ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ARNAUD DE LA PRADELLE

Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 383-399

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_383_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 383-399.

APPROXIMATION ET CARACTÈRE DE QUASI-ANALYTICITÉ DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES FONCTIONS HARMONIQUES

par Arnaud DE LA PRADELLE

Introduction.

Nous nous plaçons dans le cadre axiomatique de M. Brelot auquel nous renvoyons ([3] et [5]) et nous nous proposons de caractériser une propriété dite de quasi-analyticité, notée A : toute fonction harmonique dans un domaine est nulle, dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point. Cette étude nous a été proposée par M. Brelot dont les suggestions nous ont été très utiles.

Cette question est liée à une approximation uniforme de fonctions numériques finies continues sur des compacts, par des fonctions harmoniques dans un voisinage convenable. Nous sommes ainsi amenés à étendre en préliminaire la théorie classique [2] de Dirichlet par l'extérieur pour un compact puis même à traiter le cas d'un fermé E à frontière ∂E compacte. Nous obtenons ainsi un critère nécessaire et suffisant d'approximation uniforme de toute fonction numérique finie continue sur ∂E par des différences de potentiels à supports compacts contenus dans le complémentaire $\complement E$ de E, ainsi que l'avait montré M. Brelot dans le cas classique ([2]).

Nous utilisons ensuite toutes les hypothèses de la théorie des fonctions harmoniques adjointes de M^me^ Hervé ([5]), en ajoutant la proportionalité des potentiels adjoints à supports ponctuels. Nous étudions alors l'hypothèse (A) de quasi-analyticité relative aux fonctions adjointes, que l'on note (A*). Nous inspirant d'un mémoire de J. Deny ([4]) nous montrons que (A*) est équivalente à la possibilité d'approcher toute fonction réelle finie continue sur la frontière compacte ∂E de tout fermé E, par une combinaison linéaire finie $\sum \lambda_i \, p_{y_i}(x)$ (1) où y_i appartient à un ensemble donné, assujetti seulement à être partout dense au voisinage d'un point de chacun des domaines composants du complémentaire $\complement E$ de E. Nous utilisons pour cela l'existence d'une base d'ouverts non effilés en leurs points-frontière, résultat récent de G. Mokobodsky et D. Sibony. Cependant, sans ce dernier résultat, mais moyennant l'axiome de domination (D) et l'hypothèse que tout point x c'est-à-dire $\{x\}$ est polaire, nous trouvons une autre propriété équivalente à (A*). Cette dernière est que, l'espace engendré par les restrictions des potentiels p_y à la frontière $\partial\omega$ de tout domaine relativement compact ω, lorsque y décrit un sous-ouvert non vide arbitraire ω', d'adhérence compacte $\bar{\omega}'$ contenue dans ω, est total dans l'espace $L^1(\rho_x^\omega)$ des classes de fonctions ρ_x^ω-intégrables (ρ_x^ω désigne la mesure harmonique de ω au point x de ω).

Nous terminons en montrant que A* entraîne, en particulier, qu'une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir approcher toute fonction harmonique u dans l'ouvert ω, uniformément sur tout compact $\subset \omega$, par des fonctions harmoniques dans Ω, est que $\complement\omega$ n'ait pas de composante connexe compacte.

1. Problème de Dirichlet par l'extérieur et approximation.

Nous rappelons que l'espace de base Ω est localement compact, non compact, connexe et localement connexe. Nous supposons vérifier les axiomes 1, 2, 3, ainsi que l'existence d'un potentiel strictement positif dans Ω.

Nous noterons :

H (resp. H (ω)) l'ensemble des fonctions harmoniques dans Ω (resp. dans l'ouvert ω),

S (resp. S (ω)) l'ensemble des fonctions surharmoniques dans Ω (resp. dans l'ouvert ω) et S^+ (resp. $S^+(\omega)$) le cône des éléments positifs de S (resp. S (ω)).

P^+ (resp. $P^+(\omega)$) l'ensemble des potentiels dans Ω (resp. dans l'ouvert ω).

Nous nous inspirons de l'étude du cas classique [2].

(1) p_y désigne un potentiel à support ponctuel $\{y\}$.

1. *Problème de Dirichlet pour l'ouvert* ω *à frontière* $\partial\omega$ *compacte* (2).

Pour toute fonction réelle f finie ou non sur $\partial\omega$, on considère la famille $\overline{\mathcal{H}}_f^\omega$ des fonctions v hyperharmoniques telles que

1) $\liminf\limits_{x\to y\in\partial\omega,\, x\in\omega} v(x) \geqslant f(y)$ et $> -\infty$ pour tout $y \in \partial\omega$,

2) $v \geqslant -p_v$ où $p_v \in \mathrm{P}^+$ (3).

On introduit de même par symétrie la famille des fonctions hypoharmoniques vérifiant une condition frontière analogue (changement de lim inf en lim sup, $\geqslant$ en $\leqslant$) et majorées par un potentiel dans Ω.

On pose $\overline{\mathrm{H}}_f^\omega = \operatorname*{Inf}\limits_{v\in\overline{\mathcal{H}}_f^\omega} v$ et $\underline{\mathrm{H}}_f^\omega = \operatorname*{Sup}\limits_{u\in\underline{\mathcal{H}}_f^\omega} u$ qui vaut $-\overline{\mathrm{H}}_{(-f)}^\omega$.

Propriétés immédiates.

H1) $\overline{\mathrm{H}}_f^\omega$ est $\pm\infty$ ou harmonique dans chaque domaine composant de ω.

H2) $\underline{\mathrm{H}}_f^\omega \leqslant \overline{\mathrm{H}}_f^\omega$. S'il y a égalité en un point, il y a égalité partout. Si la valeur commune, notée H_f est finie, f est dite résolutive. $\mathcal{R}_\omega$ désigne l'ensemble des fonctions résolutives.

H3) $\overline{\mathrm{H}}_{f+g}^\omega \leqslant \overline{\mathrm{H}}_g^\omega + \overline{\mathrm{H}}_g^\omega$, (4), $\overline{\mathrm{H}}_{\lambda f}^\omega = \lambda\overline{\mathrm{H}}_f^\omega$ $(\lambda \geqslant 0)$.

H4) Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur $\mathcal{R}_\omega$ convergeant uniformément vers une fonction bornée f, alors $f \in \mathcal{R}_\omega$ et $\lim\limits_{\mathcal{F}} \mathrm{H}_\varphi^\omega(x_0) = \mathrm{H}_f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in \omega$.

