ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD RAUZY

Suites partiellement récurrentes (applications à la répartition modulo 1 et aux propriétés arithmétiques des fonctions analytiques)

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 1 (1966), p. 159-234

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_159_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 1 (1966), 159-234.

SUITES PARTIELLEMENT RECURRENTES (APPLICATIONS A LA RÉPARTITION MODULO 1 ET AUX PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES)

par GÉRARD RAUZY

Je tiens à exprimer, ici, la profonde reconnaissance que je garde à la mémoire de M. SALEM qui suivit toujours mon travail en conseiller attentif et bienveillant.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à M. PISOT dont les encouragements m'ont permis d'entreprendre et poursuivre cette thèse dont il a bien voulu assumer la direction.

Je remercie M. KAHANE qui a accepté de me poser le second sujet et M. SERRE qui a bien voulu faire partie du jury.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 161

NOTATIONS 165

CHAPITRE 1. — RELATIONS DE RÉCURRENCE 167
1. Systèmes canoniques existence 167
2. Etude du système canonique 170

CHAPITRE 2. — RÉPARTITION MODULO 1 DE $\lambda\theta^n$. DÉFINITION DE LA FRÉQUENCE 175
1. Cas où θ est algébrique 175
2. Cas où θ est réel quelconque 179

CHAPITRE 3. — RÉPARTITION MODULO 1 : RÉSULTATS PARTICULIERS 182
1. Cas où $||\lambda\theta^n||$ tend vers 0 rapidement (θ algébrique irrationnel) 182
2. Cas où λ est algébrique (θ algébrique) 183
REMARQUE 184

CHAPITRE 4. — RÉPARTITION MODULO 1 : QUESTIONS D'EXISTENCE DE MESURE ET DE DENSITÉ 188
1. Ensemble des λ tels que $||\lambda\theta^n|| \to 0$ ($\theta \in S$ irrationnel) 189
2. Questions métriques 191
3. Résultats particuliers aux nombres de Salem 196
4. Réciproque du corollaire du chapitre 2 198

CHAPITRE 5. — DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR. FONCTIONS ENTIÈRES 208
1. Généralisation d'un résultat de Borel 211
2. Fonction holomorphe en dehors d'un cercle non centré à l'origine 215
3. Applications : fonctions entières prenant des valeurs entières sur un ensemble d'entiers .. 222

CHAPITRE 6. — GÉNÉRALISATION D'UN RÉSULTAT DE POLYA 224

BIBLIOGRAPHIE 233

Introduction.

Beaucoup de résultats de théorie des nombres utilisant le fait qu'une propriété est vraie sur l'ensemble **N** des entiers positifs, peuvent se généraliser en supposant la propriété vraie seulement sur un ensemble partiel d'entiers, assez « fréquent » en ce sens qu'il contient des tranches assez longues d'entiers consécutifs. Ceci est notamment le cas quand les propriétés en question concernent des suites récurrentes.

Par exemple, si un polynome à coefficients dans un surcorps de **Q** prend des valeurs entières quand la variable décrit **N**, il est connu que ce polynome est de la forme :

$$P(z) = \sum_{\sigma=0}^{s} \lambda_\sigma \binom{z}{\sigma} \qquad \text{où} \qquad \lambda_\sigma \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Nous pouvons alors généraliser ce résultat de la manière suivante : *Soit* **J** *un ensemble d'entiers tel que* $\forall\, A \in \mathbf{N}$, $\exists\, A$ *entiers consécutifs dans* **J**. *Si un polynome* $P(z)$ *prend des valeurs entières pour* $z \in \mathbf{J}$, $P(z)$ *est encore de la forme* (1).

(Pour cela, écrivons $P(z)$ sous la forme (1) avec λ_σ quelconque. Si t est le plus grand indice tel que $\lambda_t \notin \mathbf{Z}$ il y a contradiction en considérant pour un entier $n \in \mathbf{J}$ convenablement choisi la différence t-ème $\Delta_t P(n)$). Remarquons que ce résultat n'est plus valable si nous remplaçons l'ensemble **J** par un ensemble même infini et de densité positive ne possédant pas la propriété énoncée (par exemple si **J** est l'ensemble des entiers pairs et $P(z) = z/2$) [1].

Donnons encore un autre exemple qui illustre la méthode que nous utiliserons au cours de ce travail; nous généralisons de la manière suivante un résultat de Fatou :

Soient $A(z)$ *et* $Q(z)$ *deux polynomes de* $\mathbf{Q}[z]$ *premiers entre eux et supposons* $Q(z)$ *à coefficients entiers, primitif. Si la fraction rationnelle* $A(z)/Q(z)$ *est holomorphe à l'origine et y admet le développement :*

$$A(z)/Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

[1] Il est visible d'ailleurs que le résultat est valable pour un ensemble **J** si et seulement si ce dernier est arithmétiquement dense, c'est-à-dire si toute progression arithmétique contient un élément de **J** au moins (donc une infinité).

où u_n est entier pour tout indice n appartenant à un ensemble $\mathbf{J} \subset \mathbf{N}$ possédant la propriété énoncée précédemment sur les éléments consécutifs alors $|Q(0)| = 1$.

En effet, posons $Q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_s z^s$, a_0 est évidemment non nul et il suffit de montrer que $|a_0| = 1$. Supposons le contraire et soit p un nombre premier divisant a_0. Dans la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ le polynome $Q(z)$ admet alors au moins une racine θ de valeur absolue strictement inférieure à 1 (polygone de Newton) et se décompose en un produit :

$$Q(z) = a_0 (1 - z/\theta)(1 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{s-1} z^{s-1}).$$

D'autre part, u_n vérifie dès que n assez grand, soit $n \geqslant t$ la relation de récurrence :

$$a_0 u_{n+s} + \ldots + a_s u_n = 0. \tag{2}$$

En posant : $v_n = u_{n+s-1} + \beta_1 u_{n+s-2} + \ldots + \beta_{s-1} u_n$ on a donc pour $n \geqslant t$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{\theta} v_n$ d'où pour $n \geqslant t$ $\quad v_n = \theta^{-(n-t)} v_t$.

Mais v_t ne peut être nul, sinon on aurait $v_n = 0$ pour $n \geqslant t$, donc la quantité : $(1 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{s-1} z^{s-1}) \dfrac{A(z)}{Q(z)}$ serait un polynome et θ devrait être racine de $A(z)$ ce qui est impossible puisque A et Q sont premiers entre eux. (En d'autres termes v_n ne peut pas être nul, car la relation (2) est la plus courte possible).

