ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL KRÉE

Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 2 (1966), p. 31-89
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_31_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 2 (1966), 31-89.

SUR LES MULTIPLICATEURS DANS $\mathcal{F}L^p$

par Paul KRÉE

TABLE DES MATIÈRES

1. Généralités ($G = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$) 35
2. Inégalités de Calderon-Zygmund ($G = \mathbf{R}^n$) 49
3. Théorème d'isomorphisme de Littlewood-Paley ($G = \mathbf{R}^n$) 59
4. Applications ($G = \mathbf{R}^n$) 65
5. Version de Hörmander du théorème de Mihlin ($G = \mathbf{R}^n$) 74
6. Transposition de ces résultats à $G = \mathbf{T}^n$ 79
7. Transposition de ces résultats à $G = \mathbf{Z}^n$ 83
8. Applications de l'interpolation 84
Bibliographie 88

Introduction.

Considérons trois espaces de Banach complexes B_j ($j = 1, 2, 3$) et une application bilinéaire continue

$$\begin{array}{l} B_1 \times B_2 \xrightarrow{\times} B_3 \\ (b_1, b_2) \quad \rightarrow b_1 \times b_2. \end{array}$$

Considérons sur le groupe $G = \mathbf{R}^n$ et deux espaces de distributions vectorielles D_j ($j = 2, 3$) à valeurs dans B_j, ayant certaines propriétés (permettant de définir simplement la convolution et la transformation de Fourier (ceci sera précisé au § 1). On peut se poser le problème de trouver l'espace $\mathcal{C}_1$ des distributions tempérées à valeurs dans B_1 qui envoient par convolution D_2 dans D_3 : $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des « convoluteurs » de D_2 à D_3 et l'ensemble des transformés de Fourier $\mathcal{F}\mathcal{C}_1$ est appelé l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{F}D_2$ à $\mathcal{F}D_3$.

Ce problème est trop général et dans les cas concrets (D_2 et D_3 donnés) on cherche seulement à trouver des sous-espaces (aussi vastes que possibles) de $\mathcal{C}_1$.

On étudie ici surtout le cas où les espaces D_j sont des espaces de Lebesgue L^p de classes de fonctions vectorielles $G \rightarrow B_i$ de puissance p^e sommable. La théorie a débuté dans le cas scalaire ($B_1 = B_2 = B_3 = \mathbf{C}$) où G est remplacé par le tore T, à l'aide de méthodes complexes. C'est Riesz qui a inauguré les méthodes réelles en montrant que $vp\,\dfrac{1}{x}$ est un opérateur de convolution dans L^p pour $G = \mathbf{R}$. Calderon-Zygmund ont étendu la théorie aux intégrales singulières sur $\mathbf{R}^n$ ([5]). La théorie a été étendue dans diverses directions par Hirschmann, Krabbe, Marcinkiewicz, Mihlin, Plancherel-Polya, Stein, Steckin...

En 1960, Hörmander a fait ([7]) une revue assez complète

de la question, en donnant d'ailleurs une version améliorée du théorème de Mihlin (et une nouvelle preuve). J. Schwartz ([27]) a remarqué en 1961 que la théorie se transposait au cas vectoriel, la transposition étant plus complète :

— si $B_1 = \mathbf{C}$, B_2 et B_3 étant des espaces de Lebesgue
— ou si B_2 et B_3 sont des espaces de Hilbert H_2 et H_3.

Comme application, il étend le théorème d'isomorphisme de Littlewood-Paley pour $L^p(R, H)$ (démontré dans [18] pour $G = \mathbf{T}$ et si $H = \mathbf{C}$). De nouvelles applications de la théorie sont signalées par Benedek-Calderon-Panzone dans [3].

Il a été ensuite remarqué ([19], [32] et [14]) que les raisonnements de J. Schwartz se transposaient pour $G = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$.

Dans le cas scalaire ($B_j = \mathbf{C}$) les inégalités de Calderon-Zygmund ont été généralisées par Jones [11] (et Arnèse [1]) pour démontrer qu'une famille $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ de distributions obtenues par troncature d'une certaine distribution k liée à l'équation de la chaleur, forme un ensemble borné d'opérateurs de convolution dans L^p.

L'idée était de refaire les raisonnements de Calderon-Zygmund en remplaçant la suite des partitions de $\mathbf{R}^n$ qui intervient dans le lemme de Riesz (et qui est symétrique par rapport à tous les axes) par une autre suite de partitions où le n^e axe joue un rôle privilégié.

Dans ce travail, la suite des partitions qui interviendra dans l'énoncé du lemme de Riesz fait intervenir de façon distincte chaque direction d'axe (voir théorème 3). Puis adaptant les méthodes inaugurées par J. Schwartz ([27]) on énonce des théorèmes type Littlewood-Paley, Marcinkiewicz, Mihlin (on généralise également la version du théorème de Mihlin donnée par Hörmander). D'où résulte l'application annoncée aux équations quasi-elliptiques.

On montre ensuite comment ces résultats s'adaptent à $G = \mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{R}^n$ puis l'on donne quelques applications de la théorie de l'interpolation.

On étudiera dans [15] le cas des espaces L^p avec certains poids (et la transposition de certains raisonnements de Krabbe [13]).

Nous utilisons ici le langage et quelques résultats de la

théorie des distributions vectorielles (voir [29]), ceci par exemple :

1. Pour pouvoir parler avec précision d'opérateurs de convolution (entre espaces de Lebesgue de classes de fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un espace de Banach) qui ne sont pas définis par des fonctions. C'est le cas des opérateurs F_* et K_* du § 3 qu'on peut considérer comme des généralisations vectorielles des intégrales singulières de Calderon-Zygmund.

2. Pour pouvoir parler des transformées de Fourier de ces opérateurs.

Signalons que le § 2 n'utilise pas la théorie des distributions à valeurs vectorielles.

C'est M. Jean-Pierre Kahane qui a suggéré et dirigé ces travaux, ce qui nous donne une raison supplémentaire pour lui témoigner notre reconnaissance.

1. GÉNÉRALITÉS ($G = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$).

Nous fixons ici les notations générales qui seront utilisées dans les paragraphes suivants et nous rappelons les propriétés générales des opérateurs de convolution et des multiplicateurs.

Notons d'abord ceci.

Étant donnée une fonction localement sommable $K : R^n \to \mathbf{C}$, deux nombres p et $q \geqq 1$, vu que l'espace $\mathcal{D}$ (fonctions C^∞ à support compact : $R^n \to \mathbf{C}$) est dense dans $L^p(R^n, \mathbf{C})$ = l'espace des fonctions de puissance p^e sommables : $R^n \to \mathbf{C}$, il est facile de dire quand K définit un opérateur de convolution de $L^p(R^n, \mathbf{C})$ à $L^q(R^n, \mathbf{C})$:

$$\text{(A)} \qquad \exists\, C > 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad |K * \varphi|_q \leqq C|\varphi|_p$$

avec

$$\text{(B)} \qquad (K * \varphi)(\cdot) = \int_{y \in R^n} K(\cdot - y) \times \varphi(y)\, dy.$$

Les situations considérées ci-après se déduisent de la précédente de la façon suivante :

On se donne trois espaces de Banach B_j avec une application bilinéaire continue notée $\times : B_1 \times B_2 \to B_3$ (alors qu'avant,

on avait $B_j = \mathbf{C}$, l'application $\times$ étant le produit ordinaire). Les espaces $L^p(R^n, B_2)$ et $L^q(R^n, B_3)$ se définissent naturellement. On sait que l'espace (noté savamment $\mathcal{D} \otimes B_2$!) des combinaisons linéaires finies $\vec{\varphi}$ à coefficients dans B_2 de fonctions de $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(R^n, B_2)$. Pour de telles fonctions $\vec{\varphi}$, K étant une fonction localement sommable à valeurs dans B_1, la relation (B) garde un sens. Donc la relation (A) permet de dire quand K définit un opérateur de convolution de $L^p(R^n, B_2)$ à $L^q(R^n, B_3)$.

Il est clair que l'on peut remplacer dans ce qui précède K par une distribution à valeurs dans B_1 : nous supposerons toujours K tempérée de façon à pouvoir parler de sa transformée de Fourier.

On conçoit que beaucoup de propriétés bien connues pour des distributions scalaires (voir [28]) et en particulier pour des fonctions de $L^p(R^n, \mathbf{C})$ (voir [7]) se généralisent au cas vectoriel : nous rappelons ci-après comment s'effectue cette généralisation pour des propriétés utilisables dans le cas de fonctions vectorielles appartenant à des espaces L^p.

Nous considérons d'abord, au lieu des espaces $L^p(\mathbf{R}^n, B_2)$ et $L^q(\mathbf{R}^n, B_3)$ des espaces plus généraux de distributions (espaces notés D_2 et D_3), par exemple, pour ne pas devoir recopier ces généralités lorsqu'on introduira des poids sur $\mathbf{R}^n$ (voir [15]). Et nous avons supposé que les espaces $D_j (j = 2$ et 3) vérifient les hypothèses (H) plutôt que d'autres, parce que ces hypothèses (H) sont vérifiées dans les cas que nous considérerons.

1.A. Notations générales.

Espaces vectoriels topologiques et espaces de Banach.

Ces espaces sont indifféremment réels ou complexes s'il n'intervient pas de transformation de Fourier, obligatoirement complexes sinon. La lettre H est réservée pour désigner un espace de Hilbert, et la lettre B pour désigner un espace de Banach. Comme tout ce travail est relatif à la catégorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés où les « flèches » sont les applications linéaires continues,

il nous arrivera d'écrire si A, B, D sont de tels espaces :

$$(1) \qquad A \underset{\text{dense}}{\overset{f}{\hookrightarrow}} B \xrightarrow{g} D$$

ce qui signifie que f et g sont des applications linéaires continues et que f est une injection à image dense. L'ensemble des flèches $B \to D$ est noté $\mathcal{L}(B, D)$ ou $\mathcal{L}(B)$ si $B = D$. Le dual (ou l'antidual si le corps est C) fort de A est noté A', la dualité étant donnée par la forme bilinéaire

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} A \times A' & \longrightarrow & R \quad \text{ou} \quad C \\ (\vec{a}, \vec{a}') & \longmapsto & \langle \vec{a}, \vec{a}' \rangle_{A,A'} \end{array}$$

Les groupes.

Dans ce qui suit, on cherche à traiter simultanément les cas relatifs aux groupes $G = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$. Le point courant de G est noté :

$$x = (x_1 \ldots x_n).$$

Le groupe dual de G est noté G' (c'est $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{Z}^n$ ou $\mathbf{T}^n$ suivant les cas) de point courant $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$.

Les caractères sont donnés par $e^{2\pi i x.\xi}$ avec

$$(3) \qquad x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i.$$

On définit $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et de même $|\xi|$.

La mesure invariante sur G (resp. G') est notée dx (resp. $d\xi$).

Les distributions sur G *et* G'.

Nous employons les notations et les résultats de [28] et [29], l'emploi des lettres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ se prolongeant naturellement de $\mathbf{R}^n$ à $\mathbf{T}^n$ et $\mathbf{Z}^n$:

$\mathcal{D}(\mathbf{T}^n) = \mathcal{S}(\mathbf{T}^n)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ sur le tore.

$\mathcal{S}(\mathbf{Z}^n)$ désigne l'espace des suites à décroissance rapide.

B étant un espace de Banach, rappelons que les espaces de fonctions différentiables ou de distributions définies sur G à valeurs dans B se définissent par produit tensoriel :

$$(4) \qquad \mathcal{D}'\varepsilon B = \mathcal{D}' \underset{\varepsilon}{\widehat{\otimes}} B = \mathcal{D}' \underset{\pi}{\widehat{\otimes}} B = \mathcal{L}_b(\mathcal{D}, B).$$

On se bornera à la considération d'espaces D *de distributions tempérées :* $G \to B$ *vérifiant les conditions* (H) :

DÉFINITION 1. — B_j *étant un espace de Banach* ($j = 2$ ou 3) *on dit qu'un sous-espace vectoriel* D_j *de* $\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_j$ *vérifie les conditions* (H) *si :*

$$(H)\quad \begin{cases} - \ D_j \textit{ est un espace de Banach réflexif} \\ - \ \textit{on a } (5) \quad \mathcal{S}(G)\widehat{\otimes}B_j \hookrightarrow D_j \hookrightarrow \mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_j \\ - \ \textit{l'injection de } \mathcal{D}(G)\otimes B_j \textit{ dans } D_j \textit{ a une image dense} \\ - \ \mathcal{D}(G)\otimes B'_3 \textit{ est dense dans } D'_3. \end{cases}$$

Nous verrons en effet (relation (20)) que D'_3 peut être identifié à un sous-espace de $\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B'_3$; et ceci donne un sens à la dernière condition.

Convolution de distributions à valeurs vectorielles.

On suppose donnés trois espaces de Banach B_j ($j = 1, 2, 3$) et une application bilinéaire continue notée $\times$:

$$(6)\qquad \begin{aligned} B_1 \times B_2 &\longrightarrow B_3 \\ (b_1, b_2) &\longmapsto b_1 \times b_2 = b_3 \end{aligned}$$

qui est telle que :

(7) si $b_1 \times b_2 = 0$ pour tout b_2 de B_2, alors $b_1 = 0$.

On considérera ainsi :

Exemple 1.

A étant un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(B)$

$$(8)\qquad \begin{aligned} A \times B &\longrightarrow B \\ (K, b) &\longmapsto Kb \end{aligned}$$

Exemple 2.

H étant un espace de Hilbert

$$(9)\qquad \begin{aligned} l^2 \times H &\longrightarrow l^2(H) \\ ((a_n)_n, \vec{h}) &\longmapsto (a_n\vec{h})_n. \end{aligned}$$

Exemple 3.

$l^\infty(B_1)$ désignant l'espace des suites d'éléments de l'espace de Banach B_1 dont les normes sont uniformément bornées;

on suppose donnée une application bilinéaire

$$(10) \qquad \begin{aligned} B_1 \times H &\longrightarrow H \\ (b_1, h) &\longmapsto b_1 h \end{aligned}$$

qui vérifie la condition (7).

Et l'on considère

$$(11) \qquad \begin{aligned} l^\infty(B_1) \times l^2(H) &\longrightarrow l^2(H) \\ ((a_n)_n, (b_n)_n) &\longmapsto (a_n b_n)_n. \end{aligned}$$

On trouvera par ailleurs beaucoup d'autres exemples (opérateurs de convolution définis par la résolvante d'un opérateur non borné d'un espace de Banach, opérateurs de [3]...).

Opérateurs de convolution (ou « convoluteurs ») de D_2 *à* D_3.

On se donne $G = \mathbf{R}^n$, les 3 espaces de Banach B_j et (6), vérifiant (7), ainsi que 2 espaces de distributions tempérées

$$(12) \qquad D_i \hookrightarrow \mathcal{S}'(G)\hat{\otimes}B_i \quad i = 2,3.$$

Il est clair que la convolution de toute K de $\mathcal{S}'(G)\hat{\otimes}B_1$ par toute $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{D}(G) \otimes B_2$ se définit directement (c'est une régularisation).

Nous remarquons que si l'on prend toutes les $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{D}(G) \otimes B_2$ de la forme

$$(13) \qquad \vec{\varphi} = \vec{b}_2\varphi \quad \text{avec} \quad b_2 \in B_2 \quad \text{et} \quad \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(G)$$

et que si l'on a pour toutes ces $\vec{\varphi}$, $K * \varphi = 0$,
soit

$$(K * \varphi)\vec{b}_2 = 0, \qquad \forall\varphi, \qquad \forall b_2$$

alors d'après (7), cela entraîne $K * \varphi = 0$, $\forall\varphi$; donc $K = 0$.

Nous posons alors la

Définition 2 (espace $\mathcal{C}$ des convoluteurs de D_2 à D_3). — *L'espace* $\mathcal{C}$ *des convoluteurs à valeurs dans* B_1 *envoyant* D_2 *dans* D_3 *est l'espace des distributions tempérées* K *à valeurs dans* B_1 *qui par convolution envoient* $\mathcal{D} \otimes B_2$ *muni de la topologie induite par* D_2, *dans* D_3. *Grâce à la remarque précédente on peut munir cet espace de la norme d'opérateurs :*

$$(14) \qquad ||K||_{\mathcal{C}} = \sup||K * \vec{\varphi}||$$

lorsque $\vec{\varphi}$ décrit les fonctions de $\mathfrak{D} \otimes B_2$ qui sont dans la boule unité de D_2. Faisant subir à cette situation la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, on obtient la

DÉFINITION 3 (espace $\mathfrak{M}$ des multiplicateurs de $\mathcal{F}D_2$ à $\mathcal{F}D_3$).
. $\mathcal{F}D_j (j = 2,3)$ *désigne l'espace (naturellement muni d'une structure d'espace de Banach) des transformées de Fourier des éléments de* D_j.
. *On définit de même*

$$\mathcal{F}\mathcal{C} = \mathfrak{M}. \tag{15}$$

. *L'espace* $\mathfrak{M}$ *(naturellement normé) est appelé l'espace des multiplicateurs à valeurs dans* B_1, *de* $\mathcal{F}D_2$ *à* $\mathcal{F}D_3$.
(Par produit multiplicatif associé à (6) les éléments de $\mathfrak{M}$ définissent des opérations linéaires continues de $\mathcal{F}D_2$ à $\mathcal{F}D_3$.)