H5) $\overline{\mathrm{H}}_v^\omega = \mathrm{R}_v^{\complement\omega}$ pour $v \in \mathrm{S}^+$ où $\mathrm{R}_v^{\complement\omega}$ désigne la réduite de v sur $\complement\omega$ (voir [3]).

H6) $\underline{\mathrm{H}}_p^\omega = \overline{\mathrm{H}}_p^\omega$ pour tout potentiel p continu.

THÉORÈME 1. — *Toute fonction finie continue est résolutive.*

On utilise de façon classique le fait que les différences de potentiels

(2) H. Bauer dans les Math. Annalen (Zum Cauchyschen und Dirichletschen Problem bei elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen, p. 142-153 (1966) traite d'un problème de Dirichlet analogue. Nous aurions utilisé sa définition si nous en avions eu connaissance en temps voulu.

(3) Cette condition est inspirée par le principe du minimum suivant : Si $v \in \mathrm{S}(\omega)$ est telle que $\liminf\limits_{x\to y} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \partial\omega$ et $v \geqslant -p$ où $p \in \mathrm{P}^+$ alors $v \in \mathrm{S}^+(\omega)$.

(4) On donne à la fonction $f+g$ une valeur quelconque là où elle n'est pas définie.

continus dans Ω, sont partout denses dans l'espace $\mathcal{C}(\partial\omega)$ des fonctions finies continues sur $\partial\omega$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

2. *Problème de Dirichlet par l'extérieur* ([5]).

Soient E un fermé de Ω à frontière ∂E compacte et f une fonction réelle finie ou non sur ∂E. On considère la famille $\overline{\mathcal{H}}_f^{\mathrm{E}}$ des fonctions hyper-harmoniques dans les ouverts ω contenant E, telles que

1) $\liminf\limits_{x\to y,\, x\in \complement \mathrm{E}} v(x) \geqslant f(y)$ pour tout $y \in \partial \mathrm{E}$.

2) $v \geqslant -\mathrm{P}_v$ où $p_v \in \mathrm{P}^+$.

On introduit aussi, de façon analogue, la famille $\underline{\mathcal{H}}_f^{\mathrm{E}}$ des fonctions hypo-harmoniques vérifiant des conditions symétriques.

On pose $\overline{\mathrm{K}}_f^{\mathrm{E}} = \operatorname*{Inf}\limits_{v\in\overline{\mathcal{H}}_f^{\mathrm{E}}} v$ et $\underline{\mathrm{K}}_f^{\mathrm{E}} = \operatorname*{Sup}\limits_{u\in\underline{\mathcal{H}}_f^{\mathrm{E}}} u$ qui vaut $-\overline{\mathrm{K}}_{(-f)}^{\mathrm{E}}$.

Propriétés immédiates.

K_1) $\overline{\mathrm{K}}_f^{\mathrm{E}}$ est $\pm\infty$ ou harmonique dans chaque domaine composant de l'intérieur $\mathring{\mathrm{E}}$ de E (s'il est non vide).

K_2) $\underline{\mathrm{K}}_f \leqslant \overline{\mathrm{K}}_f$ si l'égalité a lieu en un point $x_0 \in \mathrm{E}$, f est dite résolutive en x_0, si elle a lieu en tout point de E, f est dite résolutive et la valeur commune notée $\mathrm{K}_f^{\mathrm{E}}$ · $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ désignera l'ensemble des fonctions résolutives.

K_3) $\overline{\mathrm{K}}_{f+g}^{\mathrm{E}} \leqslant \overline{\mathrm{K}}_f^{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{K}}_g^{\mathrm{E}}$, ([4]), $\overline{\mathrm{K}}_{\lambda f} = \lambda\overline{\mathrm{K}}_g$ $(\lambda \geqslant 0)$.

K_4) Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ convergeant uniformément vers une fonction f bornée, alors $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ et $\lim\limits_{\mathcal{F}} \mathrm{K}_\varphi^{\mathrm{E}}(x_0) = \mathrm{K}_f^{\mathrm{E}}(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathrm{E}$.

K_5) $\overline{\mathrm{K}}_p^{\mathrm{E}} = \mathrm{R}_p^{\complement \mathrm{E}}\ \forall p \in \mathrm{P}^+$.

K_6) $\underline{\mathrm{K}}_p(x) = \overline{\mathrm{K}}_p(x)\ \forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall p \in \mathrm{P}^+$.

On considère un ensemble filtrant décroissant $\{\omega_i\}$ d'ouverts à frontières compactes, tendant vers E. $\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{P}}^{\complement\omega} = p_i$ vaut $\overline{\mathrm{H}}_p^{\omega_i}$ dans ω_i d'après H_5. Les p_i forment un ordonné filtrant croissant d'éléments de P^+ dont l'enveloppe supérieure p' est un potentiel dans Ω, égal à p sur $\complement$E. Ceci montre que $p' \in \overline{\mathcal{H}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{E}}$, et $p' \geqslant \overline{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{E}}$. D'autre part $\overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{P}}^{\omega_i} \leqslant p$ dans ω_i, donc $\overline{\mathrm{H}}_p \in \underline{\mathcal{H}}_p^{\mathrm{E}}$ et $p' \leqslant \underline{\mathrm{K}}_p^{\mathrm{E}}$. Ceci prouve K_5 et K_6.

([5]) Tout ce qui suit dans ce paragraphe peut s'étendre au cadre de l'axiomatique Bauer, avec des modifications convenables, pour un fermé E à frontière non vide.

THÉORÈME 2. — *Pour toute fonction* φ *finie continue sur* ∂E, *on a* $\underline{K}_\varphi^E(x) = \overline{K}_\varphi^E(x)$ ($\forall x \in$ E) *et si* Φ *désigne un prolongement continu et borné de* φ *à* Ω, *on a* $K_\varphi = \lim H_\Phi^{\omega_i}$ *où* $H_\Phi^{\omega_i}$ *désigne la solution du problème de Dirichlet pour l'ouvert* ω_i, *avec, pour donnée-frontière, la trace de* Φ *sur* $\partial\omega_i$ *et où* $\{\omega_i\}$ *est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts à frontières compactes tels que* $\bigcap \omega_i =$ E.

