ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL KRÉE

# Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ avec poids

*Annales de l'institut Fourier*, tome 16, nº 2 (1966), p. 91-121
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_91_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**16,** 2 (1966), 91-121.

# SUR LES MULTIPLICATEURS DANS $\mathcal{F}L^p$ AVEC POIDS [1]

**par Paul KRÉE**

TABLE DES MATIÈRES

1. Généralités ($G = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$) ..... 95
2. Le théorème principal ($G = \mathbf{R}^n$) ..... 99
3. Applications ($G = \mathbf{R}^n$) ..... 106
4. Transposition de ces résultats à $G = \mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$ ..... 113
5. Convexité et applications de l'interpolation ..... 115
Bibliographie ..... 120

[1] Ce travail a bénéficié au départ d'un encouragement de W. Donoghue.

## Introduction.

Considérons un groupe G du type $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$ et trois espaces de Banach $B_i$ $(i = 1, 2, 3)$ avec une application bilinéaire continue

$$(1) \qquad B_1 \times B_2 \to B_3.$$

Soient $\varpi_j$ $(j = 2, 3)$ des poids sur G, c'est-à-dire des fonctions mesurables positives $\varpi_j : G \to \mathbf{R}^+$.

Notons $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$ l'espace des classes de fonctions mesurables $f : G \to B_j$ telles que la fonction numérique $\varpi_j |f|$ soit de puissance $p^e$ sommable (pour la mesure de Haar $dx$ sur G). On suppose $p_j \in [1, +\infty]$.

Moyennant des hypothèses raisonnables sur les $\varpi_j$ (qui seront précisées au § 1) :

*a*) On peut définir l'espace $\mathcal{C}$ des distributions tempérées K sur G à valeurs, dans $B_1$ qui définissent (par la convolution associée à (1)) une application continue :

$$(2) \qquad L^{p_2}_{\varpi_2}(G, B_2) \to L^{p_3}_{\varpi_3}(G, B_3).$$

*b*) Les classes de fonctions des espaces $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$ représentent des distributions vectorielles tempérées et alors on peut considérer les espaces $\mathcal{F}L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$, naturellement normés, formés par les transformées de Fourier $\mathcal{F}f = \hat{f}$ des éléments $f \in L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$.

L'espace $\mathcal{M} = \mathcal{F}\mathcal{C}$, des transformées de Fourier des éléments de $\mathcal{C}$, muni de la norme naturelle est appelé l'espace des multiplicateurs à valeurs dans $B_1$ du type

$$(3) \qquad L^{p_2}_{\varpi_2}(G, B_2) \to \mathcal{F}L^{p_3}_{\varpi_3}(G, B_3).$$

Nous cherchons à trouver des sous-espaces, aussi vastes que possible de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{M}$.

On considèrera surtout le cas où $p_2 = p_{3'}$ et où les poids $\varpi_j$ $(j = 2,3)$ sont du type (P) ou (P′) :

$$(\mathrm{P}) : \qquad \varpi(x) = (\beta_0 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

avec

$$\beta_0 = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \qquad -\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p},$$

$$(\mathrm{P}') : \qquad \varpi(x) = (\beta_0 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

avec

$$\beta_0 = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \qquad -\frac{n}{p} < \alpha < \frac{n}{p'}.$$

Le cas $\beta_0 = 0$ entraîne des difficultés à cause de l'annulation du poids $\varpi$ à l'origine de G : il n'est même pas évident que les fonctions indéfiniment différentiables à support compact $G \to \mathbf{C}$ (en se limitant au cas scalaire : $B_1 = B_2 = B_3 = \mathbf{C}$) définissent des opérateurs de convolution dans $L^p_\varpi(G, \mathbf{C})$. Mais ceci l'est si $\beta_0 = 1$ (voir par exemple le théorème 2.2.5 du chapitre II de [19]). Dans ce dernier cas, ce qui est moins évident c'est de trouver des multiplicateurs discontinus de $\mathcal{F}L^p_\varpi(G, \mathbf{C})$.

Nous répondrons à ces questions (et à d'autres !) en utilisant le théorème 2. Ce théorème permet aussi d'établir très simplement des extensions du théorème de décomposition de Hirschman (type Littlewood-Paley), de montrer que les intégrales singulières opèrent (par convolution) dans $L^p_\varpi$ si $\varpi$ est un poids (P′) et de démontrer que certaines applications définies dans [2] sont continues.

Comme application des relations de convexité nous trouvons en appliquant les méthodes de Krabbe (voir [23]) des classes de multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ faisant intervenir des espaces de Wiener.

On signale finalement, comment en appliquant le théorème d'interpolation de Foïas-Lions (voir [8]) on trouve des résultats concernant de nouveaux poids du type de ceux qui sont considérés dans [1] et [10].

## 1. GÉNÉRALITÉS.

Ces généralités sont relatives à un groupe G du type $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$ : le point courant de G est noté

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Le groupe dual est noté G′ : son point courant

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

La dualité est donnée par les caractères

$$(4) \qquad e^{2\pi i . x} \qquad \text{avec} \qquad x.\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n.$$

On définit $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et de même $|\xi|$.

Les mesures invariantes sur G et G′ sont notées $dx$ et $d\xi$.

*Nous allons appliquer les résultats généraux du* § 1 *de* [25] *où l'on considérait*

— 3 espaces de Banach (complexes par exemple) $B_i$ avec $i = 1, 2, 3$ et une application bilinéaire continue

$$(5) \qquad \begin{array}{l} B_1 \times B_2 \to B_3 \\ (b_1, b_2) \quad \to b_3 = b_1 \times b_2 \end{array}$$

(6) qui est telle que si $b_1 \times b_2 = 0$, $\forall b_2 \in B_2$ ; alors $b_1 = 0$.

— 2 espaces de distributions $D_j \subseteq \mathcal{S}'(G) \underset{\pi}{\widehat{\otimes}} B_j$ $(j = 2, 3)$ vérifiant certaines conditions notées (H) (pour les distributions vectorielles, voir [36]).

— l'espace $\mathcal{C}$ (naturellement normé) des distributions

$$K \in \mathcal{S}'(G) \underset{\pi}{\widehat{\otimes}} B_1$$

qui envoient par convolution $D_2$ dans $D_3$ ($\mathcal{C}$ est dit l'espace des convoluteurs à valeurs dans $B_1$ du type $D_2 \to D_3$ (²).

— l'espace $\mathfrak{M}$ des transformées de Fourier des éléments de $\mathcal{C}$. ($\mathfrak{M}$ est dit l'espace des multiplicateurs à valeurs dans $B_1$ du type $\mathcal{F}D_2 \to \mathcal{F}D_3$.)

(²) E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, si l'on écrit dès lors $E \xrightarrow{T} F$, cela signifie comme dans [25], que T est une application linéaire continue de E à F.

Mais ici les espaces $D_j$ ($j = 2,3$) que nous considérons sont des espaces $L^p$ avec poids.

*Espaces* $L^p$ *avec poids.*

On supposera toujours

$$1 < p, q \cdots < \infty \tag{7}$$

$p'$ désigne l'exposant conjugué de $p$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

Nous considérons des poids $\varpi$ : $G \to \mathbf{R}^+$ satisfaisant aux conditions suivantes :

Définition (conditions (K)). — *Une fonction* $\varpi$ : $G \to \mathbf{R}^+$ *vérifie les conditions* (K) *si*

(K) $\begin{cases} — \ \varpi \text{ est une fonction mesurable sur } G, \text{ positive presque} \\ \text{partout pour la mesure } dx \ (dx \text{ p.p.}). \\ — \text{ Pour tout } p \in ]1, +\infty[, \ \varpi^p \text{ et } \varpi^{-p'} \text{ sont localement} \\ \text{sommables}; \ \varpi \text{ et } \varpi^{-1} \text{ sont à croissance lente à l'infini.} \end{cases}$

Il en est ainsi par exemple :

— pour les « poids tempérés » du chapitre II de [19],

— pour les poids du type (P) ou (P′).

On définit alors $L^p_\varpi(G, B_j)$ comme l'espace des classes de fonctions mesurables $f$ : $G \to B_j$ (au sens de Lusin) telles que $\varpi|f|$ soit de puissance $p^e$ sommable :

$$|f|_{p,\varpi} = \int_{x \in G} |f(x)\ \varpi(x)|^p\, dx)^{1/p}. \tag{8}$$

Nous allons montrer que l'on peut appliquer les résultats du § 1 de [25].