1.B. Propriétés générales des convoluteurs.

Transposition (voir [27] et [3] pour le cas vectoriel; et [28] dans le cas scalaire).

a) L'opération suivante correspond à la transposition dans le cas où $B_1 = \mathcal{L}(B_2 B_3)$.

DÉFINITION 4. — *Étant donnée l'application* $\times$ *définie par* (6) *et vérifiant* (7), *nous lui associons* $\overset{t}{\times}$ *ainsi définie*

$$\begin{aligned} B_1 \times B_3' &\longrightarrow B_2' \\ (b_1, b_3') &\longmapsto b_1 \overset{t}{\times} b_3' \end{aligned} \tag{16}$$

avec

$$\forall b_2 \in B_2 : \langle b_2, b_1 \overset{t}{\times} b_3' \rangle_{B_2 \times B_2'} = \langle b_1 \times b_2, b_3' \rangle_{B_3 \times B_3'}$$

(cette application est bilinéaire, continue et vérifie (7)).
Ainsi à (8), (9), (11) il correspond respectivement :

$$\begin{aligned} A \times B' &\longrightarrow B' \\ (K, e') &\longmapsto {}^tK e' \end{aligned} \tag{17}$$

où ${}^t\mathrm{K}$ est le transposé de l'opérateur K

$$(18)\qquad \begin{aligned} l^2 \times l^2(\mathrm{H}) &\longrightarrow \mathrm{H} \\ ((a_n)_n, (b_n)_n) &\longmapsto \sum_{-\infty}^{\infty} a_n . \vec{b}_n \end{aligned}$$

alors que l'application (11) se correspond à elle-même.

b) $\mathcal{S}(\mathrm{G})$ et B étant des espaces de Fréchet, $\mathcal{S}(\mathrm{G})$ étant nucléaire, le dual de $\mathcal{S}(\mathrm{G})\widehat{\otimes}\mathrm{B}$ est $\mathcal{S}'(\mathrm{G})\widehat{\otimes}\mathrm{B}'$ la dualité étant donnée par

$$(19)\qquad \Big\langle \sum_i b_i \otimes \varphi_i, \sum_j b'_j \otimes \mathrm{T}_j \Big\rangle = \sum_{ij} \langle b_i b'_j \rangle \, \mathrm{T}_j(\varphi).$$

Par transposition de (5) il vient :

$$(20)\qquad \mathcal{S}'(\mathrm{G})\widehat{\otimes}\mathrm{B}' \hookleftarrow \mathrm{D}'.$$

Ceci permet d'identifier D' à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathrm{G})\widehat{\otimes}\mathrm{B}'$.

c) Les notations étant celles de la définition 2, cherchons la transposée de l'application

$$\mathrm{K}*:\ \mathrm{D}_2 \to \mathrm{D}_3.$$

Vues les hypothèses de densité (voir (H)), il suffit de calculer $\langle \mathrm{K} * \varphi, \Psi \rangle$

$$(21)\qquad \text{pour}\quad \varphi = \sum_i b_2^i \varphi_i, \qquad b_2^i \in \mathrm{B}_2, \qquad \varphi_i \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$$

$$(22)\qquad \Psi = \sum_j b_3'^j \Psi_j, \qquad b_3'^j \in \mathrm{B}'_3, \qquad \Psi_j \in \mathcal{D}(\mathrm{G}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{K} * \varphi, \Psi \rangle &= \int_{x\in\mathrm{G}} dx \Big\langle \sum_i (\mathrm{K} * \varphi_i)(x) \times b_2^i, \sum_j b_3'^j \, \Psi_j(x) \Big\rangle_{\mathrm{B}_3 \times \mathrm{B}'_3} \\ &= \int dx \Big\langle \sum_i b_2^i, \sum_j (\mathrm{K} * \varphi_i)(x) \ \Psi_j(x) \overset{t}{\times} b_3'^j \Big\rangle_{\mathrm{B}_2 \times \mathrm{B}'_2} \\ &= \Big\langle \sum_i b_2^i, \int_{y\in\mathrm{G}} \varphi_i(y)(\mathrm{K} * \Psi_j)(y) \overset{t}{\times} b_3'^j \, dy \Big\rangle_{\mathrm{B}_2 \times \mathrm{B}'_2} \\ &= \int_{y\in\mathrm{G}} dy \Big\langle \sum_i b_2^i \varphi_i, \check{\mathrm{K}} * \Psi \Big\rangle_{\mathrm{B}_2 \times \mathrm{B}'_2} \\ &= \langle \varphi, \check{\mathrm{K}} * \Psi \rangle \end{aligned}$$

(23) où l'on a posé $\check{\mathrm{K}}(x) = \mathrm{K}(-x)$. Nous énoncerons

Proposition 1. — *Les* B_j *sont des espaces de Banach tels que l'on a* (6) *et* (7). *Les* $\mathrm{D}_j \in \mathcal{S}'(\mathrm{G})\widehat{\otimes}\mathrm{B}_j$ $(j = 2,3)$ *vérifiant les*

hypothèses (H); *alors l'espace* $\mathcal{C}$ *des convoluteurs* $K\ D_2 \longrightarrow D_3$ *à valeurs dans* B_1 *est isométrique à l'espace des convoluteurs* $D_3' \to D_2'$ *à valeurs dans* B_1 *pour l'application* (16) (l'isométrie est définie par $K \to \check{K}$ donnée par (23)).

Fermeture de la boule unité de $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_1$.

Proposition 2. — *Les notations étant celles de la définition* 2, *la boule unité (fermée) de* $\mathcal{C}$ *est fermée dans* $\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_1$ (et même dans cet espace muni de la topologie induite par $\mathcal{L}_s(\mathcal{S}(G), B_1)$). (Ceci correspond à un théorème de [7].)

En effet, si les $K_i \in \mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_1$ décrivent une boule de $\mathcal{C}$ il existe une constante C telle que

$$\forall f \in \mathcal{D}(G) \otimes B_2, \qquad \forall g \in \mathcal{D}(G) \otimes B_3'$$
$$|\langle K_i * f, g\rangle| = |\langle K_i, \hat{f} * g\rangle| \leqq C|f|_{D_2}|g|_{D_3'}$$

Comme $K_i \to K$ dans $\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_1$ on a

$$\lim |\langle K_i * f, g\rangle| = |\langle K * f, g\rangle| \leqslant C|f|_{D_2}|g|_{D_3'}$$

d'où la conclusion.

Intégration par rapport à une mesure bornée sur Ω *d'une fonction :* $\Omega \to \mathfrak{M}$.

Examinons d'abord le cas scalaire :

Ce qui suit correspond à un théorème de Stečkin ([30]), voir aussi J. Schwartz ([27]).

Proposition 3. — *Considérons deux espaces* $D_j (j = 2, 3)$ *vérifiant* (H) *et appelons* $\mathfrak{M}$ *l'espace des multiplicateurs scalaires* $\mathcal{F}D_2 \to \mathcal{F}D_3$ *correspondant à l'application bilinéaire*

$$(24) \qquad \begin{aligned} \mathbf{C} \times B &\longrightarrow B \\ (\alpha, b) &\longmapsto \alpha b \end{aligned}$$

(*donc* $B_2 = B_3 = B$).

Ω *étant un espace localement compact, notons* M *l'espace des mesures (complexes) bornées sur* Ω. *Soit* $\mu \in M$. *Pour tout* $\omega \in \Omega$, *on se donne un multiplicateur* $Y_\omega(.)$ *de* $\mathfrak{M}$ *tel que :*

$$(25) \quad \textit{l'application} \quad \begin{aligned} \Omega \times G' &\longrightarrow \mathbf{C} \\ (\omega, \xi) &\longmapsto Y_\omega(\xi) \end{aligned}$$

soit mesurable pour la mesure $d\omega$, $d\xi$.

(26) *lorsque* ω *varie, les normes des multiplicateurs* $Y_\omega(.)$ *sont (uniformément) bornées par une constante* C.

(27) *La fonction*

$$\Phi(\xi) = \int_{\omega\in\Omega} Y_\omega(\xi)\, d\mu(\omega)$$

est localement sommable et à croissance lente. Alors c'est un élément de $\mathfrak{M}$ *de norme* $\leqslant C\|\mu\|$.

(28) En effet, f et g étant des éléments de $\mathcal{D}(G)\otimes B$ et $\mathcal{D}(G)\otimes B'$, posons

$$F(.) = \overline{\mathcal{F}}(\Phi(.))$$
$$\varphi = \mathcal{F}f, \qquad \Psi = \mathcal{F}g, \qquad \tilde{f} = F * f.$$

L'identité de Parseval donne

$$\langle F * f, g\rangle = \int \langle \overrightarrow{f(\xi)}\, \Phi(\xi), \quad \overleftarrow{\Psi(\xi)}\rangle\, d\xi$$
$$= \int \left\langle \int \overrightarrow{\varphi(\xi)}\, H_\omega(\xi)\, d\mu(\omega), \quad \overleftarrow{\Psi(\xi)}\right\rangle d\xi.$$

Les hypothèses du théorème de Fubini étant satisfaites (d'après (25), (27), (28)) on a :

$$= \int d\mu(\omega) \int_\xi \langle (\overrightarrow{\varphi(\xi)} Y_\omega(\xi), \ \overleftarrow{\Psi(\xi)}\rangle\, d\xi.$$

Donc d'après (26)

$$|\langle F * f, g\rangle| \leqslant C\|\mu\| |f|_{D_2} |g|_{D_3'}. \tag{29}$$

D'où l'assertion.

Les exemples seront donnés plus tard.

Nous aurons besoin de la remarque simple suivante :

Proposition 4.

Soit B *un espace de Banach.*

Soient D_j ($j = 2$ *et* 3) *deux sous-espaces de* $\mathcal{S}'(G)\,\hat{\otimes}\,B$, *vérifiant* (H).

Soit B_0 *un espace de Banach et* . *une application bilinéaire continue :*

$$\begin{aligned} B_0 \times B &\longrightarrow B \\ (b_0, b) &\longmapsto b_0 . b. \end{aligned} \tag{30}$$

Alors pour tout $b_0 \in B_0$, *et tout multiplicateur scalaire* $\hat{K}$ *de* $\mathcal{F}D_2$ *à* $\mathcal{F}D_3$ *pour l'application bilinéaire naturelle :*

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times B &\longrightarrow B \\ (\lambda, \vec{b}) &\longmapsto \lambda \vec{b} \end{aligned}$$

la distribution $b_0\hat{K}$, *à valeurs dans* B_0 *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}D_2$ *à* $\mathcal{F}D_3$, *pour l'application bilinéaire* (30), *et de norme majorée par* $|b_0|\,|\hat{K}_m|$.

Nous allons à présent nous restreindre au seul cas auquel nous nous intéresserons dès lors ici (voir un autre cas dans le travail [15]).

1.C. Cas où les D_j sont des espaces L^p.

Introduisons d'abord quelques notations générales concernant les espaces de Lorentz voir ([9]).

On se donne un espace localement compact Ω' muni d'une mesure de Radon $\mu > 0$. B étant un espace de Banach, par « fonction » f: $\Omega' \to B$ nous entendons une classe d'équivalence (relativement à μ) de fonctions mesurables au sens de Lusin.

Définition 5 (voir [9] par exemple).

1. *A la fonction f on associe*

— *la distribution* f_* *de f définie par :*

$$\begin{aligned} R^+ &\longrightarrow R^+ \\ \sigma &\longmapsto f_*(\sigma) = \|f| > \sigma| \end{aligned} \tag{31}$$

$f_*(\sigma)$ *est la* μ-*mesure de l'ensemble des points* ω' *de* Ω' *où* $|f(\omega')| > \sigma$.

— *la fonction* f^* *équimesurable à f.*

$$f^*(t) = \inf\{t \in R^+, \quad f_*(y) \leqslant t\} \tag{32}$$

f^* : $R^+ \to R^+$ *est continue à droite et a même distribution que f.*

2. *Pour tout* $q \in]0, +\infty[$ *et tout* $s \in]0, +\infty]$, *l'espace de Lorentz* $L^{qs}(B)$ *est* (33) *défini comme l'espace des* f: $\Omega' \to B$ *telles que*

$$|f|_{qs} = \left(\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{q}} f^*(u)\right)^s \frac{du}{u}\right)^{1/s} < \infty.$$

On sait :

— que ces espaces sont quasinormables (voir Köthe [12]) en ce sens que l'application

$$\begin{aligned} L^{qs}(B) &\longrightarrow R^+ \\ f &\longmapsto |f|_{qs} \end{aligned}$$

a les propriétés d'une norme, sauf la propriété concernant l'inégalité triangulaire, qui est remplacée par ceci :

$$\exists C(qs),\ \forall f \text{ et } g \in L^{qs}(B),\ |f+g|_{qs} \leqslant C(qs)(|f|_{qs} + |g|_{qs}).$$

(Cette « quasi norme » définit naturellement une structure d'evts sur $L^{qs}(B)$.)

— que pour q et $s > 1$, les espaces vectoriels topologiques $L^{qs}(B)$ sont en fait normables et complets (ils sont isomorphes à des espaces de Banach);

— que si l'on fait $s = q$, $L^{ss}(B)$ est isomorphe à l'espace de Lebesgue $L^s(B)$ des classes de fonctions f: $\Omega' \to B$ telles que :

$$(34) \qquad |f|_s = \left(\int_{\omega' \in \Omega'} |f(\omega')|^s \, d\mu(\omega')\right)^{\frac{1}{s}} < \infty$$

— que L^{qs} est « une fonction croissante de s »; en ce sens que

$$s_1 < s_2 \Longrightarrow L^{qs_1}(\ \ , B) \to L^{qs_2}(\Omega, B)$$

— que $L^{q\infty}$ intervient très naturellement dans les applications de type faible (telles qu'elles sont définies par exemple dans [33]).

Adoptant les notations du § 1 B, et faisant dans les définitions ci-dessus $\Omega' = G$ muni de la mesure de Haar dx :

(35) — *nous faisons dorénavant l'hypothèse :* B_3 *réflexif*

(36) — *nous poserons toujours*

$$D_2 = L^p(G, B_2), \qquad D_3 = L^q(G, B_3)$$

avec $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.

(37) *Alors, on sait qu'alors* D_3 *est réflexif et que son dual est* $L^{q'}(G, B_3')$ *avec* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

$\left(\text{De même on pose } \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.\right)$

Nous appellerons cellule de G tout ensemble de points x de G dont les coordonnées x^i sont telles que

$$(38) \qquad C^i < |x^i - x_0^i| \leqslant C'^i \quad i = 1, \ldots, n$$

où les $3n$ constantes C^i, C'^i, x_0^i dépendent de la cellule.

La théorie de l'interpolation des applications linéaires (voir par exemple [4], [17]) a d'importantes applications concernant la théorie des multiplicateurs. On utilise surtout les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1 (Version de Hunt du théorème de Marcinkiewicz : voir [9]). — *Soient* $(\Omega'\mu')$ *et* $(\Omega''\mu'')$ *deux espaces localement compacts munis chacun d'une mesure de Radon positive* (μ' *ou* μ''). *Notons* $\tilde{L}^{qs}(\Omega'\ B)$ *l'espace des fonctions étagées* $\Omega' \to B$ *muni de la topologie induite par* $L^{qs}(\Omega', B)$. *Alors si* p_j, q_j, r_j $(j = 0, 1)$ *sont des nombres tels que :*

$$p_0 \neq p_1, \qquad q_0 \neq q_1,$$
$$p_j \quad \text{et} \quad q_j \in]0, \ +\infty[, \qquad r_j \in]0, \ +\infty]$$

et si T *est une application linéaire continue :*

$$\tilde{L}^{p_j r_j}(\Omega', B_2) \to L^{q_j \infty}(\Omega'', B_3);$$

alors $\forall s \in]0, +\infty]$, *posant pour tout* $\theta \in]0, 1[$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

on a une application linéaire continue :

$$\tilde{L}^{p_\theta s}(\Omega', B_2) \to L^{q_\theta s}(\Omega'', B_3).$$

L'énoncé précédent est encore vrai si on supprime les tilda. Dans le cas où $\Omega' = G$, le théorème est encore vrai si $\tilde{L}^{p_j r_j}$ représente seulement les fonctions combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques de cellules, ou même d'un certain type de cellule (voir § 2, lemme 1). L'intérêt de remplacer $L^{p_j r_j}$ par $\tilde{L}^{p_j r_j}$ est que dans l'énoncé du lemme de Riesz (§ 2) on n'a que des sommes finies qui interviennent (on compensera par la suite cette restriction par prolongement continu).