Comme $|\theta|_p < 1$, il en résulte que $|v_n|_p \to \infty$ quand $n \to \infty$, donc $\exists\, n_0$ tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow |v_n|_p > \beta$ où $\beta = \max\limits_{i=0,\ldots,s-1} |\beta_i|$. Mais par hypothèse, il existe n_1 tel que $n_1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + (n_0 + s - 1)$ appartiennent à $\mathbf{J}$, $u_{n_1+n_0}, \ldots, u_{n_1+n_0+s-1}$ sont donc entiers et $|v_{n_1+n_0}|_p \leqslant \beta$. Contradiction.

Un contre exemple est cette fois-ci fourni par la fraction $z/(2 - z^2)$ l'ensemble $\mathbf{J}$ étant toujours l'ensemble des entiers pairs.

Résumé.

Après avoir étudié dans le premier chapitre quelques propriétés des suites vérifiant pour un ensemble fini d'indices consécutifs une même relation de récurrence linéaire, nous définissons au chapitre 2 une caté-

gorie d'ensembles contenant des tranches d'entiers consécutifs : *les ensembles de fréquence supérieure à* 1, la fréquence d'un ensemble d'entiers étant une mesure de la longueur relative des tranches d'entiers consécutifs lui appartenant.

Nous étudions alors les généralisations possibles relativement à cette catégorie et principalement aux ensembles de fréquence infinie des résultats de M. Pisot sur la répartition modulo 1 d'une part et d'autre part des propriétés des coefficients du développement de Taylor de fonctions analytiques, ou des valeurs prises par ces fonctions.

1. En ce qui concerne la répartition modulo 1 le résultat principal est le suivant.

Soit θ *un nombre algébrique réel supérieur à* 1. *Pour qu'il existe un ensemble* **J** *de fréquence infinie et un nombre réel* $\lambda \neq 0$ *tels que :*
$\lim\limits_{n \in J} ||\lambda \theta^n|| = 0$, $(||x|| = |x - k|$, k étant l'entier le plus voisin de $x)$
il faut et suffit que θ *appartienne à l'ensemble* T *des entiers algébriques supérieurs à* 1, *dont tous les conjugués sont à l'intérieur ou sur le cercle unité.*

Nous montrons dans le 2e chapitre la nécessité de cette condition en bornant pour un θ algébrique n'appartenant pas à T, la fréquence de tout ensemble **J** pour lequel existe $\lambda \neq 0$ avec :

$$\overline{\lim_{n \in J}} ||\lambda \theta^n|| < \varepsilon(\theta), \quad \varepsilon(\theta) \text{ étant une fonction à valeurs positives.}$$

Nous montrons dans le 4e chapitre que la condition est suffisante en séparant le cas où θ appartient à la classe **S** des entiers algébriques dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle unité (§ 1) de celui où θ est un nombre de Salem (§ 4) : nous construisons dans ces deux cas un ensemble **J** de fréquence infinie et montrons que *pour un ensemble de* λ *ayant la puissance du continu* on a :

$$\lim_{n \in J} ||\lambda \theta^n|| = 0.$$

L'ensemble des couples (λ, θ) tels qu'il existe un ensemble de fréquence infinie sur lequel $||\lambda \theta^n||$ tende vers 0, n'est donc pas dénombrable, néanmoins nous montrons (chap. 4, § 2) que *pour un* θ *donné l'ensemble des* λ *tels que* (λ, θ) soit un tel couple *est de mesure nulle* et qu'il se réduit à l'élément $\lambda = 0$ sauf pour *un ensemble de* θ *de mesure nulle* (au sens de Lebesgue).

Ce résultat reste d'ailleurs valable en supposant seulement **J** de fréquence supérieure à 1 (et $\overline{\lim}_{n \in J} \|\lambda \theta^n\|$ convenablement bornée). Tous les autres résultats que nous donnons sur la répartition module 1, concernent *des ensembles partiels* supposés seulement de *fréquence supérieure à* 1; nous montrons au chapitre 2 que si nous supposons que sur un tel ensemble $\overline{\lim} \|\lambda \theta^n\|^{1/n} < 1$ alors θ est nécessairement algébrique et au chapitre 3, revenant au cas où θ est algébrique nous donnons des résultats particuliers concernant ces ensembles plus généraux en faisant des hypothèses supplémentaires : soit que $\|\lambda \theta^n\|$ *tende rapidement vers* 0 (§ 1), soit que λ *soit algébrique* (§ 2) auquel cas on peut conclure grâce à une application directe du théorème de Roth; enfin, dans le paragraphe 3 du chapitre 4, nous généralisons pour ces ensembles, le résultat concernant la densité de $\lambda \tau^n$ modulo 1 sur un segment centré à l'origine quand τ est un nombre de Salem et λ un nombre convenable du corps de τ.

2. En ce qui concerne les fonctions analytiques nous rappelons tout d'abord un résultat d'Ostrowski : si une fonction $f(z)$ holomorphe à l'infini, admet au voisinage de ce point le développement :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}$$

et si u_n est nul pour $n \in \mathbf{J}$ où **J** est de fréquence infinie, alors f est uniforme et est limite dans tout son domaine d'holomorphie d'une suite $P_\nu(1/z)$ de polynomes en $1/z$. Nous appelons *fonction d'Ostrowski* la somme d'une telle fonction et d'un polynome en z, étudions quelques propriétés simples de ces fonctions et donnons alors (chap. 5, § 1) la généralisation suivante d'un résultat de Borel :

Si $f(z)$ holomorphe à l'infini et admettant le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1},$$

a un rayon de méromorphie inférieur à 1, *et si u_n est entier pour $n \in \mathbf{J}$ (de fréquence infinie), alors f est le quotient d'une fonction d'Ostrowski (de rayon d'holomorphie égal au rayon de méromorphie de f), par un polynome à coefficients entiers dont les racines sont des entiers algébriques.*

Nous montrons dans le paragraphe 2 que si l'on fait les mêmes hypothèses sur f mais en supposant cette fois que f est holomorphe en dehors d'un cercle de rayon inférieur à 1 centré au point $z = 1$, il en résulte alors

que f est une fraction rationnelle ce qui conduit à la généralisation suivante d'un théorème de Polya :

Soit $f(z)$ une fonction entière telle que la quantité

$$\alpha(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \operatorname{Log} \left| f(re^{i\varphi}) \right|$$

soit bornée par $k < \operatorname{Log} 2$. Alors si pour $n \in \mathbf{J}$ de fréquence infinie, $f(n) \in \mathbf{Z}$, $f(z)$ est un polynome.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnons une généralisation du résultat de Polya sur les fonctions holomorphes à l'extérieur d'un ensemble compact de diamètre transfini inférieur à 1, mais, nous sommes obligés de supposer les coefficients du développement au voisinage de l'infini, entiers pour un ensemble d'indice plus particulier que les ensembles considérés jusqu'ici.