Proposition 1. — *On se donne* 3 *espaces de Banach*

$$B_i (i = 1, 2, 3)$$

*avec une application bilinéaire* (5) *vérifiant* (6). $B_j$ *sont supposés reflexifs* ($j = 2,3$). *Soient* $\varpi_j$ *des poids sur* $G = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ *ou* $\mathbf{Z}^n$ *vérifiant les hypothèses* (K) *avec* $j = 2, 3$.

*Alors quels que soient* $p_j \in ]1, +\infty[$ *les espaces*

$$D_j = L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j) \tag{9}$$

*vérifient les conditions* (H) *de la définition* 1 *du travail* [25] *c'est-à-dire que*

(10) $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$ *est réflexif*

(11) $\mathcal{S}(G) \underset{\pi}{\otimes} B_j \hookrightarrow L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j) \hookrightarrow \mathcal{S}'(G) \underset{\pi}{\widehat{\otimes}} B_j$

(12) *l'injection de* $\mathcal{D}(G) \otimes B_j$ *dans* $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$ *est à image dense*

(13) $\mathcal{D}(G) \otimes B'_3$ *est dense dans* $(L^{p_3}_{\varpi_3}(G, B_3))'$.

*Preuve :*

— On sait que si $B_j$ est réflexif et si $p_j \in ]1, +\infty[$ le dual de $L^{p_j}(G, B_j)$ est $L^{p'_j}(G, B'_j)$, la dualité étant définie de façon naturelle, on a donc (10).

— Comme $\mathcal{D}^0 \otimes B_j$ est dense dans $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$, pour prouver (12) il suffit de faire une régularisation :

Pour toute $f \in \mathcal{D}^0 \otimes B_j$, posons $\tilde{f} = f * \varphi$ où $\varphi$ décrit la suite habituelle de fonctions de $\mathcal{D}$ qui tend vers $\delta$ :

$$\tilde{f}(x) - f(x) = \int_{y \in G} (f(x - y) - f(x))\varphi(y)\, dy$$

d'où

$$|\tilde{f} - f|_{p,\varpi} = \left(\int_{x \in G} \varpi^p(x)\, dx \left|\int_{y \in G} (f(x - y) - f(x))\varphi(y)\, dy\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski donne :

$$\leqslant \int_{y \in G} |\varphi(y)|\, dy \left(\int_{x \in G} \varpi^p(x) |f(x - y) - f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ceci peut être rendu arbitrairement petit puisque $f$ est uniformément continue sur les compacts Supp $\varphi$ + Supp $f$ et que $\varpi^p$ est localement sommable : donc on a (12).

On a la première inclusion (topologique) de (11) car on a une application bilinéaire continue :

$$(14) \qquad \begin{array}{ccc} (\mathcal{S}(G), B_j) & \longrightarrow & L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j) \\ (\varphi, \vec{b}_j) & \longmapsto & \vec{b}_j \varphi \end{array}$$

car si $(1 + |x|^2)^N |\varphi(x)| \to 0$ et $\vec{b}_j \to 0$ alors

$$|\vec{b}_j \varphi|^{p_j}_{p_j,\varpi} = |b_j|^{p_j} \int |\varphi(x) \varpi_j(x)|^p\, dx \to 0$$

(car $\varpi$ est localement sommable et à croissance lente).

On déduit alors de (14) la continuité de la première injection de (11) en utilisant la propriété universelle du produit tensoriel. Pour montrer la continuité de la deuxième injection de (11) il suffit de montrer que toute $f \in L^{p_j}_{\varpi_j}$ définit de la façon suivante une application continue $T(f)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(G) &\longrightarrow B_j \\ \varphi &\longmapsto \int_{x \in G} f(x)\varphi(x)\, dx \end{aligned}$$

et que $f \to T(f)$ est continue de

$$L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j) \quad \text{à} \quad \mathcal{L}_b(\mathcal{S}(G), B_j).$$

Cela résulte de l'inégalité de Holder :

$$\left|\int \vec{f}\varphi\right| \leqslant \left(\int |\vec{f}\varpi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \left|\frac{\varphi}{\varpi}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

(la dernière intégrale $\to 0$ si $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{S}(G)$).

Nous supposerons dès lors que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites : et tous les résultats du § 1 de [25] sont valables.

En particulier, en ce qui concerne la transposition, on déduit de (11) que

$$\mathcal{S}(G) \underset{\pi}{\otimes} B'_j \to (L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j))'. \tag{15}$$

Et vue de la dualité suivante entre $\mathcal{S}(G) \underset{\pi}{\otimes} B_j$ et son dual

$$\left\langle \sum_k b^k_j \varphi_k, \quad \sum_l b'^l_j \psi_l \right\rangle = \sum_{k,l} \langle b^k_j, b'^k_j \rangle \int_{x \in G} \varphi_k(x)\psi_l(x)\, dx$$

comparée à la dualité suivante entre $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$ et son dual :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)\varpi^p(x)\, dx$$

on voit que l'injection (15) identifie le dual de $L^{p_j}_{\varpi_j}(G, B_j)$ à $L^{p'_j}_{\varpi_j^{-1}}(G, B'_j)$. Comme les conditions (K) sont identiques pour $\varpi^p$ et $\varpi^{-p'}$, on a (13).

## 2. LE THÉORÈME PRINCIPAL ($G = R^n$).

Le théorème 2 donnera (§ 3) des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p_\varpi$ pour les poids (P′). Il est démontré en considérant :

— d'une part une remarque simple de Hardy-Littlewood (§ 2A);

— d'autre part un théorème de Carleman sur les noyaux intégraux positifs (§ 2B).

En ce qui concerne les noyaux intégraux, nous utilisons la terminologie suivante :

Soit $\Omega$ un espace localement compact muni d'une mesure de Radon positive $\mu$ et de deux poids $\varpi_j$ ($j = 2, 3$). On se donne aussi les espaces de Banach $B_i$ ($i = 1, 2, 3$) avec (1). Un noyau intégral $K : \Omega \to B_1$ relativement à $\mu$ est par définition une fonction fortement mesurable

$$(16) \qquad \begin{array}{l} \Omega \times \Omega \longrightarrow B_1 \\ (\omega, \omega') \longmapsto K(\omega, \omega') \end{array}$$

telle que pour toute $f \in \mathcal{D}^0 \otimes B_1$ l'application suivante notée K est définie :

$$(17) \qquad f(.) \to g(.) = \int K(., \omega') f(\omega') \, d\mu(\omega')$$

$g$ étant fortement mesurable : $\Omega \to B_3$.
Et l'on dit que K est du type

$$(18) \qquad L^{p_2}_{\varpi_2}(G, B_2) \to L^{p_3}_{\varpi_3}(G, B_3)$$

si l'application K est continue pour les topologies de ces espaces.

$\Psi$ étant une fonction scalaire mesurable sur $\Omega$ on notera par ($\Psi$.) K le noyau obtenu en composant K avec la multiplication pour $\Psi$.

### 2.A. Une remarque de Hardy-Littlewood (voir [14]).

Elle peut être résumée en la

Proposition 2. — K *est un noyau intégral :* $G \to B_1$ (*relativement à la mesure* $dx$) *tel que*

$$(19) \qquad K \quad L^{p_2}(G, B^2) \to L^{p_3}(G, B_3).$$

*On se donne des poids* $\varpi_j$ *sur* G *vérifiant* (K) *et l'on se demande si*

$$(20 \qquad K: \quad L^{p_2}_{\varpi_2}(G, B_2) \to L^{p_3}_{\varpi_3}(G, B_3).$$

*Comme* $\varpi_2(\mathcal{D}^0 \otimes B_2)$ *est dense dans* $L^{p_2}(G, B_2)$ *cela revient à voir si*

$$(21) \qquad (\varpi_3 .)(K)\left(\frac{1}{\varpi_2}\cdot\right): L^{p_2}(G, B_2) \to L^{p_3}(G, B_3).$$

*Il suffit donc de voir s'il en est ainsi pour*

$$(22) \qquad L = (\varpi_3 .)(K)\left(\frac{1}{\varpi_2}\cdot\right) - K$$

soit

$$L(x, y) = \frac{\varpi_3(x) - \varpi_2(y)}{\varpi_2(y)} \cdot K(x, y).$$

**2.B. Un théorème de Carleman sur les noyaux intégraux positifs.**

THÉORÈME 1 (Carleman, voir [7]). — *On se donne l'espace localement compact* $\Omega$ *avec la mesure* $\mu \geqslant 0$; $B_i = C$ *ou* R; *le noyau intégral* K *sur* G *correspondant à une fonction*

$$K(x, y) \geqslant 0 \quad \mu\text{-}p\text{-}p.$$

*S'il existe une fonction mesurable* $q$ *positive et non nulle* $\mu$-$p$-$p$ *sur* $\Omega$ *et une constante* M *telle que*

$$(23) \qquad \int_{x\in\Omega} K(x, y)q(x)^{-\frac{1}{p'}} d\mu(x) \leqslant Mq(y)^{-\frac{1}{p'}}$$

$$(24) \qquad \int_{y\in\Omega} K(x, y)q(y)^{-\frac{1}{p}} d\mu(y) \leqslant Mq(x)^{-\frac{1}{p}}$$

*alors* (17) *définit un opérateur linéaire continu de* $L^p(\Omega, \mathbf{C})$.