Une classe importante de convoluteurs est donnée par le théorème de Young, ou mieux le

THÉORÈME 2. (O. Neil, voir [23]). — *On se donne* (7). *p, q, r étant des nombres tels que*

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+1, \tag{39}$$

$$\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\in[0,1],\qquad \frac{1}{r}\in\,]0,1[,$$

alors on a une application bilinéaire continue

$$L^{r\infty}(B_1)*L^p(B_2)\to L^{qp}(B_3) \tag{40}$$

(41) *donc a fortiori si $q\geqslant p$ on a:*

$$L^{r\infty}(B_1)*L^p(B_2)\to L^q(B_3). \tag{42}$$

Dans le cas scalaire ceci entraîne le lemme de Sobolev:

La convolution par $\dfrac{1}{|x|^{n/a}}$ envoie L^p dans L^q si

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{p}=1+\frac{1}{q}\quad (a,\ p \text{ et } q>1 \text{ avec } q\geqslant p). \tag{43}$$

En plus de ces 2 théorèmes importants nous utiliserons les

Remarques.

1° Dans une première étape (inégalités de Calderon-Zygmund) on va considérer des distributions $K\in\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_1$ définies par des fonctions localement sommables (à croissance lente). On voit (par régularisation) que pour de telles K:

(44) la définition 2 est équivalente à la définition correspondante obtenue en remplaçant $\mathcal{D}(G)\otimes B_2$ par les fonctions (étagées) sur G qui sont combinaisons linéaires finies (à coefficients dans B_2) de fonctions caractéristiques de cellules.

Ensuite, dans les applications, en utilisant les inégalités de Calderon-Zygmund et la fermeture de la boule de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{S}'(G)\widehat{\otimes}B_1$, on en déduira l'existence de convoluteurs qui ne sont plus des fonctions.

2° Pour tout $\xi_0 \in R^n$, l'application

$$\begin{aligned} L^p(B_2) &\longrightarrow L^p(B_2) \\ f(.) &\longmapsto e^{2\pi i \xi_0}.f(.) \end{aligned}$$

est une isométrie.

Donc, la translation de ξ_0 opérant dans $\mathcal{F}L^p$:

$$\hat{f}(.) \longmapsto \hat{f}(\xi_0 + .)$$

est une isométrie. Donc si $\hat{K}$ est un multiplicateur (de $L^p(G, B_2)$ à $L^q(G, B_3)$) alors $\hat{K}(\xi_0 + .)$ est encore un multiplicateur (de même norme et de même type que $\hat{K}$).

3° Mieux, dans le cas où $B_2 = l^2(H) = B_3$ et $B_1 = l^\infty$, si :

$$\hat{\vec{K}}(\xi) = (\hat{K}_l(\xi))_{l \in Z}$$

est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ pour l'application bilinéaire (11) où $B_1 = \mathbf{C}$; alors, quelle que soit la suite ξ_0^l de points de G, la fonction :

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow l^\infty \\ \xi &\longmapsto \hat{K}_l(\xi_0^l + \xi) \end{aligned}$$

est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$.

4° Se donnant (6), on suppose qu'une distribution K_1 : $G \to B_1$ est un convoluteur du type :

$$L^p(R_{x_1}, B_2) \to L^p(R_{x_1}, B_3).$$

Notons $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \bar{x})$ le point courant de R^n_x. Si φ est une fonction quelconque de $\mathcal{D}(G) \otimes B_2$, on a :

$$\int_{x_1 \in R} dx_1 \left| \int_{y \in G} K_1(x_1 - y, \bar{x})\, \varphi(y, \bar{x}) \right|^p dy \leqslant C \int |\varphi(x_1 \bar{x})|^p\, dx_1.$$

En intégrant par rapport à $\bar{x}$ chaque membre il vient que

$$|(K \otimes \delta_{\bar{x}}) * \varphi| \leqslant C|\varphi|_p.$$

où $\delta_{\bar{x}}$ représente la distribution de Dirac concentrée à l'origine de $\mathbf{R}^{n-1}_{\bar{x}}$. Donc $K_1 \otimes \delta_{\bar{x}}$ est un convoluteur du type :

$$L^p(R^n, B_2) \to L^p(R^n, B_3).$$

2. INÉGALITÉS DE CALDERON-ZYGMUND.

Ces inégalités jouent un rôle essentiel dans la théorie.

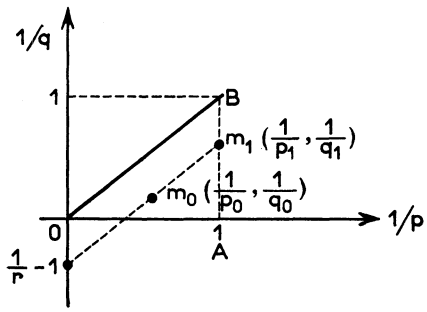
(45) Suivant Jones ([10]) nous introduisons certaines fonctions numériques $t \to \Phi_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ définies sur $\mathbf{R}^+$. Chacune d'elles est supposée continue, croissante (strictement) de 0 à $+\infty$ lorsque t croît de 0 à $+\infty$, et telles qu'il existe une constante C_3 telle que

$$(46) \qquad \forall j = 1, \ldots n, \qquad \forall t \in \mathbf{R}^+, \qquad \frac{\Phi_j(2t)}{\Phi_j(t)} \leqslant C_3.$$

On considère dans ce paragraphe, la convolution des distributions vectorielles (définies sur $R^n = G$, à valeurs dans B_1, B_2 ou B_3 qui est associée à l'application (6).

THÉORÈME 3. — *On se donne des nombres r, p_j, q_j $(j = 0$ ou $1)$ tels que*

$$(47) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p_j} = 1 + \dfrac{1}{q_j}, & q_0 \neq q_1 \\ 0 \leqslant \dfrac{1}{q_1} \quad \text{et} \quad \dfrac{1}{r} \leqslant 1; & \dfrac{1}{p_1} = 1 \\ 0 \leqslant \dfrac{1}{p_0} \quad \text{et} \quad \dfrac{1}{q_0} < 1. \end{cases}$$



(48) K *est une fonction localement sommable* $G \to B_1$ *et à croissance lente qui est telle que*

1° $\exists C_1 > 0$ *et* $A \in N$ *tels que pour tout* $y \in Q_{l-A}$ *on a* $\forall l \in Z$

$$(49) \qquad \int_{x \in G \setminus Q_l} |K(x - y) - K(x)|^r \, dx \leqslant C_1$$

où Q_l *désigne* $\forall l \in Z$, *l'ensemble des points* x *de* G *tels que*

$$(50) \qquad |x_i| \leqslant \Phi_i(2^l) \qquad \textit{pour} \qquad i = 1 \ldots n.$$

2° *L'opérateur* K* *envoie l'espace des fonctions étagées* $R^n \to B_2$ *muni de la norme de* $L^{p_0}(G, B_2)$ *dans* $L^{q_0\infty}(G, B_3)$ *et sa norme est inférieure à* C_0.

Alors, posant pour tout $\theta \in]0, 1[$

$$(51) \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

K* *définit pour tout* $s \in [0, +\infty]$ *une application continue de* $\tilde{L}^{p_\theta s}(G, B_2)$ *dans* $L^{q_\theta s}(G, B_3)$.

(52) *De plus, il existe une majoration de la norme de cette application en fonction de* n, p_j, q_j, $\theta \ldots \Phi^i$, C_0, $C_1 \ldots$ *mais ne faisant pas intervenir* K.

Commentaires.

— Pour $\Phi_1(t) \equiv \cdots \equiv \Phi_j(t) \equiv t$, le théorème 1 est équivalent à la version vectorielle donnée par J. Schwartz (voir [27]) du théorème de Calderon-Zygmund.

— Pour $\Phi_2(t) \equiv \cdots \Phi_n(t) \equiv t$, le théorème 1 est équivalent à une version vectorielle du théorème de Arnèse ([1]).

Preuve du théorème 3.

Elle s'effectue en 4 étapes.

— Dans une première étape préliminaire on établit l'existence d'une suite doublement infinie P_k de partitions de

$$\begin{cases} G^+ = \text{la partie positive de } G = \mathbf{R}^n \\ \quad = \text{les points } x = (x_1 \ldots x_n) \text{ de } \mathbf{R}^n \text{ de coordonnées } \geqslant 0 \end{cases}$$

en cellules ayant certaines propriétés.

(Ceci correspond au § 4 de [11].)

— Dans une deuxième étape préliminaire on établit une certaines écriture et certaines inégalités relatives à certaines fonctions de $L^1(G, B_2)$.

Ceci correspond au lemme de Riesz tel qu'il est énoncé par Stein dans [31].

— L'étape essentielle est la 3e qui consiste à établir que K* définit un opérateur continu d'un sous-espace vectoriel

dense dans $L^1(G, B_2)$, muni de la topologie induite, dans $L^{r_1,\infty}(G, B_3)$.

— L'étape terminale consiste à appliquer l'extension donnée par Hunt du théorème de Marcinkiewicz (voir [9] en général ou [33] tome 2 et [4] dans des cas particuliers).

2.A. Première étape. Construction d'une suite de partition P_ν de G^+.

La méthode de Jones (§ 4 de [10]) permet de démontrer le

LEMME 1. — *On se donne n fonctions* $\Phi_i : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *telles que* (46).

Alors il existe une suite doublement infinie $(P_\nu)_{\nu \in \mathbf{Z}}$ *de partitions de* G^+ *en cellules telles que :*

1. *Les cellules (égales) de la partition* P_ν *sont délimitées par n séries d'hyperplans équidistants d'équation*

(53) — *pour* $\nu = 0$

$$x_i = l\Phi_i(1) \qquad \text{avec} \qquad l \in \mathrm{N}, \quad i = 1, \ldots, n$$

(54) — *pour* $\nu < 0$

$$x_i = \frac{l\Phi_i(1)}{k_1^i \ldots k_\nu^i} \qquad \text{avec} \qquad l \in \mathrm{N}, \quad i = 1, \ldots, n$$

(55) — *pour* $\nu > 0$

$$x_i = l\Phi_i(1) k_1^i \ldots k_\nu^i \qquad \text{avec} \qquad l \in \mathrm{N}, \quad i = 1, \ldots, n$$

les nombres k_ν^i *étant entiers et tels que*

$$1 \leqslant k_\nu^i \leqslant [2\, C_3]. \tag{56}$$

2. *Quel que soit l'entier* $i \in \{1 \ldots n\}$ *la longueur* d_ν^i *des arêtes parallèles au* i^e *axe de coordonnées de cellules, de la partition* P_ν *est compris entre*

$$\frac{1}{2}\Phi_i(2^\nu) \qquad \text{et} \qquad \Phi_i(2^\nu).$$

Donc les partitions P_ν de G^+ sont de plus en plus fines (resp. grossières) lorsque $\nu \to -\infty$ (resp. $+\infty$); les cellules de la partition P_ν sont toutes égales et « sensiblement » sem-

blables à la cellule Q_ν d'arêtes $\Phi_i(2^\nu)$; et $P_{\nu-1}$ se déduit de P_ν en divisant chaque cellule de P en au plus $[2C_3]^n$ cellules égales.

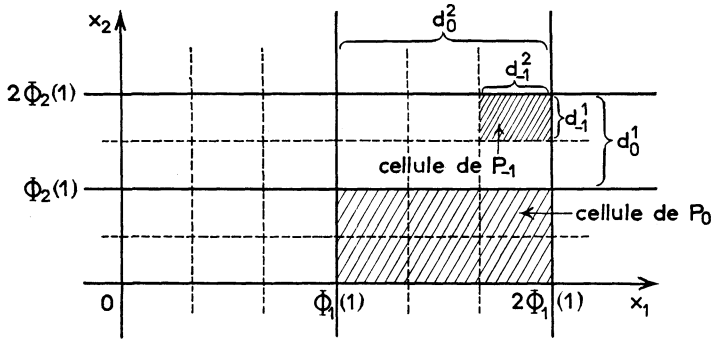


Figure pour $G = R^2$

Démonstration.

a) Le lemme est évident pour $\Phi_1(t) \equiv \cdots \Phi_n(t) \equiv t$. On part de P_0 définie par les hyperplans $x_i = n$ puis l'on définit $P_{-1}P_{-2} \ldots$ en divisant successivement chaque arête par 2 puis $P_{+1}P_{+2} \ldots$ en doublant successivement chaque arête. De plus quels que soient ν et ν' les cellules de P_ν et $P_{\nu'}$ sont semblables puisque ce sont des cubes d'arête 2^ν. Pour passer de P_ν à $P_{\nu-1}$ (resp. P_ν à $P_{\nu+1}$) le rapport de dissection (resp. de multiplication) de chaque arête est toujours égal à 2. Il n'en sera plus de même pour des Φ_i quelconques.

b) La démonstration ci-après transpose la démonstration de Jones (relative à $\nu \leqslant 0$ et $\Phi_2(t) \equiv \cdots \Phi_n(t) = t$). La partition P_0 est définie par les hyperplans d'équations $x_i = l\Phi_i(1)$ avec $l \in N$.

c) Pour définir P_1, P_2, ... il suffit d'après (57) de définir par récurrence la suite des nombres $k_1 \ldots k_\nu \ldots$. Pour tout $\nu \geqslant 0$, $d_\nu^1 \ldots d_\nu^n$ désignant les dimensions des arêtes de chaque cellule de la partition P_ν.

P_ν est définie par les hyperplans $x^i = \Phi_i(1)k_1^i \ldots k_\nu^i$; $i = 1 \ldots n$
avec

$$k_1^i = \left[\frac{\Phi_i(2)}{\Phi_i(1)}\right] \tag{57}$$

(où le symbole $[x]$ signifie : partie entière de x)

et

$$(58) \qquad k_\nu^i = \left[(k_1^i)^{-1} \ldots (k_{\nu-1}^i)^{-1} \frac{\Phi_i(2^\nu)}{\Phi_i(1)}\right].$$

On a $k_\nu^i \geqslant 1$ car si l'on suppose $k_1^i, \ldots k_\nu^i \geqslant 1$, il vient :

$$(59) \quad (k_1^i)^{-1} \ldots (k_\nu^i)^{-1} \frac{\Phi_i(2^{\nu+1})}{\Phi_i(1)}$$
$$= (k_\nu^i)^{-1} \left\{(k_\nu^i)^{-1} \ldots (k_{\nu-1}^i)^{-1} \frac{\Phi_i(2^\nu)}{\Phi_i(1)}\right\} \frac{\Phi_i(2^{\nu+1})}{\Phi_i(2)}$$
$$\geqslant (k_\nu^i)^{-1} \left[\text{———————}\right] \text{———}$$
$$= \frac{\Phi_i(2^{\nu+1})}{\Phi_j(2^\nu)} \geqslant 1 \qquad \text{d'où} \qquad k_{\nu+1}^i \geqslant 1.$$

On a pour tout $\nu \geqslant 0$ et tout $i = 1 \ldots n$, $k_{\nu+1} \leqslant (2C_0)$ car :

$$(60) \quad (k_1^i)^{-1} \ldots (k_\nu^i)^{-1} \frac{\Phi_i(2^\nu)}{\Phi_i(1)} = (k_\nu^i)^{-1} \left\{(k_1^i)^{-1} \ldots (k_\nu^i)^{-1} \frac{\Phi_i(2^\nu)}{\Phi_i(1)}\right\}$$
$$\leqslant (k_\nu^i)^{-1} \left[\text{———————}\right] + 1 \leqslant (k_\nu^i)^{-1} (k_\nu^i + 1) \leqslant 2.$$

D'où

$$(61) \quad k_{\nu+1} = \left[(k_1^i)^{-1} \ldots (k_\nu^i)^{-1} \frac{\Phi_i(2^{\nu+1})}{\Phi_i(1)}\right]$$
$$\leqslant \left[2 \frac{\Phi_i(2^{\nu+1})}{\Phi_i(2^\nu)}\right] \leqslant [2C_0].$$

De plus (60) prouve encore que

$$(62) \qquad 1 \leqslant \frac{\Phi_i(2^\nu)}{d_\nu^i} \leqslant 2$$

car

$$(63) \qquad d_\nu^i = k_1^i \ldots k_\nu^i \, \Phi_i(1) \quad (\text{et } k_\nu^i \geqslant 1).$$

Ceci entraîne le 2e du lemme.

De même (61) entraîne le 3e du lemme.

d) On définit de même P_{-1}, P_{-2}, ... à l'aide des nombres $k_{-1}^i \ldots k_{-\nu}^i \ldots$ tels que

$$k_{-1}^i = \left[\frac{\Phi_i(1)}{\Phi_i(2^{-1})}\right]$$
$$k_{-\nu}^i = \left[(k_{-1}^i)^{-1} \ldots (k_{-\nu}^i)^{-1} \frac{\Phi_i(1)}{\Phi_i(2^{-\nu})}\right].$$

2.B. Deuxième étape.
Lemme de recouvrement de Riesz.