Remarque.

La condition imposée à l'ensemble $\mathbf{J}$ dans les deux résultats énoncés au début de l'introduction reste vérifiée si l'on remplace $\mathbf{J}$ par l'ensemble $\mathbf{J}(a, b)$ des entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que $an + b \in \mathbf{J}$ (a entier $\geqslant 1$ $b \in \mathbf{Z}$). De même la fréquence d'un ensemble que nous définirons au chapitre 2 reste invariante dans une telle transformation. Réciproquement les contre-exemples que nous avons fournis font encore intervenir des progressions arithmétiques : ce fait est à rapprocher du résultat de Mahler (Eine arithmetische Eigenschaft der Taylorkoeffizienten rationaler funktionen. *Proc. Ned. Akad. Wet.*, t. 38, 1935, pp. 50-60) sur les zéros des coefficients du développement en série de Taylor d'une fraction rationnelle, résultat dont la démonstration légèrement modifiée permet d'améliorer considérablement le résultat de Fatou déjà cité.

Notations.

Nous noterons respectivement, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, l'ensemble des entiers naturels non négatifs, des entiers rationnels, des nombres-rationnels, des nombres complexes, $\mathbf{Q}_p$, Ω_p la complétion de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue p-adique, et la clôture algébrique de cette complétion.

Pour un nombre rationnel x, $|x|_p$ désignera la valeur absolue p-adique de x avec la condition : $|p|_p = 1/p$.

On désignera par $[x]$ l'entier inférieur ou égal au nombre réel x ($[x] \leqslant x < [x] + 1$) et par $||x||$ la valeur absolue de la différence entre x et l'entier le plus voisin ($||x|| = \min_{n \in \mathbf{Z}} |x - n|$).

On désignera par $\binom{x}{n}$ le polynôme $\dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$

Enfin, étant donné un corps K une suite u_n d'éléments de K et un polynôme P à coefficients dans K. $P = a_0 z^s + \dots + a_s$, on désignera par $P((u_n))$ la quantité $a_0 u_{n+s} + \dots + a_s u_n$.

On a immédiatement

$$P((u_n + v_n)) = P((u_n)) + P((v_n))$$

$$(P + Q)((u_n)) = P((u_n)) + Q((u_n)), \; P((Q((u_n)))) = (PQ)((u_n))$$
$$= Q((P((u_n)))).$$

Si $K = \mathbf{C}$, si la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}$ est holomorphe au voisinage de l'infini, alors en désignant par γ une courbe parcourue dans le sens direct entourant les singularités de la fonction f on a :

$$P((u_n)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) P(z) z^n \, dz$$

Enfin, si

$$u_n = \lambda \theta^n, \quad P((u_n)) = \lambda \theta^n P(\theta).$$

CHAPITRE I

RELATIONS DE RÉCURRENCE

1. Systèmes canoniques-existence.

Soient donnés un entier x et un nombre réel y tels que $0 \leqslant x < y$. Dans toute la suite nous supposerons donnée une suite finie de nombres rationnels u_n où l'indice n varie dans l'intervalle $x \leqslant n < y$.

1.1. *Déterminants de Hankel.*

Nous posons pour $k \geqslant 0$, $x \leqslant n$, $n + 2k < y$ (n, k entiers)

$$D_{n,k} = \begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+k} \\ & & \\ u_{n+k} & \dots & u_{n+2k} \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_{n,-1} = 1.$$

On a alors pour $k \geqslant 1$ la relation de Sylvester;

$$S(n, k) : \; D_{n,k} D_{n+2,\, k-2} - D_{n,k-1} D_{n+2,k-1} = D^2_{n+1,k-1}$$

d'où l'on déduit les deux schèmes de démonstration

$$\begin{cases} A(n, k) : D_{n,k} = D_{n,k-1} = 0 \Rightarrow D_{n+1,k-1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(en utilisant la relation } S(n, k)) \\ B(n, k) : D_{n-2,k} = D_{n,k-1} = 0 \Rightarrow D_{n-1,k-1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(en utilisant la relation } S(n-2, k)) \end{cases}$$

1.2. — Lemme. — *Soit t un entier tel que* $0 \leqslant t < \frac{1}{2}(y - x)$,

a) *Si $D_{n,t}$ est nul quand il est défini (pour $0 \leqslant n < y - 2t$), alors pour $x + 1 \leqslant n < y - 2t + 1$, $D_{n,t-1}$ est ou bien identiquement nul, ou bien n'est jamais nul et dans ce dernier cas ne l'est pas non plus pour $n = x$.*

b) *Si pour* $k \geqslant t$, $D_{x,k}$ *est nul quand il est défini*

$$(\textit{pour } k < \frac{1}{2}(y - x)),$$

alors $D_{n,t}$ *est nul pour :*

$$x \leqslant n < \frac{1}{2}(y + x) - t.$$

Démonstration.

Supposons $D_{n,t-1} = 0$ pour $n = n_0$ avec

$$x + 1 \leqslant n_0 < y - 2t + 1.$$

Alors, si $n_0 + 1 < y - 2t + 1$ on peut appliquer $A(n_0, t)$, donc $D_{n_0+1,t-1}$ est nul. En itérant, on voit que $D_{n,t-1} = 0$ pour

$$n_0 < n < y - 2t + 1.$$

De même, si $n_0 - 1 \geqslant x + 1$ on peut appliquer $B(n_0 - 2, t)$ donc $D_{n_0-1,t-1} = 0$. En itérant on montre bien $D_{n,t-1} = 0$ pour

$$x + 1 \leqslant n \leqslant n_0$$

ce qui achève la démonstration de la première assertion de a.

En remarquant que si $D_{x,t-1} = 0$ on peut appliquer $A(x, t)$, ce qui entraîne $D_{x+1,t-1} = 0$ on démontre la seconde.