Ceci est une conséquence de K_3, K_4 et K_6.

Remarque. — Pour f finie continue sur ∂E, $K_f(x)$ s'écrit $\int f\, d\mu_x$ où μ_x est une mesure de Radon portée par ∂E. μ_x est la balayée de ε_x sur $\complement$E au sens de Mme Hervé d'après K_5.

Stabilité.

DÉFINITION. — *Un point* x_0 *de* ∂E *est dit stable, comme dans le cas classique* ([2]), *si l'on a* $K_f(x_0) = f(x_0)$ *pour toute fonction* f *finie continue.*

THÉORÈME 3. — *La stabilité de* E *en* x_0 *équivaut au non effilement de* $\complement$E *en* x_0.

La démonstration est celle du cas classique ([2]).

THÉORÈME 4. — *Pour pouvoir approcher uniformément toute fonction finie continue sur* ∂E *par une différence de potentiels à supports compacts contenus dans* $\complement$E, *il faut et il suffit que tous les points-frontière de* E *soient stables.*

La condition est suffisante. Il suffit de le voir pour un potentiel fini continu p à support compact dans Ω (l'espace des différences de tels potentiels est aussi partout dense dans $\mathcal{C}(\partial$E)). Les H_P^ω forment un ordonné filtrant croissant tendant vers $K_P = P$ continu et la convergence est uniforme d'après le lemme de Dini.

La condition est nécessaire. Soient p un potentiel fini continu dans Ω et $p_1 - p_2$ une différence de potentiels à support compact telle que $p_1 - p_2 - \varepsilon p$ et $p_1 - p_2 + \varepsilon p$ encadrent f. Ces différences encadrent alors aussi les K_f.

2. Quasi-analyticité.

On ajoute les hypothèses suivantes :

Base dénombrable d'ouverts pour la topologie de Ω.

Base de domaines complètement déterminants [6], proportionnalité des potentiels à support ponctuel et des potentiels adjoints à support ponctuel.

On notera $p_y(x)$ le potentiel de support $\{y\}$ situé dans une base compacte fixée du cône S^+ muni de la topologie T de M^me^ Hervé et $p_y^*(x) = p_y(x)$.

Si p'_y est un autre potentiel de support ponctuel $\{y\}$ situé dans une autre base du cône, $p'_y = \theta(y)\, p_y$ où θ est une fonction finie continue > 0 sur Ω.

Les potentiels dans Ω se représentent alors selon $\int p_y(x)\, d\lambda(y)$ que l'on notera P_λ, où la mesure positive λ est unique.

La mesure harmonique adjointe σ_y^ω est définie par

$$\hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x) = \int p_z(x) d\sigma_y^\omega(z)$$

pour tout ouvert relativement compact ω. Les notions adjointes seront désignées par un astérisque. Ainsi $h \in H^*(\omega)$ signifie que λ est finie continue dans ω et vérifie $h(y) = \int h(x)\, d\sigma_y^\delta(x)$ pour tout δ complètement déterminant $\subset \bar{\delta} \subset \omega$. Ces fonctions adjointes dépendent du choix de p_y et se déduisent donc l'une de l'autre par multiplication par $\theta(y)$.

La proportionnalité des potentiels adjoints a support ponctuel permet de représenter tout potentiel adjoint selon $\int p_y(x)\, d\lambda(x)$ où la mesure positive λ est unique. Cela tient au fait que si $p_x'^*$ est un potentiel adjoint de support $\{x\}$ situé dans une base de $\overset{+}{S}{}^*$, $p_x'^* = \alpha(x)\, p_x^*(y)$ où $\alpha(x)$ est finie continue > 0 dans Ω.

[6] $\omega \subset \bar{\omega}$ compact est dit complémentaire déterminant, si pour tout potentiel p dans Ω, harmonique dans ω, les fonctions $v \in S^+$ majorant p sur $\complement\omega$ le majore dans Ω ; ou encore $R_p^{\complement\omega} = p$ dans Ω.

LEMME 1. — *Si* $u \in H(\omega)$ (resp. $H^*(\omega)$), *pour tout ouvert* ω', $\omega' \subset \bar{\omega}'$ *compact* $\subset \omega$, *on peut trouver une mesure* α *sur* $\partial\omega'$ *telle que*

$$u(x) = \int p_y(x)\, d\alpha(y) \quad (\text{resp. } u(x) = \int p_y^*(x)\, d\alpha(y) \ \textit{dans}\ \omega')$$

Démonstration. — Si $u \in H(\omega)$, appliquons le théorème 13, 1 de Mme Hervé ([5], p. 44), on a $u = P\text{-}P'$, où P et P′ sont des potentiels dans Ω, harmoniques dans ω', dont on prend les balayés sur ω'. Ces balayés s'écrivent $\int p_y(x)\, d\mu_1(y)$ et $\int p_y(x)\, d\mu_2(y)$ où les mesures positives μ_1 et μ_2 chargent $\partial\omega'$. $\alpha = \mu_1 - \mu_2$ répond à la question. On raisonne de même si $u \in H^*(\omega)$.

Soit E un sous ensemble fermé $\subset \Omega$, tel que sa frontière ∂E soit compacte. Considérons les mesures positives portées par ∂E et la relation d'équivalence entre elles : $\lambda \underset{E}{\sim} \mu$ signifie que λ et μ engendrent des potentiels adjoints égaux sur $\complement E$, c'est-à-dire :

$$\lambda \sim \mu \Leftrightarrow P_\lambda^*(y) = P_\mu^*(y) \quad \forall y \in \complement E.$$

LEMME 2. — *Cette relation d'équivalence* $\lambda \sim \mu$ *équivaut à* $\lambda^{\complement E} = \mu^{\complement E}$ *où* $\lambda^{\complement E}$ *et* $\mu^{\complement E}$ *sont les balayées de ces mesures sur* $\complement E$. *Elle équivaut aussi à* $\int D\, d\lambda = \int D\, d\mu$ *où* D *est une différence de potentiels à supports compacts contenus dans* $\complement E$.

Démonstration. — L'équivalence de λ et μ équivaut à l'égalité $P_\lambda^* = P_\mu^*$ sur $\complement E$ et aussi à $R^{*\complement E}_{P_\lambda^*} = R^{*\complement E}_{P_\mu^*}$ partout. Les mesures associées à ces potentiels balayés adjoints sont les balayées directes $\lambda^{\complement E}$ et $\mu^{\complement E}$ (Mme Hervé [5] prop. 30.2), et l'unicité de la représentation intégrale impose $\lambda^{\complement E} = \mu^{\complement E}$.

