédiane s.c.i. dans* ω.

Démonstration. — Comme $\partial\omega$ est compact, on a

$$R_v^{\partial\omega} = \inf\{w \in S_c^+,\ w \geqslant v \text{ sur } \partial\omega\}$$

ce qui montre que $R_v^{\partial\omega}$ est s.c.s. partout dans Ω. Soit maintenant un ouvert ω' relativement compact de Ω tel que $\bar{\omega}' \subset \omega$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in S$ tel que $u - R_v^{\partial\omega} \geqslant \lambda$ sur $\partial\omega'$. Il s'agit de montrer que $u - R_v^{\partial\omega} \geqslant \lambda$ dans ω'. Soit $\varepsilon > 0$; on a : $(u - \lambda + \varepsilon)(y) > R_v^{\partial\omega}(y)\ \forall y \in \partial\omega'$. Comme $\partial\omega'$ est compact, en appliquant le lemme de Dini, on peut trouver $w \in S_c^+$ $w \geqslant v$ sur $\partial\omega'$ et

$$R_v^{\partial\omega}(y) \leqslant w(y) \leqslant (u - \lambda + \varepsilon)(y) \quad \forall y \in \partial\omega'.$$

La fonction :

$$s = \begin{cases} w \text{ dans } \complement\omega', \\ \inf(w, u - \lambda + \varepsilon) \text{ dans } \omega', \end{cases}$$

appartient à S^+ d'après la proposition 6. De ($s \geqslant v$ sur $\partial\omega'$) on déduit en particulier :

$$(u - \lambda + \varepsilon)(y) \geqslant R_v^{\partial\omega}(y) \quad \forall y \in \omega' \quad \text{donc} \quad \forall y \in \bar{\omega}'.$$

Par suite $u - R_v^{\partial\omega} \geqslant \lambda$ dans $\bar{\omega}'$.

C.Q.F.D.

En fait, dans la démonstration, nous avons seulement utilisé le fait que u est surmédiane dans ω. On a donc le

COROLLAIRE 17. — (*Mêmes hypothèses que le théorème précédent*). *Pour toute* $v \in S_c$ *et toute* u *s.c.i. surmédiane dans* ω, $(u - R_v^{\partial\omega})$ *est surmédiane s.c.i. dans* ω.

Remarque. — On montrera plus loin que toutes les surmédianes s.c.i. dans ω, s'obtiennent à partir des fonctions $v \in S^+$ et $R_v^{\partial\omega}$ où $v \in S^+$.

LA MESURE HARMONIQUE.

Etablissons maintenant l'additivité de la réduite.

THÉORÈME 18. — *Soit ω un ouvert de Ω tel que $\partial\omega$ soit compact. Pour tout couple v_1, v_2 d'éléments de S_c^+, on a*

$$R_{v_1+v_2}^{\partial\omega} = R_{v_1}^{\partial\omega} + R_{v_2}^{\partial\omega}.$$

Démonstration. — Soit $v \in S^+$, $v \geqslant v_1 + v_2$ dans $\partial\omega$. La fonction $u = (v - R_{v_2}^{\partial\omega})$ est s.c.i. et surmédiane dans ω. De plus

$$\liminf_{\substack{y \to x \in \partial\omega \\ y \in \omega}} u(y) \geqslant v_1(x) \quad \forall x \in \partial\omega$$

(car

$$\limsup_{y \in \omega\,;\, y \to x \in \partial\omega} R_{v_2}^{\partial\omega}(y) \leqslant v_2(x) \quad \forall x \in \partial\omega).$$

Par suite

$$R_{v_1}^{\partial\omega}(y) \leqslant (v - R_{v_2}^{\partial\omega})(y) \quad \forall y \in \omega.$$

On en conclut que $v \geqslant R_{v_1}^{\partial\omega} + R_{v_2}^{\partial\omega}$ et, en raison de la sous-additivité de la réduite, cela démontre le théorème.

COROLLAIRE 19. — *Pour tout couple v_1, v_2, d'éléments de S^+ et tout ω ouvert de Ω, on a :*

$$R_{v_1+v_2}^{\omega} = R_{v_1}^{\omega} + R_{v_2}^{\omega}.$$

Démonstration. — Si $v \in S^+$ on a

$$R_v^\omega = \sup\{R_u^K;\quad u \in S_c\ ;\quad u \leqslant v\ ;\quad K \text{ compact},\quad K \subset \omega\}$$

et l'additivité de $u \to R_u^K$ pour $u \in S_c^+$ se déduit immédiatement du théorème 18 et du lemme 10.

Remarquons que S_c^+ étant stable pour l'opération $(u, v) \to \inf(u, v)$ et séparant Ω, les fonctions de $S_c^+ - S_c^+$, restreintes à $\partial\omega$ (où $\partial\omega$ est la frontière supposée compacte d'un ouvert ω) forment un sous-espace dense dans $\mathcal{C}(\partial\omega)$. On peut donc poser la

DÉFINITION. — *Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ à frontière $\partial\omega$ compacte et tout $x \in \omega$, l'application $v \to R_v^{\partial\omega}(x)$ de S_c^+ dans* R *définit par prolon-*

gement naturel une mesure $\geqslant 0$, ρ_x^ω, *portée par* $\partial\omega$ (*et telle que* $\rho_x^\omega(1)=1$); *on appellera cette mesure, la mesure harmonique de x par rapport à* ω.

LES FONCTIONS SURMÉDIANES.

Voici une caractérisation (locale) des fonctions surmédianes s.c.i. dans ω.

THÉORÈME 20. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω, f *une fonction s.c.i. bornée dans* ω. *Pour que* f *soit surmédiane dans* ω, *il faut et il suffit que pour tout ouvert* ω' *relativement compact*, $\overline{\omega}' \subset \omega$, *on ait*

$$\int f\, d\rho_x^{\omega'} \leqslant f(x) \qquad \forall x \in \omega' \tag{1}$$

Démonstration. — Il est clair que si f vérifie les inégalités (1), alors $f + s \in \mathrm{P}_m(\omega)\ \forall s \in \mathrm{S}$.

Réciproquement, supposons f surmédiane. Soient $s_1, s_2 \in \mathrm{S}_c^+$ tels que :

$$s_1(y) - s_2(y) \leqslant f(y)\ \forall y \in \partial\omega'$$

on en déduit :

$$\mathrm{R}_{s_1}^{\partial\omega'}(y) \leqslant s_2(y) + f(y)\ \ \forall y \in \partial\omega'.$$

Par suite, on a aussi :

$$\mathrm{R}_{s_1}^{\partial\omega'}(y) - \mathrm{R}_{s_2}^{\partial\omega'}(y) \leqslant f(y) \text{ pour tout } y \in \overline{\omega}'.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\int (s_1 - s_2)\, d\rho_x \leqslant f(x)\ \ \forall x \in \omega'$$

pour $s_1, s_2 \in \mathrm{S}_c^+$ tels que $s_1 - s_2 \leqslant f$ sur $\partial\omega'$.

Par suite :

$$\int f\, d\rho_x^{\omega'} \leqslant f(x)\ \ \forall x \in \omega'.$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 21. — 1) *Les fonctions s.c.i. surmédianes dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$ *forment un cône convexe.*

2) *Ce cône convexe est maximal dans* $\mathrm{P}_{m,\sigma}(\omega)$.

Démonstration évidente.

DÉFINITION. — *Une fonction numérique f bornée dans un ouvert ω est dite médiane dans ω si f et $(-f)$ sont surmédianes dans ω.*

L'ensemble des fonctions médianes continues dans ω est un espace vectoriel.

THÉORÈME 22. — *Soit f une fonction bornée s.c.i.* (*resp. continue*) *sur ω_0 ouvert $\subset \Omega$ telle que : pour tout $x \in \omega_0$ il existe $\mathcal{B}_x$, base de voisinages ouverts de x, avec :*

$$\int f \, d\rho_x^\omega \leqslant f(x)$$

(resp. $\int d\rho_x^\omega = f(x)$) $\forall \omega \in \mathcal{B}_x$.

Alors f est surmédiane s.c.i. (resp. *médiane continue*) *dans ω.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que

$$(S + \mathbf{R}^+ f)_{|\omega_0} \subset P_{m,\sigma}(\omega_0).$$

Soit donc U ouvert, $\overline{U} \subset \omega_0$ et δ la frontière de Choquet de $\overline{U}$ relativement au cône $(S + \mathbf{R}^+ f)_{|\omega_0} = S'$. Du fait que pour tout $x \in U$ il existe $\omega \ni x$ tel que $\overline{\omega} \subset U$ et

$$\int (u + kf) \, d\rho_x^\omega \leqslant (u + kf)(x) \quad \forall u \in S \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 0$$

il est clair que $x \notin \delta$. Un raisonnement standard montre alors que

$$(u + f \geqslant \lambda \text{ sur } \partial u) \Rightarrow (u + f \geqslant \lambda \text{ dans } U) \quad \forall u \in S.$$

Approximation des fonctions surmédianes dans un ouvert à partir de S.