Pour montrer b il suffit en posant

$$T = \left[\frac{1}{2}(y + x)\right]$$

d'appliquer successivement

$$A(x, t+1), A(x, t+2), \ldots, A(x, T)$$

puis

$$A(x+1, t+1), \ldots, A(x+1, T-1), \ldots,$$

et enfin

$$A(x + T - (t+1), t+1).$$

1.3. — Définition. — *Nous appellerons système canonique pour* u_n *un triplet* $(P ; m, m')$ *formé par un polynôme* P *à coefficients entiers, primitif, tel que* $P(0) \neq 0$, *et de deux entiers* m, m' *tels que l'on ait en désignant par* s *le degré de* P.

$$\begin{cases} x \leqslant m \leqslant m' < y - 2(s-1) \\ \mathrm{P}((u_n)) = 0 \text{ quand cette quantité est définie c'est-à-dire pour} \\ \qquad\qquad m \leqslant n \leqslant m' + s - 2. \\ \mathrm{D}_{m,s-1} \neq 0. \end{cases}$$

1.4. — THÉORÈME D'EXISTENCE. — *Soit un entier t tel que*

$$0 \leqslant t < \frac{1}{2}(y - x),$$

alors, il existe pour u_n un système canonique (P ; m, m') *dans les deux cas suivants :*

a) — $\mathrm{D}_{n,t} = 0$ *quand il est défini (pour $x \leqslant n < y - 2t$);*

b) — $\mathrm{D}_{x,k} = 0$ *pour $k \geqslant t$ quand il est défini (pour $k < \frac{1}{2}(y - x)$).*

On a en outre en désignant toujours par s le degré de P :

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant s \leqslant t & \\ & m' - m \geqslant \begin{cases} y - x - 2t & \textit{dans le cas a} \\ \frac{1}{2}(y - x - 2t) & \textit{dans le cas b} \end{cases} \\ x \leqslant m \leqslant x + t & \end{array}$$

Démonstration.

Dans le cas a, on a par hypothèse $\mathrm{D}_{n,t} = 0$ pour $x \leqslant n < y - 2t$. En itérant, alors, le résultat du 1.3 a on voit qu'il existe un entier s avec $0 \leqslant s \leqslant t$ tel que :

$$\begin{array}{ll} D_{n,} & = 0 \text{ pour } x + (t - s) \leqslant n < y - 2t + (t - s) \\ \mathrm{D}_{n,s-1} & \neq 0 \text{ pour } x + (t - s) \leqslant n < y - 2t + (t - s) + 1. \end{array}$$

Mais si $\mathrm{D}_{n,s} = 0$ comme les mineurs de la dernière ligne de ce déterminant ne sont pas tous nuls (puisque par exemple le mineur de u_{n+2s} est égal à $\mathrm{D}_{n,s-1}$) et que ce sont des nombres rationnels (puisque les u_ν le sont par hypothèse) on peut trouver un système et un seul d'entiers non tous nuls ($a_0, \ldots, a_s$) premiers entre eux (avec par exemple $a_0 > 0$) et qui leurs sont proportionnels. On aura alors $s + 1$ relations :

$$a_0 u_{n+\sigma+s} + \ldots + a_s u_{n+\sigma} = 0 \quad (\sigma = 0, \ldots, s)$$

les $a_0, \ldots, a_s$ étant déterminés uniquement par les s premières équations, ou par les s dernières. On en déduit par récurrence qu'ils ne dépendent pas du n choisi.

En désignant, alors par P (z) le polynôme $a_0 z^s + \ldots + a_s$ on a donc :

$$P((u_n)) = 0 \quad \text{pour } x + (t - s) \leqslant n < y - 2t + (t - s) + s.$$

P (z) est bien primitif à coefficients entiers, et a_0 est proportionnel à $D_{x,s-1}$ et a_s à $D_{x+1,s-1}$.

P (z) est donc exactement de degré s et $P(0) \neq 0$ ce qui achève la démonstration en prenant

$$m = x + t - s, y - 2t + (t - s) + s - 1 \leqslant m' + s - 2 < y - 2t + (t - s) + s.$$

Pour démontrer b on se ramène grâce à 1.3 b au cas précédent où l'on remplace y par $Y = \frac{1}{2}(y + x) + t$.

2. Etude du système canonique.

2.1. — Soient donnés une suite u_n de rationnels pour

$$m \leqslant n \leqslant m' + 2(s - 1),$$

et un système canonique $(P ; m, m')$ pour u_n.

Soit d'autre part, K un surcorps de $\mathbf{Q}$ et soit dans K une décomposition du polynôme P :

$$P = a_0 Q R \text{ avec } \begin{cases} Q = z^q - \beta_1 z^{q-1} - \ldots - \beta_q \\ R = z^r - \gamma_1 z^{r-1} - \ldots - \gamma^r \end{cases} \quad q + r = s$$

Posons :

$$P(z) = a_0 (z^s - \alpha_1 z^{s-1} \ldots - \alpha_s), \; v_n = R((u_n)), \; w_n = Q((u_n))$$

et considérons les matrices :

$$\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} u_n & \ldots & u_{n+s-1} \\ u_{n+s-1} & \ldots & u_{n+2s-2} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V}_n = \begin{pmatrix} v_n & \ldots & v_{n+q-1} \\ v_{n+q-1} & \ldots & v_{n+2q-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{W}_n = \begin{pmatrix} w_n & \ldots & w_{n+r-1} \\ w_{n+r-1} & \ldots & w_{n+2r-2} \end{pmatrix}$$

définies respectivement pour :

$$m \leqslant n \leqslant m', \qquad m \leqslant n \leqslant m' + r, \qquad m \leqslant n \leqslant m' + q.$$

On a immédiatement les relations de récurrence [10] :

$$\mathcal{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_s & \cdots & & \alpha_1 \end{pmatrix} \mathcal{U}_n, \qquad \mathcal{V}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \beta_q & \cdots & & \beta_1 \end{pmatrix} \mathcal{V}_n,$$

$$\mathcal{W}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \gamma_r & \cdots & & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons une première relation :

$$\text{dét } \mathcal{V}_{m'+r} = (-1)^{(m'+r)(q+1)} \beta_q^{m'-m+r} \text{ dét } \mathcal{V}_m \tag{1}$$

D'autre part, on a si $m \leqslant n \leqslant m'$:

$$\text{dét } \mathcal{U}_n = \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+s-1} \\ u_{n+s-1} & \cdots & u_{n+2s-2} \end{vmatrix}$$

Retranchons de la s-ème colonne, β_1 fois la colonne $(s-1)$-ème, ..., β_q fois la colonne $(s-q)$-ème et recommençons cette opération en décalant à chaque fois d'une unité vers la gauche jusqu'à la q-ème colonne :

$$\text{dét } \mathcal{U}_n = \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+q-1} & w_n & \cdots & w_{n+r-1} \\ u_{n+1} & & u_{n+s+q-1} & w_{n+s} & \cdots & w_{n+s+r-1} \end{vmatrix}$$

Recommençons cette opération sur les lignes cette fois et en utilisant les coefficients du polynôme R.