*Preuve.* — $f$ et $g$ étant deux fonctions $\geqslant 0$ à support compact dans $\Omega$, on cherche à majorer en fonction de $|f|_p$ et $|g|_{p'}$ la quantité

$$\langle Kf, g\rangle = \iint_{(x,y)\in\Omega^2} K(x, y)f(y)g(x)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$
$$= \iint K(x, y)q(y)^{\frac{1}{p'}}q(x)^{\frac{1}{p}}\underline{f(y)q^{-\frac{1}{p}}(x)}\ \underline{g(x)q^{-\frac{1}{p'}}(y)}\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

On majore alors le produit des deux quantités soulignées en utilisant l'inégalité (61 de [13])

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

D'où en utilisant les hypothèses (23) et (24)

$$\langle Kf, g\rangle \leqslant \frac{M}{p} |f|_p^p + \frac{M}{p'} |g|_{p'}^{p'}. \tag{25}$$

Ceci prouve que K est borné dans $L^p(G, \mathbf{C})$.

Ce théorème implique par exemple les inégalités 275, 318, 319 de [13] et le lemme 1 de [43].

Voir des extensions et des réciproques de ce théorème dans [9]. En fait nous utiliserons le théorème de Carleman sous la forme suivante, en tenant compte de la remarque formulée par la proposition 3.

COROLLAIRE 1 (variante uniforme de Carleman). — *Si* $(K_j)_{i\in I}$ *est une famille de noyaux positifs sur* $\Omega$ *vérifiant les hypothèses du théorème* 1 *avec des fonctions* $q_i$ *quelconques mais une même constante* M, *alors pour tout* $p \in ]1, +\infty[$, *les* $K_i$ *décrivent un borné de* $\mathcal{L}(L^p(G, \mathbf{C}))$. (*Cela résulte de* (25).)

PROPOSITION 3. — *Si l'on a trois espaces de Banach* $B_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *l'espace localement compact* $\Omega$ *avec* $\mu \geqslant 0$ *et un noyau vectoriel* $K : \Omega \to B_1$ *tel que*

$$|K(x, y)| \leqslant \Phi(x, y) \tag{26}$$

$\Phi$ *étant un noyau positif tel que*

$$\Phi : L^p(\Omega, C) \to L^p(\Omega, C), \tag{27}$$

*alors*

$$K : L^p(\Omega, B_2) \to L^p(\Omega, B_3). \tag{28}$$

En effet : pour toute $f \in \mathcal{D}^0(G) \otimes B_2$ on a :

$$\begin{aligned} |(Kf)(x)|_{B_3} &= \left|\int K(x, y) \times f(y)\, d\mu(y)\right|_{B_3} \\ &\leqslant \int |K(x, y) \times f(y)|_{B_3}\, d\mu(y) \\ &\leqslant \int \Phi(x, y)|f(y)|_{B_2}\, d\mu(y) = (\Phi(|f|))(x). \end{aligned}$$

D'où

$$|Kf|_p \leqslant |\Phi(|f|)|_p \leqslant C|f|_p.$$

Nous pouvons alors démontrer :

### 2.C. Le théorème principal.

Ce théorème s'applique aux convoluteurs de $L^p_\varpi(G, B)$ dont on suppose connue la continuité s'il n'y a pas de poids. Il affirme que si ces convoluteurs vérifient une certaine condition de croissance (à l'origine de G et à l'infini), alors ils opèrent aussi dans les espaces $L^p_\varpi$ si $\varpi$ est un poids (P′). On donne tout de suite l'énoncé complet avec une variante uniforme et une précision supplémentaire (utilisée plus tard) dans le cas particulier où $n = 1$.

THÉORÈME 2 (ramène l'étude pour les poids (P′) au cas non pondéré). — *On considère sur* $G = \mathbf{R}^n$ *les poids* $\varpi$ *du type* (P′). *Soit* (5) *vérifiant* (6); *et* K *un noyau intégral* $G \to B_1$ *définissant une application continue*

$$(29) \qquad L^p(G, B_2) \to L^p(G, B_3) \qquad \text{avec} \qquad 1 < p < \infty.$$

*On suppose qu'il existe une constante* $C_0$ *telle que*

$$(30) \qquad \forall x \text{ et } y \text{ dans } G, \qquad |K(x, y)| \leqslant \frac{C_0}{|x - y|^n}.$$

1° *Alors pour tout* $p \in ]1, +\infty[$ *et tout* $\varpi$ *vérifiant* (P′)

$$(31) \qquad K : L^p_\varpi(G, B_2) \to L^p_\varpi(G, B_3).$$

(32) *Et la norme de* (31) *est majorée en fonction de* $\varpi$, $C_0$, *de* $p$ *et de la norme de* (29); *mais indépendamment de* K.

2° *Si dans le cas* $n = 1$, *on considère au lieu des poids* (P′) *les poids*

$$(33) \qquad \varpi(x) = (\beta_0 + \beta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\beta_0 = 0 \text{ ou } 1, \qquad -\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$$

(34) $\beta$ *décrivant* $\mathbf{R}^+$, *alors la norme de* (31) *est majorée en fonction de* $\beta_0$, $\alpha$, $C_0$, $p$ *de la norme de* (29); *mais indépendamment de* K *et de* $\beta$.

*Preuve.* — Avec la remarque de Hardy-Littlewood et celle de la proposition 3, on est amené à voir si le noyau suivant sur $G^2$ opère dans $L^p$.

$$(35)\quad L(x, y) = \frac{(\beta_0 + \beta + |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}} - (\beta_0 + \beta + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(\beta_0 + |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{|y-x|^n}.$$

Avec le théorème de Carleman et en prenant

$$(36)\qquad q(x) = (\beta_0 + \beta + |x|^2)^{\frac{\lambda}{2}}$$

$\lambda$ étant indéterminé pour l'instant, on est amené à voir si, avec une constante C convenable, on a

$$(37)\quad \forall x,\quad \int_{y\in G} \frac{\left|(\beta_0 + \beta + |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}} - (\beta_0 + \beta + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(\beta_0 + \beta + |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\lambda}{2p}}|y - x|^n} dy \leqslant \frac{C}{(\beta_0 + \beta + |x|^2)^{\frac{\lambda}{2p}}}$$

$$(38)\quad \forall y,\quad \int_{x\in G} \frac{\left|(\beta_0 + \beta + |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}} - (\beta_0 + \beta + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(\beta_0 + \beta + |x|^2)^{\frac{\lambda}{2p'}}(\beta_0 + \beta + |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|y - x|^n} dx \leqslant \frac{C}{(\beta_0 + \beta + |y|^2)^{\frac{\lambda}{2p'}}}$$

Voyons d'abord le cas $n = 1$.

Si $\beta_0 = \beta = 1$, le calcul est facile : il suffit d'écrire que des intégrales définies sur R convergent. (C'est d'ailleurs le cas traité dans [14]).

Sinon, en posant

$$y = xu; \qquad \text{et} \qquad x = \sqrt{\beta_0 + \beta}\, x' \quad \text{dans (37)}$$

et

$$x = yv; \qquad \text{et} \qquad y = \sqrt{\beta_0 + \beta}\, y' \quad \text{dans (38)},$$

on est amené à démontrer les inégalités

$$(39)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|(1+x^2u^2)^{\frac{\alpha}{2}} - (1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(1+x^2u^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2p}}|u-1|}\,du \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{2p}}}$$

$$(40)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|(1+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} - (1+y^2v^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(1+y^2v^2)^{\frac{1}{2p'}}(1+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}|v-1|}\,dv \leqslant \frac{C}{(1+y^2)^{\frac{1}{2p'}}}.$$

Pour montrer par exemple (39), on va montrer que

$$\int_{|u-1|\leqslant\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \int_{|u-1|\geqslant\frac{1}{3}} \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{2p}}}.$$

La première majoration s'obtient en utilisant le développement limité suivant $\left(\gamma \text{ réel}, |\Delta u| \leqslant \frac{1}{3}\right)$

$$(1+x^2(1+\Delta u)^2) = (1+x^2)^\gamma\left(1 + 2\gamma\,\Delta u\,\frac{x^2}{1+x^2} + \sigma(\Delta u)\right).$$

La deuxième majoration s'obtient en distinguant les cas : *a*) $x$ décrit un borné de $\mathbf{R}$ : c'est réalisé si C est suffisamment grand ; *b*) $x$ tend vers l'infini : on fait une majoration grossière :

$$\int_{|u-1|\geqslant\frac{1}{3}} \leqslant C\int_0^\infty \frac{x^\alpha u^\alpha + x^\alpha}{(xu)^{\alpha+\frac{1}{p}}|u-1|}\,du$$
$$\leqslant \frac{C}{x^{\frac{1}{p}}}\int_0^\infty \frac{u^\alpha+1}{u^{\alpha+\frac{1}{p}}|u-1|}\,du \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{2p}}}$$

à condition que $\alpha > -\frac{1}{p}$.