Nous allons montrer que les fonctions surmédianes sur un ouvert s'obtiennent toutes à partir de la donnée globale S.

Etablissons d'abord quelques résultats préliminaires.

LEMME 23. — *Pour tout $x \in \Omega$ et tout voisinage ouvert relativement compact ω de x, il existe $v \in S^+$, v continue telle que $R_v^{\complement\omega}(x) < v(x)$.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $v \in S_c^+$ on ait $R_v^{\complement\omega}(x) = v(x)$. Soit H l'espace vectoriel de $\mathcal{C}(\partial\omega)$ formé des différences d'éléments de S_c^+, restreintes à $\partial\omega$. H est dense dans $\mathcal{C}(\partial\omega)$, car il est réticulé et séparant.

L'application $(v_1 - v_2) \to [R^{\partial\omega}_{v_1}(x) - R^{\partial\omega}_{v_2}(x)] = v_1(x) - v_2(x)$ est une forme linéaire croissante sur H, qui se prolonge de manière unique en une mesure sur $\partial\omega$, soit μ.

Dans H, cette mesure vérifie la relation

$$\int \inf(f_1, f_2)\, d\mu = \inf\left[\int f_1\, d\mu,\ \int f_2\, d\mu\right]$$

Par suite μ est de la forme $\lambda\, \varepsilon_y$ où $y \in \partial\omega$ et comme $\mu(1) = 1$, on doit avoir $\lambda = 1$. Mais alors $v(x) = v(y)$ $\forall\, v \in S_c^+$ ce qui contredit la séparation de Ω par S_c^+.

Lemme 24. — *Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ relativement compact, et tout compact $K \subset \omega$, il existe $v \in S_c^+$ telle que :*

$$R_v^{\complement\omega}(y) < v(y), \quad \forall\, y \in K.$$

Démonstration. — Pour tout $x \in K$, il existe, d'après le lemme précédent $v_x \in S_c^+$ telle que $v_x(x) > R_{v_x}^{\complement\omega}(x)$. Donc v_x étant continue et $R_{v_x}^{\complement\omega}$ étant s.c.s., il existe un ouvert $\alpha_x \ni x$ tel que

$$R_{v_x}^{\complement\omega}(y) < v_x(y) \quad \forall\, y \in \alpha_x.$$

Par compacité, on obtient une suite finie $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S_c$ et, si on pose

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

on a bien, pour tout $y \in K$,

$$v(y) = \sum v_i(y) > \sum R_{v_i}^{\complement\omega}(y) = R_v^{\complement\omega}(y)$$

(additivité de la réduite)

C.Q.F.D.

La proposition suivante montre que dans tout ouvert, il y a «assez» de surmédianes continues.

Proposition 25. — *Soit ω ouvert relativement compact $\subset \Omega$ et s fonction surmédiane $\geqslant 0$ s.c.i. dans ω. Soit ψ une fonction continue $\geqslant 0$ dans Ω à support S_ψ compact, $S_\psi \subset \omega$ avec $\psi(x) < s(x)$ $\forall\, x \in S_\psi$. Alors, pour tout ouvert U, $S_\psi \subset U \subset \overline{U} \subset \omega$, il existe s' surmédiane continue dans U telle que*

$$s' \leqslant s \qquad \text{et} \qquad \psi(x) < s'(x) \quad \forall\, x \in S_\psi.$$

Démonstration. — Soit K un compact, $K \subset \omega$, tel que $\mathring{K}$ contienne le support de ψ et v une fonction de S_c^+ telle que $v(y) > R_v^{\complement\omega}(y)$ $\forall y \in K$. (Lemme 23).

Soit U′ un ouvert relativement compact tel que $\bar{\omega} \subset U'$, U un ouvert tel que $K \subset U \subset \bar{U} \subset \omega$. Soit φ une fonction $\geqslant 0$ continue dans Ω telle que :

$\varphi \leqslant v$, $\varphi = 0$ dans U, $\varphi = v$ dans $U' \setminus \omega$, φ à support compact dans Ω vérifiant de plus la propriété :

$R_\varphi(y) < v(y)$ $\forall y \in K$, (on sait que R_φ est continue), ce qui est possible puisque $R_v^{\complement\omega}(y) < v(y) \in K$.

Il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\lambda s + R_\varphi < v \text{ sur } S_\psi.$$

Soit

$$w = \begin{cases} \inf(\lambda s + R_\varphi, v) \text{ dans } \omega \\ v \text{ dans } \complement\omega \end{cases}$$

$w \in S^+$ car $\liminf\limits_{y \in \omega,\ y \to z \in \partial\omega} (\lambda s + R_\varphi)(y) \geqslant R_v^{\complement\omega}(z) = v(z)$ $\forall z \in \partial\omega$.

w s'écrit donc $w = \sup w_\alpha$ où (w_α) est dans un S_c^+ ordonné filtrant croissant. Donc $\lambda s + R_\varphi = \sup w_\alpha$ dans ω.

Il existe donc α tel que si l'on pose

$$s' = \frac{1}{\lambda}(w_\alpha - R_\varphi)$$

on ait $\psi < s'$ dans S_ψ, $s' \leqslant s$ dans U, s' surmédiane continue dans U, la dernière assertion résultant du fait que R_φ est continue, surmédiane ainsi que $-R_\varphi$, dans U. La proposition est donc démontrée.

LEMME 26. — *Soit $v \in S_c^+$, ω ouvert relativement compact de Ω. Alors pour toute $\psi \geqslant 0$ continue à support S_ψ compact, $S_\psi \subset \omega$, telle que $\psi < R_v^{\complement\omega}$ dans ω, et pour tout ouvert U, $S_\psi \subset U \subset \bar{U} \subset \omega$ il existe $w \in S^+$, w médiane continue dans U telle que :*

$$\psi < w \leqslant R_v^{\complement\omega}.$$

Démonstration. — Considérons l'ensemble $A \subset \mathcal{C}_K^+(\Omega)$ défini par

$$(\varphi \in A) \Leftrightarrow (\varphi \leqslant v\ ;\ \varphi = 0 \text{ dans } \bar{\omega}).$$

L'ensemble A est filtrant croissant, et l'on a :

$$R_v^{\complement\omega} = \sup \{ R_\varphi ; \varphi \in A \}$$

par ailleurs R_φ est médiane continue dans ω, $\forall \varphi \in A$; d'après le lemme de Dini, il existe alors $\varphi \in A$ tel que

$$\psi \leqslant R_\varphi \leqslant R_v^{\complement\omega} .$$

PROPOSITION 27. — *Soit f une fonction médiane s.c.i. et $\geqslant 1$ dans ω, ouvert relativement compact. Pour toute fonction $\psi \geqslant 0$ continue, à support compact $S_\psi \subset \omega$ telle que $\psi < f$, il existe u définie dans un voisinage ω' de S_ψ, u médiane continue telle que*

$$\psi \leqslant u \leqslant f.$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme 26 et de la technique utilisée dans la proposition précédente. Soit en effet

$$v \in S_c^+ : \ v(y) > R_v^{\complement\omega}(y),$$

$\forall y \in K$ voisinage compact de S_ψ, $K \in \omega$; φ analogue à celle introduite dans la démonstration de la prop. 25.

La fonction :

$$w = \begin{cases} v \text{ dans } \complement\omega \\ \inf (R_\varphi + \lambda f, v) \text{ dans } \omega \end{cases}$$

est médiane dans ω' ouvert tel que $K \subset \omega' \subset \overline{\omega}' \subset \omega$.

Soit ω'' ouvert tel que $K \subset \omega'' \subset \overline{\omega}'' \subset \omega'$. On a $w = R_w^{\complement\overline{\omega}''}$ dans ω'' et on applique le lemme précédent.

THÉORÈME 28. — *Soit u une fonction surmédiane s.c.i. dans ω. Pour tout ω' ouvert tel que $\overline{\omega}' \subset \omega$,*

a) *il existe $v \in S^+$ tel que : $u = v - R_v^{\complement\omega}$ dans ω' ;*

b) *il existe $w \in S^+$ et φ continue $\geqslant 0$ à support compact tels que : $u = w - R_\varphi$ dans ω' où R_φ est médiane continue dans ω'.*

Démonstration. — On peut toujours supposer $u \geqslant 0$. On reprend la fonction φ introduite dans la démonstration de la proposition 25. On a, dans un ouvert contenant ω'

$$\lambda u = w - R_\varphi$$

ce qui démontre b) puisque R_φ est médiane continue dans ω'. Pour montrer a) on prend $v \in S_c^+$ tel que $v(y) > R_v^{\complement\omega}(y)\ \forall y \in \bar{\omega}'$. Soit $U = [v > R_v^{\complement\omega}]$. U est un ouvert car v est continue et R_v s.c.s. . Soit

$$w = \begin{cases} \inf(R_v^{\complement\omega} + \lambda u,\ v) \text{ dans } U \text{ (où } \lambda \text{ est choisi assez petit)} \\ v \text{ dans } \complement U. \end{cases}$$

On a $w \in S^+$, $w \leqslant v$ et $R_w^{\complement\omega} \geqslant R_v^{\complement\omega}$.