$$\text{dét } \mathcal{U}_n = \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+q-1} & w_n & \cdots & w_{n+r-1} \\ u_{n+r-1} & \cdots & u_{n+s-1} & w_{n+r-1} & \cdots & w_{n+2r-2} \\ \mathrm{R}((u_n)) & \cdots & \mathrm{R}((u_{n+q-1})) & \mathrm{R}((w_n)) & \cdots & \mathrm{R}((w_{n+r-1})) \\ \mathrm{R}((u_{n+q-1})) & \cdots & \mathrm{R}((u_{n+2q-2})) & \mathrm{R}((w_{n+q-1})) & \cdots & \mathrm{R}((w_{n+s-1})) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+q-1} & w_n & \cdots & w_{n+r-1} \\ u_{n+r-1} & \cdots & u_{n+s-1} & w_{n+r-1} & \cdots & w_{n+2r-2} \\ v_n & \cdots & b_{n+q-1} & 0 & & 0 \\ v_{n+q-1} & \cdots & v_{n+2q-2} & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

(en utilisant les relations

$$v_n = \mathrm{R}((u_n)) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}((w_n)) = \mathrm{RQ}((u_n)) = \mathrm{P}((u_n)) = 0).$$

En développant alors ce déterminant selon la règle de Laplace, nous en déduisons une seconde relation :

$$\text{dét } \mathcal{U}_n = (-1)^{qr} \text{ dét } \mathcal{V}_n \text{ dét } \mathcal{W}_n . \tag{2}$$

2.2. — LEMME. — *Si* (P; m, m') *est un système canonique pour* u_n, *et si* u_n *est entier quand il est défini* (*c'est-à-dire pour*

$$m \leqslant n \leqslant m' + 2(s-1))$$

alors en posant $M = m' - m$ et $P = a_0 z^s + \ldots + a_s$.

a_0^M *divise* dét $\mathcal{U}_m$ *et par conséquent* a_s^M *divise* dét $\mathcal{U}_{m'}$.

Démonstration.

Soit p un nombre premier divisant a_0. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_s$ les racines de $P(z)$ dans Ω_p. Posons alors en gardant les notations précédentes :

$$Q = \prod_{|\theta_\sigma|_p > 1} (z - \theta_\sigma), \qquad R = \prod_{|\theta_\sigma|_p \leqslant 1} (z - \theta_\sigma)$$

Q n'ayant que des racines de valeur absolue > 1, il est visible (polygone de Newton) que :

$$|\beta_q|_p > |\beta_i|_p \qquad \text{si} \qquad i < q.$$

D'autre part, R n'ayant que des racines de valeur absolue $\leqslant 1$ ses coefficients, fonctions symétriques de ces racines sont en valeur absolue $\leqslant 1$.

Le coefficient de z^r dans $P(z)$ est : $a_0 \beta_q + a_0 \beta_{q-1} \gamma_1 + \ldots$ sa valeur absolue est donc égale à la valeur absolue de son unique terme de valeur maximum c'est-à-dire à $|a_0 \beta_q|_p$. Mais, d'une part, P est à coefficients entiers donc $|a_0 \beta_q|_p \leqslant 1$, d'autre part, P est primitif, donc on ne peut avoir $|a_0 \beta_q|_p < 1$ sinon on aurait $|a_0 \beta_i|_p < 1 \ \forall i = 1, \ldots, q$ et tous les coefficients de a_0 Q seraient < 1 en valeur absolue, donc aussi ceux de P ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc,

$$|a_0 \beta_q|_p = 1$$

D'autre part, comme $|\gamma_i|_p \leqslant 1$ pour $i = 1, \ldots, r$ et

$$v_n = u_{n+r} - \gamma_1 u_{n+r-1} - \ldots - \gamma_r u_n$$

on a : $|v_n|_p \leqslant 1$ et par conséquent $|\text{dét } \mathcal{V}_{m'+r}|_p \leqslant 1$. Enfin,

$$w_n = u_{n+q} - \beta_1 u_{n+q-1} \ldots - \beta_q u_n \quad \text{donc} \quad |w_n|_p \leqslant |\beta_q|_p.$$

et par conséquent : $|\text{dét}\,\mathcal{V}_m|_p \leqslant |\beta_q|_p^r$. En appliquant la relation (1) du 2.1. il vient

$$|\beta_q|_p^{M+r}\,|\text{dét}\,\mathcal{V}_m|_p \leqslant 1$$

et en appliquant la relation (2)

$$|\beta_q|_p^r\;|\text{dét}\,\mathcal{V}_m|_p \geqslant |\text{dét}\,\mathcal{V}_m|_p$$

d'où

$$|\beta_q|_p^M\;|\text{dét}\,\mathcal{U}_m|_p \leqslant 1 \qquad \text{soit} \qquad |a_0|_p^M > |\text{dét}\,\mathcal{U}_m|_p.$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout p divisant a_0 entraîne bien que a_0^M divise dét $\mathcal{U}_m$. En prenant la relation de récurrence à l'envers ou en utilisant le fait que

$$|\text{dét}\,\mathcal{U}_{m'}| = \left|\frac{a_s}{a_0}\right|^M |\text{dét}\,\mathcal{U}_m|$$

on en tire le deuxième résultat.

2.3. — Lemme. — *Si* $(P; m, m')$ *est un système canonique pour* u_n, *et si* u_n *vérifie quand il est défini (pour* $m \leqslant n \leqslant m'/2(s-1)$ *) l'inégalité :* $|u_n| < C K^n$ (où K et $C \geqslant 1$). *Alors, quelque soit* ζ *racine de* P *dans le corps des complexes :*

$$|\zeta|^{M-s+1} \leqslant (2K^2 C)^{s^2} K^{M+ms}/|\text{dét}\,\mathcal{U}_m| \quad \textit{ou bien} \quad |\zeta| \leqslant K$$

(on voit le sens de cette relation en laissant s et m fixe et faisant tendre m' vers l'infini : on obtient à la limite : $|\zeta| \leqslant K$).

Démonstration.

Comme nous voulons uniquement une majoration de ζ nous pouvons toujours supposer que ζ est de module maximum (par rapport à l'ensemble des modules des racines).

Conservant les mêmes notations que dans 2.1, nous posons :

$$Q = z - \zeta \qquad \text{d'où} \qquad q = 1, \qquad r = s - 1.$$

L'égalité (1) devient alors :

$$|v_{m'+r}| = |\zeta|^{M+r}\,|v_m|$$

donc :

$$|\zeta|^{M+r} < |R((u_{m'+r}))| \times |\text{dét}\,\mathcal{U}_m| \,/\, |\text{dét}\,\mathcal{U}_m| \qquad \text{(d'après (2))}.$$

Les coefficients de R sont fonctions symétriques des autres racines que ζ qui sont en module $\leqslant |\zeta|$.