D'autre part si $D = p_{x_0}$ où $x_0 \in \complement E$, on a $\int p_{x_0}\, d\lambda = \int p_{x_0}\, d\mu$, c'est-à-dire $P_\lambda^*(x_0) = P_\mu^*(x_0)$ ou encore $\lambda \sim \mu$. Réciproquement, D s'écrit

$$D(x) = \int p_y(x)\, d\alpha(y)$$

où α est une mesure à support compact portée par $\complement E$. Par interversion des intégrations, on a :

$$\int \mathrm{D}\, d\lambda = \int \left[\int p_y(x)\, d\lambda(x) \right] d\,\alpha(y) = \int \left[\int p_y(x)\, d\mu(x) \right] d\alpha(y)$$
$$= \int \left[\int p_y(x)\, d\alpha(y) \right] d\mu = \int \mathrm{D}\, d\mu.$$

LEMME 3. — *L'équivalence $\lambda \sim \mu$ équivaut toujours à l'identité lorsqu'il n'y a pas de points d'effilement de $\complement \mathrm{E}$ sur $\partial \mathrm{E}$ et seulement dans ce cas.*

Démonstration. — S'il n'y a pas de point d'effilement de $\complement\mathrm{E}$ sur $\partial\mathrm{E}$, $\lambda = \lambda^{\complement \mathrm{E}}$ et $\mu = \mu^{\complement \mathrm{E}}$. D'après le lemme 2, $\lambda \sim \mu$ équivaut à $\lambda^{\complement \mathrm{E}} = \mu^{\complement \mathrm{E}}$ et donc à $\lambda = \mu$.

Par contre, si $x \in \partial\mathrm{E}$ est un point d'effilement de $\complement\mathrm{E}$, $\varepsilon_x^{\complement \mathrm{E}} \neq \varepsilon_x$ bien que ces mesures soient équivalentes. $\varepsilon_x^{\complement \mathrm{E}}$ est la mesure associée au potentiel adjoint $\mathrm{R}^{*\complement \mathrm{E}}_{\mathrm{P}^*_{\varepsilon_x}}$ et ε_x la mesure associée au potentiel adjoint $\mathrm{P}^*_{\varepsilon_x}$. Ceux-ci sont égaux sur $\complement\mathrm{E}$.

On retrouve le théorème 4 du paragraphe I.

En effet, considérons l'espace $\mathcal{C}(\partial\mathrm{E})$ des fonctions continues sur $\partial\mathrm{E}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, et $\mathcal{T}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{C}(\partial\mathrm{E})$ le sous-espace constitué par les restrictions à $\partial\mathrm{E}$ des différences de potentiels à supports compacts portés par $\complement\mathrm{E}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{T}(\mathrm{E})$ soit total dans $\mathcal{C}(\partial\mathrm{E})$ est que toute mesure de Radon ν sur $\partial\mathrm{E}$, nulle sur $\mathcal{T}(\mathrm{E})$, soit nulle. Si $\nu = \lambda - \mu$ $(\lambda, \mu \geqslant 0)$, ceci signifie d'après le lemme 3 que λ et μ sont égales si elles sont équivalentes. Le théorème est une conséquence du lemme précédent.

Remarque. — Si l'intérieur $\mathring{\mathrm{E}}$ de E est non vide, et si on appelle $\mathcal{H}_{\mathrm{E}}$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\partial\mathrm{E})$ constitué par les restrictions à $\partial\mathrm{E}$ des fonctions continues sur E, harmoniques dans $\mathring{\mathrm{E}}$, on a le théorème suivant dû, dans le cas classique, à Deny [4], en ajoutant l'axiome de domination (D).

THÉORÈME 5. — *Pour pouvoir approcher toute fonction de $\mathcal{H}_{\mathrm{E}}$ uniformément sur $\partial\mathrm{E}$ par une différence de potentiels à supports compacts contenus dans $\complement\mathrm{E}$, il est nécessaire et suffisant que $\complement\mathrm{E}$ et $\complement\mathrm{E}$ soient effilés aux mêmes points.*

La démonstration est une adaptation immédiate de celle de Deny [4]. On montre que pour que $\mathcal{H}_{\mathrm{E}}$ et $\mathcal{T}(\mathrm{E})$ aient mêmes orthogonales, il est nécessaire et suffisant que $\complement\mathrm{E}$ et $\complement\mathring{\mathrm{E}}$ soient effilés aux mêmes points.

DÉFINITION. — *Une fonction harmonique dans un domaine est dite de type analytique si elle est nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point.*

Cette propriété pour tout domaine sera notée (A), et pour les fonctions adjointes (A^*). On pourra appeler (A_ω) et (A^*_ω) la même propriété restreinte aux fonctions harmoniques ou harmoniques adjointes dans un domaine ω.

Soient a_n un point arbitraire de chaque domaine composant ω_n de $\complement E$, v_n un voisinage compact quelconque de a_n, $v_n \subset \omega_n$, et enfin $\mathcal{V} = \bigcup_n v_n$.

Lorsque A^* est vérifié, il est alors évident que $\lambda \underset{E}{\sim} \mu$ équivaut à la nullité de $\int p_y(x)\, d\nu(x)$ ($\nu = \lambda - \mu$) pour tout $y \in \mathcal{V}$.

THÉORÈME 6. — *Supposons A^*. Pour pouvoir approcher uniformément toute fonction φ finie continue sur ∂E par une combinaison linéaire finie $\sum \lambda_i p_{y_i}(x)$ où $y_i \in \mathcal{V}$, il est nécessaire et suffisant que $\complement E$ n'ait pas de point d'effilement sur ∂E.*

Démonstration. — Cette approximatoin équivaut d'après Hahn-Banach à ce que la nullité de $\int p_y\, d\nu$ pour $y \in \mathcal{V}$ entraîne toujours $\nu = 0$ ($\nu = \lambda - \mu$). C'est-à-dire, à ce que $\lambda \sim \mu$ entraîne toujours $\lambda = \mu$. Le théorème est encore une conséquence du lemme 3.