Donc dans ω' on a $\lambda u = w - R_w^{\complement\omega}$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 29. — *Soit* $v \in S^+$ *et* $A \subset \Omega$. *Si* $R_v^A = \inf v_\alpha$ *avec* $(v_\alpha) \subset S^+$, v_α *continue dans* $\complement A$ $\forall \alpha$, *alors* R_v^A *est médiane dans* $\complement A$. (*En particulier la proposition est vraie si* $v \in S_c^+$ *et* A *compact*).

Démonstration. — On peut supposer la famille v_α filtrante décroissante. Pour tout ouvert $\omega \supset A$, $\partial\omega$ compact, on a aussi $R_{v_\alpha}^A = \inf_\alpha R_{v_\alpha}^\omega$ et $R_{v_\alpha}^\omega$ est s.c.s. dans $\complement\bar{\omega}$ et médiane, d'où le résultat.

Troisième partie

Construction d'une base d'ouverts réguliers.

HYPOTHÈSES. — On suppose ici que Ω est à base dénombrable. S est toujours un cône maximal. On suppose vérifiée la condition (G_2) et, au lieu de (G_1) on suppose la condition suivante :

(G'_1) : (séparation forte). *Pour tout couple* (x, y) *de points distincts de* Ω, *il existe un couple* (v, w) *d'éléments de* S *tel que :*

$$v(x) < v(y) \qquad et \qquad w(x) > w(y).$$

On a alors la

PROPOSITION 30. — *Pour tout* $x \in \Omega$ *et tout ouvert relativement compact* $\omega \supset x$, *il existe* $v \in S_c^+$ *telle que :*

$$v(x) > \sup_{y \in \complement\omega} v(y) \qquad \text{et} \qquad v(y) \leqslant v(x)\ \forall y \in \Omega.$$

Démonstration. — Posons $u = R_1^{\{x\}}$. On a $u(y) < u(x)\ \forall y \neq x$. Par suite, on a : $\sup\limits_{y \in \partial\omega} u(y) = \lambda < 1$ et il existe $v \in S^+$ v continue telle que $0 \leqslant v \leqslant 1$, $v \geqslant u$ et $\sup\limits_{y \subset \complement\omega} v(y) < \lambda'$ avec $\lambda < \lambda' < 1$. La fonction v répond à la question.

COROLLAIRE 31. — *Pour tout $x \in \Omega$, il existe $v_x \in S_c^+$ et $\lambda > 0$ tels que : $v_x(x) > v_x(y)\ \forall y \neq x$, $y \in \Omega$ et l'ouvert $\{v > \lambda\}$ est non vide et relativement compact.*

Démonstration. — Soit (ω_n) une base de voisinages relativement compacts de x et soit v_n la fonction de S_c^+associée par la proposition 30 à (x, ω_n). La fonction $v = \sum 1/2^n . v_n$ appartient à S_c^+, et répond à la question.

On peut préciser qu'il existe une base de voisinages relativement compacts de x, de la forme $[v > \lambda_n]$ où $\sup \lambda_n = 1$. Pour la construction des ouverts réguliers le lemme suivant est utile et a un intérêt propre :

LEMME 32. — *Soit (φ_n) une suite de fonctions continues $\geqslant 0$, à support compact dans Ω, positivement riche et stable par enveloppes supérieures finies ainsi que par sommes finies. Soit $v_n = R_{\varphi_n}$. Alors :*

a) *Pour toute $v \in S^+$, on a : $v = \sup\{v_n\ ;\ v_n \leqslant v\}$ et la famille $\{v_n\ ;\ v_n \leqslant v\}$ est filtrante croissante ;*

b) *Pour toute $v \in S_c^+$ et tout compact $K \subset \Omega$, $R_v^K = \sup\limits_{v_n \leqslant v} R_{v_n}^K$;*

c) *$(R_{v_n}^K)$ tend vers R_v^K suivant l'ordonné filtrant croissant*

$$\{v_n\ ;\ v_n \leqslant v\}.$$

Le lemme se démontre aisément.

DÉFINITION. — *Soist ω un ouvert relativement compact de Ω ; ω est dit régulier si, pour tout $v \in S_c^+$, $R_v^{\complement\omega}$ est une fonction continue (donc dans S_c).*

THÉORÈME 33. — *Tout point de Ω admet un système fondamental de voisinages ouverts réguliers.*

Démonstration. — Soit $x \in \Omega$, v_x et $\lambda > 0$ comme dans le corollaire 31. Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \frac{1-\lambda}{11}$. (On sait que $v_x(x) = 1$). Soit (α_n) une suite infinie de nombres réels > 0 telle que $\| \sum_n \alpha_n v_n \| < \varepsilon$ où (v_n) est la suite d'éléments de S_c introduite dans le lemme précédent. Soit

$$w = v_x + \sum \alpha_n v_n.$$

Considérons l'ouvert $U = \{w > \lambda + 2\varepsilon\}$. C'est un voisinage de x, dont l'adhérence est contenue dans l'ouvert $\{v > \lambda\}$. U est relativement compact. D'après le principe du minimum, $R_w^{\complement U} = \lambda + 2\varepsilon$ dans U et on a $R_w^{\complement U} = \inf(w, \lambda + 2\varepsilon)$ dans Ω. Donc $R_w^{\complement U}$ est continue dans Ω. Il reste à voir que $R_v^{\complement U}$ est continue pour tout $v \in S_c^+$. Or pour tout n on a : $R_w^{\complement U} = R_{u_n}^{\complement U} + \alpha_n R_{v_n}^{\complement U}$ où $u_n \in S_c^+$, $w = u_n + \alpha_n v_n$ (additivité de la réduite). Les fonctions du second membre sont s.c.s. (car u_n et v_n sont continues et ∂U compact) et leur somme est continue ; donc $R_{v_n}^{\complement U}$ est continue pour tout n. D'après le lemme précédent, on a pour toute $v \in S_c^+$, et dans U , $R_v^{\complement U} = R_v^{\partial U} = \sup_{v_n \leqslant v} R_{v_n}^{\partial U}$. Donc $R_v^{\complement U}$ est s.c.i. donc continue dans Ω.

U est donc régulier. Pour avoir une base de tels ouverts, on fait tendre λ vers 1.

Remarques. — 1) L'existence d'une base d'ouverts réguliers repose ainsi sur les trois points : « densité » des fonctions continues de S^+, additivité de la réduite et séparation forte. Les deux premiers sont nécessaires dans toute théorie du potentiel local. Nous verrons plus loin en quel sens le troisième l'est aussi.

2) Dire qu'un ouvert U est régulier, c'est exactement dire que l'application φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varepsilon_x & \text{si} \quad x \in \complement U, \\ d\rho_x^U & \text{si} \quad x \in U \end{cases}$$

est continue pour la topologie vague.

Par suite, on peut construire une base d'ouverts réguliers avec l'hypothèse suivante moins stricte que la séparation forte par S^+ :

(G_1^{loc}) : Tout point de Ω admet un voisinage ouvert w tel que le cône des surmédianes s.c.i. dans ω satisfait à G_1' (c'est-à-dire à la propriété de séparation forte).

On supposerait alors au lieu de G_2, la condition :

(G_2^{loc}) : Tout point de Ω admet un voisinage ouvert ω tel que, pour toute u surmédiane s.c.i. $\geqslant 0$ dans ω on ait $u = \sup u_n$, u_n surmédiane continue dans ω, $\forall\, n$.

FONCTIONS HARMONIQUES. — On peut maintenant introduire fonctions harmoniques et surharmoniques.

DÉFINITION ([2]). — 1) *Une fonction numérique u est dite harmonique dans un ouvert* ω, *si u est continue dans* ω *et si pour tout ouvert régulier* ω', $\overline{\omega}' \subset \omega$, *et tout* $x \in \omega'$ *on a :*

$$\int u \, d\rho_x^{\omega'} = u(x).$$

2) *Une fonction v s.c.i. est dite surharmonique dans* ω *si pour tout* ω' *régulier,* $\overline{\omega}' \subset \omega$ *et tout* $x \in \omega'$ *on a* $\int v \, d\rho_x^{\omega'} \leqslant v(x)$, *et si v est finie sur un ensemble dense dans* ω.