Notons $\tilde{\tilde{L}}^{p_1}(G^+, B_2)$ l'ensemble des fonctions étagées : $G^+ \to B_2$ qui sont combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques de cellules de l'une quelconque des partitions P_ν (associées par le lemme 1 à la donnée de fonctions Φ_i telles que (45) et (46)). On a le

LEMME 2. — *Pour tout* $s > 0$, *toute* $u \in \tilde{\tilde{L}}^1(G^+, B_2)$ *peut s'écrire :*

$$u = v + \sum_{j \text{ et } k=1}^{\infty} w_{jk} \tag{64}$$

(cette somme double étant finie d'ailleurs).

Cette décomposition étant telle que :

$$|v|_1 + \sum_{j,k} |w_{jk}|_1 \leqslant 3\,|u|_1 \tag{65}$$

(66) • *Pour tout* $x \in G^+$, *on a* $|v(x)| \leqslant [2C_3]^n s$.

• *Les* w_{jk} *ont des supports contenus dans les cellules disjointes* I_{jk} *de l'une des partitions* P_ν, *et ont une intégrale nulle. Soit :*

$$\int w_{jn}(x)\,dx = 0 \tag{67}$$

$$w_{jk}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin I_{jk} \tag{68}$$

$$\sum_{j,k} |I_{jk}| \leqslant \frac{|u|_1}{s}. \tag{69}$$

Preuve du lemme.

Comme les cellules de P_ν deviennent arbitrairement grandes lorsque $\nu \to \infty$, il existe un ν tel qu'une cellule Q de P_ν donne lieu à :

$$u \quad \text{nulle en dehors de Q,}$$

et

$$\frac{1}{|Q|} \int_{x \in Q} |u(x)|\,dx \leqslant s.$$

→ Appelons $I_{11} \ldots L_{1j}$ les cellules de $P_{\nu-1}$ contenues dans Q qui donnent lieu à

$$\frac{1}{|I_{1j}|} \int_{x \in I_{1j}} |u(x)|\,dx \geqslant s. \tag{70}$$

Alors

$$(71)\quad s|I_{1j}| \leqslant \int_{x\in I_{1j}} |u(x)|\,dx \leqslant \int_{x\in Q} |u|(x)\,dx \leqslant s|Q| \leqslant [2C_3]^n\, s|I_{1j}|.$$

Je définis alors la restriction de v à I_{1k} par

$$(72)\quad v(x) = \frac{1}{|I_{1k}|}\int_{x\in I_{1k}} u(y)\,dy\ (= \text{constante donc}) \text{ pour } x \in I_{1k}$$

et je définis w_{1k} à support dans I_{1k} par :

$$(73)\qquad w_{1k}(x) = \begin{cases} u(x) - v(x) & \text{pour} \quad x \in I_{1k} \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

→ Considérons les cellules de $P_{\nu-1}$ contenues dans Q, différentes des cellules $I_{11} \ldots I_{1j}$ ci-dessus. Appelons

$$I_{21},\ I_{22} \ldots I_{2j} \ldots$$

les cellules de $P_{\nu-2}$ contenues dans l'une d'elles qui donnent lieu à

$$\frac{1}{|I_{2j}|}\int_{x\in I_{2j}} |u(x)|\,dx \geqslant s.$$

Alors...

→ ...

→ Après un nombre fini j_0 de telles opérations la fonction u est constante dans chacune des cellules I_{j_0k} et des inégalités analogues à (71) prouvent que cette constante C′ est telle que

$$C' \leqslant [2C_3]^n s.$$

(74) On pose alors $v(x) = C'$ si x appartient à la réunion des I_{j_0k} (k seul, varie) et $v(x) = 0$ si x n'appartient pas à la réunion de tous les I_{jk}.

→ Nous pouvons alors vérifier les inégalités du lemme :

(72) et (74) prouvent que

$$|v(x)| \leqslant [2C_3]^n s$$

(72) prouve que

$$\int_{x\in I_{jk}} |v(x)|\,dx \leqslant \int_{x\in I_{jk}} |u(x)|\,dx.$$

Donc avec (73) il vient

$$\int_{x\in I_{jk}} |w_{jk}(x)|\, dx = \int_{x\in I_{jk}} |u(x) - v(x)|\, dx \leqslant \int_{x\in I_{jk}} (|u(x)| + |v(x)|)\, dx.$$

D'où en rapprochant ces 2 dernières lignes

$$\int_{x\in I_{jk}} |v(x)|\, dx + |w_{jk}(x)|\, dx \leqslant 3 \int_{x\in I_{jk}} |u(x)|\, dx.$$

La relation (69) résulte de (71) par addition terme à terme.

2.C. Troisième étape.

Montrons que K^* est telle que :

$$\tilde{\tilde{L}}^1(B_2) \to L^{r_1\infty}(B_3) \tag{75}$$

(f désignant une fonction étagée : $G \to B_2$, nous noterons en général $\tilde{f}$ sa convolution par K).

On utilise alors le fait que, quelles que soient les fonctions $g_i : G \to B_3$

$$(i = 1 \ldots k), \quad \text{quel que soit} \quad \sigma > 0 \tag{76}$$
$$\left\| \sum_{i=1}^{k} g \right. \geqslant k\sigma \leqslant \left| \sum_{i=1}^{k} \right| |g_i| \geqslant \sigma|$$

(voir notation précisée par (31); cela résulte du fait que si la somme de k vecteurs a une longueur $\geqslant k\sigma$, l'un au moins de ces vecteurs a une longueur $\geqq \sigma$).

(77) Quelle que soit la fonction $u \in \tilde{\tilde{L}}^1(G, B_2)$ de norme $\leqslant 1$, désignant par u_i ($i = 1 \ldots 2^n$) la restriction de u à chaque portion de G (analogue à G^+) limitée par des hyperplans $x^j = 0$ ($j = 1 \ldots n$)

Il s'agit de vérifier que

$$\exists C, \quad \forall \sigma > 0, \quad \forall u \text{ vérifiant (77)}, \quad \left\| \sum_{i=1}^{2^n} \tilde{u}_i \right| > \sigma \Big| \leqslant \frac{C}{\sigma^r}.$$

Vues (76) et la symétrie de la figure, il suffit de montrer

$$\exists C, \forall \sigma > 0, \forall u \text{ à support dans } G^+ \text{ vérifiant (77)} \left| |\tilde{u}| > \sigma \right| \leqslant \frac{C}{\sigma^r}.$$

A une telle u, nous appliquons le lemme 2.

Posant $w = \sum_{jk} w_{jk}$ et appliquant la remarque (76) à

$$\tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w},$$

on est amené à vérifier deux choses

1° A-t-on $||\tilde{v}| > \sigma| < \frac{C}{\sigma^r}$?

Or d'après les hypothèses (2° du théorème 2)

$$||\tilde{v}| > \sigma|^{1/q_0} \leqslant C|v|_{p_0} = C\left(\int_x |v(x)|^{p_0}\, dx\right)^{1/p_0}$$

d'où avec (66)

$$\leqslant C(2[C_3]^n s)^{\frac{p_0-1}{p_0}} |v_1|_1^{\frac{1}{p_0}} \leqslant Cs^{1-\frac{1}{p_0}}.$$

Donc

$$(78) \qquad ||\tilde{v}| > \sigma|^{\frac{1}{q_0}} \leqslant Cs^{1-\frac{1}{p_0}}\sigma^{-1} = Cs^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q_0}}\sigma^{-1}.$$

Avant de répondre à la question 1°, étudions le

2° A-t-on $||\tilde{w}| > \sigma| \leqslant \frac{C}{\sigma^r}$?

w_{jk} ayant une intégrale nulle et étant à support dans I_{jk} on a

$$\tilde{w}_{jk}(x) = \int_{y \in I_{jk}} (K(x-y)) w_{jk} |y|\, dy$$

x_{jk} désignant le centre de la cellule I_{jk} et utilisant la notation (50), on a

$$I_{jk} = x_{jk} + Q_{l(j,k)}$$

donc

$$\left(\int_{x \notin x_{jk}+Q_{A+l}} |\tilde{w}_{jk}(x)|^r\, dx\right)^{1/r}$$
$$\leqslant \left(\int_{x-x_{jk} \notin Q_{A+l}} dx \left|\int_{y-x_{jk} \in Q_l} |K(x-y) - K(x)||w_k(y)|\, dy\right|^r\right)^{1/r}.$$

Posons $I^*_{jk} = x_{jk} + Q_{l+A}$.

On a donc en faisant dans la dernière intégrale les changements de variables

$$x - x_{jk} = x', \qquad y - y_{jk} = y'$$

et en appliquant l'inégalité de Minkowsky

$$\left(\int_{x \notin I^*_{jk}} |w_{jk}(x)|^r\, dx\right)^{1/r}$$
$$\leqslant \int_{y' \in Q_l} |w_{jk}(y')|\, dy' \left(\int_{x' \notin Q_{A+l}} |K(x'-y') - K(x')|^r\, dx'\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Donc il vient en utilisant (49)

$$\leqslant C \int_{y \in I_{jk}} |\varpi_{jk}(y)|\, dy = C|\varpi_{jk}|_1.$$

Posons $O = \bigcup_{jk} I^*_{jk}$ on a puisque $\complement O \subseteq \bigcup_{jk} \complement I^*_{jk}$

$$\left(\int_{\complement O} |\tilde{\varpi}(x)|^a\, dx\right)^{1/a} \leqslant \Sigma \left(\int_{\complement I^*_{jk}} |\tilde{\varpi}_{jk}(x)|^a\, dx\right)^{1/a} \leqslant C \sum_{jk} |\varpi_{jk}|_1$$

d'où

$$\leqslant 3C \quad \text{avec (65) et (67).}$$

Donc la mesure ! de la partie de $\complement O$ où $|\tilde{\varpi}| > \sigma$ est telle que

$$!\sigma^k \leqslant (3C)^r$$

d'où $||\tilde{\varpi}| > \sigma| \leqslant\, ! + |O| \leqslant \dfrac{(3C)^r}{\sigma^r} + s^{-1}$ d'après (69).

D'après cette relation et (78) on réalise

$$||\tilde{\varphi}| > \sigma| \qquad \text{et} \qquad ||\tilde{\varpi}| > \sigma| \leqslant \frac{C}{\sigma^r}$$

si l'on prend $s = \sigma^r$.

Applications de ce théorème.

1° On sait que le cas $\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_n$ permet de montrer (voir [7]) que les intégrales singulières définissent des opérateurs de convolution dans L^p : K étant une fonction $\mathbf{R}^n_x \to \mathbf{C}$, homogène de degré $-n$, d'intégrale nulle sur la sphère unité, continue dans le complémentaire de l'origine, l'intégrale singulière définie par K est la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n_x)$ des distributions (ε variant) :

K_ε = restriction de K au complémentaire de la boule de rayon ε, qui est centrée à l'origine de $\mathbf{R}^n_x$.

2° Utilisant le 1°, et en appliquant les propositions 1, 2 et le théorème 3 (lorsque $\Phi_i(t) = t$, $\forall_i$), J. Schwartz a démontré ([27]) que pour tout espace de Lebesgue L^q $(1 < q < \infty)$, toute intégrale singulière K définit un opérateur de convolution dans $L^p(G, L^q)$ avec $1 < p < \infty$, l'application (6) étant ici :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times L^q &\longrightarrow L^q \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda f. \end{aligned}$$

3° Jones et Arnèse ont donné ([1] et [10]) des applications du cas $\Phi_2 = \cdots = \Phi_n$ a l'équation de la chaleur.

4° Nous allons à présent utiliser le cas où

$$\Phi_i(t) = t^{a_i} \qquad \text{pour} \qquad i = 1, \ldots n$$

(où $a_1, \ldots, a_n$ est une collection quelconque de n nombres > 0) pour démontrer, quel que soit l'espace de Hilbert H, un théorème d'isomorphisme relatif à $L^p(G, H)$, correspondant à un théorème de Littlewood Paley (relatif à $G = \mathbf{T}$: voir [18]). Puis au § 4, nous déduirons de cet énoncé de nouvelles classes de multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ (G, H).

Nota. — Par erreur, nous avions omis l'hypothèse $\frac{1}{P_1} = 1$ en énonçant le théorème 3 dans la note [16].

3. THÉORÈME D'ISOMORPHISME DE LITTLEWOOD-PALEY.

Il a déjà été remarqué (voir [14] et [19]) que la démonstration de J. Schwartz a donné pour $G = \mathbf{R}$, de ce théorème (voir [27]) s'étend naturellement de la façon suivante à R^n : la collection des intervalles $\{\xi \in Q, \varepsilon 2^k < \xi < \varepsilon 2^{k+1}\}_{\substack{\varepsilon=\pm 1 \\ k \in \mathbf{Z}}}$ étant remplacée par la collection des couronnes

$$\tilde{E}_j = \tilde{Q}_j \setminus \tilde{Q}_{j-1} \tag{79}$$

où $\tilde{Q}_j$ est l'hypercube :

$$\tilde{Q}_j = \{\xi \in \mathbf{R}^n, \qquad \forall i = 1 \ldots n \ |\xi_i| \leqslant 2^j\}. \tag{80}$$

A présent, utilisant la version du théorème de Calderon-Zygmund énoncée au § 2, nous allons pouvoir remplacer les cubes $\tilde{Q}_j$ par les cellules Q_j du type suivant

$$Q_k = \{\xi \in \mathbf{R}^n, \qquad \forall i = 1 \ldots n \ |\xi_i| < 2^{a_i k}\} \tag{81}$$

où les nombres a_j sont quelconques :

$$0 < a_j < \infty. \tag{82}$$

Les couronnes $\tilde{E}_j$ deviennent alors

$$E_j = Q_j - Q_{j-1}. \tag{83}$$

Nous verrons au § 4 que cette extension a des applications intéressantes à la théorie des multiplicateurs.

THÉORÈME 4 (type Littlewood-Paley : voir [18] et [27]). — *Soit* $G = \mathbf{R}^n$, H *un espace de Hilbert*, $1 < p < \infty$, *et* E_j *les couronnes (de* G′ *définies ci-avant). Alors l'espace de Banach* $L^p(G, H)$ *est isomorphe de la façon suivante au sous-espace* X *de* $L^p(G, l^2(H))$, *muni de la topologie induite, formé par les fonctions* $\vec{g} = (g_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *dont les transformées de Fourier* $(\hat{\vec{g}}) = (\hat{g}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *sont telles que pour tout* k, $\hat{g}_k : G' \to H$ *soit une distribution à support dans* $\overline{E}_k$. *L'isomorphisme associe à toute* $f \in L^p(G, H)$ *la fonction de* $L^p(G, l^2(H))$ *dont la* j^e *composante est la transformée de Fourier inverse de la restriction* $\hat{f}_j$ *de* $\hat{f}$ *à* E_j.

Autrement dit, χ_j étant la fonction caractéristique de E_j et K_j sa transformée de Fourier inverse :

$$f_j = \overline{\mathcal{F}}(\chi_j . \hat{f}) = \overline{\mathcal{F}}\chi_j * f$$

on a l'équivalence de normes :

$$|f|_p \sim \left(\int_{x\in G} dx \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |f_j(x)|^2\right)^{p/2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Suivant J. Schwartz, on interprète cet isomorphisme comme impliqué par la continuité des applications A et B :

$$\text{(87)} \qquad L^p(G, H) \underset{B}{\overset{A}{\rightleftarrows}} X \hookrightarrow L^p(G, l^2(H))$$

correspondant à la convolution par la distribution $\vec{K}$

$$\text{(88)} \qquad G \longrightarrow l^2 \qquad x \longmapsto (K_j(x))_j$$

pour les applications bilinéaires (9) et (18) respectivement.

Comme ces applications se correspondent par transposition (voir § 1B), d'après la proposition 1, il suffit de montrer que A et B sont continues si $1 < p \leqslant 2$.

Il est naturel, puisque le théorème est évident pour $p = 2$ (Plancherel), d'essayer d'utiliser les inégalités de Calderon-Zygmund avec $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{2}$. Comme ça ne marche pas, on va écrire différemment les opérateurs A et B.

On introduit alors une fonction $\Phi_0 \in \mathcal{D}(G')$.

(89) $\begin{cases} \text{— valant 1 dans } E_0 \\ \text{— à support dans } Q_1 \setminus Q_{-2} \\ \text{— telle que pour } N' \text{ entier suffisamment grand} \\ \quad \text{(voir (103)) on ait :} \end{cases}$

$$\int_{\xi \in G'} |\xi|^{2N'} |\Phi_0(\xi)| \, d\xi < \infty.$$

Puis l'on pose pour tout entier relatif l:

(90) $\Phi_l(\xi) = \Phi_l(\xi_1 \ldots \xi_n) = \Phi_0(2^{-a_1 l} \xi_1 \ldots 2^{-a_n l} \xi_n)$.