Remarque. — Il est facile de voir que cette approximation est équivalente à l'approximation à l'aide de différence de potentiels à supports compacts contenus dans $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{V}_n$. D'autre part les supports de ces potentiels ne seront que dans un nombre fini de $\mathcal{V}_n$ et on ne peut dire lesquels. Cependant on a le résultat suivant (cas classique, voir Brelot [2]).

THÉORÈME 7. — *On suppose A^*. Soit α une réunion finie de $\mathcal{V}_n$. Pour que toute fonction finie continue sur ∂E puisse être approchée uniformément par une différence de potentiels à supports contenus dans α, il faut et il suffit que, Δ étant la réunion des domaines composants de $\complement E$ qui contiennent un point de α, ∂E soit la frontière de $\complement \Delta$ et que Δ ne soit pas effilé aux points de ∂E.*

Démonstration. — La condition est suffisante d'après le théorème précédent. La condition nécessaire est une adaptation immédiate de celle donnée par M. Brelot dans le cas classique ([2]).

DÉFINITION. — *Pour* $\complement$E *non effilé en ses points-frontière, notons* ($\mathcal{A}_E$) *la propriété suivante : on peut approcher uniformément toute fonction finie continue sur* ∂E *par une combinaison linéaire finie* $\sum \lambda_i \, p_{y_i}(x)$ ($y_i \in \mathcal{V} = \cup \mathcal{V}_n$) et ($\mathcal{A}_E^*$) *la même propriété relative aux fonctions harmoniques adjointes.*

THÉORÈME 8. — (A*) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}_E$) *pour tout* E (*ou seulement pour tout* E $= \complement\omega$ *où* ω *est un ouvert relativement compact de* Ω).

Démonstration. — (A*) entraîne ($\mathcal{A}_E$) pour tout E d'après le théorème précédent. Réciproquement, considérons $h \in H^*(\omega)$ pour un domaine ω, nulle dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \omega$. On introduit un voisinage compact connexe K de x_0, puis, on recouvre K par un nombre fini d'ouverts $\{ \omega_i \}$, non effilés (7) en leurs points-frontière tels que leurs adhérences ne rencontrent pas $\partial\omega$. $\omega' = K \cup (\cup \omega_i)$ est un ouvert non effilé en ses points-frontière, $\bar{\omega}'$ est compact et $\subset \omega$. ω' a un domaine composant δ qui contient K, et celui-ci n'est pas effilé en ses points-frontière. D'après le lemme 1 on a dans δ

$$h(y) = \int p_y(x) \, d\mu(x)$$

où μ est une mesure chargeant $\partial\delta$. μ, nulle sous un sous-espace partout dense de $\mathcal{C}(\partial\delta)$, est nulle. h est en particulier nulle sur K. K pouvant être choisi arbitrairement, h est nulle dans ω.

Remarque. — On peut intervertir les astérisques sur (A*) et ($\mathcal{A}$). On parlera alors d'effilement adjoint au lieu d'effilement. Ceci provient du fait que les fonctions adjointes des fonctions harmoniques adjointes sont les fonctions harmoniques, lorsque les potentiels adjoints à supports ponctuels sont proportionnels.

Si on suppose que tout point est polaire dans Ω et l'axiome (D) de domination, on trouve un autre équivalent de (A*). Rappelons (Mme Hervé [5]) que (D) est équivalent à (D') :

(7) Il existe une base d'ouverts non effilés en leurs points-frontière. (D'après G. Mokobodski et D. Sibony).

(D′) L'ensemble des points d'effilement d'un ouvert ω relativement compact situés sur $\partial\bar{\omega}$, est de mesure harmonique nulle pour ω.

Soient ω un domaine relativement compact de Ω, x_0 un point de ω et $\rho_{x_0}^{\omega}$ la mesure harmonique de ω en x_0 .Notons par $L^1(\rho_{x_0}^{\omega})$ l'espace des classes de fonctions $\rho_{x_0}^{\omega}$ — intégrables muni de la norme

$$\int |f| \, d\rho_{x_0}^{\omega} \qquad \text{et } L^{\infty}(\rho_{x_0}^{\omega}) \text{ son dual.}$$

($L^1(\sigma_{x_0}^{\omega})$ et $L^{\infty}(\sigma_{x_0}^{\omega})$ pour la mesure harmonique adjointe).

DÉFINITION (8). — *Si $\mathcal{V}$ est un voisinage arbitraire d'un point de ω, on notera par $(\mathfrak{A}_L(\omega))$ la propriété pour l'ensemble de potentiels $p_y(x)$ $(y \in \mathcal{V})$ d'être total dans $L^1(\rho_{x_0}^{\omega})$ pour tout $x_0 \in \omega$. On notera $(\mathfrak{A}_L(\omega))$ la même propriété relative aux potentiels adjoints p_y^*.*

Nous supposerons les constantes harmoniques, seulement pour le lemme suivant (9).

LEMME 4. — *Soient $h \in H(\omega)$ (resp. $h \in H^*(\omega)$) pour ω ouvert $\subset \Omega$ et x_0 (10) polaire $\in \omega$, alors il existe un domaine $\delta = x_0, \delta \subset \delta$ compact $\subset \Omega$ dans lequel h s'écrit*

$$h(y) = k \int p_y^* d\,\sigma_{x_0}^{\delta} + \lambda \qquad (\text{resp. } f(y)\,h(y) = k \int p_y \, d\,\rho_{x_0}^{\delta} + \lambda)$$

où k est une constante $\geqslant 0$, λ une constante $\leqslant 0$ et $f(y)$ une fonction continue > 0.

Démonstration. — Supposons $h \in H^*(\omega)$. Soient ω' un domaine, $\bar{\omega}'$ compact $\subset \omega$ et k une constante, $k \leqslant \begin{cases} \operatorname{Inf}_{\omega'} h \\ 0 \end{cases}$. On pose $u = h - k$, u est harmonique adjointe > 0 dans ω' (11).

(8) Noter que $(\mathfrak{A}_L(\omega))$ ne dépend pas de x_0.

(9) Avec les axiomes 1, 2, 3, et une base dénombrable d'ouverts pour la topologie de Ω et l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω, il existe une fonction harmonique $h > 0$ dans Ω. Les quotients par h des fonctions harmoniques constituent un autre faisceau de fonctions dites h-harmoniques et comprennent les constantes. On peut donc raisonner en supposant les constantes harmoniques, tant que les propriétés obtenues sont stables par passage au quotient et multiplication par h.