On a alors les identifications suivantes :

THÉORÈME 34. — 1) *Il y a identité entre :* a) *les fonctions médianes continues dans* ω *et les fonctions harmoniques bornées dans* ω.

b) *Les fonctions surmédianes s.c.i. dans* ω *et les fonctions surharmoniques bornées dans* ω; (*pour tout ouvert* ω).

2) *Pour tout ouvert* régulier ω, *et toute* $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$ *il existe u harmonique dans* ω, *unique, continue dans* $\overline{\omega}$, *telle que* $u = \varphi$ *sur* $\partial\omega$ *et que* ($\varphi \geqslant 0$ *sur* $\partial\omega$) $\Rightarrow$ ($u \geqslant 0$ *dans* ω).

3) *Si l'on désigne par* $\mathcal{H}_\omega$ (*resp.* $\mathcal{S}_\omega$) *l'espace vectoriel* (*resp. le cône*) *les fonctions harmoniques* (*resp. surharmoniques*) *dans l'ouvert* ω, *l'application* $\omega \to \mathcal{H}_\omega$ (*resp. :* $\omega \to \mathcal{S}_\omega$) *est un faisceau.*

Démonstration. — 1) résulte immédiatement du théorème 33 ;

2) résulte de la densité de $(S_c^+ - S_c^+)_{|\partial\omega}$ dans $\mathcal{C}(\partial\omega)$ qui assure même que : si f est continue $\geqslant 0$ à support compact $S_f \subset \Omega$, pour tout ouvert $\omega \supset S_f$ et $\varepsilon > 0$, il existe $v_1, v_2 \in S_c$ tels que $v_1 - v_2 = 0$ dans $\complement\, \omega$, $v_1 - v_2 \geqslant 0$ dans Ω et $|v_1 - v_2 - f| < \varepsilon$ dans $\overline{\omega}$.

THÉORÈME 35. — *Soit* ω *un ouvert relativement compact de* Ω, C_ω *le cône convexe des fonctions continues dans* $\bar{\omega}$, *surharmoniques dans* ω. δ_C *la frontière de Choquet de* $\bar{\omega}$ *relativement à* C_ω. *Alors :*

$$(\omega \text{ est régulier}) \Leftrightarrow (\delta_C = \partial\omega).$$

Démonstration. — Supposons $\delta_C = \partial\omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$. Soit $h_1 = \inf\{v \in S, v \geqslant \varphi \text{ sur } \partial\omega\}$, $h_2 = \sup\{w \in -S, w \leqslant \varphi \text{ sur } \partial\omega\}$. On voit sans peine que h_1 et h_2 sont médianes respectivement s.c.s. et s.c.i. dans $\bar{\omega}$, que $h_1 = h_2 = \varphi$ sur $\partial\omega$. La réciproque est immédiate.

Remarque. — La propriété de séparation forte par S^+, assure l'existence d'une base d'ouverts réguliers qui sont du type : $\{v > \lambda\}$ où λ est réel $\geqslant 0$ et $v \in S_c^+$. Inversement, nous allons voir que lorsqu'il y a une base d'ouverts réguliers dans Ω, il en existe une formée d'ouverts du type précédent.

THÉORÈME 33*bis*. — *Soit* S, *cône maximal vérifiant les axiomes* (G_1) *et* (G_2). *Pour tout ouvert régulier* ω *et tout compact* $K \subset \omega$, *il existe* $v \in S_c^+$ *et* u *médiane continue* $\geqslant 0$ *dans* ω *telles que l'ouvert* $U = \{v > u\}$ *soit régulier et que*

$$K \subset U \subset \bar{U} \subset \omega.$$

Démonstration. — Soit (v_n) la suite du lemme 32 et soit (α_n) une suite de nombres réels > 0 telle que $\sum \alpha_n v_n = v_0 \in S_c^+$. Pour tout $x \in \omega$, on a $v_0(x) > R_{v_0}^{\complement\omega}(x) = \int v_0 \, d\rho_x^\omega$ et $R_{v_0}^{\complement\omega}$ est continue, et médiane dans ω. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'ouvert $U = \{v_0 > (1+\varepsilon) R_{v_0}^{\complement\omega}\}$ contient K et $\bar{U} \subset \omega$. En répétant l'argument du théorème 33, on a

$$R_{v_0}^{\complement U} = \inf(v_0, (1+\varepsilon) R_{v_0}^{\complement\omega})$$

et on voit que U est régulier.

Quatrième partie

L'axiome de convergence.

Dans tout ce qui précède, notamment pour la fabrication des ouverts réguliers, l'axiome (G_2) — assurant qu'il y a assez de fonctions continues dans S^+ — a joué un rôle essentiel. Nous allons introduire un axiome

(G_3) dont nous montrerons qu'il est plus fort que (G_2) et qu'il est équivalent à « l'axiome de convergence ».

(G_3) *Pour tout* $x \in \Omega$, *tout ouvert* ω, $\omega \ni x$ *et tout* $v \in S^+$, *la fonction* $R_v^{\complement\bar{\omega}}$ *est semi continue supérieurement au point* x.

Les hypothèses. — Dans cette partie nous supposerons :

S cône maximal

S vérifie (G_3)

(Ω n'est pas nécessairement à base dénombrable).

Proposition 36. — *La condition* (G_3) *est équivalente à la condition : pour tout* $x \in \Omega$, *tout* ω *ouvert,* $\omega \ni x$, *tout couple* (v, λ), $v \in S^+$, λ *réel tel que* $v(x) < \lambda$, *il existe un voisinage* ω' *de* x *tel que :*

$$(y \in \omega') \Rightarrow (R_v^{\complement\omega}(y) < \lambda).$$

Démonstration immédiate.

Afin de montrer que $(G_3) \Rightarrow (G_2)$ nous aurons besoin du

Lemme 37. — *Pour toute famille filtrante décroissante* $(v_\alpha) \subset S^+$ *on a :* $\widehat{\inf v_\alpha} \in S^+$.

Démonstration. — Soit $w = \widehat{\inf v_\alpha}$; on va montrer que

$$(w + u) \in P_m(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad u \in S.$$

Soit ω un ouvert relativement compact et λ tel que

$$\lambda = \inf \{(w + u)(y), \quad y \in \partial\omega\}.$$

Supposons qu'il existe $x \in \omega$ tel que : $(w + u)(x) < \lambda' < \lambda$. On a donc : $u(x) < \lambda' - w(x) = \mu$. Par suite, d'après la proposition précédente, il existe ω' ouvert contenant x avec $\bar{\omega}' \subset \omega$ tel que : $R_v^{\complement\omega}(y) < \mu$ pour tout $y \in \omega'$.

La fonction $h = R_u^{\complement\omega} + \inf v_\alpha$ satisfait au principe du minimum, donc aussi $\hat{h}$. On a :

$$\hat{h}(y) = (\widehat{R_u^{\complement\omega} + \inf v_\alpha})(y) \leqslant \mu + \widehat{\inf v_\alpha}(y) \ \forall y \in \omega'$$

donc aussi :

$$h(x) \leqslant \mu + w(x) = (\lambda' - w(x)) + w(x) = \lambda' < \lambda.$$

Il existerait alors un $y \in \omega'$ tel que $h(y) < \lambda$ ce qui contredit le fait que $h \in P_m(\Omega)$.

LEMME 38. — *Pour toute fonction numérique* $\varphi \geqslant 0$ *continue bornée dans* Ω, R_φ *est continue (donc dans* S_c^+).

Démonstration. — D'après le lemme précédent on sait déjà que R_φ est s.c.i. donc dans S^+. Montrons qu'elle est s.c.s. Soit $\varepsilon > 0$; pour tout $x \in \Omega$ il existe un ouvert $\omega \ni x$, et λ réel tels que :

$$\varphi(y) \leqslant \lambda \leqslant R_\varphi(y) + \varepsilon, \ \forall y \in \bar{\omega}$$

(car φ est continue et R_φ s.c.i.). On a alors

$$(w \in S^+, \quad w \geqslant R_\varphi + \varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial\omega) \Rightarrow (w \geqslant \lambda \ \text{dans} \ \bar{\omega}).$$

Par suite, $R^{\complement\omega}_{R_\varphi+\varepsilon} \geqslant \varphi$ dans ω,

Donc : $R^{\complement\omega}_{R_\varphi+\varepsilon} \geqslant R_\varphi$ dans Ω.

D'après (G_3) (ou plutôt la forme qu'en donne la proposition 36), il existe un ouvert $\omega'' \ni x$

tel que

$$R_\varphi(y) \leqslant R^{\complement\omega}_{R_\varphi+\varepsilon}(y) \leqslant R_\varphi(x) + 2\varepsilon \quad \forall y \in \omega''$$

ce qui prouve bien que R_φ est s.c.s.,

C.Q.F.D.