Dans le cas $G = \mathbf{R}^n$ avec $n > 1$, vérifions par exemple (37) en utilisant les coordonnées polaires

$$x = R\xi, \qquad y = r\eta = t\,R\eta$$

(R et $r$ sont réels positifs, $\xi$ et $\eta$ des points de la sphère unité

$\sum_n$ de $R^n$). On se demande si pour tout R

$$(41)\quad \int_{\substack{t\in R^+\\ \eta\in\sum_n}} \frac{\left|(\beta_0+t^2R^2)^{\frac{\alpha}{2}}-(\beta_0+R^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(\beta_0+t^2R^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\lambda}{2p}}|t\eta-\xi|^n}\, t^{n-1}\,dt\,d\eta \leqslant \frac{C}{(\beta_0+R^2)^{\frac{\lambda}{2p}}}.$$

Mais la théorie du potentiel dans $\mathbf{R}^n$ donne ([3])

$$(42)\quad (1-u^2)\int_{\eta\in\sum_n}\frac{d\eta}{|\eta-u\xi|^n}=\begin{cases} C & \text{si } 0<u<1,\\ -\dfrac{C}{u^{n-2}} & \text{si } u>1.\end{cases}$$

(La formule relative au cas $0<u<1$ s'obtient en cherchant avec la formule de Poisson le potentiel (constant) à l'intérieur d'une sphère dont la surface est uniformément chargée : la deuxième formule en résulte par un changement de variable.)

Dans le cas où $\beta_0=0$ on est amené à écrire qu'une intégrale définie sur $\mathbf{R}^+$ converge. En rapprochant les conditions obtenues, de ce que l'on obtient en faisant pour (38) ce que l'on a fait pour (37), il vient :

$$p\max(-n,-n+\alpha)<-\lambda<p\min(0,\alpha)$$
$$p'\max(-n,-n-\alpha)<-\lambda<p'\min(0,-\alpha).$$

Or un nombre $\lambda$ vérifiant ces inégalités, n'existe que si l'on a $-\dfrac{n}{p'}<\alpha<\dfrac{n}{p}$. Dans le cas où $\beta_0=1$, la relation (41) se transforme en la suivante avec (42) :

$$\int_1^1 \frac{\left|(1+t^2R^2)^{\frac{\alpha}{2}}-(1+R^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(1+t^2R^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\lambda}{2p}}(1-t^2)}\, t^{n-1}\,dt$$
$$+\int_0^\infty \frac{\left|(1+t^2R^2)^{\frac{\alpha}{2}}-(1+R^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right|}{(1+t^2R^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\lambda}{2p}}}\,\frac{t\,dt}{t^2-1}\leqslant\frac{C}{(1+R^2)^{\frac{\lambda}{2p}}}.$$

On procède alors avec cette relation comme on avait fait avec (39).

Voyons à présent quelques applications du théorème 2.

## 3. APPLICATIONS DU THÉORÈME 2 ($G = \mathbf{R}^n$).

### 3.A. Proposition 4 (fonction caractéristique d'un demi-espace).

*Soit* B *un espace de Banach isomorphe à un espace de Lebesgue* $L^q$ *quelconque* ($q \in ]1, +\infty[$). *Alors* $\forall C_0 \in \mathbf{R}$, $\forall i \in \{1 \ldots n\}$, *la fonction caractéristique* $\Phi$ *du demi-espace*

$$\{\xi \in G' = \mathbf{R}^n, \quad \xi^i \geqslant C_0\}$$

*est un multiplicateur scalaire dans* $\mathcal{F}L^p_\varpi(G, B)$ *pour* $G = \mathbf{R}^n$ *et les poids* $\varpi$ *vérifiant* (P).

*Preuve.* — On peut supposer $B = \mathbf{C}$ : car alors on passera au cas général par la méthode donnée par J. Schwartz dans [34] s'il n'y a pas de poids.

On peut aussi supposer $C_0 = 0$ et $i = 1$.

Écrivons alors

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1 \ldots \xi_n) = (\xi_1 \bar{\xi}) \\ &= (x_1 \ldots x_n) = (x_1 \bar{x}). \end{aligned}$$

Pour tout entier $l \in \{1, n\}$ on va noter $G^l(x)$ le groupe $R^l$ de point courant $x$.

On a

$$F(x) = \bar{\mathcal{F}}\Phi = k(x_1) \otimes \delta_0(\bar{x})$$

avec

$$k(x_1) = \text{v.p.} \frac{1}{x_1}$$

$\delta_0(\bar{x})$ = distribution de Dirac à l'origine dans $G^{n-1}(\bar{x})$.

A tout $\bar{x}$ de $G^{n-1}(\bar{x})$ est associé le poids suivant sur $G^1(x_1)$

$$\varpi_{\bar{x}}(x_1) = \varpi(x) = \varpi(x_1, \bar{x}).$$

Ce sont les poids du 2° de l'énoncé du théorème 2. On a donc pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$ puisque

$$(F * f)(x) = \int f(x_1 - y_1, \bar{x}) \, v.p. \cdot \frac{1}{y_1} \, dy_1$$

$$\begin{aligned} |F * f|^p_{p,\varpi} &= \int_{\bar{x} \in G^{n-1}(\bar{x})} d\bar{x} \int_{x_1 \in G^1(x_1)} \varpi^p(x, \bar{x}) \, |(F * f)(x)|^p \, dx_1 \\ &\leqslant C \int_{\bar{x} \in G^{n-1}(\bar{x})} d\bar{x} \int_{x_1} |f(x_1 \bar{x})|^p \, \varpi^p(x_1 \bar{x}) \, dx_1 \\ &\leqslant C |f|^p_{p,\varpi}. \end{aligned}$$

(43) *Conséquences.* — En faisant le produit de tels $\Phi$, il vient que pour tout $\xi_0$ de $G'$ la fonction caractéristique $\check{Y}_{\xi_0}$ de l'ensemble des points $\eta$ de $G'$ tel que $\forall i = 1 \ldots n$, $\eta_i \leqslant \xi_{0,i}$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p_\varpi(G, B)$ (si $p \in ]1, +\infty[$ ; $G = R^n$; $B \sim L^q$).

**3.B. Théorème 3 (théorème de Littlewood-Paley).**

Voir [12], [21], [15] *si* $n = 1$, $\beta_0 = 0$.
*Soit* $G = \mathbf{R}^n$. *Pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, *notons*

$$Q_k = \{\xi \in G' \quad \forall i = 1 \ldots n \; |\xi_i| \leqslant 2^k\}$$

*et*

$$E_k \text{ la couronne } Q_k \setminus Q_{k-1} \tag{44}$$

$\chi_k$ *étant la fonction caractéristique de cette couronne et* $f$ *une fonction quelconque de* $L^p_\varpi(G, H)$ (*avec* $p \in ]1, +\infty[$, $H =$ *espace de Hilbert*) *on pose*

$$\begin{aligned} K_k &= \overline{\mathcal{F}}\chi_k \\ f_k &= \overline{\mathcal{F}}(\chi_k \cdot \hat{f}) = K_k * (f) \end{aligned} \tag{45}$$

*Alors on a l'équivalence de normes*

$$|f|_{p,\varpi} \sim \left( \int_{x \in G} \varpi^p(x)\, dx \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f_k(x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{46}$$

*quel que soit le poids* $\varpi$ *sur* G *vérifiant* (P).

*Preuve.* — Procédant comme dans la preuve du théorème 4 de [25], on est amené à vérifier la continuité des applications I, II et III. La continuité de II se prouve comme dans le cas non pondéré à condition d'utiliser la proposition 4 du présent travail.