(10) x_0 polaire $= x_0$ polaire*. Rappelons aussi que (D) est équivalent à (D*), lorsque les potentiels adjoints à support ponctuel sont proportionnels.

(11) On suppose les constantes harmoniques adjointes dans ω. Si elles ne l'étaient pas, on raisonnerait sur un système adjoint associé à un p_y défini par $\int p_y \, d\rho_{x_0}^{\alpha} = 1$ (α ouvert complément déterminant, $\alpha \cap \omega = \phi$). Ces nouvelles fonctions adjointes se déduisent des anciennes par multiplication par f.

Si u était nulle en un point de ω', elle serait nulle dans ω' et le lemme est démontré dans ce cas là.

Considérons, dans le cas contraire, l'ouvert

$$\delta_{x_0}^{\lambda} = \{y \in \omega' \; ; \quad \lambda\, u(y) < p_y(x_0)\}.$$

On choisit λ tel que $\delta_{x_0}^{\lambda}$ soit compact et contenu dans ω'. x_0 était polaire appartient à $\delta_{x_0}^{\lambda}$. Soit δ le domaine composant de $\delta_{x_0}^{\lambda}$ contenant x_0.

Posons $\mathrm{U} = \begin{cases} \mathrm{Inf}\,(\lambda\, u, p_{x_0}^*) & \text{dans } \delta \\ p_{x_0}^* & \text{dans } \complement\, \delta \end{cases}$. U est un potentiel adjoint borné dans Ω, égal à $\lambda\, u$ dans δ. On a

$$\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{U}(y)}^{*\complement\delta} = \hat{\mathrm{R}}_{p_{x_0}^*}^{\complement\delta}(y) = \hat{\mathrm{R}}_{p_y}^{\complement\delta}(x_0) = \int p_y\, d\varepsilon_{x_0}^{\complement\delta} = \int p_y\, d\rho_{x_0}^{\delta} = \mathrm{U} \quad \text{dans} \quad \delta.$$

Puis finalement $\mathrm{U} = \lambda\,(u - k) = \int p_y\, d\rho_{u_0}^{\delta}$ dans δ, d'où le lemme. On raisonne de même si $h \in \mathrm{H}\,(\omega)$.

THÉORÈME 9 (12). — $(\mathrm{A}^*) \Leftrightarrow (\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\,(\omega))$ *pour tout* ω.

Démonstration. — $(\mathrm{A}^*) \Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\,(\omega))$ pour tout ω.

Soit ω un domaine relativement compact de Ω et $x_0 \in \omega$. Si $\psi \in \mathrm{L}^\infty\,(\rho_{x_0}^{\omega})$ vérifie $\int p_y\, \psi\, d\rho_{x_0}^{\omega} = 0$ pour tout $y \in \mathcal{V} \subset \omega$; en posant $\mu = \psi\, d\rho_{x_0}^{\omega}$ il vient $\int p_y\, d\mu^+ = \int p_y\, d\mu^-$ dans tout ω d'après (A^*). Ces potentiels adjoints sont égaux partout d'après (D') et le lemme 3 appliqué à $\complement\, \omega$, par suite $\mu = 0$. Ceci donne l'approximation d'après Hahn-Banach.

$$(\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\,(\omega)) \quad \text{pour tout} \quad \omega \Rightarrow (\mathrm{A}^*).$$

Soit h harmonique adjointe dans un domaine ω, nulle dans un ouvert ω', $\overline{\omega}'$ compact $\subset \omega$. On considère un voisinage compact connexe K de ω', contenu dans ω, que l'on recouvre par un nombre fini de domaines δ_i selon le lemme précédent ($\overline{\delta}_i$ compact $\subset \omega$). Dans chacun de ces δ_i h s'écrit

$$1/f\,(y)\,(k_i \textstyle\int p_y\, d\, \rho_{x_i}^{\delta_i} + \lambda_i).$$

(12) On peut intervertir les astérisques sur (A^*) et $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\,(\omega)$.

Un des δ_i, soit δ_{i_0}, rencontre ω'. Donc, sur $L^1(\rho_{x_{i_0}}^{\delta_{i_0}})$ la forme linéaire affine $\varphi \to k_{i_0}\int \varphi\, d\rho_{x_{i_0}}^{\delta_{i_0}} + \lambda_{i_0}$, nulle sur le sous-espace engendré par les p_y $(y \in \omega' \cap \delta_{i_0})$ (qui est partout dense d'après $(\mathcal{A}_L(\delta_{i_0}))$), est identiquement nulle. δ_{i_0} rencontre un autre δ_i, soit δ_{i_1}, et $\delta_{i_1} \cap \delta_{i_0}$ est un ouvert non vide. On raisonne alors, comme précédemment, sur la forme

$$\varphi \to k_{i_1}\int \varphi\, d\rho_{x_{i_1}}^{\delta_{i_1}} + \lambda_{i_1}$$

qui est nulle sur le sous-espace engendré par les p_y $(y \in \delta_{i_1} \cap \delta_{i_0})$. Celle-ci est nulle dans δ_{i_1}. On recommence, ainsi de suite, sur tous les δ_i. h est donc nulle sur K, K étant arbitraire, h est nulle dans ω.

3. Conséquence de (A*) : approximation de $u \in H(\omega)$ par $h \in H$.

Nous avons besoin de certains préliminaires topologiques. Ω est toujours l'espace à base dénombrable de la théorie. Soit A un sous-ensemble de Ω, $\complement A$ se décompose en composantes connexes, les unes C_i sont relativement compactes, les autres C'_j ne le sont pas.

DÉFINITION [13]. — *On appelle enveloppe de* A *dans* Ω *et on désigne par* $\hat{A}$ *l'ensemble* $\hat{A} = A \cup (\bigcup_i C_i)$.

LEMME 5. — *Si* A *est fermé (resp. compact),* $\hat{A}$ *est fermé (resp. compact).*

LEMME 6. — *Si* A *est ouvert,* $\hat{A}$ *est ouvert et c'est la réunion des sous-ensembles à la fois ouverts et compacts dans* $\complement A$.

LEMME 7. — *Si* $A \subset B$, *alors* $\hat{A} \subset \hat{B}$.

On trouvera la démonstration des lemmes 5 et 6 dans Malgrange ([7]). Le lemme 7 est évident.