Il en résulte que (G_2) est vérifié.

COROLLAIRE 39. — 1) *Pour tout ouvert* ω *et tout* $v \in S^+$, R_v^ω *est s.c.i. dans* Ω *et continue en tout point de* $\complement\bar{\omega}$.

2) *Pour tout* $A \subset \Omega$ *et tout* $v \in S^+$, R_v^A *est s.c.s. en tout point de* $\complement\bar{A}$.

Démonstration. — 1) Pour tout ouvert ω' relativement compact tel que $\bar{\omega}' \cap \bar{\omega} = \varnothing$, on a :

$$R^{\complement\bar{\omega}'}_{R_v^\omega} = R_v^\omega .$$

D'après (G_3), R_v est donc s.c.s. dans $\complement\bar{\omega}$, donc continue dans $\complement\bar{\omega}$.

2) Posons $R_v^A = \inf v_\alpha$ où $(v_\alpha) \subset S^+$, filtrante décroissante. On a aussi : $R_v^A = \inf R_{v\alpha}^{\complement \omega}$ pour tout ouvert ω tel que $\bar{\omega} \cap A = \varnothing$ d'où le résultat.

LEMME 40. — *Toute fonction u médiane s.c.i. dans un ouvert $\omega \subset \Omega$ est continue.*

Démonstration. — Puisque (G_2) est vérifié (car $(G_3) \Rightarrow (G_2)$) on peut appliquer le théorème 28, donc pour tout compact $K \subset \omega$, tout voisinage ω' ouvert de K tel que $\bar{\omega}' \subset \omega$, il existe $v \in S^+$ tel que $u = v - R_v^{\complement \bar{\omega}}$ dans ω'. Comme u est médiane dans ω', ainsi que $R_v^{\complement \bar{\omega}}$, on en déduit que v est médiane dans ω'. Par suite, pour tout ouvert ω'' tel que

$$K \subset \omega'' \subset \bar{\omega}'' \subset \omega' \text{ on a : } R_v^{\complement \omega''} = v.$$

Donc v est s.c.s. et par conséquent continue dans ω', et u l'est aussi.

On arrive ainsi à la propriété suivante équivalente à (G_3) :

THÉORÈME 41. — *Pour toute partie $A \subset \Omega$ et tout $v \in S^+$, la réduite R_v^A est continue en tout point de $\complement \bar{A}$.*

Démonstration. — Dans tout ouvert relativement compact tel que $\bar{\omega} \cap \bar{A} = \varnothing$ la fonction $(-R_v^A)$ est surmédiane s.c.i. et médiane. Elle est donc continue dans $\complement \bar{A}$.

LEMME 41 *bis*. — *Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts relativement compacts de Ω et soit v une fonction numérique bornée telle que*

$$\int^* v \, d\rho_x^\omega \leqslant v(x), \ \forall x \in \omega; \ \omega \in \mathcal{B}$$

Alors $v \in S$ et pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\hat{v}(x) = \sup_{\omega \ni x} \int^* v \, d\rho_x^\omega .$$

Démonstration. — On reprend une méthode classique de [3]. Pour tout ouvert $\omega \in \mathcal{B}$ l'application

$$x \to \int^* v \, d\rho_x^\omega$$

est continue dans ω, donc

$$\hat{v}(x) \geqslant \int^* v \, d\rho_x^\omega \geqslant \int \hat{v} \, d\rho_x^\omega, \ \forall x \in \omega$$

ce qui montre que $\hat{v} \in S$.

Soit maintenant λ tel que $v > \lambda$ sur $\partial\omega$. On a donc

$$v(x) \geqslant \int^* v \, d\rho_x \geqslant \lambda$$

pour tout $x \in \omega$, par suite

$$\hat{v}(x) = \sup_{\substack{\omega \ni x \\ \omega \in \mathcal{B}}} \int^* v \, d\rho_x^\omega .$$

COROLLAIRE 41 ter : 1) *Soient* (v_α), (w_β) *deux familles filtrantes décroissantes d'éléments de* S^+.

Alors

$$\widehat{\inf v_\alpha} + \widehat{\inf w_\beta} = \widehat{\inf_{\alpha,\beta} (v_\alpha + w_\beta)}.$$

2) *Pour toute suite* $(v_n) \subset S^+$, *uniformément bornée*

$$\widehat{\lim \inf v_n} = \sup_n \widehat{(\inf_{m \geqslant n} v_m)}.$$

THÉORÈME 42. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Pour toute* $v \in S^+$ *et toute partie* $A \subset \Omega$, R_v^A *est continue dans* $\complement \bar{A}$.

ii) *Pour tout ouvert* ω *et tout ordonné filtrant croissant* (h_α) *borné de fonctions médianes continues* $\geqslant 0$, *la fonction* $(\sup h_\alpha)$ *est médiane continue.*

iii) *Pour tout ouvert* ω *relativement compact et tout compact* $K \subset \omega$, *l'application*

$$f \mapsto (H_f)_{|K} \quad \left(H_f^\omega(x) = \int f \, d\rho_x^\omega\right)$$

qui envoie $\mathcal{C}(\partial\omega)$ *dans* $\mathcal{C}(K)$ *est faiblement compacte.*

iv) *L'ensemble des fonctions u médianes continues (dans un ouvert* ω *quelconque) telles que* $0 \leqslant u \leqslant 1$, *est équicontinu. Ce qui s'exprime aussi par : tout ensemble localement borné de fonctions médianes continues est équicontinu.*

v) *Toute fonction mesurable bornée* u *telle que pour tout* ω *ouvert relativement compact et tout* $x \in \omega$ *on ait*

$$u(x) = \int u \, d\rho_x^\omega,$$

est continue.

vi) *L'axiome* (G_3) *est vérifié.*

Démonstration. — On a déjà vu que $i \Leftrightarrow$ vi.

vi) $\Leftrightarrow$ ii). Car soit $h = \sup h_\alpha$, h est une fonction médiane s.c.i. donc d'après le lemme 40, h est médiane continue.

ii) $\Leftrightarrow$ i). En effet, $(-R_v^A)$ est, dans tout ouvert ω relativement compact tel que $\bar{\omega} \cap \bar{A} = \emptyset$, l'enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant croissant borné de fonctions médianes continues.

ii) $\Leftrightarrow$ iii). ii) implique bien que

$$x \to \int f \, d\rho_x^\omega$$

est continue dans ω pour toute f mesurable sur $\partial\omega$.

Pour l'équivalence de ii), iii) et iv), on applique le théorème suivant :

THÉORÈME (de GROTHENDIECK). — *Soit* T *une application linéaire de* $\mathcal{C}$ (K) *dans* F *où* K *est un espace compact et* F *un espace localement convexe complet. Alors on a les équivalences :*

1) T *est faiblement compacte.*

2) T *transforme toute suite croissante de fonctions continues majorée par* 1 *en une suite fortement convergente.*

v) $\Rightarrow$ ii) est évident. ii) $\Rightarrow$ v). En effet, pour toute fonction φ s.c.i. bornée dans $\partial\omega$, la fonction

$$x \to \int \varphi \, d\rho_x$$

est continue dans ω; il en résulte que u est continue.

STRUCTURE D'ORDRE DES CÔNES MAXIMAUX.

On a vu que les cônes maximaux sont stables par enveloppe inférieure d'un nombre fini d'éléments. Moyennant l'« axiome de convergence » on va voir que leur structure d'ordre est plus riche.

DÉFINITION. — *Soit* S *un cône maximal;* u, $v \in S^+$; *on dit que* v *majore spécifiquement* u *et on note* $v \succ u$, *si* $(v - u) \in S^+$.

THÉORÈME 43. — *Soit* S *un cône maximal possédant la propriété* (G_3). *Alors* S^+ *est réticulé pour son ordre spécifique.*

Démonstration. — Soit M l'ensemble des majorants spécifiques de deux éléments v_1, v_2 de S^+. Posons $u_0 = \inf \{ u ; u \in M \}$.

a) Montrons que $u_0 \in S^+$.

Pour tout $u_\alpha \in M$ on a :

$$u_\alpha = v_1 + v_\alpha^1 = v_2 + v_\alpha^2 \ , \ v_\alpha^i \in S^+.$$

Posons :

$$v_1' = \inf v_\alpha^1 , \quad v_2' = \inf v_\alpha^2 ,$$

on a alors :

$$u_0 = v_1 + v_1' = v_2 + v_2' ,$$

d'où l'on tire,

$$\hat{u}_0 = v_1 + \hat{v}_1' = v_2 + \hat{v}_2' ,$$

ce qui montre que $u_0 = u_0 \in M$.

b) Montrons que u_0 est spécifiquement le plus petit des majorants spécifiques de v_1 et v_2.