Pour prouver la continuité de I et II, il faut (vue la transposition de la proposition 2 de [25] au cas pondéré) montrer que les noyaux tronqués $(F^N)_N$ définissent par convolution un ensemble borné d'applications linéaires continues

$$L^p_\varpi(G, H) \rightleftarrows L^p_\varpi(G, l^2(H)).$$

Dans [25], il est prouvé qu'il en est ainsi si $\varpi = 1$. Vu le

théorème 2 de ce travail il suffit de montrer que

$$(47) \quad \exists C, \qquad \forall N \in \mathbf{N}, \qquad \forall x' \in G, \qquad |F^N(x')| \leqslant \frac{C}{|x'|^n}.$$

Or tout point $x' \in G$ appartient à une certaine couronne $E_k$.

Donc $x' = (2^k x_1, \ldots 2^k x_n)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $E_0$. Pour un tel point $x$ nous avons, en utilisant la formule (97) du travail [25]

$$(48) \quad |F^N(x')| \leqslant \left( \sum_{=-\infty}^{+\infty} |F_l(2^k x_1 \ldots 2^k x_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left( \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{2ln} |F_0(2^{l+k} x_1 \ldots, 2^{l+k} x_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où en faisant le changement de variable $l' = l + k$ et en raisonnant comme dans [25] :

$$\leqslant C|x'|^{-n}.$$

Et le théorème 3 est démontré.

Sans rien changer aux raisonnements de [25] on déduit de ce théorème les corollaires suivants.

Théorème 4 (type Marcinkiewicz). — Voir [12], [15] et [21] si $n = 1$ et $\beta_0 = 1$. — H *étant un espace de Hilbert, on considère la partition de* $G' = \mathbf{R}^n_\xi$ *en couronnes* $E_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$ *avec* $Q_k = \{\xi, \xi \in \mathbf{R}^n, \forall i = 1 \ldots n \ |\xi_i| \leqslant 2^k\}$. *On considère une fonction* $\Phi$ *mesurable bornée :* $G' \to \mathbf{C}$ *dont les restrictions* $\Phi_j$ *à chaque couronne* $E_j$ *sont telles que*

$$\Phi_j(.) = L_j + \int_{\xi \in G'} \check{Y}_\xi(.)\, d\mu_j(\xi)$$

*où*

$$(49) \quad \begin{cases} \check{Y}_\xi = \textit{la fonction caractéristique des points } \eta \textit{ de } G' \\ \textit{tels que } \eta_i \leqslant \xi_i \ \forall i \ (\mu_j)_j = \textit{suite infinie de mesures} \\ \textit{complexes } \mu_j : G' \to \mathbf{C}, \textit{ les masses de ces mesures} \\ \textit{étant uniformément bornées.} \\ (L_j)_j \textit{ est une suite bornée de nombres complexes.} \end{cases}$$

*Alors, relativement à l'application bilinéaire naturelle*

$$\mathbf{C} \times H \to H$$

*$\Phi$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p_\varpi(G, H)$ (pour $G = R^n$ et les poids $\varpi$ du type* (P)).

THÉORÈME 5 (type Mihlin : voir [12] et [21]) si $n = 1$, $\beta_0 = 0$). — H *étant un espace de Hilbert*, $G = R^n_x$; *on considère une fonction* $\Phi : G' \to \mathbf{C}$ *telle que dans le complémentaire de l'origine, la dérivée* $\dfrac{\partial^n \Phi}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_n}$ *existe au sens usuel et est continue.*

*On suppose qu'il existe une constante* C *telle que* $\forall l = (l^1 \ldots l^n)$ *avec* $l^i \in \{0,1\}$, $\forall \xi \in G'$

$$(50) \quad |\xi|^{|l|} |D^l \Phi(\xi)| \leqslant C \qquad \textit{avec} \qquad |l| = l_1 + \cdots + l_n.$$

*Alors, $\Phi$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p_\varpi(G, H)$ pour les poids $\varpi$ du type* (P).

### 3.C. Fonctions de Lusin, Paley, Littlewood...

PROPOSITION 5 (voir [21] si $n = 1$ et $\beta_0 = 0$ et [2] si $\varpi \equiv 1$). — *Utilisant les notations de* [2], *notons* $(gf)$ *et* $(sf)$ *respectivement, les fonctions de Paley Littlewood et de Lusin à n dimensions associées à une* $f \in \mathcal{D}(R^n)$, *alors les applications*

$$f \longmapsto (gf) \qquad \textit{et} \qquad f \longmapsto (sf)$$

*sont continues pour la topologie induite par* $L^p_\varpi(G, \mathbf{C})$ *où $\varpi$ est un poids vérifiant les conditions* (P').

*Preuve.* — Rappelons d'abord les définitions de $(gf)$ et de $(sf)$. Le point courant de $E_{n+1}$ est noté indifféremment

$$(x_j) \qquad \text{ou} \qquad ((x_i), t)$$

avec

$$1 \leqslant j \leqslant n+1 \qquad \text{ou} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$E^+$ désigne le demi-espace où $x_{n+1} = t \geqslant 0$ et l'on identifie $E_n$ à l'hyperplan où $t = 0$. On fixe une constante positive R et à tout point $x = (x_i)_i$ de $E_n$, on associe le demi-cône :

$$W(x) = \{((y_i)_i, \quad t) \in E^+ \qquad \text{avec} \qquad |x - y| \leqslant Rt\}.$$

L'expression du noyau de Poisson est (modulo une constante multiplicative)

$$P_t = \frac{ct}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

D'où par dérivation :

$$(\partial_i P_t)(x) = -\frac{(n+1)x_i t}{(|x|^2 + t^2)^{n+1}}$$

$$(\partial_t P_t)(x) = \frac{|x|^2 - n^2}{(|x|^2 + 1)^{n+1}}.$$

Et Stein (dans [39]) introduit successivement les fonctions suivantes :

$$Uf = P_t * f = \text{potentiel de } f$$

$$\text{grad}^2\, Uf = \sum_{j=1}^{n+1} (\partial_j(P_t * f))^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (\partial_j P_t * f)^2$$

$$(gf)(x) = \left(\int_0^\infty t\, \text{grad}^2\, U(x, t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(sf)(x) = \int_{\substack{y \in W(x) \\ t \in R^+}} \frac{(\text{grad } U)^2}{t^{n-1}}\, dt\, dy\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérant par exemple $(gf)$, Benedek-Calderon-Panzone interprètent $(gf)(x)$ comme la norme en $x$ dans $B_1 = L^2(\mathbf{R}^1, E^{n+1})$ de la fonction suivante dépendant de $x$:

$$\begin{aligned} R^+ &\longrightarrow E_{n+1} \\ t &\longmapsto \left(t^{\frac{1}{2}} (\partial_j P_t * f)(x, t)\right)_j. \end{aligned}$$

Et ils interprètent cette fonction comme la convolution :

— associée à l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} B_1 \times \mathbf{R} &\longrightarrow B_1 \\ ((f_j)_j, \alpha) &\longmapsto (\alpha f_j)_j; \end{aligned}$$

— de la distribution vectorielle suivante à valeurs dans $B_1$

$$x \to \vec{K}(x, \cdot) = (K_j(x, \cdot))_j$$

avec $K_j(x, t) = t^{\frac{1}{2}} (\partial_j P_t)(x)$.

Dans cette situation il résulte de [2] que K est un convoluteur de $L^p$ (G, **C**) à $L^p(G, B_1)$.

Pour en déduire la preuve dans le cas pondéré il suffit de montrer que l'on a (30).

Or

$$|K(x, \cdot)|_{B_1} = \left(\int_0^\infty t\,dt \sum_{j=1}^{n+1} (\partial_j P_t)^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^\infty t\,dt \frac{C|x|^2 t^2 + (|x|^2 - nt^2)^2}{(|x|^2 + t^2)^{n+3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où en posant $t = |x|u$:

$$= |x|^{-n}\left(\int_0^\infty u\,du \frac{Cu^4 + (1 - nu^2)^2}{(1 + u^2)^{n+3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{C}{|x|^n}.$$

La preuve est analogue pour la fonction $(sf)$.

### 3.D. Intégrales singulières (voir [37]).

On sait qu'une telle intégrale singulière K est définie par une application $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ telle que :

— K est homogène et de degré $-n$;

— La restriction de K à la sphère unité $\Sigma$ de $\mathbf{R}^n$ est dans $L^{1+\varepsilon_0}$ avec $\varepsilon_0 > 0$;

— $\int_{\theta \in \Sigma} K(\theta)\,d\theta = 0$.

Les distributions

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & \text{si} \quad |x| \geqslant \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |x| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

convergent dans $\mathcal{S}'(G)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ vers une distribution notée K et elles forment un ensemble borné d'applications linéaires continues de $L^p(G, B)$ (voir [34]; B est supposé isomorphe à un espace $L^q$ avec $p$ et $q \in ]1, +\infty[$.