(91) Remarquons

$$\forall l \in Z \quad \chi_l(\xi) = \Phi_l(\xi)\chi_l(\xi).$$

(92) Si l'on pose $\vec{F} = \vec{\mathcal{F}}\vec{\Phi}$, $F_l = \mathcal{F}\Phi_l$, alors (91) prouve :

1° que l'application A est la composée de deux autres I et II;

2° et vue la définition de X, que B est continue si III l'est : les applications I, II et III sont définies par le tableau ci-après :

(elles correspondent à des convolutions, l'application bilinéaire correspondante étant indiquée sous la flèche).

(93)

les espaces → / les applications ↓	$L^p(G, H) \rightleftarrows L^p(G, l^2(H)) \to L^p(G, l^2(H))$
I	$f \xmapsto[(9)]{\mathrm{I}} (F * f)_k$
II	$(g_k)_k \xmapsto[(11) \text{ avec } B_1 = \mathbf{C}]{\mathrm{II}} (K_k * g_k)_k$
III	$\sum_{-\infty}^{+\infty} F_k * f_k \xleftarrow[(18)]{\mathrm{III}} (f_k)_k$

(l'application B est la restriction de III à X).

La continuité de I et III d'une part (qui correspondent au même noyau de convolution $\vec{F}$) et de II d'autre part, se démontre de façons différentes :

— pour I et III on utilise le théorème 3

— pour II on utilise la proposition et les remarques terminant le § 1.

Preuve de la continuité de I *et* III *pour* $1 < p \leqslant 2$.

Pour tout entier $N > 0$, introduisons le noyau tronqué

$$\vec{F}^N = (F_n)_{|n| \leqslant N} \quad \text{et} \quad \vec{\Phi}^N = \mathcal{F}\vec{F}^N. \tag{94}$$

On remarque que les fonctions

$$\begin{aligned} G' &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \xi &\longmapsto \Phi_l(\xi) \end{aligned} \tag{95}$$

sont uniformément bornées en module lorsque $l \in \mathbf{Z}$; et qu'en un point $\xi \in G'$, il existe au plus 3 fonctions Φ^l non nulles.

D'après le théorème de Plancherel, la convolution par les $\vec{F}^N$ (pour les applications (9) et (18)) définit deux séries d'application $L^p(G, H) \rightleftarrows L^p(G, l^2(H))$, uniformément bornées (N variant) lorsque $p = 2$.

Il suffit alors de montrer que :

$$\exists C > 0 \quad \text{et} \quad A > 0, \quad \forall l \in Z, \quad \forall N, \quad \forall y \in Q_l$$
$$\int_{x \in G \setminus Q_l} |\vec{F}^N(x - y) - \vec{F}^N(x)| \, dx \leqslant C. \tag{96}$$

En effet :

— le théorème 1 prouvera que les normes des opérateurs F^{N*} sont uniformément bornées dans L^p.

— Or $\vec{\Phi}^N \to \vec{\Phi}$ dans $\mathcal{S}'(G) \widehat{\otimes} l^2(H)$, lorsque $N \to +\infty$.

— Donc ($\mathcal{F}$ est un isomorphisme) $\vec{F}^N \to \vec{F}$ dans $\mathcal{S}'(G) \widehat{\otimes} l^2$, lorsque $N \to +\infty$.

— Et comme (d'après la proposition 2) la boule unité des convoluteurs d'un type donné, est fermée dans $\mathcal{S}'(G) \widehat{\otimes} l^2$, il en résulte que $\vec{F}$ est un convoluteur du type voulu.

Effectuons le calcul prouvant (96).

Partant de (90) un changement de variable linéaire dans

l'intégrale exprimant $F_l = \overline{\mathcal{F}}\Phi_l$ prouve que

$$(97) \qquad F_l(x) = 2^l \sum_{i=1}^{n} a_i \, F_0(2^{a_1 l}x_1, \ldots, 2^{a_n l}x_n)$$

Donc

$$(98) \qquad \frac{\partial F_l}{\partial x_j}(x) = 2^{l\left(a_j + \sum_{i=1}^{n} a_i\right)} \frac{\partial F_0}{\partial x_j}(\ldots 2^{a_n l}\, x_n)$$

Or

$$(99) \quad \vec{F}^N(x-y) - \vec{F}^N(x) = \sum_{i=1}^{n} - y_i \int_0^1 \frac{\partial \vec{F}^N}{\partial x_i}(x - ty)\, dt.$$

On aura prouvé (96) si l'on prouve que :

$$(100) \qquad \int_{x \in G \setminus Q_j} \left| \frac{\partial \vec{F}^N}{\partial x_i}(x) \right| dx \leqslant C\, 2^{-a_i j}.$$

(101) On évalue cette intégrale en écrivant

$$G \setminus Q_j = \bigcup_{k=j+1}^{\infty} E_k.$$

Tout point x' de E_k a des coordonnées

$(2^{a_1 k}x_1, \ldots 2^{a_n k}x_n)$ avec $x = (x_1 \ldots x_n)$ dans E_0.

Pour un tel point x nous avons

$$\left| \frac{\partial \vec{F}^N}{\partial x_i}(2^{a_1 k}x_1 \ldots 2^{a_n k}x_n \right| \leqslant \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial F_l}{\partial x_i}(\ldots 2^{a_n k}x_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où avec (98)

$$\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{2\left(a_j + \sum_j a_j\right) l} \left| \frac{\partial F_0}{\partial x_i}(\ldots 2^{a_i h + a_i l}x_i \ldots) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Je fais dans la sommation le changement

$$(102) \qquad l' = \text{partie entière de } l + k = [l + k]$$

soit

$$l' = l + k - \theta \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant \theta < 1$$

d'où

$$(103)\quad \left|\frac{\partial \vec{F}^N}{\partial x_i}(2^{a_i k}x_1 \ldots)\right| \leqslant \left(\sum_{l'=-\infty}^{+\infty} 2^{2\left(a_j+\sum_{j=1}^{n} a_j\right)(l'-k+\theta)}\left|\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(\ldots 2^{a_i(l'+\theta)}x_i \ldots)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\Phi_0 \in \mathcal{D}(G')$ et a suffisamment de moments nuls par rapport à l'origine (voir (89)), cela entraîne que $F_0 = \overline{\mathcal{F}}\Phi_0$ est à décroissance rapide à l'infini et que $|x|^{2N'}\left|\frac{\partial F_0}{\partial x_i}\right|$ est borné aussi grand que soit N'.

Il existe donc une constante universelle C tels que

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \forall x' \in E_k,\ \left|\frac{\partial \vec{F}^N}{\partial x_i}(x')\right| \leqslant C\, 2^{-ka_j-k\sum_{j=1}^{n} a_j}.$$

D'où

$$(104)\quad \int_{E_k}\left|\frac{\partial \vec{F}^N}{\partial x^i}(x')\right| dx' \leqslant C\, 2^{-ka_j-k\sum_{j=1}^{n} a_j}|E_k| \leqslant C\, 2^{-ka_j}.$$

D'où (100) vu (101).

Preuve de la continuité de l'application II *de* (93).

Au lieu de montrer que $\vec{K}: G \longrightarrow l^\infty$ est un convoluteur dans $L^p(G, l^2(H))$, nous allons montrer que $\vec{\chi} = \mathcal{F}\vec{K}$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ relativement au produit multiplicatif des distributions associé à (II) avec $B_1 = \mathbf{C}$.

Pour tout $i = 1, \ldots n$, et tout $\eta_i \in \mathbf{R}$, notons Z_{η_i} la fonction caractéristique du demi-espace lieu des points $\xi \in G'$ tels que $\xi_i \geqq \eta_i$.

→ Vue l'application 2 du théorème 3 (voir § 2) et vue la 4e remarque terminant le § 1, Z_{η_i} est un multiplicateur scalaire dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ pour l'application bilinéaire naturelle :

$$\mathbf{C} \times l^2(H) \to l^2(H).$$

→ La proposition 3 prouve alors que $\forall \vec{a} = (a_k)_k$ dans l^∞, la distribution $\vec{a}Z_{\eta_i}(.): G' \to l^\infty$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p\ (G, l^2(H))$ relativement à (II) avec $B_1 = \mathbf{C}$.

→ En prenant le vecteur $\vec{a}$ dont toutes les composantes valent 1, puis en appliquant la 3e remarque terminant le § 1, on voit que $\forall i = 1, \ldots n$, $\forall$ suite de nombres réels $(\eta_i^k)_{k \in \mathbf{Z}}$, il en est de même pour la fonction $G' \to l^\infty$ dont la k^e composante est $Z_{\eta_i^k}$ $(\forall k \in \mathbf{Z})$.

→ En prenant des η_i^k convenables, et en composant $2n$ multiplicateurs du type précédent, on voit que la fonction $G' \to l^\infty$ dont la k^e composante est $(\forall k)$ la fonction caractéristique de $Q_k(G')$ ou de $Q_{k-1}(G')$ est encore un multiplicateur du même type.

→ D'où par différence l'assertion voulue : la fonction

$$G' \to l^\infty$$

dont la k^e composante est :

χ_k = fonction caractéristique de $Q_k(G')$ — fonction caractéristique de $Q_{k-1}(G')$ est (relativement à (II) avec $B_1 = \mathbf{C}$) un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$.

Notons :

Le théorème 4 reste vrai si l'on remplace $(\forall k)$ $E_k(G')$ par

$$\tilde{E}_k(G') = \tilde{Q}_k(G') - \tilde{Q}_{k-1}(G')$$

le polyèdre $\tilde{Q}_k(G')$ étant déduit de $\tilde{Q}_0(G')$ = polyèdre de G' étoilé par rapport à O (intérieur à ce polyèdre) par une transformation affine du type :

$$\begin{array}{ccc} G' \longrightarrow G' & & \\ x \longmapsto x' & \text{avec} & x'_i = 2^{a_i k} x_i \end{array}$$

4. APPLICATIONS DU THÉORÈME DE LITTLEWOOD PALEY AUX MULTIPLICATEURS ($G = \mathbf{R}^n$).

Nous considérons à présent les applications bilinéaires :

$$\begin{array}{rcl} (106) & \mathbf{C} \times H \longrightarrow H & \\ & (\lambda, \vec{h}) \longmapsto \lambda \vec{h} & \\ (107) & l^\infty \times l^2(H) \longrightarrow l^2(H) & \\ & ((a_n)_n), (b_n)_n) \longmapsto (a_n b_n)_n & \end{array}$$

On sait que les multiplicateurs $G' \to \mathbf{C}$ (resp. $G' \to l^\infty$) dans

$\mathcal{F}L^p(G, H)$ (resp $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ relativement à (106) (resp. (107)) :
— sont aussi des multiplicateurs dans

$$\mathcal{F}L^{p'}(G, H) \text{ (resp. } \mathcal{F}L^{p'}(G, l^2(H)))$$

d'après la proposition 1.

— donc aussi (d'après le théorème de Riesz-Thorin) dans $\mathcal{F}L^2(G, H)$ (resp. $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$)

— ce sont donc (d'après Plancherel) des fonctions bornées $G' \to \mathbf{C}$ (resp $G' \to l^\infty$).

Si l'on cherche des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p(G, H)$ relativement à (106), le théorème d'isomorphisme de Littlewood-Paley nous amène donc à nous intéresser aux fonctions $\vec{\Phi} = (\Phi_l)_l$ bornées $G' \to l^\infty$ qui sont des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ relativement à (107) et qui sont telles que $\forall l \in Z$, Φ_l a son support dans l'adhérence de la couronne $E_1(G')$. Car alors la fonction $\Phi : G' \to \mathbf{C}$ dont la restriction à E_l est $(\forall l)$ Φ_l est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, H)$ relativement à (106). La remarque précédente est due à Marcinkiewicz (voir [21]) dans le cas où $G = \mathbf{T}^n$ et $H = \mathbf{C}$.

Or, nous avons déjà obtenu des multiplicateurs dans

$$\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$$

relativement à (107) : voir § 2 preuve de la continuité de II.

Il s'agissait par exemple :

1° des fonctions $\vec{L} = (L_j)_j : G' \to l^\infty$ où $(L_j)_j$ est une suite bornée (de nombres complexes).

2° des fonctions $G' \to l^\infty$ dont la j^e composante est $(\forall_j \in \mathbf{Z})$ la fonction caractéristique d'un demi-espace quelconque. En composant n multiplicateur de ce type, on en déduit que, $\forall \vec{\eta} = (\eta^j)_j =$ une suite d'éléments η^j de G', Y_{η^j} désignant la fonction caractéristique des points ξ de G' qui suivent η^j

$$(\text{c'est-à-dire que } \forall i = 1, \ldots n \quad \xi_i \geqq \eta_i^j)$$

alors, la fonction $\vec{Y}_{\vec{\eta}} : G' \to l^\infty$ dont la j^e composante est Y_{η_j} $(\forall j \in \mathbf{Z})$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$.

Par addition et intégrations (par rapport à $\vec{\eta}$) de multiplicateurs de type $\vec{L}$ ou $\vec{Y}_\eta$, nous obtiendrons de nouveaux multiplicateurs $\vec{\Phi}$ dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ (voir lemme 3).

Puis, avec la remarque de Marcinkiewicz, nous en déduirons de nouveaux multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p(G, H)$: d'où le théorème 5.

Ensuite, en considérant des cas plus particuliers, et en résolvant une équation intégrale, nous obtiendrons une généralisation du théorème de Mihlin (théorème 6). Ce dernier énoncé s'applique en particulier à des fonctions $\Phi : G' \to \mathbf{C}$ vérifiant certaines conditions d'homogénéité : d'où l'application annoncée aux opérateurs quasi-elliptiques.

4.A. Théorème de multiplicateurs type Marcinkiewicz.

Nous utilisons le lemme suivant dû à J. Schwartz si $G = \mathbf{R}$ ([27]).

LEMME 3. — *H étant un espace de Hilbert, notons pour tout ξ dans G', Y_ξ la fonction caractéristique des points η de G' situés après ξ, c'est-à-dire tels que $\forall i = 1 \ldots n$ $\eta_i \geqq \xi_i$.*

(110) *Soit $\vec{L} = (L_j)_j$ une suite bornée (donc $\vec{L} \in l^\infty$).*

(111) *Soit $(\mu_j)_j$ une suite infinie de mesures bornées $G' \to \mathbf{C}$ dont les masses sont uniformément bornées.*

Alors la distribution $\vec{\Phi} : G' \to l^\infty$ de composantes Φ_j avec :

$$\Phi_j(.) = L_j + \int_{\xi \in G'} Y_\xi(.)\, d\mu_j(\xi) \tag{112}$$

est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ relativement à (107) *et si $1 < p < \infty$.*

Preuve. — D'après (108) on peut supposer $\vec{L} = 0$.

Comme toute mesure complexe est combinaison linéaire de 4 mesures positives, on peut supposer que $\mu_j \geqq 0$, $\forall_j$.

Comme il existe une suite bornée $\vec{b} = (b_j)_j$ telle que :

$$\begin{cases} \forall_j \quad \mu_j = b_j \mu'_j \\ \forall_j,\ \mu'_j \text{ est une mesure de masse } 1 \end{cases}$$

et comme la fonction constante, égale à $\vec{b} : G' \to l^\infty$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$ on peut se borner à démontrer le lemme si

$$\forall_j,\ \mu'_j \quad \text{est une mesure positive de masse } 1.$$

Nous cherchons à montrer l'existence d'une constante C telle que l'on ait

$$\forall f \in \mathcal{D}(G) \otimes l^2(H) \qquad \text{si} \qquad \varphi = \mathcal{F}f = \hat{f}$$

$$(113) \qquad |\vec{\Phi}.\vec{\varphi}|_{\mathcal{F}L^p} \leqslant C|\vec{\varphi}|_{\mathcal{F}L^p}.$$

Il suffit en fait de le prouver pour un sous-ensemble de telles f, qui soit encore dense dans $L^p(G, l^2(H))$ par exemple, pour les $\vec{f} = (f_i)_i$ telles que $f_i = 0$ si $i > N$ où N est un entier fini (mais arbitrairement grand).

Pour $|j| \leqslant N$, la j^e composante de $\vec{\Phi}.\vec{\varphi}$ est

$$\int_{\xi_j \in G'} Y_{\xi_j}(.)\, d\mu_j(\xi_j)\vec{\varphi}_j(.).$$

Notons $Y_{\xi_{-N} \ldots \xi_{+N}}$ le multiplicateur à valeurs dans l^∞ de $\mathcal{F}L^p$ (G, l^2(H)) pour l'application bilinéaire (107) dont la j^e composante vaut

$$\begin{cases} O & \text{si} \quad |j| > N \\ Y_{\xi^j} & \text{si} \quad |j| \leqq N \end{cases}$$

On a vu (fin § 3 et 1) que :

$$\exists C, \quad \forall f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(G) \otimes l^2(H), \qquad \forall \xi_{-N} \ldots \xi_{+N} \quad \text{dans } G'$$

$$(114) \quad |Y_{\xi_{-N}} \ldots {}_{\xi_N}\, \varphi|_{\mathcal{F}L^p} \leqslant C|\varphi|_{\mathcal{F}L^p} \quad \text{avec} \quad \varphi = \mathcal{F}f.$$

De plus l'application $(G')^{2N+1} \to \mathcal{F}L^p(G, l^2(H))$

$$(\xi_{-N} \ldots \xi_N) \to Y_{\xi_{-N} \ldots \xi_{+N}}\varphi$$

est continue.