Donc :

$$|\gamma_i| \leqslant \binom{r}{i} |\zeta|^i$$

et :

$$|R((u_{m'+r}))| \leqslant C\,K^{m'+r}\,(K^r + |\gamma_1|\,K^{r-1} + \ldots + |\gamma_r|) \leqslant C\,K^{m'+r}\,(K + |\zeta|)^r$$

D'autre part :

$$|w_n| \leqslant |u_{n+1}| + |\zeta|\,|u_n| \leqslant C\,K^n\,(K + |\zeta|)$$

dans dét $\mathcal{W}_m$ tous les coefficients sont au plus égaux à

$$C\,K^{m+2r-2}\,(K + |\zeta|)$$

donc on a :

$$|\text{dét}\,\mathcal{W}_m| \leqslant \{C\,K^{m+2r-2}\,(K + |\zeta|)\}^r \times r! \quad \text{et} \quad r! \leqslant r^r \leqslant 2^{r^2}.$$

Donc finalement :

$$|\zeta|^{M+r}\,|\text{dét}\,\mathcal{U}_m| < 2^{r^2}\,\{C\,K^{m+2r-2}\,(K + |\zeta|)\}^r \times C\,K^{m'+r}\,(K + |\zeta|)^r.$$

Mais, ou bien $|\zeta| \leqslant K$, ou bien $K + |\zeta| < 2\,|\zeta|$ et en utilisant le fait que C et K sont supérieurs à 1 on obtient bien alors la majoration indiquée (en remplaçant $K + |\zeta|$ par $2\,|\zeta|$ et r par $s - 1$).

CHAPITRE II

RÉPARTITION MODULO 1 DE $\lambda\theta^n$

DÉFINITION DE LA FRÉQUENCE [9]. — Soit $\mathbf{J} \subset \mathbf{N}$ un ensemble d'entiers. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels $\geqslant 1$ tels que :

$\mathrm{A} \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \forall x_0 > 0, \quad \exists x \in \mathbf{N}, \quad x > x_0$ tel que $n \in \mathbf{J}$ si n entier vérifie l'inégalité $x \leqslant n < \mathrm{A}x$. Nous appellerons *fréquence de* $\mathbf{J}$ *la borne supérieure (éventuellement infinie) des* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$.

Remarque. — Si la fréquence d'un ensemble $\mathbf{J}$ est strictement supérieure à 1, alors $\mathbf{J}$ est nécessairement infini et on a même $\sum_{n \in \mathbf{J}} 1/n = \infty$. ($\mathbf{J}$ contient également une infinité de nombres premiers). D'autre part, il est évident que la densité supérieure d'un ensemble de fréquence A est au moins égale à $1 - 1/\mathrm{A}$. Par contre même si A est infini, la densité inférieure de l'ensemble peut être nulle. En fait, un ensemble et son complémentaire peuvent être tous deux de fréquence infinie. Par exemple, l'ensemble $\mathbf{J}$ tel que :

$$n \in \mathbf{J} \Longleftrightarrow \exists k \quad \text{entier tel que} \quad 2^{2^k} \leqslant n < 2^{2^{k+1}}.$$

Nous étudions, dans ce chapitre, la répartition modulo 1 de $\gamma\theta^n$ quand n parcourt un ensemble $\mathbf{J}$ caractérisé par sa fréquence, cherchant à étendre à ces ensembles les résultats de M. Pisot [5].

1. Cas où θ est algébrique.

Notations. — Soit θ un nombre algébrique et soit

$$\mathrm{P}(z) = a_0 z^s + \ldots + a_s$$

le polynôme primitif à coefficients entiers ($a_0 \geqslant 1$) irréductible dont θ est racine. Nous noterons $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_s$ les conjugués de θ sur le corps des rationnels et nous dirons que les nombres $x_\sigma (\sigma = 1, \ldots, s)$ où $x_\sigma \in \mathbf{Q}(\theta_\sigma)$ sont conjugués si x_σ est transformé en x_1 dans l'isomorphisme

de $\mathbf{Q}(\theta_1)$ sur $\mathbf{Q}(\theta_\sigma)$ qui transforme θ_1 en θ_σ. Nous poserons dans toute la suite :

$$\varepsilon(\theta) = 1/\sum_{i=0}^{s} |a_i|.$$

THÉORÈME. — *Soit* θ *un nombre algébrique réel strictement supérieur à* 1, *soit* λ *un nombre réel quelconque non nul et soit* $\mathbf{J}$ *un ensemble de fréquence* A. *Supposons que l'on ait l'inégalité :*

$$\overline{\lim_{n\ \mathbf{J}}}\, ||\lambda\theta^n|| < \varepsilon(\theta).$$

Alors, on a nécessairement :

$$|a_0| \prod_{\sigma\neq 1} \max(1, |\theta_\sigma|) \leqslant \theta^{1/(A-1)} \ (= 1 \textit{ si } A \textit{ est infini}).$$

COROLLAIRE. — *Si* $\mathbf{J}$ *est de fréquence infinie et si* $||\lambda\theta^n|| \to 0$ *quand* $n \in \mathbf{J} \to \infty$, *alors,* θ *appartient à l'ensemble* T *des entiers algébriques* > 1 *dont tous les conjugués sont intérieurs ou sur le cercle unité.*

Démonstration.

1.1. — Posons pour $n \in \mathbf{N}$, $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$ où u_n est l'entier le plus voisin de $\lambda\theta^n$. Comme $\lambda \neq 0$, $\lambda\theta^n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Donc, dès que n est assez grand, $u_n \neq 0$. D'autre part, dès que $n \in \mathbf{J}$ est assez grand on a : $|\varepsilon_n| < \varepsilon(\theta)$. Comme on ne change manifestement pas la fréquence d'un ensemble en lui enlevant un nombre fini de termes, nous supposerons que pour $n \in \mathbf{J}$: $|u_n| \neq 0$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon(\theta)$.

Nous nous donnons alors deux nombres réels B et x_0 tels que $1 < B < A$ et $x_0 > 2s/(B-1)$ nous noterons C, C_1, C_2, ..., les quantités indépendantes du choix de B et x_0.