(13) Nous avons pris cette définition dans B. Malgrange ([7]). Voir aussi Bourbaki, Top. générale, livre III, 3e éd. 1961, p. 177, exercice 14.

LEMME 8. — *Si* ω *est un ouvert égal à son enveloppe et* K *un compact* $\subset \omega$ *il existe un ouvert* ω', *dans l'adhérence* $\overline{\omega}'$ *est un compact égal à son enveloppe, ayant tous ses points-frontières stables et tel que*

$$K \subset \omega' \subset \overline{\omega}' \subset \omega.$$

Démonstration. — On considère un ouvert O relativement compact tel que $K \subset O \subset \overline{O} \subset \omega$. O est un ouvert relativement compact (lemmes 5, 6 et 7) et $\hat{O} \subset \omega = \omega$ (lemme 7). Posons $O_1 = \hat{O}$ et recouvrons ∂O_1 par un nombre fini d'ouverts δ_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$) non effilés en leurs points-frontière et suffisamment petits pour que $K_1 = \complement \{\bigcup_i \delta_i\} \cap O_1$ soit un compact à points-frontière stables tel que $K \subset \mathring{K}_1 \subset O_1 \subset \omega$. On a alors $\hat{K}_1 \subset O_1 = \hat{O}_1$ (lemme 7).

Montrons que $\complement \hat{K}_1$ est non effilé aux points-frontière de $\hat{K}_1$. Sachant que $\partial\hat{K} \subset \partial K_1$, il suffit de voir que tout $x_0 \in \partial K_1$ est point-frontière d'au moins un δ_i ($i = 1, 2, ..., n$). Soit donc $\mathcal{V}$ un voisinage de x_0, si $\mathcal{V} \cap \delta_i = \emptyset$ pour tout i, $\mathcal{V}$ est contenu dans $\complement \delta_i$ pour tout i et x_0 n'est pas point-frontière. On obtient le résultat cherché en prenant pour ω' l'intérieur de $\hat{K}_1$.

LEMME 9. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω, *égal à son enveloppe* ω, *et* K *un compact quelconque de* ω. *Il existe alors une suite fortement croissante* $(K_n)_{n>1}$ $(K_n \subset \mathring{K}_{n+1})$ *d'ensembles compacts ayant tous leurs points-frontière stables, et égaux à leurs enveloppes, dont la réunion est* Ω. *On peut choisir* K_1 *tel que* $K \subset \mathring{K}_1 \subset K_1 \subset \omega$ *et, les composantes connexes de* $\complement K_n$ *et* $\complement K_{n+1}$ *se rencontrent suivant des ouverts non vides.*

Démonstration. — On construit K_1 (lemme 8), puis on considère une suite fortement croissante arbitraire de compacts $(K'_n)_{n\geqslant 2}$ tel que leur réunion soit Ω et que $\mathring{K}'_2 \supset K_1$. On intercale K''_n compact,

$$K'_n \subset \mathring{K}''_n \subset K''_n \subset K'_{n+1}$$

et on prend l'enveloppe de $\mathring{K}''_n$ dont on modifie l'adhérence selon le lemme 8. On obtient ainsi un compact K_n ayant tous ses points-frontière stables. La suite $(K_n)_{n>1}$ est bien fortement croissante, de réunion Ω. Il suffit seulement de vérifier que $\complement K_n$ et $\complement K_{n+1}$ se rencontrent suivant des ouverts non vides. $\complement K_{n+1}$ est réunion d'une suite $\{D_p\}$ d'ouverts D_p non relativement compacts. S'il existait un D_{p_0} tel que $D_{p_0} \cap \complement K_n = \emptyset$ on aurait $D_{p_0} \subset K_n$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 10. — *Pour que $u \in \mathrm{H}(\omega)$ soit limite, uniformément sur tout compact contenu dans l'ouvert ω, de fonctions $h \in \mathrm{H}$ il est nécessaire et suffisant que $\complement\,\omega$ n'ait pas de composante connexe compacte.*

Démonstration. — La condition est suffisante. Soit K compact $\subset \omega$. On considère la suite fortement croissante $(\mathrm{K}_n)_{n \geqslant 1}$ du lemme 9 et on construit $u_1 \in \mathrm{H}(\mathring{\mathrm{K}}_3)$ telle que $|u - u_1| < \varepsilon/2$ sur K_1. On peut en effet approcher à ε près la trace de u sur $\partial \mathrm{K}_1$ (théorème 8) et donc sur K_1, d'après le principe du minimum. On construit ensuite pour tout n, $u_n \in \mathrm{H}(\mathring{\mathrm{K}}_{n+2})$ telle que $|u_n - u_{n+1}| < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ sur K_{n+1}. Il est immédiat que la suite ainsi construite, converge uniformément sur tout compact de Ω, vers une fonction h, qui est donc harmonique dans Ω. h vérifie $|h - u| \leqslant \varepsilon$ sur K_1 donc sur K. K et ε étant arbitraire, on a l'approximation cherchée.

La condition est nécessaire. Supposons que $\complement\,\omega$ ait une composante connexe compacte C. Si $x_0 \in \mathrm{C} \cap \partial\omega$ est polaire, $p_{x_0}(x)$ est harmonique dans ω et vérifie $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in \omega} p_{x_0}(x) = +\infty$. L'approximation par une fonction $h \in \mathrm{H}$ contredit alors le principe du minimum.

Si tout point x de $\mathrm{C} \cap \partial\omega$ est non polaire, alors tout point-frontière de l'ouvert $\complement\,\mathrm{C}$ est régulier. Considérons sur $\partial\mathrm{C}$ une fonction finie continue φ telle que $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(x) > 0$ pour $x \neq x_0$. La restriction de $\mathrm{H}_\varphi^{\complement \mathrm{C}}$ est harmonique > 0 dans ω et tend vers 0 en x_0. L'approximation est encore impossible d'après le principe du minimum.

Extension du théorème précédent.

Le théorème 10 est encore valable s'il existe seulement un potentiel > 0 sur tout sous-ouvert relativement compact $\Omega' \subset \Omega$ [14].

La condition est suffisante. On raisonne encore en considérant une suite fortement croissante de compacts ayant tous leurs points-frontière stables, de réunion Ω.