Soit $u \in M$, ω un ouvert relativement compact de Ω. Soit $v \in S_\omega$ (c.a.d. surmédiane s.c.i. dans ω) et supposons que

$$\liminf_{y \in \omega \, ; \, y \to z \in \partial\omega} (u + v)(y) \geqslant u_0(z) \quad \forall z \in \partial \omega.$$

Considérons alors la fonction suivante :

$$w = \begin{cases} \inf (u + v, u_0) & \text{dans} \quad \omega. \\ u_0 \quad \text{dans} & \complement\, \omega. \end{cases}$$

D'après la proposition 6, $w \in S^+$ et on a évidemment $w \leqslant u_0$. De plus, w est majorant spécifique de v_1 et v_2 car

$$(w - v_1) = \begin{cases} \inf (u - v_1 + v, u_0 - v_1) & \text{dans} \quad \omega, \\ (u_0 - v_1) \quad \text{dans} \quad \omega, \end{cases}$$

et $u - v_1$, $u_0 - v_1$ sont des éléments de S^+, donc $w - v_1$, $w - v_2$ sont dans S^+, et $w = u_0$, ce qui donne : $u + v \geqslant u_0$ dans ω, dès que

$$\liminf_{y \in \omega \, ; \, y \to z \in \partial\omega} (u + v)(y) \geqslant u_0(z).$$

Nous utiliserons sans démonstration le résultat suivant : Pour tout $u \in S$, et tout ouvert ω relativement compact

$$\int u\, d\rho_x^\omega = \inf \{v(x);\ v \in S_\omega\ ;\ \liminf_{y \in \omega\,;\, y \to z \in \partial\omega} v(y) \geqslant u(z),\ \forall z \in \partial\omega\}.$$

Soit alors t définie dans ω par $t(x) = \int u\, d\rho_x^\omega$ $(u \in M)$ et soit $w \in S_\omega$, $\liminf_{y \in \omega\,;\, y \to z \in \partial\omega} w(y) \geqslant u_0(z)$. Posons $v = w - t$; $v \in S_\omega$. On a bien

$$\liminf_{y \in \omega\,;\, y \to z \in \partial\omega} (u + v)(y) \geqslant u_0(z) \quad \forall z \in \omega,$$

d'où l'on tire $u + w - t \geqslant u_0$ dans ω, ou encore, en faisant varier w,

$$u(x) - \int u\, d\rho_x^\omega \geqslant u_0(x) - \int u_0\, d\rho_x^\omega,\ \forall x \in \omega\ ;\ \forall \omega.$$

Si l'on pose $s = u - u_0$, alors $\hat{s} \in S^+$ et

$$s(x) = \sup_{U \ni x} \int s\, d\rho_x^U = \lim_{U \ni x} \int (u - u_0)\, d\rho_x^U = (u - u_0)(x) = \hat{s}(x).$$

L'élément u_0 est donc bien la borne inférieure spécifique de M.

Il faut remarquer qu'on n'a pas eu besoin de l'existence d'ouverts réguliers ; il en est de même dans ce qui suit.

Le cône des potentiels. — S est supposé maximal et vérifiant (G_1) et (G_3).

DÉFINITION. — *Une fonction u s.c.i., $u > -\infty$ telle que $\forall x \in \Omega$, $\forall \omega$ ouvert relativement compact $\omega \ni x$, $\int u\, d\rho_x^\omega \leqslant u(x)$ (où ρ_x^ω est la mesure harmonique de ω en x) et finie sur un ensemble partout dense de Ω est dite surharmonique. Si u est finie et telle que (u) et $(-u)$ soient surharmoniques, elle est dite harmonique.*

Un potentiel p est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω telle que toute minorante harmonique de p soit $\leqslant 0$.

Nous n'avons pas l'intention d'étudier ici ces fonctions. *Notre but est de montrer qu le cône C des potentiels continus dans Ω vérifie des propriétés qui d'après les travaux* ([5], [6]) *des auteurs, prouvent que* S *est* *le cône des fonctions excessives s.c.i. bornées pour une théorie du potentiel avec un noyau* V *de* $\mathcal{C}_K(\Omega)$ *dans* C-C, *vérifiant le principe complet du maximum, admettant une résolvante achevée et pouvant s'écrire comme l'intégrale d'un semi groupe fortement continu, sous-markovien.*

LEMME 44. — *Pour toute* φ *continue* $\geqslant 0$ *dans* Ω, *à support compact on a :*

$$R_\varphi^\Omega = \inf \{v \in S^+, v \geqslant \varphi \text{ dans } \Omega\}$$

est un potentiel.

Démonstration. — 1) $\forall\, v \in S^+$, on a $v = p + u$, où p est un potentiel et u est harmonique $\geqslant 0$. En effet, posons

$$u = \lim_n R_v^{\complement\omega_n} \qquad \text{où} \qquad (\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est une suite fortement croissante d'ouverts avec $\bigcup_n \omega_n = \Omega$. u est harmonique (d'après (G_3)) et on voit sans peine que c'est la plus grande minorante harmonique de p ; donc p est un potentiel. (La décomposition est de plus unique).

2) Pour tout $x \in \Omega$, il existe p potentiel borné tel que $p(x) > 0$. En effet d'après le lemme 23, pour tout ω ouvert relativement compact $\omega \ni x$, il existe $s \in S^+$ tel que : $R_s^{\complement\omega}(x) < s(x)$. Comme $s = p + u$ où p est un potentiel et u harmonique on a :

$$0 \leqslant R_p^{\complement\omega}(x) < p(x).$$

3) Le lemme résulte du fait que le support de φ est compact et qu'une somme finie de potentiels en est un.

COROLLAIRE 45. — *Soit* C *le cône convexe des potentiels continus dans* Ω. *Toute fonction surharmonique* $\geqslant 0$ *est enveloppe supérieure d'une suite croissante de potentiels de* C.

En particulier C *est linéairement séparant dans* Ω.

ADAPTATION.

DÉFINITION. — *On dit qu'un cône convexe* $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ *est adapté si*

i) $\forall\, x \in \Omega,\ \exists\, v \in C\ ;\ v(x) > 0,$

ii) $\forall u \in C$, $\exists v \in C$ tel que $v \geqslant u$ et que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \subset \Omega$, *compact :* $(x \in \complement K) \Rightarrow (u(x) \leqslant \varepsilon v(x))$.

Proposition 46. — 1) *Si* $u \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ *s'écrit* $u = \sum u_n$ *où* $(u_n) \subset C$ *alors* $u \in C$.

2) C *est un cône adapté.*

Démonstration. — 1) Si h est harmonique avec $0 \leqslant h \leqslant \sum_1^\infty u_n$, on voit par récurrence que $h \leqslant \sum_{n=k}^\infty u_n$ $\forall k \in \mathbf{N}$, donc $h \leqslant 0$.

2) Pour tout $u \in C$ on a $\inf_n R_u^{\complement \omega_n} = 0$ où $(\omega_n)_{n \subset \mathbf{N}}$ est une suite quelconque d'ouverts tels que $\bar{\omega}_n \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_n \omega_n = \Omega$. D'après un critère général (cf. [5]) on en déduit que C est adapté. Donnons cependant ici une démonstration directe.

1) C étant semi-réticulé inférieurement on peut construire par récurrence une suite $(u_n) \subset C$ et une suite $(k_n) \subset \mathbf{N}$ croissante d'entiers telle que :

$$u_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}_n$$

$$u_n \geqslant u \quad \text{sur} \quad \complement\, \bar{\omega}_{k_n}.$$

$\sum_n u_n$ est continue donc $\in C$.

2) Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 un entier tel que $\dfrac{1}{1+n_0} < \varepsilon$. Posons

$$v = u + \sum u_n.$$

On a :

$$(x \in \complement\, \bar{\omega}_{k_{n_0}}) \Rightarrow (x \in \complement\, \bar{\omega}_{n_i}\ \forall i \leqslant n_0) \Rightarrow (u_i(x) \geqslant (x))$$

$$\Rightarrow (v(x) \geqslant u(x) + \sum_{i=1}^{n_0} u_i(x)) \Rightarrow (u(x) \leqslant \frac{1}{1+n_0} v(x) < \varepsilon v(x))$$

C est donc adapté.

Propriété de décomposition.