Du théorème 2, et de ceci, il résulte directement la

Proposition 6 (voir Stein [40] si $\beta_0 = 0$). — *Si* B *est un espace de Banach isomorphe à un espace* $L^q$ *quelconque, toute*

*intégrale singulière* $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *bornée sur la sphère unité de* $\mathbf{R}^n$ *est un opérateur de convolution (scalaire) dans* $L^p_\varpi(\mathbf{R}^n, B)$ *pour les poids* $\varpi$ *correspondant à* (P′). ($p$ *et* $q \in ]1, +\infty[$). (Voir une généralisation de ce résultat aux intégrales singulières de [22] dans le travail [4].)

Voici un autre résultat obtenu en transposant au cas pondéré la démonstration (du fait que les intégrales singulières opèrent dans $L^p$) en utilisant les coordonnées polaires pour les noyaux impairs, puis les noyaux de Riesz pour les noyaux pairs (voir [37] par exemple).

PROPOSITION 7. — *Étant donné un espace de Banach* B, *une intégrale singulière* $K : \mathbf{R}^n_x \to \mathbf{C}$; *on se donne un poids* $\varpi(x)$ *tel que, pour presque toute droite* D *de* $\mathbf{R}^n$, *la restriction* $\varpi(D)$ *de* $\varpi$ *à* D *existe et est telle que* $vp\,\dfrac{1}{x}$ *est un convoluteur (scalaire) dans* $L^p_\varpi(G, B)$ *les normes de ces convoluteurs étant uniformément bornées lorsque* D *varie. Alors* K *est un convoluteur dans* $L^p_\varpi(G, B)$ $(1 < p < \infty)$.

*Exemples :* Si $B \sim L^q$ $(1 < q < \infty)$ on peut prendre $\varpi(x) = |x_n|^\alpha$ avec $-\dfrac{1}{p} < \alpha < \dfrac{1}{p'}$ ou $\varpi$ un poids du type (P) : utiliser le 2e du théorème 2.

Voir aussi des résultats de type local dans [11].

*Preuve.* — Utilisant les noyaux de Riesz il suffit de démontrer le théorème si K est impair. Or, pour toute $\varphi \in \mathcal{D} \otimes B_2$

$$|K_\varepsilon * \varphi|_{p,\varpi} = \left(\int_{x \in G} \varpi^p(x)\, dx \left|\int_{t \in \mathbf{R}^n} K_\varepsilon(t)\varphi(x - t)\, dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Posons $t = \rho\theta$ avec $\rho \in \mathbf{R}^+$ $\theta \in \Sigma$

$$= \left(\int \varpi^p(x) \left|\int_{\theta \in \Sigma} K(\theta)\, d\theta \int_{|\rho| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x - \rho\theta)}{\rho}\, d\rho\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On rapporte alors $\mathbf{R}^n$ à une base orthonormée dont un vecteur de base est $\theta$. Il vient avec $y \in Y =$ l'hyperplan mené par O orthogonalement à $\theta$ :

$$x = \alpha\theta + y, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Posons

$$\Phi_{y\theta}(\rho) = \varphi(\rho\theta + y)$$
$$\chi_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si} \quad |\alpha| \geqslant \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

$$\int_{|\rho|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x-\rho\theta)}{\rho}\, d\rho = \int_{|\rho|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi((\alpha-\rho)\theta + y)}{\rho}\, d\rho = (\Psi_{y\theta} * \chi_\varepsilon)(\alpha).$$

D'où en utilisant l'inégalité de Minkowsky puis l'hypothèse

$$\begin{aligned} &|K_\varepsilon * \varphi|_{p,\varpi} \\ &= \Big(\iint_{y\in Y;\, \alpha\in R} \varpi^p(\alpha\theta + y)\, dy\, d\alpha \Big|\int_{\theta\in\Sigma} K(\theta)\, d\theta\Big| (\Psi_{y\theta} * \chi_\varepsilon)(\alpha)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \Big(\int_{\theta\in\Sigma} |K(\theta)|\, d\theta \iint \varpi^p(\alpha\theta + y)\, d\alpha\, dy |(\Psi_{y\theta} * \chi_\varepsilon)(\alpha)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \int_{\theta\in\Sigma} |K(\theta)|\, d\theta \Big(\int_{y\in Y} dy \int_\alpha |\Psi_{y\theta}(\alpha)|^p \varpi^p(\alpha\theta + y)\, d\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C|\varphi|_{p,\varpi}. \end{aligned}$$

## 4. TRANSPOSITION DE CES RÉSULTATS A $G = \mathbf{T}^n$ OU $\mathbf{Z}^n$.

Une fois le théorème 2 transposé, il suffira d'opérer comme dans les §§ 5 et 6 de [25] pour démontrer des transpositions des théorèmes 3, 4 et 5 lorsqu'on remplace $G = \mathbf{R}^n$ par $G = \mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$.

THÉORÈME 2. — *On peut remplacer dans son énoncé* $G = \mathbf{R}^n$ *par* $\mathbf{T}^n$ *ou* $\mathbf{Z}^n$.

*Preuve.* — Pour $G = \mathbf{T}^n$ :

Il n'y a rien à prouver pour $\beta_0 = 1$, puisque, G étant compact, le poids $\varpi$ est équivalent à 1.

Pour $\beta_0 = 0$, procédant comme ci-avant on est amené à vérifier (37) et (38), les intégrales étant prises sur $\mathbf{T}^n$ au lieu de $\mathbf{R}^n$. Ces nouvelles relations sont donc évidentes puisque l'on peut considérer $\mathbf{T}^n$ comme une partie de $\mathbf{R}^n$.

*Preuve* pour $\mathbf{Z}^n$.

Le cas $\beta_0 = 1$ se déduit du cas $\beta_0 = 0$ puisque les poids correspondants sont équivalents en dehors de l'origine. Pour $\beta_0 = 0$, utilisant la même technique que pour $G = \mathbf{R}^n$ on

est amené à vérifier deux relations dont l'une s'écrit :

$$\forall l \in Z^n, \qquad \sum_{k(\neq l \text{ et } 0)} \frac{||k|^\alpha - |l|^\alpha|}{|k|^{\alpha+\frac{\lambda}{p}}|k-l|^n} \leqslant \frac{C}{l^{\frac{\lambda}{p}}}.$$

Soit

$$(51) \qquad \sum_{k(\neq l \text{ et } 0)} \frac{\left|\left(\frac{k}{|l|}\right)^\alpha - 1\right|}{\left(\frac{k}{|l|}\right)^{\alpha+\frac{\lambda}{p}}\left|\frac{k}{|l|} - \frac{l}{|l|}\right|^n} \frac{1}{|l|^n} \leqslant C.$$

Nous comparons cette relation à la relation déduite de (37) en y faisant le changement

$$y = |x|u \quad u \text{ étant unitaire}$$

d'où

$$dy = C|x|^n\, du$$

$$(51)' \qquad \int_{u \in \mathbf{R}^n} \frac{||u|^\alpha - 1|}{|u|^{\alpha+\frac{\lambda}{p}}\left|u - \frac{x}{|x|}\right|^n} du \leqslant C.$$

Le premier membre de (51) représente la somme de Riemann de l'intégrale du 1er membre de (51)' : il reste donc uniformément borné lorsque $l \to \infty$, c'est-à-dire lorsque le côté $\frac{1}{l}$ du réseau tend vers zéro.

Proposition 4. — Même énoncé (avec $G = \mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$).

Dans la démonstration, il faut remplacer v.p. $\frac{1}{x_1}$ par v.p. cotg $\pi x_1$.

Théorème 3. — *Les modifications concernant seulement l'ensemble indexant les* $Q_l$ : notons cet ensemble $\tilde{Z}(G')$

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}^n) = \{-1, 0, 1, \ldots\}$$
$$\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{T}^n) = \{-1, -2, \ldots\}.$$

*Preuve* si $G = \mathbf{T}^n$. Procédant comme pour $\mathbf{R}^n$, il suffit de vérifier que les fonctions $\vec{G}^N$ du travail [25] vérifient l'inégalité (30) du présent travail. Or d'après les formules (135)

et (136) de [25] :

$$|G^N(\theta')|^2 \leqslant \sum_{-1}^{+\infty} |G_k(\theta')|^2.$$

On écrit alors $\theta' = 2^k\theta$ avec $\theta \in E_0$, et l'on utilise les majorations (140) de [25]. D'où :

$$\begin{aligned}|G^N(\theta')|^2 &\leqslant \sum_{l=-1}^{-k} \prod_i |h_l(\theta'_i)|^2 + \sum_{l=-k+1}^{\infty} \prod_i |h_l(\theta_i)|^2 \\ &\leqslant C \sum_{l=-1}^{-k} 2^{2ln} + C \sum_{l=-k+1}^{\infty} 2^{-2ln-4nk} \\ &\leqslant C\, 2^{-2kn} + C\, 2^{-2kn} = C\, 2^{-2kn} \sim \frac{C}{|\theta'|^{2n}}.\end{aligned}$$

*Preuve* si $G = \mathbf{Z}^n$.