La condition est nécessaire. On considère toujours une composante connexe compacte de C de $\complement\,\omega$. Si $x_0 \in \partial\mathrm{C}$ est polaire [15], pour tout sous-

[14] A* signifie alors que les fonctions adjointes associées à chaque cône $\mathrm{S}^+(\Omega')$ (Ω' ouvert relativement compact $\subset \Omega$) sont de type analytique.

[15] x_0 polaire dans Ω' signifie qu'il existe $v \in \mathrm{S}^+(\Omega')$ égale à $+\infty$ en x_0.

couvert Ω' relativement compact de Ω, on considère un ouvert Ω'_0 relativement compact et égal à son enveloppe, $\Omega'_0 \supset C$. Le potentiel $p_x^{\Omega'_0}$ dans Ω'_0, à support ponctuel $\{x_0\}$ est harmonique dans $\complement C \cap \Omega'_0$ et vérifie $\lim_{x \to x_0,\, x \subset \complement C \cap \Omega'_0} p_{x_0}^{\Omega'_0}(x) = +\infty$. C peut s'obtenir comme intersection d'une suite $(\omega_n)_{n \geqslant 0}$ d'ouverts relativement compacts, $\Omega'_0 \supset \bar{\omega}_n \supset \omega_n \supset \bar{\omega}_{n+1}$. Fixons n_0, et posons $K_n = \bar{\omega}_{n_0} \cap \complement\, \omega_n$ $(n > n_0)$. Nous pouvons appliquer la condition suffisante qui précède à l'espace $\Omega_0 = \complement\, C$, $\Omega'_0 \cap \complement\, C$ est un ouvert $\subset \Omega_0$, égal à son enveloppe dans Ω_0. On peut donc trouver une fonction $u \in H(\Omega_0)$ approchant $p_{x_0}^{\Omega'_0}$ à ε près sur K_n. On fixe n de telle sorte que l'on obtienne une fonction u vérifiant $\operatorname{Sup}_{x \in \partial\omega_n} u(x) > \operatorname{Sup}_{x \in \partial\omega_0} u(x)$. u est en particulier harmonique dans ω.

S'il existait une fonction harmonique dans Ω approchant u à ε près sur K_n, le principe du minimum dans ω_{n_0} ne serait pas satisfait.

Si x_0 est non polaire pour tout sous-ouvert relativement compact Ω'. On considère φ finie continue > 0 sur ∂C telle que $\varphi(x_0) = 0$ et la solution $(H_\varphi^{\complement C})_{\Omega'}$ relative à l'espace Ω', où Ω' est un ouvert relativement compact et égal à son enveloppe. $(H_\varphi^{\complement C})_{\Omega'}$ est harmonique > 0 dans $\Omega' \cap \complement\, C$ et tend vers 0 quand $x \in \Omega' \cap \complement\, C$ tend vers x_0. Comme plus haut, on en déduit une fonction u harmonique dans $\complement\, C$ vérifiant $\operatorname{Inf}_{x \in \partial\omega_n} u(x) < \operatorname{Inf}_{x \in \partial\omega_{n_0}} u(x)$ pour un n fixé convenablement choisi et il n'existe pas de fonction harmonique dans Ω, approchant u à ε près sur K_n.

4. Une application de la théorie précédente.

Soit L un opérateur différentiel du second ordre, de type elliptique, défini dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$

$$L\,u(x) = \sum_{1 \leqslant i,\, k \leqslant n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)\, u(x) \quad [16]$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a_{ik} = a_{ki}$ et où la forme quadratique $\sum_{1 \leqslant i,\, k \leqslant n} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$ est définie positive pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

[16] Les a_{ij} sont de classe $c^{2,\lambda}$, les b_i de classe $c^{1,\lambda}$ et c de classe $c^{0,\lambda}$. Pour $k \geqslant 0$, $c^{k,\lambda}$ signifie k fois continument différentiable avec des dérivés partielles d'ordre k localement Lipschitziennes ([5]).

Une solution $L\,u = 0$ (resp. $L^*\,u = 0$, L^* étant l'opérateur adjoint) dans un ouvert $\omega \subset R^n$, est une fonction de classe C^2 dans ω satisfaisant à l'équation en tout point de ω ; l'ensemble de ces solutions vérifie les axiomes de la théorie axiomatique (17). On dit que u est L-harmonique (resp. L-harmonique adjointe). D'après Aronszajn ([1]) (A) (resp. (A*)) est vérifié. Si Ω_0 est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et s'il existe un L-potentiel > 0 dans Ω_0 ou seulement un L-potentiel > 0 (18) dans tout ouvert $\Omega' \subset \Omega'$ compact $\subset \Omega_0$. On a le résultat suivant (voir B. Malgrange, [6] et [7]) :

Soit ω un ouvert $\subset \Omega_0$. Pour toute fonction u, solution de $L\,u = 0$ dans ω soit limite uniformément sur tout compact $\subset \omega$ d'une suite de fonctions u_i, définies dans Ω_0 et y vérifiant $L\,u_i = 0$, il est nécessaire et suffisant que $\complement_{\Omega_0}\omega$ n'ait pas de composante connexe compacte dans Ω_0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, n° 6, 723-725 (1956).

[2] M. BRELOT, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 73, 55 (1945).

[3] M. BRELOT, Lectures on Potentiel Theory. Tata Institute, Bombay (1960).

[4] J. DENY, Systèmes totaux de fonctions harmoniques. *Ann. Inst. Fourier*, t. I, 103 (1949).

[5] R. M. HERVE, Thèse, *Ann. Inst. Fourier*, t. 12, 415-571 (1962).

[6] B. MALGRANGE, Colloque Intern. du C.N.R.S. (éq. aux dér. partielles), Nancy (1956).

[7] B. MALGRANGE, Thèse, *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 271-355 (1956).

Manuscrit reçu le 13 février 1967.

Arnaud DE LA PRADELLE
13, rue Brézin
Paris-14e

(17) S'il existe un L-potentiel > 0 dans $\mathbf{R}^n$, on a la proportionnalité des potentiels à support ponctuel et des potentiels adjoints à support ponctuel ainsi que (D) et (D*) ([5]).

(18) Il existe un L-potentiel > 0 dans Ω_0, en particulier si $c \leqslant 0$ et < 0 en un point de Ω_0 ; il existe un L-potentiel dans > 0 dans tout ouvert $\Omega' \subset \bar{\Omega}'$ compact $\subset \Omega_0$ si $c \equiv 0$ ([5]).