On désignera pour tout $u \in C$ et $A \subset \Omega$, par R_u^A la réduite de u par rapport au cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

PROPOSITION 47. — *Soient* ω_1, ω_2 *deux ouverts de* Ω *tels que* $\omega_1 \cup \omega_2 = \Omega$. *Soit* $v \in C$. *Alors la fonction* $R_v^{\omega_1} + R_v^{\omega_2} - v$ *est un potentiel (Ce qu'on peut écrire* $v \prec R_v^{\omega_1} + R_v^{\omega_2}$ *où* $\prec$ *est la relation d'ordre définie par le cône des fonctions surharmoniques* $\geqslant 0$ *dans* Ω*).*

En effet montrons que $R_v^{\omega_1} + R_v^{\omega_2} - v$ est surharmonique $\geqslant 0$. Les fonctions surharmoniques étant définies par une famille d'inégalités

$$\int u \, d\mu_x \leqslant u(x) \quad \forall (\mu_x, x) \quad \text{où} \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad (\mu_x)$$

est une famille de mesures $\geqslant 0$ sur Ω, il suffit donc de montrer que :

$$\int R_v^{\omega_1} \, d\mu_x + \int R_v^{\omega_2} \, d\mu_x - \int v \, d\mu_x \leqslant (R_v^{\omega_1} + R_v^{\omega_2} - v)(x).$$

Si $x \in \omega_1$, l'inégalité se réduit à :

$$\int R_v^{\omega_1} \, d\mu_x + \int R_v^{\omega_2} \, d\mu_x - \int v \, d\mu_x \leqslant R_v^{\omega_2}(x) \text{ qui est évidente.}$$

De même quand $x \in \omega_2$.

N.B. — La proposition peut être renforcée mais ce n'est pas nécessaire ici.

THÉORÈME 48. — *Pour tout recouvrement de* Ω *par deux ouverts* ω_1, ω_2 *et tout* $v \in C$, *il existe* $v_1, v_2 \in C$, *tels que :*

$$v = v_1 + v_2 \qquad \textit{et} \qquad R_v^{\omega_i} = v_i \qquad (i = 1, 2).$$

Démonstration. — On a vu que $v \prec R_v^{\omega_1} + R_v^{\omega_2}$. Le cône des surharmoniques $\geqslant 0$ étant réticulé (théorème 43), il existe v_1, v_2 surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω telles que $v = v_1 + v_2$ et $v_i \prec R_v^{\omega_i}$ $(i = 1, 2)$, v_1 et v_2 sont donc des potentiels continus car v en est un. On en déduit aisément que $R_{v_i}^{\omega_i} = v_i$ $(i = 1, 2)$.

Remarques. — 1) La dernière propriété nécessaire pour appliquer à C notre théorie globale du potentiel est l'additivité des réduites par rapport à C, qu'on peut aisément vérifier.

2) Le théorème 48 entraîne que pour tout recouvrement $(\omega_i)_{i \in I}$ de Ω par des ouverts et toute $v \in C$, il existe $(v_i) \subset C$; telle que :

$$v = \sum_i v_i \qquad \text{et} \qquad R_{v_i}^{\omega_i} = v_i \qquad \forall i \in I.$$

Cinquième partie

Critères de maximalité. Applications.

Ω est toujours un espace localement compact non compact. On désignera par S un cône de fonctions s.c.i. bornées tel que $S \subset P_m(\Omega)$. On suppose que S sépare les points de Ω (axiome G_1). On se propose ici de donner des critères pour que le cône S soit maximal. Cela permettra de montrer que les théories locales usuelles du potentiel sont maximales.

DÉFINITION. — *On dira qu'une fonction numérique bornée* ψ *est* S-*surmédiane* (*ou plus simplement surmédiane*) *si* $\psi + u \in P_m(\Omega)$ $\forall\, u \in S$.

CRITÈRE 1. — *Si l'ensemble* C *des fonctions s.c.i. surmédianes est un cône convexe, alors* C *est un cône convexe maximal de* $P_{m,\sigma}(\Omega)$.

Démonstration évidente.

CRITÈRE 2. — *Si pour tout* $x \in \Omega$ *il existe une base* $\mathcal{B}_x = (\omega_\alpha)$ *de voisinages ouverts relativement compacts de* x *telle que pour tout* α, *il existe une mesure* $d\rho_x^\alpha$ *et une seule portée par* $\partial\omega_\alpha$, *telle que :*

$$\int v\, d\rho_n^\alpha \leqslant v(x) \quad \forall\, v \in S,$$

alors le cône C *des fonctions s.c.i. surmédianes est convexe donc maximal.*

Démonstration. — Soit φ une fonction s.c.i. surmédiane et soit $S' = \mathbf{R}^+ \varphi + S$. Le cône convexe S' satisfait au principe du minimum. Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\omega_\alpha \in \mathcal{B}_x$, il existe donc une mesure $\mu_x^\alpha \geqslant 0$ portée par $\partial\omega_\alpha$ telle que $\int v\, d\mu_x^\alpha \leqslant v(x)$ $\forall\, v \in S'$, en particulier $\forall\, v \in S$. On doit donc avoir d'après l'hypothèse d'unicité de la balayée, $d\rho_x^\alpha = d\mu_x^\alpha$, de sorte que :

$$\int \varphi\, d\rho_x^\alpha \leqslant \varphi(x).$$

Inversement soit s.c.i. bornée telle que $\int \varphi \, d\rho_x^\alpha \leqslant \varphi(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $\omega_\alpha \in \mathcal{B}_x$. Alors, d'après le « critère local » (Théorème 7) φ est une fonction surmédiane.

Par suite, les fonctions surmédianes s.c.i. forment un cône convexe, donc maximal.

C.Q.F.D.

C'est le critère 2 qui est le plus efficace pour les applications. Signalons-en cependant un troisième qui s'exprime à l'aide de la réduite.

On suppose pour le critère 3 que S est formé de fonctions continues et que $\mathbf{R}.1 \subset \mathrm{S}$.

DÉFINITION. — *Soit φ une fonction s.c.i. bornée. On appellera réduite de φ et on notera* R_φ, *la fonction :*

$$\mathrm{R}_\varphi = \inf_{\substack{v_\alpha \geqslant \varphi \\ v_\alpha \text{ surmédiane}}} v_\alpha = \widehat{\inf v_\alpha}$$

CRITÈRE 3. — *Pour que le cône des fonctions s.c.i.* S-*surmédianes soit convexe (donc maximal) il faut et il suffit que pour tout couple de fonctions s.c.i. bornées, on ait :*

$$\mathrm{R}_{\varphi_1+\varphi_2} \leqslant \mathrm{R}_{\varphi_1} + \mathrm{R}_{\varphi_2}.$$

Démonstration. — Pour toute φ fonction s.c.i., la fonction R_φ est s.c.i. bornée et surmédiane (car S se compose de fonctions continues). On a donc : $\mathrm{R}_{\mathrm{R}_\varphi} = \mathrm{R}_\varphi$; et si φ est surmédiane on a $\varphi = \mathrm{R}_\varphi$. Soit $\psi_1 = \mathrm{R}_{\varphi_1}$ et $\psi_2 = \mathrm{R}_{\varphi_2}$. On a :

$$\psi_1 + \psi_2 \leqslant \mathrm{R}_{\psi_1+\psi_2} \leqslant \mathrm{R}_{\psi_1} + \mathrm{R}_{\psi_2} = \psi_1 + \psi_2.$$

Par suite $\mathrm{R}_{\psi_1+\psi_2} = \mathrm{R}_{\psi_1} + \mathrm{R}_{\psi_2}$. Et comme toute fonction surmédiane u peut s'écrire R_u, on a obtenu que la somme de deux fonctions surmédianes l'est aussi. Donc le cône des surmédianes est maximal.

Application. — Nous allons donner un critère assez général qui montre que « beaucoup » de théories locales du potentiel sont maximales en notre sens. Soit sur Ω supposé à base dénombrable, un faisceau $\mathcal{H}$ d'espaces vectoriels de fonctions continues dites fonctions harmoniques tel que

a) il existe une base d'ouverts dans Ω formée d'ouverts réguliers (c'est-à-dire d'ouverts ω tels que : pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, il existe u unique continue dans $\bar{\omega}$ telle que $u = \varphi$ sur $\partial\omega$, harmonique dans ω, avec la propriété que

$$(\varphi \geqslant 0 \text{ sur } \partial\omega) \Rightarrow (u \geqslant 0) \text{ dans } \omega.$$

b) l'axiome de convergence soit vérifié c'est-à-dire : Pour tout ordonné filtrant croissant borné de fonctions harmoniques dans ω, (ouvert quelconque) soit (h_α), $\sup h_\alpha$ est harmonique dans ω ; 1 est supposée harmonique.

On définit comme d'habitude les fonctions surharmoniques dans un ouvert ω_0 par les inégalités $\int v \, d\rho_x^\omega \leqslant v(x)$ où ω est régulier $\subset \bar{\omega} \subset \omega_0$ et où $d\rho_x^\omega$ est la mesure harmonique. Soit S le cône convexe des surharmoniques bornées dans Ω.