Recopiant ce qui a été fait pour $G = \mathbf{R}^n$, il s'agit de montrer (47); et en explicitant $|F^N(x')|$ en fonction des $F_l$, on voit que dans la sommation intervenant dans (48), on a seulement $l \in \tilde{\mathbf{Z}}(G')$; d'où (47) à fortiori.

THÉORÈME 4. — La modification d'énoncé concerne seulement l'ensemble indexant les couronnes $E_j$; on doit avoir :

$$j \in \tilde{\mathbf{Z}}(G').$$

THÉORÈME 5. — Valable pour $G = \mathbf{Z}^n$. Sans objet pour $G = \mathbf{T}^n$.

## 5. CONVEXITÉ ET APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION.

On trouvera dans le travail [25] d'autres applications de l'interpolation. Nous allons ici développer une technique imaginée par Krabbe (voir [23]) pour retrouver (dans le cas $G = \mathbf{Z}$, sans poids) des multiplicateurs dans $\mathcal{F}l^p$ découverts par Hirschmann (voir [16] et [17]. Cette méthode est fondée sur l'inégalité de Young ([46]) et quelques inégalités de convexité.

LEMME 1. — *On se donne n nombres entiers* $\geqslant 1$ : $k_1 \ldots k_n$ *et la partie suivante de* $Z^n$

(52) $\quad I = \{i = (i_1 \ldots i_n), \forall k = 1 \ldots n,\ 1 \leqslant i_k \leqslant k_k\}.$

*Soient deux ensembles de nombres (complexes)*

$$(a_i)_{i\in I} \qquad \text{et} \qquad (b_i)_{i\in I}.$$

*Pour tout* $i \in I$, *posons* $A_i = \Sigma a_j$, *la sommation étant étendue aux multi-indices* $j = (j_1 \ldots j_k \ldots j_n)$ *tels que*

$$j_k \leqslant i_k, \quad \forall k = 1 \ldots n$$

(*ce que l'on pourra écrire* $j\alpha i$).

$\rho$ *désignant une partition quelconque de* I *en parallèlotopes dont les arêtes sont parallèles aux axes, notons* $\rho a$ *la suite de nombres obtenue à partir des* $a_i$ *en sommant ceux de ces nombres dont les indices appartiennent à un même parallélotope de* $\rho$. *Alors*

$$(53) \quad \Big|\sum_{i\in} A_i b_i\Big| \leqslant \left(1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right)^n \sup_{\rho} |\rho a|_{l^p} |\rho b|_{l^q}$$

(54) *où* $\zeta$ *est la fonction de Riemann* et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1.$$

On démontre cette relation pour $n$ quelconque par récurrence à partir de $n = 1$, c'est-à-dire de l'inégalité de Young.

Lemme 2 (Convexité). — 1° *Pour toute* $f_0 : G \to \mathbf{C}$ *et tout poids* $\varpi$ *sur* G *vérifiant l'hypothèse* (K), $\mathrm{Log}|f_0|_{p,\varpi^\alpha}$ *est une fonction convexe du point* $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ *si*

$$\alpha \in R \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{p} \leqslant 1.$$

(*Donc l'ensemble des points* $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ *tels que* $f_0 \in L^p_{\varpi^\alpha}$ *est convexe ou vide.*)

2° $\varpi$ *étant un poids sur* G *vérifiant l'hypothèse* (K) *posons*

$$D^\theta_2 = L^{p_\theta}_{\varpi^{\alpha_\theta}}(G, \mathbf{C}), \qquad D^\theta_3 = L^{p_\theta}_{\varpi^{\alpha_\theta}}(G, \mathbf{C})$$

*avec* $\theta \in [0, 1]$, $\alpha_\theta = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta_{\alpha_1}$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

*Soit* A *une application linéaire continue* ($j = 0$ *et* $1$)

$$(55) \qquad D_2^j \xrightarrow{A} D_3^j.$$

*Alors*

(56) Log sup $\langle Af, g\rangle$ (*pour* $|f|_{D_2^\theta} \leqslant 1$ *et* $|g|_{(D_3^\theta)'} \leqslant 1$) *est une fonction convexe de* $\theta$.

Ce lemme résulte du fait que (notations de [5]) :

$$(57) \qquad [L^{p_0}_{\varpi^{\alpha_0}}, L^{p_1}_{\varpi^{\alpha_1}}]_\theta = L^{p_\theta}_{\varpi^{\alpha_\theta}}$$

et des propriétés de convexité de la méthode d'interpolation complexe.

La définition ci-après prolonge naturellement au cas $n > 1$, celle des semi-normes de Wiener (voir [45]).

Définitions. — 1° *Pour toute* $\Phi \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R}^n)$, *et tout* $p \in [1, +\infty]$ *on pose :*

$$(58) \qquad V_p(\Phi) = \sup_\sigma \Big( \sum_i |\Delta_i \Phi|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

*où* $\sigma$ *décrit l'ensemble des partitions finies d'un hypercube*

$$(59) \qquad \{\xi \in \mathbf{R}^n_\xi,\ \forall i = 1 \ldots n,\ |\xi_i| \leqslant C\}$$

*contenant le support de* $\Phi$, *en parallélotopes dont les arêtes sont parallèles aux axes*; $i$ *indexe les parallélotopes d'une telle partition* $\sigma$; $\Delta_i\Phi$ *désigne la « variation de* $\Phi$ *sur le* I^e^ *parallélotope de* $\sigma$ » :

2° *Si l'on considère un tel parallélotope :*

$$\{\xi \in \mathbf{R}^n_\xi,\ \xi_i^1 \leqslant \xi \leqslant \xi_i^2 \quad \text{pour} \quad i = 1,2, \ldots, n\}$$

*où les* $2n$ *nombres* $\xi_i^1$ *et* $\xi_i^2$ *dépendent du parallélotope*; *et si* $\Phi \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R}^n)$, *la variation de* $\Phi$, *sur le parallélotope est*

(60)

$$\Delta_i\Phi = \begin{cases} \text{si } n = 1 : \ \Phi(\xi_1^2) - \Phi(\xi_1^1) \\ \text{si } n = 2 : \ \Phi(\xi_1^2, \xi_2^2) - \Phi(\xi_1^1, \xi_2^2) - \Phi(\xi_1^2, \xi_2^1) + \Phi(\xi_1^1, \xi_2^1) \\ \text{si } n = 3 \ldots \end{cases}$$

Moyennant ces 2 lemmes, et vue cette définition on peut énoncer la

Proposition 8. — *Considérons sur* $G = \mathbf{R}^n$ *un poids* $\varpi$

*tel que* (P) *et la convolution habituelle des distributions (c'est-à-dire la convolution scalaire). Alors la norme de toute* $\Phi \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R}^n)$ *comme multiplicateur dans* $\mathcal{F}L^p_\omega(\mathbf{R}^n)$ *est majorée par* $V_r(\Phi)$ *si*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{2r} < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2r} \tag{61}$$

*et*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2r} < \frac{1}{p} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2r},$$

*Preuve.* — Soit K un hypercube (59) contenant Supp $\Phi$. Soit $\sigma$ une partition de K en parallélotopes dont les arêtes sont parallèles aux axes. Cette partition est moins fine que celle $\tilde{\sigma}$ définie par tous les hyperplans $\xi_j = C$ contenant au moins un sommet d'un parallélotope de $\sigma$. Notons $\xi^i$ le point de K ayant les plus grandes coordonnées parmi les points du $i^e$ parallélotope de $\tilde{\sigma}$.

$$\Phi(\xi_i) = \Sigma\, \Delta_j \Phi_j$$

la somme étant étendue à tous les parallélotopes de $\tilde{\sigma}$ dont tous les points ont des coordonnées plus petites que $\xi_i$.

Pour tout $\xi \in G'$ notons toujours $\check{Y}_\xi$ la fonction caractéristique des points $\eta$ de $G'$ tels que $\eta_i \leqslant \xi_i$, $\forall i$.