Par définition de la fréquence, il existe un entier $m > x_0$ tel que $n \in \mathbf{J}$ pour tout entier n de l'intervalle $m \leqslant n < Bm$. Nous poserons alors : $m' = [Bm] - 1 - 2(s-1)$, $M = m' - m$ de sorte que nous aurons les inégalités :

$$\begin{cases} n \in \mathbf{J} \quad \text{pour} \quad m \leqslant n \leqslant m' + 2(s-1) \\ m > x_0, \qquad\qquad M \geqslant (B-1)m - 2s. \end{cases} \tag{1}$$

1.2. — Soit alors n tel que $m \leqslant n \leqslant m' + s - 2$, on a :

$$P((u_n)) = P((\lambda \theta^n - \varepsilon_n)) = \lambda \theta^n P(\theta) - P((\varepsilon_n)) = - P((\varepsilon_n))$$

mais

$$|P((\varepsilon_n))| \leqslant (\sum_{i=0}^{s} |a_i|) \times \max_{\nu=0,\dots,s-1} |\varepsilon_{n+\nu}| < 1$$

puisque $n, n+1, \dots, n+s-1 \in \mathbf{J}$ d'après (1). $P((u_n))$ étant entier puisque $n, n+1, \dots, n+s-1 \in \mathbf{J}$ on en déduit donc :

$$\text{Si} \quad m \leqslant n \leqslant m' + s - 2 \quad \text{alors} \quad P((u_n)) = 0. \tag{2}$$

1.3. — Le système de s équations linéaires aux s inconnues $x_1, \dots, x_s$:

$$y_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} \theta_\sigma^\nu \, x_\sigma \qquad (\nu = 0, \dots, s-1) \tag{3}$$

est un système de Cramer, son déterminant étant le Vandermondien $V(\theta_1, \dots, \theta_s)$ non nul puisque P est irréductible. Il se résoud donc par les formules :

$$x_\sigma = \sum_{\nu=0}^{s-1} \gamma_{\sigma,\nu} \, y_\nu \tag{4}$$

Pour un ν fixé, les $\gamma_{\sigma,\nu}$ sont conjugués comme on le voit aisément sur les formules donnant les solutions sous forme de déterminant. On a en outre l'inégalité :

$$\max_{\sigma=1,\dots,s} |x_\sigma| \leqslant C \max_{\nu=0,\dots,s-1} |y_\nu| \tag{5}$$

1.4. — Soient alors $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les solutions du système (3) quand on donne aux y_ν les valeurs :

$$y_\nu = u_{m+\nu} \; (\nu = 0, \dots, s-1).$$

En vertu de (2) on a :

$$\begin{aligned} a_0 \, u_{m+s} &= - (a_1 \, u_{m+s-1} + \dots + a_s \, u_m) \\ &= - \sum_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma (a_1 \, \theta^{s-1} + \dots + a_s) = a_0 \sum_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma \, \theta_\sigma^s \end{aligned}$$

en divisant par a_0 et en raisonnant par récurrence on en déduit que :

$$u_n = \sum_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma \, \theta_\sigma^{n-m} \qquad \text{pour} \qquad m \leqslant n \leqslant m' + 2(s-1). \tag{6}$$

1.5. — Soit $C_1 = C\,\varepsilon(\theta)$, le système (3) avec $y_\nu = \varepsilon_{m+\nu}$ admet pour solutions d'après la formule (6)

$$x_1 = \lambda\theta^m - \alpha_1,\ x_2 = -\alpha_2,\ \ldots,\ x_1 = -\alpha_s.$$

Tenant compte de (5) et du fait que $|\varepsilon_{m+\nu}| < \varepsilon(\theta)$ pour $\nu = 0, \ldots, s-1$, il vient :

$$\begin{cases} |\alpha_1 - \lambda\theta^m| < C_1 \\ |\alpha_\sigma| < C_1 \quad \text{pour } \sigma \neq 1 \end{cases} \tag{7'}$$

De même en résolvant le système (3) avec cette fois $y_\nu = \varepsilon_{m'+\nu}$ il vient :

$$\begin{cases} |\alpha_1 - \lambda\theta^m| < C_1\,\theta^{-M} \\ |\alpha_\sigma| < C_1\,|\theta_\sigma|^{-M} \text{ pour } \sigma \neq 1. \end{cases} \tag{7''}$$

Soit finalement :

$$\begin{cases} |\alpha_1 - \lambda\theta^m| < C_1\,\theta^{-M} \\ |\alpha_\sigma| \max(1, |\theta_\sigma|)^M < C_1 \quad \text{pour } \sigma \neq 1 \end{cases} \tag{7}$$

1.6. — Considérons le déterminant de Hankel :

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} u_m & \ldots & u_{m+s-1} \\ u_{m+s-1} & \ldots & u_{m+2s-2} \end{vmatrix}$$

En vertu de l'égalité matricielle résultant de (6) :

$$\begin{pmatrix} u_m & \ldots & u_{m+s-1} \\ u_{m+s-1} & \ldots & u_{m+2s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_s \\ \alpha_1\,\theta_1^{s-1} & \ldots & \alpha_s\,\theta_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \theta_1^{s-1} \\ 1 & \ldots & \theta_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

il vient posant $V = V(\theta_1, \ldots, \theta_s)$:

$$D = V^2 \prod_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma \tag{8}$$

Mais, les $u_{m+\nu}$ étant rationnels pour $\nu = 0, \ldots, s-1$ d'après (4) les α_σ sont conjugués. Or ils ne peuvent être tous nuls puisque alors u_m le serait d'après (6) ce qui est contraire à l'hypothèse faite en 1.1.

Donc aucun des α_σ n'est nul et d'après (8) $D \neq 0$. D'après la définition 1.2 du chapitre premier il en résulte ainsi que de (1) et (2), que $(P\,;\,m, m')$ est un système canonique pour u_n, et les u_n étant entiers on peut appliquer le lemme 2.2 du chapitre 1 avec ici : dét $\mathfrak{U}_m = D$ donc $|a_0|^M < |D|$.

On a alors, d'après (7)

$$\begin{cases} |\alpha_1| < |\lambda|\,\theta^m + C_1\,\theta^{-M} < C_2\,\theta^m \\ |\alpha_\sigma| \max(1, |\theta_\sigma|)^M < C_1 \quad \text{pour } \sigma \neq 1 \end{cases}$$

donc d'après (8)

$$|{}^0v| \qquad \prod_{\sigma\neq 1} \max(1, |\theta_\sigma|) < C_8^{1/M}\,\theta^{m/M} \tag{9}$$

Faisant tendre x_0 vers l'infini, donc m, B restant fixe alors m/M a une limite inférieure bornée par $1/(B-1)$ donc

$$|a_0| \prod_{\sigma\neq 1} \max(1, |\theta_\sigma|) \leqslant \theta^{-1/(B-1)}$$

En faisant maintenant tendre B vers A on obtient l'inégalité cherchée.