Vu ceci, nous pouvons donc écrire $\vec{\Phi}\vec{\varphi}$ sous la forme :

(115)

$$\int_{(\xi_{-N}, \ldots \xi_{+N}) \in G^{2N+1}} (Y_{\xi_{-N} \ldots \xi_{+N}}\, \varphi)\, d\mu_{-N}(\xi_{-N}) \ldots d\mu_{+N}(\xi_{+N})$$

c'est-à-dire comme l'intégrale de la fonction vectorielle continue bornée

$$(116) \qquad \begin{aligned} G^{2N+1} &\longrightarrow \mathcal{F}L^p(G, l^2(H) \\ (\xi_{-N} \ldots \xi_{+N}) &\longmapsto Y_{\xi_{-N} \ldots \xi_{+N}}\, \varphi \end{aligned}$$

par rapport au produit des $(2N + 1)$ mesures $d\mu_{-N} \ldots d\mu_{+N}$ définies sur G. D'où (113) d'après (114) et (115).

Le théorème de Littlewood-Paley (th. 4) et le lemme 3 entraînent le

THÉORÈME 5 (type Marcinkiewicz : voir [27], [21], [14]. — H *étant un espace de Hilbert, on se donne un système quelconque de nombres* $a_1 \ldots a_n > 0$ *et on leur associe la partition de* $G' = \mathbf{R}^n$ *en couronnes* E_j *définies par* (81) *et* (83). *Alors toute fonction* Φ *mesurable bornée :* $G' \to \mathbf{C}$ *dont les restrictions* Φ_j *à chaque couronne* E_j *sont données par* (112) (L_j, Y_ξ, $d\mu_j$ *sont définis dans l'énoncé du lemme* 3) *est un multiplicateur dans* $\mathcal{F}L^p(G, H)$.

4.B. Théorème de Mihlin.

De même que le théorème de Mihlin (voir [22]) peut se déduire du théorème de Marcinkiewicz « ordinaire » (c'est-à-dire du cas particulier du théorème 5 lorsque $a_1 = \ldots = a_n = 1$) nous allons déduire de la version donnée ci-dessus de ce théorème, une généralisation du théorème de Mihlin relative au cas où les coordonnées $\xi_1 \ldots \xi_n$ jouent des rôles dissymétriques.

THÉORÈME 6 (type Mihlin : voir [22], [19], [27], [14]). — *On considère l'application bilinéaire* (106) *et une collection* $(a_1 \ldots a_n)$ *de* n *nombres quelconques* > 0. *Notons pour tout* $k \in Z$ $E_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$; *où* Q_k *est la cellule :*

$$\{\xi \in R^n_\xi = G' ; \quad \text{pour} \quad i = 1 \ldots n \quad |\xi_i| \leqslant 2^{a_i k}\}.$$

Soit $\Phi : G' \to \mathbf{C}$ *une distribution représentée dans le complémentaire de l'origine par une fonction* Φ *bornée telle que*

— *toutes les dérivées de* Φ *s'écrivant :*

$$(117) \quad D^l\Phi \qquad \textit{avec} \qquad l = (l_1 \ldots l_n) \quad L_i \in \{0, 1\}$$

soient continues dans le complémentaire de l'origine.

— *toutes ces dérivées sont telles que :*

$$(118) \quad \exists C \quad \textit{et} \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \textit{ on a } \int \left| \frac{\partial^{l}\vec{\Phi}}{\partial^{l_1}\xi_1 \ldots \partial^{l_n}\xi_n}(\xi) \right| \leqslant C$$

où l'intégrale est étendue aux sous-variétés à $|l| = \sum_{i=1}^{n} |l_i|$ *dimensions de la cellule* Q_k, *qui sont définies par les n relations*

$$(119) \qquad \begin{array}{lll} & (i = 1 \ldots n) & \\ \xi_i = \pm 2^{a_i k} & si & l_i = 0 \\ |\xi_i| \leqslant 2^{a_i k} & si & l_i = 1. \end{array}$$

Alors Φ *est relativement* (106) *un multiplicateur dans* $\mathcal{F}L^p(G, H)$, *si* $1 < p < \infty$.

(120) Dans le cas où $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, l'énoncé de Mihlin résulte du précédent car

— le nombre des sous-variétés intervenant dans l'énoncé du théorème 6 est uniformément borné (lorsque n étant fixé, k décrit $\mathbf{Z}$, et l les multi indices tels que (117))

— l'aire de chacune de ces sous variétés-varie comme

$$2^{k \sum_{i=1}^{n} l_i} = 2^{k|l|}$$

(121) — la distance $|\xi|$ à l'origine de tout point ξ de l'une de ces sous-variétés varie comme 2^k.

Donc, les inégalités (118) résultent des inégalités

$$|\xi|^{|l|} |D^l \Phi(\xi)| \leqslant C.$$

Mais dans le cas où l'on n'a plus (120), un énoncé du même type n'est plus valable car on n'a plus (121).

Preuve de ce théorème.

Soit Φ_j la restriction de Φ à la couronne E_j et cherchons à appliquer le théorème de Marcinkiewicz. Vue (III) et posant :

$Y(.) = Y_0(.) =$ la fonction caractéristique des points η de G' situés « après » l'origine (soit $\eta_i \geqslant 0$) on cherche une mesure $\mu_j : G' \to \mathbf{C}$ à support dans E_j, telle que : $\Phi_j = Y * \mu_j$.

Or on voit en faisant une transformation de Fourier que Y est la solution élémentaire de l'opérateur différentiel

$$D = \frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_n}$$

d'où $D\Phi_j = D * Y * \mu_j = \delta * \mu_j = \mu_j$. C'est l'expression explicite de μ_j et l'on voit par un calcul de distribution que

$\mu_j = D\Phi_j$ est la somme :

— d'une mesure portée par l'intérieur de E_j et de densité $D\Phi_j$

— de mesures portées par les faces de E_j d'équations $\xi_i = \text{Cte}$ et de densité $\pm \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_1 \ldots \widehat{\partial\xi_i} \ldots \partial\xi_n}$

— ...

Or les conditions (118) signifient justement que ces mesures ont des masses uniformément bornées. Φ satisfaisant aux conditions du théorème 5 est un multiplicateur.

4.C. Application 8 des fonctions $\vec{\Phi}$ satisfaisant certaines conditions d'homogénéité.

Nous allons expliciter un cas particulier du théorème 6.

THÉORÈME 7. — H *étant un espace de Hilbert,* $a_1 \ldots a_n$ *des constantes* > 0 *quelconques, soit* Φ *une fonction* $G' \to \mathbf{C}$, C^∞ *dans le complémentaire de l'origine, telle que*

$$(122) \quad \forall\lambda > 0;\ \xi \in G';\ \Phi(\lambda^{a_1}\xi_1 \ldots \lambda^{a_n}\xi_n) = \Phi(\xi_1 \ldots \xi_n).$$

Alors Φ *est un multiplicateur, dans* $\mathcal{F}L^p(G, H)$ *si* $1 < p < \infty$.

Pour $a_1 = a_2 \ldots = a_n$, ce théorème résulte du théorème de Mihlin habituel (Φ est homogène de degré 0).

Preuve.

Tout point ξ de G' est dans une couronne E_k, donc le point de coordonnées $(2^{-a_1 k}\xi_1, \ldots)$ est dans la couronne E_0.

Or (122) entraîne :

$$\Phi(\xi_1 \ldots \xi_n) = \Phi(2^{-a_1 k}\xi_1, \ldots 2^{-a_n k}\xi_n).$$

D'où il résulte que pour tout multi indice l avec $l_i \in \{0, 1\}$ on a

$$D^l\Phi(\xi) = (D^l\Phi)(2^{-a_1 k}\xi_1 \ldots)\, 2^{-k\sum_{i=1}^{n} a_i l_i}.$$

D'où il résulte (118) car :

— d'après (119), la mesure des variétés sur lesquelles portent les intégrales (118) varie comme $2^{k\sum_{i=1}^{n} a_i l_i}$.

— comme Φ est continue sur E_0, la quantité

$$(D^l\Phi)(2^{-a_l k}\,\xi_1 \ldots)$$

est bornée en module par une constante.

Applications du théorème 7 aux opérateurs différentiels quasi elliptiques.

Suivant [8] partie II chapitre III ou [2], on se donne une fois pour toute un système d'entiers $m_1 \ldots m_n > 0$. Alors $\forall \alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ où les α_i sont entiers $\geqslant 0$, on pose

$$|\alpha : m| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{m_k}.$$

Quel que soit le système de nombres complexes $(a_\alpha)_\alpha$ on peut considérer l'opérateur différentiel suivant sur R_x^n

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R_x^n) &\xrightarrow{P(D)} \mathcal{D}(R_x^n) \\ \varphi &\longmapsto P(D)\varphi = \sum_{|\alpha : m|=1} a_\alpha D^\alpha \varphi \end{aligned}$$

A P(D) on peut associer :

$$P_0(D) = \sum_{|\alpha : m|=1} a_\alpha D^\alpha$$

(si tous les m_k valent m, P(D) est d'ordre m et $P_0(D)$ est sa partie principale).

Suivant L. Schwartz on écrit $D^\alpha = \left(\frac{1}{2\pi_i}\right)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ et la transformée de Fourier de $P_0(D)$ est $\xi \to P_0(\xi)$. Si cette fonction ne s'annule qu'à l'origine de G', P(D) est quasi elliptique.

Si on considère par exemple

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi_j^{m_j}}{P_0(\xi)}.$$

C'est la transformée de Fourier d'une dérivée m_j^e par rapport à x_j d'une solution fondamentale de $P_0(D)$).

C'est évident « formellement ».

C'est évident (strictement !) si $\frac{1}{P_0(\xi)}$ est localement sommable sinon, on peut appliquer la version de

Malgrange (voir [20]) du théorème de division des distributions en résolvant le système :

$$\begin{aligned} P_0(D)E &= \delta \\ D^\alpha E &= T_\alpha \qquad \text{pour} \qquad \alpha \in A \end{aligned}$$

où A est l'ensemble des multi indices tels que α : $m = 1$ et T_α est la distribution de transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}T_\alpha = \frac{\xi^\alpha}{P_0(\xi)}.$$

On a

$$\Phi(t^{1/m_1}\xi_1 \ldots t^{1/m_n}\xi_n) = \frac{t\,\xi_j^{m_j}}{t\,P_0(\xi)} = \Phi(\xi)$$

Φ est donc multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p$.

Plus particulièrement si l'on considère dans le plan l'opérateur différentiel

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^4$$

son symbole est $\xi_1^2 + \xi_2^4$.

Il est quasi elliptique (avec $m_1 = 2$, $m_2 = 4$) et

$$\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^4}, \qquad \frac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^4}, \qquad \frac{\xi_2^4}{\xi_1^2 + \xi_2^4}$$

sont des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ (on pourra s'assurer par exemple que la version donnée par Hormander dans [7] du théorème de Mihlin n'entraîne pas ces résultats).

Nota :

1. Les énoncés des théorèmes 3 et 4 de la note [16] doivent être rectifiés de façon à remplacer $\mathcal{L}(H)$ par $\mathbf{C}$ (ou supposer H de dimension finie) car la transposition des raisonnements ci-dessus pour des multiplicateurs à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$ (avec $\dim H = \infty$) ne nous semble pas évidente (voir [27]).

2. Lizorkin ([19]) a donné une version du théorème de Mihlin relative à des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ à $\mathcal{F}L^q(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ et a démontré cette version pour $n = 1$.

La preuve pour $n > 1$ (même si $p = q$) ne nous semble pas évidente.

5. VERSION DE HORMANDER DU THÉORÈME DE MIHLIN.

L'avantage de cette version (voir [7]) sur le théorème de Mihlin (voir [22]) est qu'elle nécessite des hypothèses de dérivabilité « homogènes » par rapport à toutes les variables (ce qui peut être intéressant dans certaines applications : voir § 8 par exemple).

En utilisant l'extension donnée au § 2 des inégalités de Calderon-Zygmund et des majorations que nous a signalées G. C. Barozzi (que je remercie vivement), nous allons suivre pas à pas la démonstration de Hormander de sa version du théorème de Mihlin pour donner un énoncé plus général.

THÉORÈME 8 (voir [7] si $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$). — *On se donne n nombres entiers* $m_1 \ldots m_n > 0$ *et l'on pose pour tout* $k \in \mathrm{Z}$

$$(123) \quad \mathrm{Q}_k = \left\{ \xi \in \mathrm{G}' = \mathbf{R}^n_\xi, \qquad |\xi_i| \leqslant 2^{\frac{k}{m_i}},\ i = 1 \ldots n \right\}$$
$$\mathrm{E}_k = \mathrm{Q}_k \setminus \mathrm{Q}_{k-1}, \qquad \mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}$$

Pour tout multi indice $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, *on pose*

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{m_n} = |\alpha : m|.$$

On se donne un nombre $\varkappa > \frac{\mu}{2}$ *et de la forme* $\frac{\beta_1}{m_1} + \cdots + \frac{\beta_n}{m_n}$ (*les* β_i *entiers* $\geqslant 0$). *Et l'on suppose que :*

$$\exists \mathrm{C}, \quad \forall \alpha \qquad \textit{avec} \qquad |\alpha : m| \leqslant \varkappa \quad \forall k \in \mathrm{Z}$$

on a

$$(124) \qquad \int_{\xi \in \mathrm{E}_k} |2^{|\alpha : m|} (\mathrm{D}^\alpha f)(\xi)|^2 \frac{d\xi}{2^{k\mu}} \leqslant \mathrm{C}$$

où f est une fonction bornée : $\mathrm{R}^n_\xi \to \mathbf{C}$. *Alors pour tout*

$$p \in]1, +\infty[,$$

f est un multiplicateur dans $\mathcal{F}\mathrm{L}^p(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

Preuve. — On prend une fonction $\tilde{\Phi}$ dans $\mathcal{D}(G')$ valant 1 dans E_0, à support dans $Q_1 \setminus Q_{-2}$ et posant

$$\tilde{\Phi}_j(\xi) = \tilde{\Phi}\left(2^{-\frac{j}{m_1}}\xi_1 \ldots 2^{-\frac{j}{m_n}}\xi_n\right)$$

puis

$$\Phi_j(\xi) = \frac{\tilde{\Phi}_j(\xi)}{\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \Phi_j}$$

on en déduit l'existence de la suite Φ_j telle que :

$$\Phi_j \text{ a son support dans } Q_{j+1}$$

et

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Phi_j(\xi) = 1 \qquad \text{si} \qquad \xi \neq 0.$$

Posons

$$f_j = f\Phi_j, \qquad g_j = \overline{\mathcal{F}}f_j = \overline{\mathcal{F}}f * \overline{\mathcal{F}}\Phi_j$$
$$F_N = \sum_{|j| \leqslant N} f_j, \qquad G_N = \sum_{|j| \leqslant N} g_j.$$

Les multiplicateurs F_N définissent un ensemble borné d'applications linéaires continues de $\mathcal{F}L^2(G, H)$ d'après le théorème de Plancherel. Ils tendent vers f dans $\mathcal{S}'(G', \mathbf{C})$ lorsque

$$N \to +\infty.$$

Donc, d'après la proposition 2 et le théorème 1 il suffit de montrer :

(125)
$$\exists C, \quad \forall k, \quad \int_{x \in G \setminus Q_{k+1}} |G_N(x-y) - G_N(x)|\, dx \leqslant C \quad \text{si} \quad y \in Q_k.$$

A cet effet nous utiliserons deux lemmes.

Lemme 4 (G. C. Barozzi). — *L'intégrale*

(126)
$$I = \int_{x \in \mathbf{R}^n} \frac{dx}{\sum\limits_{|\alpha : m| \leqslant \chi} x^{2\alpha}}$$

converge si $\chi \geqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j} = \frac{\mu}{2}$.

Et dans ce cas on a la majoration:

$$\int_{x \notin Q_l} \frac{dx}{\sum\limits_{|\alpha : m| \leqslant \chi} x^{2\alpha}} \leqslant C\, 2^{l(\mu - 2\chi)}. \tag{127}$$

Preuve. — Posant $m = \min\limits_j m_j$ on introduit sur $\mathbf{R}_x^n$ la distance

$$|x|_\infty = \max_j |x_j|^{\frac{m_j}{m}}.$$

Posons si $\rho > 0$ $B(\rho) = \left\{x;\, x \in G;\, |x_j|^{\frac{m_j}{m}} \leqslant \rho;\, j = 1 \ldots n\right\}$.

On a par exemple $B\left(2^{\frac{l}{m}}\right) = Q_l$.