L'inégalité de Young puis la définition prouvent que

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i \text{ indexe } \tilde{\sigma}} \langle \overline{\mathcal{F}}(\Phi(\xi_i), \Delta_i \check{Y}_\xi \hat{f}), g \rangle \right| \\
&= \left| \sum_{i \text{ indexe } \tilde{\sigma}} \Phi(\xi_i) \Delta_i \langle \overline{\mathcal{F}}(\check{Y}_\xi \hat{f}), g \rangle \right| \\
&\leqslant C \sup_\rho |\rho(\Delta_j \Phi_j)|_{l^r} |\sigma \Delta_i \langle \overline{\mathcal{F}}(\check{Y}_\xi \hat{f}), g \rangle|_{l^q} \quad \text{si} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} > 1 \\
&\leqslant C V_r(\Phi)\, V_q \langle \overline{\mathcal{F}}(\check{Y}_\xi \hat{f}), g \rangle.
\end{aligned}$$

Quand le $2^e$ membre est-il borné? ($f$ et $g$ décrivant respectivement les boules unités de $L^p_\omega$ et $L^{p'}_{\omega^{-1}}$).

Or d'après le 1° et 2° du lemme 2, la quantité

$$\sup V_q \langle \overline{\mathcal{F}}(\check{Y}_\xi \hat{f}), g \rangle$$

lorsque $f$ et $g$ décrivent respectivement les boules unités de $L^p_\omega$ et $L^{p'}_{\omega^{-1}}$, est une fonction convexe du point de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}, \alpha\right)$.

Cette quantité est d'ailleurs bornée :

— au point $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, d'après Plancherel;

— aux points tels que

$$\frac{1}{q} = 0; \qquad 0 < \frac{1}{p} < 1; \qquad -\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$$

d'après la proposition 4.

Donc, pour tout point $\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}, \alpha\right)$ situé dans l'enveloppe convexe de ces points, on a lorsque $f$ et $g$ décrivent respectivement les boules unités de $L^p_\varpi$ et de son dual

$$\sup_{\tilde{\sigma}} \left| \sum_{i \text{ indexe } \sigma} \langle \overline{\mathcal{F}}(\Phi(\xi_i)\Delta_i \check{Y}_\xi \hat{f}), g \rangle \right| \leqslant C.$$

Vue la fermeture de la boule unité des multiplicateurs dans $\mathcal{S}'$, ceci prouve que $\Phi$ est un multiplicateur.

*Notons.* — D'après [8], si $\Phi$ est simultanément un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p_\varpi$ et $\mathcal{F}L^p_{\varpi_1}$; alors $\Phi$ est encore un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p_{\Phi(\varpi_0, \varpi_1)}$ où $\Phi$ est une fonction homogène de degré 1 des 2 variables $\varpi_i$ et telle que

$$\Phi(1, \lambda) = \left( \int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1 + \lambda s)^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{1-p}$$

où $\nu$ est une mesure portée par $\mathbf{R}^+$ telle que

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1 + s)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty.$$

On peut appliquer ce théorème en prenant :

$$\begin{cases} \varpi_0 \equiv 1 \\ \varpi_1 = |x|^\alpha, \qquad -\frac{1}{P} < \alpha < +\frac{1}{P}. \\ G = \mathbf{R} \\ \text{le multiplicateur étant la fonction caractéristique Y d'une} \\ \quad \text{demi-droite.} \end{cases}$$

Alors Y est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p_\varpi$ pour des poids définis par une condition intégrale.

On pourrait encore appliquer ce théorème en prenant :

$$\varpi_0 = 1 \quad \text{ou} \quad |x|^\alpha,$$
$$\varpi_1 = e^{\alpha' x} \quad (\alpha' \text{ réel quelconque}).$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Babenko, *Doklady*, 152, n° 4 (1963), 801-808.

[2] Benedek-Calderon-Panzone, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, vol. 48, n° 3, (march 1963).

[3] Brelot, Théorie classique du potentiel, Paris, C.D.U., (1959).

[4] Cora Sadosky, Travail annoncé dans les notices A.M.S.

[5] Calderon, Intermediate spaces and interpolation the complex method, *Studia Math.*, 24, fasc. 2, (1964), 113-190.

[6] Calderon, Théorème de Marcinkiewicz, Conférence orale à l'Institut Henri-Poincaré (1962).

[7] Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Upsula, (1923).

[8] Foias et Lions, Sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Sc. Math. Szeged*, t. 22, (1961), 269-282.

[9] Gagliardo, On integral transformations with positive kernel, *Tech. rep.* 2, Univ. of Kansas, (June 1963).

[10] Gapouchkin, Généralisation d'un théorème de Riess, *Math. Sbornik*, 88, (1958), 359-372.

[11] P. Grisvard (à paraître).

[12] D. L. Guy, Hankel multiplier transformations and weighted p. norms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95, (1960), 137-189.

[13] Hardy-Littlewood, Inequalities, Cambridge, (1934).

[14] Hardy-Littlewood, Some more theorems concerning Fourier series and power series, *Duke Math. Journ.*, n° 2, (1936), 354-382.

[15] Hirschman, The decomposition of Walsh and Fourier series, Memoirs A.M.S., n° 15, (1955).

[16] Hirschman, Multiplier transformations, I, *Duke Journ.*, 26, (1956), 221-242.

[17] Hirschman, *Duke Journ.*, 28, (1961), 45-56.

[18] Hirschman, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, (1962), 850.

[19] Hormander, Linear partial differential operators, Springer, (1963).

[20] Hormander, Translation invariant operators in $L^p$, *Acta Math.*, (1960).

[21] Igari, On the decomposition of Fourier transforms with weighted norms, *Tohoku Journal*, (March 1963), 6-36.

[22] Jones, A class of singulars integrals, *Amer. Journ. of Math.*, vol. 86, n° 2, (avril 1964), 441-462.

[23] Krabbe, Réfraction non hilbertienne d'une transformation symétrique bornée, *Act. Szeged*, 22, (1961), 301.

[24] Krée, Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ avec poids, *C.R. Acad. Sci.*, t. 258, (1964), 1692-1695.

[25] Krée, Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ (à paraître).

[26] LIONS et PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. de l'Inst. Hautes Études Scient., n° 19, (1964).
[27] LITTLEWOOD et PALEY, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 42, (1937), 52-89.
[28] LIZORKIN, Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ à $\mathcal{F}L^q$, *Doklady*, 152 (1963), 808-811.
[29] MARCINKIEWICZ, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier. *Studia Math.*, vol. 8, (1939), 78-91.
[30] MIHLIN, Multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$, *Doklady*, 109, (1956), 701-703.
[31] O. NEIL, Convolution operators and $L(p, q)$ spaces, *Duke Journal*, 30 (1963), 129-142.
[32] PEETRE, Sur le nombre de paramètres..., *Ric. di Matematica*, vol. 12, (1963), fasc. 2.
[33] PLANCHEREL et POLYA, Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples, *Commentari Math.*, 9 (1936-1937), 224-248.
[34] J. SCHWARTZ, A remark of Calderon-Zygmund inequalities, *Commentari* P. A. M., (1961), 785-799.
[35] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, (1951).
[36] L. SCHWARTZ, Distributions à valeurs vectorielles, *Ann. de l'Institut Fourier*, (1959).
[37] L. SCHWARTZ, *Séminaire à la Faculté des Sciences de Paris*, Année 1959-1960.
[38] STECKIN, Sur les formes bilinéaires, *Dokl. Acad. Nauk*, vol. 71, 237-240.
[39] E. M. STEIN, On the function of Littlewood-Paley-Lusin and Marcinkiewicz, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88, (1958), 430-466.
[40] E. M. STEIN, Note on singular integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, (1957), 290-254.
[41] E. M. STEIN, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, (1956), 482-492.
[42] E. M. STEIN et WEISS, Interpolation with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 87, (1958), 159-172.
[43] E. M. STEIN et WEISS, Fractional integral's, *Journ. Math. Mech.*, 7, (1958), 503-504.
[44] SUNOUCHI, Discrete analogue of a theorem of Littlewood-Paley, *Tohoku Journal*, 13, (1961), 295-319.
[45] WIENER, The quadrat variation of a funtion and its Fourier coefficients, *Journ. Mass. Inst. of Techn.*, 3, (1924), 73-94.
[46] YOUNG, An inequality of the Holder type connected with Stieltjes integration, *Act. Math.*, vol. 67, (1936), 251-282.
[47] ZYGMUND, Trigonometrical series, t. 1.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1965).

Paul KREE,
Faculté des Sciences,
Service de Mathématiques,
Parc Valrose, 06, Nice.

*Note ajoutée à la correction des épreuves.*

La démonstration du théorème 2 que donne Cora Sadosky est beaucoup plus simple que la démonstration donnée ici. On peut d'ailleurs formuler un énoncé général relatif à la continuité d'opérateurs linéaires dans les $L^p$ pondérés (à paraître).