THÉORÈME 49. — *Le cône* S *des surharmoniques bornées dans* Ω *est maximal s'il sépare fortement les points de* Ω.

La démonstration se fait en plusieurs étapes et repose sur les résultats suivants :

LEMME. — *Toute* $v \in S$ *s'écrit* $v = \sup_n v_n$ *où* (v_n) *est une suite croissante d'éléments continus de* S^+.

La démonstration est standard et ne sera pas reproduite.

DÉFINITION. — *Une fonction* v *continue de* S^+ *est dite strictement concave (relativement à* S) *si pour tout couple* μ, ν *de mesures* $\geqslant 0$ *de Radon sur* Ω, *distinctes telles que toute* $u \in S$ *soit* μ *et* ν*-intégrable avec* $\int u \, d\mu \leqslant \int u \, d\nu$, *on ait :*

$$\int v \, d\mu < \int v \, d\nu.$$

On notera : $\mu \prec \nu$ *lorsqu'on a :*

$$\int u \, d\mu \leqslant \int u \, d\nu \quad \forall u \in S$$

(à lire : μ balayée de ν).

PROPOSITION 50. — *Il existe une fonction v strictement concave.*

Démonstration. — Soit (K_n) une suite fortement croissante de compacts de réunion Ω. Pour chaque n, soit $(s_{p,n})_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de S_c^+ qui engendre un espace dense dans $\mathcal{C}(K_n)$, les $(s_{n,p})$ étant harmoniques dans $\complement K_{n+1}$ et bornées. Il existe $(\alpha_{n,p})_{n,p}$ suite de réels > 0 telle que :

$$v = \sum_{n,p} \alpha_{n,p}\, s_{n,p} \in S_c^+.$$

v répond manifestement à la question.

PROPOSITION 51. — *Soit $x \in \Omega$. Il existe $(v_n) \subset S_c^+$, v_n strictement concave $\forall n$ telle que les ouverts $[v_n > \alpha]_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ \alpha\in\mathbf{R}^+}}$ non vides forment une base de voisinages de x.*

Démonstration. — Soit $u \in S_c^+$, strictement concave telle que $u(x) = 1$. Soit $v \in S_c^+$ telle que les ensembles $[v > \lambda]_{0<\lambda<1}$ forment une base de voisinages de x avec $v(x) = 1$. Posons $v_n = v + \dfrac{1}{n}u$. v_n est strictement concave et les ouverts $[v_n > \lambda]_{n,\lambda}$ quand n et λ varient ($n \in \mathbf{N}$ et $\lambda \in \mathbf{R}^+$ convenable) forment une base de voisinages de x.

PROPOSITION 52. — *Pour tout $x \in \Omega$, il existe une base $\mathcal{B}_x = (\omega_\alpha)$ de voisinages ouverts de x, relativement compacts, telle que pour tout α, la mesure harmonique $d\rho_x^{\omega_\alpha}$ (c'est-à-dire la mesure : $u \to R_u^{\complement\omega_\alpha}(x)$, $u \in S^+$) soit la seule mesure $\geqslant 0$ de masse 1 portée par $\partial\omega_\alpha$ et telle que*

$$\int u\, d\rho_x^{\omega_\alpha} \leqslant u(x) \quad \forall u \in S.$$

Démonstration. — Soit (v_n) comme dans la proposition précédente et $\omega_{\alpha,n} = [v_n > \alpha]$. Soit μ_x^α une mesure $\geqslant 0$ de masse 1 portée par $\partial\omega_\alpha$ et telle que

$$\int u\, d\mu_x^\alpha \leqslant u(x) \quad \forall u \in S^+,$$

(c'est-à-dire $\mu_x^\alpha \prec \varepsilon_x$). On a alors $\mu_x^\alpha \prec \rho_x^\alpha$. Car soit $s \in S^+$, $s \geqslant u$ sur

$\partial\omega_\alpha$. On a $s(x) \geqslant \int u \, d\mu_x^\alpha$ $\forall x \in \omega_\alpha$; donc : $\mathrm{R}_u^{\complement\omega_\alpha}(x) \geqslant \int u \, d\mu_x^\alpha$ donc

$$\int u \, d\rho_x^{\omega_\alpha} \geqslant \int u \, d\mu_x^\alpha \quad \forall u \in \mathrm{S}^+.$$

Si maintenant on avait $\rho_x^{\omega_\alpha} \neq \mu_x^\alpha$ alors v_n étant strictement concave, on aurait $\int v_n \, d\rho_x^{\omega_\alpha} > \int v_n \, d\mu_x^\alpha$ par définition. Or ceci est absurde puisque chacune de ces deux intégrales vaut α.

Résultat. — Le cône des fonctions surharmoniques bornées est maximal. Il suffit d'appliquer le critère 2 après avoir remarqué que les fonctions surmédianes s.c.i. sont les fonctions surharmoniques bornées.

COROLLAIRE 53. — *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux faisceaux d'espaces vectoriels de fonctions continues sur Ω admettant chacun une base d'ouverts réguliers,* 1 *étant $\mathcal{H}_1$ harmonique. Soient* S_1^+ *et* S_2^+ *les cônes de fonctions surharmoniques positives dans Ω relatifs à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement. On suppose que :*

i) $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$; ii) S_2^+ *sépare* Ω.

Alors $\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}_2$. *Si, de plus, on suppose que* $(\mathrm{S}_1^+)_c$ *(cône des éléments continus de* S_1^+*) sépare fortement* Ω, *alors* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Démonstration. — On a $\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}_2$. En effet, soit $s \in \mathrm{S}_1$, $\mathcal{R}$ un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts réguliers pour $\mathcal{H}_1$. On pose :

$$s_{\mathcal{R}}(x) = \min_{\substack{\omega_i \in \mathcal{R} \\ x \in \omega_i}} \mathrm{H}_s^{\omega_i}(x)$$

où $\mathrm{H}_s^{\omega_i}$ est la solution du problème de Dirichlet relativement à $\mathcal{H}_1$ avec la donnée frontière s dans l'ouvert ω_i. Comme S_2^+ sépare, la propriété d'être $\mathcal{H}_2$ surharmonique est de caractère local (raisonnement standard). $s_{\mathcal{R}}$ est donc $\mathcal{H}_2$-surharmonique étant localement un inf. fini de fonctions harmoniques pour $\mathcal{H}_1$ donc pour $\mathcal{H}_2$. Si $\mathcal{R}'$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{R}$ et localement fini, on a $s_{\mathcal{R}'} \geqslant s_{\mathcal{R}}$. Donc $s = \sup\limits_{\mathcal{R}} s_{\mathcal{R}}$. Si $(\mathrm{S}_1^+)_c$ sépare fortement, les éléments bornés de S_1^+ forment un cône convexe maximal, donc $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2$ et par suite $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ car 1 est $\mathcal{H}_1$-harmonique.

Cas particulier. — Dans un ouvert Ω borné de $\mathbf{R}^n$ soit L un opérateur uniformément elliptique de la forme :

$$u \to \mathrm{L}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

défini sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$ (cf. [10]) à coefficients mesurables bornés avec $a_{ij} = a_{ji}$. G. Stampacchia a étudié dans ([10]) les solutions et sous solutions de cette opérateur. Si on désigne par S le cône des sous solutions dans Ω, on voit sans peine d'après l'existence d'une fonction de Green que S^+ sépare fortement. Donc S_b est maximal ou S_b est le cône des éléments bornés de S. Ces considérations sont susceptibles de généralisations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER, Axiomatische behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Ann.* 146, (1962), 1-59.

[2] H. BAUER, Silovscher Rand und Dirichletschen Problem. (*Ann. Instit. Fourier,* 11 (1961), 89-136).

[3] M. BRELOT, *Lectures on Potential Theory,* (*Tata Institute,* Bombay, (1960).)

[4] HELMS, Maximal Wedges of Subharmonic Functions, (*Am. Journal of Math.,* mai 1963, 710-712).

[5] R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, (*Ann. Instit. Fourier,* 12 (1962), 415-571).

[6] G. MOKOBODZI, Représentation intégrale des fonctions surharmoniques, (*Ann. Instit. Fourier,* 15 janvier 1965).

[7] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, Cônes adaptés, (*C. R. Ac. Sc. Paris,* déc. 1966).

[8] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, Cônes et espaces de fonctions continues, (*C. R. Ac. Sc. Paris,* mars 1967).

[9] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, (*C. R. Ac. Sc. Paris,* janvier 1967).

[10] G. STAMPACCHIA, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, (Annales Instit. Fourier, 15 janvier 1965, 189-257).

Manuscrit reçu le 12 mars 1967.

Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY,
Institut Henri-Poincaré
11, rue Pierre-Curie
Paris-5e