Notons que $B(\rho)$ est l'ensemble des $x \in G$ tels que $|x|_\infty \leqslant \rho$ et que le volume de $B(\rho)$ est $C\rho^{\mu m}$.

D'où

$$\int_{x \notin Q_l} \frac{dx}{\sum\limits_{|\alpha : m| \leqslant \chi} x^{2\alpha}} \leqslant \int_{x \notin Q_l} \frac{dx}{1 + \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{2\beta_j}} \leqslant C \int_{2^{l/m}}^{\infty} \frac{\rho^{m\mu - 1}\, d\rho}{1 + C\rho^{2m\chi}}$$

C.Q.F.D.

Lemme 5 (variante du théorème de Bernstein). — *On se donne n entiers $m_1 \ldots m_n > 0$ et l'on pose $\forall j \in Z$*

$$Q_j = \left\{\xi,\, \xi \in \mathbf{R}_\xi^n = G',\qquad |\xi_i| \leqslant 2^{j/m_i},\qquad i = 1 \ldots n\right\}.$$

Alors il existe une constante C *telle que pour tout $j \in \mathbf{Z}$ tout $k = 1 \ldots n$, et toute fonction g: $R^n \to C$ dont la transformée de Fourier f a son support dans Q_j on a:*

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_1 \leqslant C\, 2^{\frac{1}{m_k}} |g|_1. \tag{128}$$

On prend une fonction Ψ de $\mathcal{D}(G')$ valant 1 sur Q_0 et l'on pose

$$\Psi_j(\xi) = \Psi\left(2^{-\frac{j}{m_1}} \xi_1 \ldots 2^{-\frac{j}{m_n}} \xi_n\right)$$
$$g_j = \mathcal{F}(f_j) = \mathcal{F}(f_j \Psi_j) = g_j * \mathcal{F}\Psi_j$$

d'où

$$\left|\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\right|_1 = \left|g_j * \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{F}\Psi_j\right|_1 \leqslant |g_j|_1 \cdot \left|\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{F}\Psi_j\right|_1.$$

Utilisant l'expression de $\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{F}\Psi_j$ en fonction de Ψ_j et quelques changements de variables, on obtient l'inégalité cherchée.

Preuve du théorème 8.

La formule de Leibnitz donne :

$$D^\alpha f_j = D^\alpha\left(f\Phi\left(2^{-\frac{j}{m_1}}\xi_1 \ldots\right)\right)$$
$$= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} 2^{-j|\beta:m|}(D^\gamma f)(\xi)\left(D^\beta\Phi\left(2^{-\frac{j}{m_1}}\xi_1 \ldots\right)\right)\binom{\alpha}{\beta}.$$

D'où avec les relations de l'hypothèse

$$I = \int_{\xi\in Q_{j+1}\setminus Q_{j-1}} \sum_{|\alpha:m|\leqslant\chi} |2^{j|\alpha:m|}D^\alpha f_j|^2 \frac{d\xi}{2^{j\mu}}$$
$$\leqslant C\int \sum_{\substack{|\alpha:m|\leqslant\chi\\ \beta+\gamma=\alpha}} \left|2^{j(|\alpha:m|-|\beta:m|)}(D^\gamma f)(\xi)D^\beta\Phi\left(2^{-\frac{j}{m_1}}\xi_1 \ldots\right)\right|^2 \frac{d\xi}{2^{j\mu}}.$$

Mais avec

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i b_i)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N} |b_j|^2\right)$$

il vient

$$\leqslant C \sum_{|\gamma:m|\leqslant\chi} \int_{\xi\in Q_{j+1}\setminus Q_{j-1}} 2^{2j|\gamma:m|}|(D^\gamma f)(\xi)|^2 \frac{d\xi}{2^{j\mu}} \leqslant C.$$

On a donc (avec Parseval) :

$$\int_{x\in G} \sum_{|\alpha:m|\leqslant\chi} 2^{2j|\alpha:m|}|x^{2\alpha}|g_j(x)|^2 \frac{dx}{2^{j\mu}} \leqslant C. \tag{129}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous allons déduire de cette inégalité deux majorations :

d'abord

$$\int_{x\in G} |g_j| = \int_{x\in G} \left(\sum_{|\alpha:m|\leqslant\chi} 2^{2j|\alpha:m|}|x^{2\alpha}|g_j(x)|\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\left(\sum_{|\alpha:m|\leqslant\chi} 2^{2j|\alpha:m|}|x^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\leqslant \left(2^{j\mu}\int_{x\in G} \frac{dx}{\sum_{|\alpha:m|\leqslant\chi} 2^{2j|\alpha:m|}|x^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \left(\int_{x\in G} \frac{dx'}{\sum_{|\alpha:m|\leqslant\chi} x'^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C \quad \text{d'après le lemme 4} \tag{130}$$

Ensuite (même méthode, en utilisant le lemme 4)

$$(131)\qquad \int_{x\notin Q_l} |g_j| \leqslant \left(\int_{x'\notin Q_{l+j}} \frac{dx'}{\sum\limits_{|\alpha:\, m|\leqslant \chi} x'^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{l+j\left(\frac{n}{2}-\chi\right)}.$$

Nous pouvons déduire de ces 2 majorations des estimations de

$$J = \int_{x\notin Q_{l+1}} |g_j(x-y) - g_j(x)|\, dx \qquad \text{si} \qquad y \in Q_{l-1}.$$

Une majoration facile se déduit de (131)

$$|J| \leqslant \int_{x\notin Q_l} |g_j(x)|\, dx + \int_{x\notin Q_l} |g_j(x)|\, dx \leqslant C\, 2^{l+j\left(\frac{n}{2}-\chi\right)}.$$

Une autre s'obtient en partant de ($t \in [0, 1]$)

$$|g_j(x-y) - g_j(x)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\, g_j(x-ty)\right| dt$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 |y_k| \left|\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x-ty)\right| dt$$

d'où

$$J \leqslant \iint_{\substack{t\in[0,1]\\ x\in G}} \sum_{k=1}^{n} |y_k| \left|\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x-ty)\right| dt\, dx.$$

Appliquons alors le lemme 5 et (130) en supposant $j < -l$. Si $m' = \sup\limits_k m_k$, il vient

$$J \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{j+l}{m_k}} \leqslant n\, 2^{\frac{j+l}{m'}}.$$

Ces 2 majorations de J prouvent que

$$\int_{x\notin Q_l} |G_N(x-y) - G_N(x)|\, dx$$
$$\leqslant C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{x\in Q_l} |g_j(x-y) - g_j(x)|\, dx$$
$$\leqslant C \sum_{j=-\infty}^{l} n\, 2^{\frac{j+l}{m'}} + C \sum_{j+1}^{\infty} 2^{l+j\left(\frac{n}{2}-\chi\right)} \leqslant C.$$

Nota : L'énoncé et la démonstration du théorème 8 se transposent à des fonctions $\Phi : G' \to \mathcal{L}(H, K)$, K étant un espace vectoriel de dimension finie.

6. TRANSPOSITION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS SI $G = \mathbf{T}^n$.

Dans ce paragraphe, nous cherchons à voir ce que deviennent les §§ 2, 3 et 4 si la lettre G ne désigne plus $\mathbf{R}^n$ mais $\mathbf{T}^n$.

Évidemment G′ désigne à présent $\mathbf{Z}^n$.

Inégalités de Calderon-Zygmund.

Donnons-nous un système de n fonctions

$$(\Phi_j)_{j=1\dots n} : \mathbf{R}^+ \to \mathrm{R}^+$$

telles que

$$\Phi_j(2^{-1}) = 2^{-1} \tag{132}$$

et vérifiant (45) et (46).

On pose toujours pour tout $l \in \mathbf{Z}$

$$\mathrm{Q}_l = \{x = (x^1 \dots x^n) \in \mathbf{R}^n; \qquad |x_i| \leqslant \Phi_i(l) \;\; i = 1 \dots n\}.$$

Tout point $\theta \in \mathbf{T}^n$ a des coordonnées $\theta_1 \dots \theta_n$ et l'on va supposer toujours $\theta_i \in]-2^{-1}, +2^{-1}]$.

Considérant l'injection

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^n &\hookrightarrow \mathbf{R}^n \\ \theta &\longrightarrow (\theta_1 \dots \theta_n) \end{aligned}$$

on peut considérer $\mathbf{T}^n$ muni de sa mesure de Haar $d\theta$ comme une partie de R^n : les partitions P_ν et $\mathbf{R}^n$ (où ν décrit $\mathbf{Z}$) associées par le lemme 1 à la donnée des $(\Phi_j)_{j=1\dots n}$ induisent sur T^n des partitions P_ν de plus en plus fines lorsque $\nu \to -\infty$.

ν décrit à présent l'ensemble $\{-1, -2, \dots\}$ que nous notons $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathrm{G})$.

La transposition du théorème 3 s'effectue ainsi :

— on se donne n fonctions Φ^i vérifiant non seulement (45) et (46) mais aussi (132).

— au lieu de la famille $(\mathrm{Q}_l)_{l \in \mathrm{Z}}$ de cellules sur $\mathbf{R}^n$, on considère la famille (Q_l) avec

$$l \in \tilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{G}) = \{-1, -2, \dots\}.$$

La transposition du lemme 1 s'effectue comme suit :

— G^+ est remplacé par $\mathbf{T}^n$

— Les fonctions Φ^j vérifient (45), (46) mais aussi (132).

— L'ensemble que décrit l'indice ν n'est plus $\mathbf{Z}$ mais $\tilde{\mathbf{Z}}(G)$.

— Les 3 séries de relations (53), (54) et (55) sont remplacées par les 2 séries suivantes :

pour $\nu = -1 \quad \theta_i = -2^{-1} + l$ avec $l \in \{0, 1\}$ et $i = 1 \ldots n$

pour $\nu \leqslant -1 \ \theta_i = -2^{-1} + \dfrac{l}{k^i_{-2} \ldots k^i_\nu}$ avec

$$l \in \{0, 1 \ldots k^i_{-2} \ldots k^i_\nu\} \qquad \text{et} \qquad i = 1 \ldots n.$$

Dans le lemme 2, il suffit de changer ainsi la première phrase de son énoncé. Pour toute $u \in \tilde{\tilde{L}}^1(G, B_2)$ et tout $s > |u|_1$, on a...

(En effet, le procédé de récurrence donné pour rechercher les cellules I_{jk} ne peut pas démarrer si l'on n'a pas $|u| \leqslant s$.)

La troisième étape de la démonstration du théorème 3 se transpose donc et aboutit à : $||\tilde{\varphi}| > \sigma|$ et $||\tilde{\varpi}| > \sigma| \leqslant \dfrac{C}{\sigma^r}$ mais avec la restriction $\sigma \geqslant 1$.

Mais ces relations sont encore vraies, même si $\sigma \leqslant 1$ puisque bien sûr

$$||\tilde{\varphi}| > \sigma \qquad \text{et} \qquad ||\tilde{\varpi}| > \sigma| \leqslant |G| = 1.$$

Dans la transposition du théorème 4, on supposera

$$\Phi^1(t) \equiv \cdots \equiv \Phi^n(t) = t. \tag{133}$$

Sur $G' = Z^n$, on considère les cellules

$$Q_l = \{\xi \in \mathbf{Z}^n, \quad \forall i = 1 \ldots n, \quad |\xi_i| \leqslant 2^i\}.$$

Q_{-1} se réduit à l'origine. On considère seulement les couronnes

$$E_j = \begin{cases} Q_j \setminus Q_{j-1} & \text{pour} \quad j \in \{0, 1, \ldots\} \\ Q_{-1} = \{0\} & \text{pour} \quad j = -1. \end{cases}$$

La démonstration du théorème 4 ainsi transposé pour $G = \mathbf{T}^n$ nécessite un calcul car il faut trouver l'analogue des fonctions régulières Φ_l de la démonstration du théorème 4 :

Suivant Igari (cas $n = 1$) introduisons des noyaux de Féjer.

Pour tout entier $l \geqslant 0$ et tout point θ_i du tore $\mathbf{T}$, posons :

$$(134) \qquad \begin{aligned} f_l(\theta_i) &= \text{noyau de Féjer d'ordre } l \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad l = 0 \\ \dfrac{\sin^2 \pi l \theta_i}{l \sin^2 \pi \theta_i} & \text{pour} \quad l \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

($\hat{f}_l$ a un graphe triangulaire qui est linéaire entre $(-l, 0)$ et $(0, l)$). Posons

$$(135) \quad h_l(\theta_i) = 2f_{2^{l+1}}(\theta_i) - f_{2^l}(\theta_i) = \frac{\sin^2 2^{l+1}\pi\theta_i - \sin^2 2^l \pi\theta_i}{2^l \sin^2 \pi\theta_i}$$

($\hat{h}_l$ a un graphe en trapèze et a son support dans

$$\{\xi_i \in \mathbf{Z}_0 \quad |\xi_i| \leqslant 2^{l+1}\}).$$

Pour tout entier $l \geqslant 0$, introduisons la fonction suivante sur $\mathbf{T}^n$:

$$(136) \quad G_l(\theta) = \prod_{j=1}^{n} h_l(\theta_i) \qquad \text{pour} \qquad \theta = (\theta_1 \ldots \theta_n) \in \mathbf{T}^n$$

($\hat{G}_l$ a un graphe en tas de sable et vaut 1 sur Q_l).

Le noyau de convolution cherché $\vec{F} = (F_l)$ est défini par

$$(137) \quad F_l(\theta) = \begin{cases} G_l(\theta) - G_{l-2}(\theta) & \text{si} \quad l > 0 \\ G_0(\theta) & \text{si} \quad l = 0 \quad \text{ou} \quad -1 \end{cases}$$

($\hat{F}_l$ vaut 1 sur E_l et a son support dans $Q_{l+1} \setminus Q_{l-1}$).

Introduisant comme dans la démonstration du théorème 4, les noyaux tronqués $\vec{F}^N$ de composantes F_l si $-1 \leqslant l \leqslant N$ et 0 si $l > N$; et effectuant les mêmes raisonnements, il faudrait vérifier (96). Ou même, d'après (137), il faudrait vérifier (96) où l'on a remplacé $\vec{F}^N$ par $\vec{G}^N$.

En commençant le calcul comme précédemment tout point θ' de $G = \mathbf{T}^n$ venant dans une certaine couronne E_k de $\mathbf{T}^n$ on écrit

$$(138) \qquad \theta' = 2^k\theta \qquad \text{avec} \qquad \theta \in E_0$$

il suffit de vérifier que

$$(139) \qquad \left| \frac{\partial G^N}{\partial \theta_i}(\theta') \right| \leqslant C\, 2^{-k(n+1)}.$$

Pour prouver (139) nous allons utiliser les 4 majorations suivantes

$$(140)\qquad |h_l(\theta_i)| \leqslant C \begin{cases} 2l \\ 2^{-l}|\theta_i|^{-2}, \end{cases} \qquad \left|\frac{dh_l(\theta_i)}{d\theta_i}\right| \leqslant C \begin{cases} 2^{2l} \\ |\theta_i|^{-3} \end{cases}$$

(Les majorations par $C\,2^l$ et $C\,2^{2l}$ s'obtiennent en considérant h_l comme somme de son développement de Fourier; les 2 autres majorations s'obtiennent à partir de l'expression explicite (135).

Or (136) donne

$$\frac{\partial G_l(\theta)}{\partial \theta_i} = \Big(\prod_{i' \neq i} h_l(\theta_{i'})\Big) \frac{dh_l}{d\theta_i}(\theta_i).$$

Donc

$$\left|\frac{\partial G^N(\theta)}{\partial \theta_i}\right|^2 \leqslant \sum_{l=-1}^{+\infty} \left|\frac{dh_l(\theta_i)^2}{d\theta_i}\right| \prod_{i' \neq i} |h_l(\theta_{i'})|^2$$
$$\leqslant \sum_{l=-1}^{-k} + \sum_{l=-(k+1)}^{\infty}$$

d'où avec (140)

$$\leqslant C \sum_{l=-1}^{-k} 2^{2(n-1)l+4l} + C \sum_{l=-(k+1)}^{\infty} 2^{4l-(n-1)(2l+4k)} \leqslant C\,2^{-2(n+1)k}$$

Le lemme 3 se transpose naturellement.

Le théorème 5 correspond à ceci.

H étant un espace de Hilbert, considérant $G = \mathbf{T}^n$; on considère sur $G' = \mathbf{Z}^n$ les couronnes

$$Q_l = \{\xi \in \mathbf{Z}^n \ \forall i = 1 \ldots n \ |\xi_i| \leqslant 2^l\} \text{ pour } l = -1, 0, 1 \ldots$$

On a d'ailleurs $Q_{-1} = \{0\}$. On a sur G' la partition $G' = \cup E_l$ avec

$$E_l = \begin{cases} \text{la couronne } Q_l \setminus Q_{l-1} & \text{pour} \quad l = 0, 1, \ldots \\ Q_{-1} \quad \text{si} \quad l = -1. \end{cases}$$

Alors toute fonction Φ bornée : $G' \to \mathbf{C}$, dont les restrictions Φ_j à chaque couronne E_j sont données par (112) est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(G, H)$.

C'est une formulation différente (si $H = \mathbf{C}$) du théorème déjà donné en 1939 par Marcinkiewicz (voir [24]).

On ne peut pas transposer les théorèmes 6 et 7.

7. TRANSPOSITION A $G = \mathbf{Z}^n$.

Il est commode de se représenter $G = \mathbf{Z}^n$ comme une partie de $\mathbf{R}^n$: celle formée par les points de coordonnées entières. G^+ représente l'ensemble des points $\xi = (\xi^1 \ldots \xi^n)$ de $\mathbf{Z}^n$ dont toutes les coordonnées ξ^i sont positives.

Nous nous donnons n fonctions $\Phi^1 \ldots \Phi^n$ vérifiant (45), (46) et telles que

$$\Phi^1(2^{-1}) = \ldots \Phi^n(2^{-1}) = 2^{-1}. \tag{141}$$

Le lemme 1 se transpose de la façon suivante

L'indice ν décrit au lieu de $\mathbf{Z}$:

$$\{-1, -2, \ldots\} = \tilde{Z}(G).$$

Les relations (54) sont supprimées.

Le lemme 2 ne nécessite aucune modification (noter que lorsque la cellule Q se réduit à un point x_0

$$\frac{1}{|Q|}\int_{x\in Q} |u(x)|\, dx \leqslant s \qquad \text{s'écrit} \qquad |u(x_0)| \leqslant s).$$

Le théorème 3 est vrai à ceci près : il faut seulement considérer les cellules Q_l avec $l \in \tilde{Z} = \{0, 1 \ldots\}$.

Idem pour le théorème 4 (on suppose toujours (141)).

Les couronnes E_j sur $G' = \mathbf{T}^n$ (considéré comme une partie de R^n : voir § 5) sont de la forme $Q_j \setminus Q_{j-1}$

— pour $j = 0, -1, -2, \ldots$

et

$$Q_j = \{\theta \in \mathbf{T}^n, \quad (\theta_j) \leqslant \Phi^i(2^j); \quad i = 1 \ldots n\}.$$

Transpositions évidentes pour les *théorèmes* 5 *et* 6.

Le théorème 7 s'énonçant ainsi :

Soit H un espace de Hilbert; $a_1 \ldots a_n$ des constantes > 0 quelconques. Soit une fonction $T^n \to \mathbf{C}$ continue dans le complémentaire de l'origine telle que

$$\forall\lambda \in]0, 1], \qquad \forall\theta \in E_0, \qquad \Phi(\lambda^{a_1}\theta_1 \ \ldots \ \lambda^{a_n}\theta_n) = \Phi(\theta_1 \ \ldots \ \theta_n).$$

Alors Φ est un multiplicateur à valeur dans $\mathcal{L}(H)$, dans

$$\mathcal{F}L^p(G, H), \qquad \text{si} \qquad 1 < p < \infty.$$

8. APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION.

Nous utilisons les résultats concernant l'interpolation des applications linéaires ou bilinéaires par la méthode des espaces de moyenne (voir [4], [17], [24], [25]) $(A_j)_j$ avec $j \in \{0, 1\}$ désignant un couple d'interpolation d'espaces de Banach, $\theta \in]0, 1]$, et $p_j \in [1, +\infty]$, conformément à [24], l'espace noté $S(p_0, A_0, -\theta; p^1, A_1, 1-\theta)$ dans [17] est noté ici

$$(A_0, A_1)_{\theta p_\theta} = (A_0, A_1)_{\theta p_0 p_1}$$

avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Nous nous limitons à la considération du cas scalaire

$$(B_1 = B_2 = B_3 = \mathbf{C}).$$

1° Notons $\mathcal{M}(G)$ l'espace des mesures complexes bornées sur le groupe $G(= \mathbf{R}^n, \mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n)$: c'est l'espace des convoluteurs $L^1(G) \to L_1(G)$.

Nous avons donc deux applications bilinéaires continues (naturelles)

$$L^\infty(G') \times L^2(G) \to L^2(G)$$
$$\mathcal{F}(\mathcal{M}(G)) \times L^1(G) \to L^1(G)$$

définies de la façon suivante : au couple formé par une distribution T dans $L^\infty(G')$ (resp. $\mathcal{F}\mathcal{M}(G)$) et à une fonction φ de $L^2(G)$ (resp. $L^1(G)$), on fait correspondre $(\overline{\mathcal{F}}T) * \varphi = \overline{\mathcal{F}}(T.\hat{\varphi})$.

Un théorème de [17] nous apprend que l'existence de ces 2 relations bilinéaires continues entraîne l'existence de celle-ci,

$$(\mathcal{F}\mathcal{M}(G),\ L^\infty(G')_{\theta,1} \times (L^1(G),\ L^2(G))_{\theta,p} \to (L^1(G),\ L^2(G))_{\theta,p}.$$

Et ceci pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Or si p est tel que $\dfrac{1-\theta}{1} + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\theta}{2} = \dfrac{1}{p}$, un autre théorème de [17] et le résultat de [24] nous apprennent que :

$$(L^1(G),\ L^2(G))_{\theta p} = (L^1(G),\ L^2(G))_{\theta,1,2} = L^p(G).$$

Nous allons déterminer un sous-espace de $(\mathcal{F}\mathcal{M}(G),\ L^\infty(G'))_{\theta,1}$ dans le cas où $G' = \mathbf{T}^n$ de la façon suivante :

Notant $C^\alpha(T^n)$ avec $\alpha \geqslant 0$ les fonctions $\Phi : T^n \to \mathbf{C}$ qui sont höldériennes d'ordre α, on a les injections :

$$C^\alpha(T^n) \to \mathcal{F}\mathcal{M}(Z^n) \qquad \text{si} \qquad \alpha > \frac{n}{2}$$
$$C^0(T^n) \to L^\infty(T^n).$$

(Cette deuxième relation est évidente, la 1re s'obtient en transposant pour $n > 1$ un résultat de Serge Bernstein relatif au cas $n = 1$, voir [33].) D'où par interpolation entre les 2 relations précédentes il vient

$$(C^\alpha(T^n),\ C^0(T^n))_{\theta,1} \to (\mathcal{F}\mathcal{M}(Z_n),\ L^\infty(T^n))_{\theta,1}.$$

Les fonctions du premier espace $\left(\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$ sont donc des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p(Z^n)$ si $0 < \theta < 1$ et $-\frac{\theta}{2} = \frac{1}{p}$. On peut expliciter la partie P de cet espace formé par les fonctions Φ à support dans

$$S = \left\{\theta \in \mathbf{T}^n, \qquad |\theta_i| < \frac{1}{2}, \qquad i = 1 \ldots n\right\}.$$

Identifions T^n (comme dans le § 5) aux points $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$ de $\mathbf{R}^n$ tels que $-\frac{1}{2} < \xi_i \leqslant \frac{1}{2}$. (D'ailleurs d'après [26], les éléments de P sont aussi des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p(\mathbf{R}^n$.)

Avec les résultats du chapitre VII de [17] et ce qui précède, on a la

Proposition 5. — a) *Les fonctions* $\Phi : R^n \to \mathbf{C}$ *à support dans* $S = \left\{\xi,\ |\xi_i| < \frac{1}{2}\ \forall i\right\}$ *sont des multiplicateurs dans* $\mathcal{F}L^p(\mathbf{R}^n)$ *si elles satisfont à l'une des conditions suivantes :*

$$\left(\theta \in [0, 1] \qquad \textit{est tel que} \qquad 1 - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p}\right).$$

1° *Si* $(1 - \theta)\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) = j + \eta$ *avec* j *entier et*

$$\eta \in]0, 1[\forall k = (k_1 \ldots k_n)$$

avec $|k| \leqslant j$, $D^k\Phi$ *est une fonction continue bornée et*

$$\forall k = (k_1 \ldots k_n)$$

avec $\sum_{i=1}^{n} k_i = |k| = j$, $D^k\Phi$ *vérifie*

$$\forall \varepsilon_i = (0, \ldots 0, 1, 0 \ldots 0),$$

$$\int_0^\infty t^{-(1-\theta)} |D^k\Phi(. + t\varepsilon_i) - D^k\Phi(.)|_1 \frac{dt}{t} < \infty.$$

2° *Si* $(1 - \theta)\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) = j + 1$ *avec* j *entier*

$$\forall k \quad \textit{avec} \quad |k| \leqslant j,$$

$D^k\Phi$ *est une fonction continue bornée et*

$$\forall k \quad \textit{avec} \quad |k| = j,$$

$D^k\Phi$, vérifie

$$\forall i, \quad \int_0^\infty t^{-2(1-\theta)} |D^k\Phi(. + 2t\,\varepsilon_i) - 2D^k\Phi(. + t\varepsilon_i) + D^k\Phi(.)|_1 \frac{dt}{t} < \infty$$

b) *Avec la proposition* 2, *on voit que ce qui précède est encore vrai si l'on supprime la condition de support.*

(J. Peetre a obtenu indépendamment et d'une façon différente un résultat analogue annoncé dans [25]. Hirschman dans [6] obtient des résultats dans le même sens.)

2° Voici une autre application fondée toujours sur le même principe :

Cherchons des multiplicateurs radiaux de $\mathcal{F}L^p(\mathbf{R}^n)$ c'est-à-dire des multiplicateurs Φ tels que

$$\Phi(\xi) = \tilde{\Phi}(|\xi|)$$

(où $\tilde{\Phi}$ est une fonction $R^+ \to \mathbf{C}$).

De la version donnée par Hormander (voir [7]) du théorème de Mihlin, il résulte que Φ est un multiplicateur dans

$$\mathcal{F}L^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$$

si

$$\exists C_0, \quad \forall \xi, \quad |k| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \quad |\xi|^k\, |D^k\Phi(\xi)| \leqslant C_0$$

(la norme de multiplicateur étant majorée par $C \times C_0$).

Posons alors pour tout $t > 0$ $\varphi(t) = \tilde{\Phi}(e^t)$.

Notons pour tout entier $l \geqslant 0$, $X(l)$ l'espace (naturellement normé) des fonctions radiales $\Phi : R^n_\xi \to \mathbf{C}$ telles que la fonction φ associée soit telle que φ, φ', ... $\varphi^{(k)}$ soient des fonctions bornées continues.

Nous avons donc 2 applications bilinéaires naturelles

$$X\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) \times L^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^n) \to L^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$$
$$X(0) \times L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n).$$

D'où l'on déduit par interpolation que les fonctions Φ radiales sur R^n_ξ telles que la fonction $\tilde{\varphi}$ associée soit dans

$$\left(X\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right), \qquad X(0))_{\theta,1};$$

sont des multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p(R^n)$ avec

$$\theta \in]0,1[, \qquad 1 - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p}.$$

On peut expliciter des fonctions (comme dans la proposition 5 en utilisant [17]).

Considérons une fonction $\Phi : R^n \to \mathbf{C}$ *telle que*

$$\Phi(\xi) = \varphi(\log |\xi|)$$

est une fonction $R \to \mathbf{C}$ *telle que*

$$\left(1 - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p_0}, \qquad \theta \in]0,1[\right).$$

1° *Si* $(1 - \theta)\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) = j + \eta$ *avec* j *entier et* $\eta \in]0,1[$.

$\forall k \leqslant j$, $D^k\varphi$ *est une fonction continue bornée,* $D^j\varphi$ *vérifie une condition de Holder intégrale*

$$\int_0^\infty t^{-(1-\theta)} |D^j\varphi(. + t) - D^j\varphi(.)|_1 \frac{dt}{t} < \infty.$$

2° *Si* $(1 - \theta)\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) = j + 1$ *avec* j *entier.*

$\forall k \leqslant j$, $D^k\varphi$ est une fonction continue bornée et $D^j\varphi$ vérifie la condition :

$$\int_0^\infty t^{-2(1-0)} |D^j\varphi(\,.\,+2t) - 2D^j\Phi(\,.\,+t) + D^j\Phi(\,.\,)|_1 \frac{dt}{t} < \infty.$$

Alors Φ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p$ pour $p_0 < p < p_0'$.

3° Utilisant par exemple le théorème 1, on voit que l'on peut remplacer dans les conclusions les théorèmes 3 à 7 les espaces L^p par des espaces de Lorentz L^{pq} avec

$$q \in]1, +\infty].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnese, Maggiorazioni in L^p dei potenziali relativi all equazione del Calore, *Ric. di Math.*, vol. XIII (1964), 1-45.

[2] G. C. Barozzi, Sul multi-indice degli operatori quasi ellittici (1964) Boll UMI (3), vol. 19, 289-299.

[3] Benedek, Calderon et Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, *Proc. Nat. Acad. of Sc.*, vol. 48, n° 3 (march 1963), 356-365.

[4] Calderon, Théorème de Marcinkiewicz, Conf. orale à l'Institut, Henri-Poincaré (1962).

[5] Calderon et Zygmund, On the existence of certain integrals, *Act. Math.* 88 (1952), 85-139.

[6] Hirschman, Multiplier Transformations, I : *Duke Journal*, 26, (1956), 222-242; II : 28 (1961), 45-56.

[7] Hormander, Translations invariant operators in L^p, *Act. Math.*, 104 (1960), 93-140.

[8] Hormander, Linear differential operators, Springer, Berlin (1964).

[9] Hunt, An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces, *Bull.* AMS, vol. 70, n° 6, (novembre 1964), 803-807.

[10] Jones, Singular integrals and parabolic equations. *Bull.* AMS 69 (1963), 501-503.

[11] Jones, A class of Singular integrals. *Amer. Journ. of Math.*, vol. 86, n° 2 (avril 1964), 441-462.

[12] Kothe, Topologische lineare Raume, Springer, (1961).

[13] Krabbe, Refraction non hilbertienne d'une transformation symétrique bornée, *Act. Szeg.*, 22 (1961), p. 301.

[14] Krée, Sur les Multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ avec poids CRAS, t. 258 (10 février 1964), 1692-1695.

[15] Krée, Sur les Multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ avec poids (à paraître).

[16] Krée, Sur les Multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$, CRAS, t. 260, (26 avril 1965), 4400-4403.

[17] Lions et Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publications bleues de l'I.H.E.S. Paris n° 19 (1964).

[18] LITTLEWOOD PALEY, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 42 (1937), 52-89.
[19] LIZORKIN, Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ à $\mathcal{F}L^q$, *Doklady*, 152 (1963), 808-811.
[20] MALGRANGE, Division des distributions. *Sem. Schwartz* (1959-1960) *exposés* 23-24.
[21] MARCINKIEWICZ, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, *Stud. Math.*, vol. 8 (1939), 78-91.
[22] MIHLIN, Multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$. *Doklady*, 109 (1956), 701-703.
[23] O NEIL, Convolution operators and $L(p, q)$ spaces. *Duke Journal*, J. 30 (1963), 129-142.
[24] PEETRE, Sur le nombre de paramètres..., *Ric. di Mat.*, vol. 12 (1963), fasc. 2.
[25] PEETRE, Applications de l'interpolation 61, Conf. orale, Institut Henri-Poincaré (janvier 1965).
[26] PLANCHEVEL et POLYA, Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples, *Comm. Math.*, 9 (1936-1937), 224-248.
[27] J. SCHWARTZ, A remark of Calderon Zygmund inequalities. *Comm.* PAM, 14 (1961), 785-799.
[28] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann (1951).
[29] L. SCHWARTZ, Distributions à valeurs vectorielles, *Ann. de l'Institut Fourier* (1959).
[30] STECKIN, Sur les formes bilinéaires, *Doklady Acad. Nauk.*, vol. 71, 237-240.
[31] STEIN, On the function of Littlewood Paley and Mareinkiewicz. TAMS, 88 (1958), 430-466.
[32] SUNOUCHI, Discrete analogue of a theorem of Littlewood Paley, *Tok. Journal*, 13 (1961), 295-319.
[33] ZYGMUND, Trigonometrical series, t. 1 et 2.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1965).

Paul KREE,
Faculté des Sciences,
Service de Mathématiques,
Parc Valrose, 06, Nice.

Notes ajoutées à la correction des épreuves.

(1) Dans l'énoncé du théorème 3, on peut remplacer (49) par la condition plus faible (voir [3]) : quels que soient $b_2 \in B_2$ et $b'_3 \in B'_3$:

$$\int_{x \in G \setminus Q_l} |(K(x-y) - K(x))\, b_2|\, dx \leqslant c_1 |b_2|$$

et

$$\int_{x \in G \setminus Q_l} |({}^tK(x-y) - {}^tK(x))\, b'_3|\, dx \leqslant c'_1 |b'_3|.$$

(2) A. P. Calderon nous a signalé que l'énoncé du théorème 8 est encore vrai pour des multiplicateurs à valeurs dans $L(H)$. Il suffit de reprendre la démonstration en utilisant la note précédente.

(3) Voir dans un travail à paraître de Shamir une démonstration de l'énoncé de Lizorkin.