Remarque. — On aurait pu obtenir une majoration plus faible mais suffisante pour le corollaire en appliquant directement le lemme 2.3 du chapitre 1.

2. Cas où θ est réel quelconque.

Nous n'avons pas ici de résultat analogue à celui de M. Pisot [5] pour $\sum_{n\in\mathbf{N}} ||\lambda\,\theta^n||^2 < \infty$. Néanmoins nous pouvons conclure avec des hypothèses plus fortes sur la décroissance de $||\lambda\,\theta^n||$, mais plus faibles en ce qui concerne la fréquence de l'ensemble **J** que celles du corollaire précédent.

Théorème. — *Soit* **J** *un ensemble de fréquence* $A > 1$, *et soient* $\lambda \neq 0$, $\theta > 1$ *deux nombres réels. Supposons que l'on ait l'inégalité :*

$$\overline{\lim_{n\in J}}\ ||\lambda\,\theta^n||^{1/n} < 1$$

alors, θ *est nécessairement algébrique.*

Démonstration.

2.1. — Posons : $\lambda\,\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, u_n étant l'entier le plus proche de $\lambda\,\theta^n$. Soit d'autre part, ρ un nombre réel tel que :

$$\overline{\lim_{n\in J}}\ ||\lambda\,\theta^n||^{1/n} < \rho < 1.$$

Quitte à enlever un nombre fini de termes à l'ensemble **J** on a alors pour $n \in \mathbf{J}$

$$u_n \neq 0 \quad \text{et} \quad |\varepsilon_n| < C\,\rho^n \tag{1}$$

Donnons-nous toujours un nombre réel B tel que $1 < B < A$ et soit t un entier tel que $\theta\rho^t < 1$.

Soit alors x_0 réel tel que $x_0 > 2\,t/(B - 1)$.
Nous noterons toujours C_1, C_2, ... les quantités ne dépendant ni de B, ni de x_0.

Par définition de la fréquence, il existe un entier $x > x_0$ tel que $n \in \mathbf{J}$ pour $x \leqslant n < Bx$. Considérons alors le déterminant de Hankel

$$D_{n,t} = \begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+t} \\ u_{n+t} & \dots & u_{n+2t} \end{vmatrix} \quad \text{défini pour } x \leqslant n < Bx - 2\,t.$$

Une combinaison linéaire classique de lignes et colonnes permet d'écrire :

$$D_{n,t} = \begin{vmatrix} u_n & u'_n & \dots & u'_{n+t-1} \\ u'_n & u''_n & \dots & u''_{n+t-1} \\ u'_{n+t-1} & u''_{n+t-1} & \dots & u''_{n+2t-2} \end{vmatrix} \quad \text{avec} \begin{cases} u'_k = \varepsilon_{k+1} - \theta\,\varepsilon_k \\ u''_k = \varepsilon_{k+2} - 2\,\theta\,\varepsilon_{k+1} + \theta^2\,\varepsilon_k \end{cases}$$

Les majorations (Schwarz)

$$|u'_k|^2 \leqslant (1 + \theta^2)\,(\varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k+1}^2)$$
$$|u''_k|^2 \leqslant (1 + \theta^2)\,(\varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k+1}^2 + \varepsilon_{k+2}^2)$$

et la majoration d'Hadamard permettent d'écrire tenant compte de (1) :

$$|D_{n,t}| \leqslant C_2\,(\theta\rho^t)^n \tag{2}$$

2.2. — Comme t a été choisi de manière que $\theta\rho^t < 1$, dès que n assez grand $|D_{n,t}| < 1$. Mais, $D_{n,t}$ est un entier pour $x \leqslant n < Bx - 2\,t$. Donc, en prenant x_0 assez grand on a :

$$D_{n,t} = 0 \text{ pour } x \leqslant n < Bx - 2\,t \tag{3}$$

En vertu de l'hypothèse $x > x_0 \geqslant 2\,t/(B - 1)$ soit $t < \frac{1}{2}(Bx - x)$ on peut alors appliquer le théorème 1.4 a du chapitre 1. Donc, il existe pour u_n un système canonique $(P\,;\,m, m')$ tel que l'on ait si

$$P = a_0\,x^s + \dots + a_s.$$

$$x_0 < x \leqslant m \leqslant x + t, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad M = m' - m > (B - 1)\,x - 2\,t \tag{4}$$

Ici, comme $u_n \neq 0$ on a nécessairement $s \geqslant 1$.

Nous avons ainsi pour chaque x_0 un système canonique $(P\,;m, m')$ nous allons montrer que l'ensemble des polynômes P est nécessairement fini, ce qui entraînera l'existence d'un polynôme P fixe tel que pour une infinité de x_0, $(P\,;m, m')$ soit un système canonique.

2.3. — Soit en effet ζ une racine de P dans le corps des complexes, nous avons :

$$|u_n| < C_3\,\theta^n, \quad |\text{dét } \mathfrak{U}_m| \geqslant 1 \text{ puisque dét } \mathfrak{U}_m \text{ est entier.}$$

Utilisant le lemme 2.3 du chapitre 1 nous avons donc :

$$\text{ou bien } |\zeta| \leqslant \theta, \quad \text{ou bien } |\zeta|^{M-s+1} \leqslant (2\,\theta^2\,C_3)^{s^2}\,\theta^{M+ms}.$$

Mais quand $x_0 \to \infty$ $(M + ms)/(M - s + 1)$ reste borné ainsi que $s^2/(M - s + 1)$ d'après (4). Donc il existe une constante C_4 telle que $\forall x_0$ et $\forall \zeta$ racine du polynôme P correspondant à $x_0, |\zeta| < C_4$. Comme le degré du polynôme P est en outre borné par le nombre fixe t il en résulte que les coefficients de P sont bornés, comme ils sont entiers P appartient à un ensemble fini de polynômes. C.q.f.d.

2.4. — Pour une infinité de x_0 on a donc le même polynôme P_0 tel que $(P_0\,;m, m')$ soit système canonique.
Mais :

$$P_0\,((\varepsilon_m)) = \lambda\,\theta^m\,P_0\,(\theta) \quad \text{et} \quad |P_0\,((\varepsilon_m))| < C_5\,\rho^m$$

d'où :

$$|P_0\,(\theta)| \leqslant C_6\,(\rho/\theta)^m \leqslant C_6\,(\rho/\theta)^{x_0}$$

puisque $\rho/\theta < 1$.

Faisant tendre x_0 vers l'infini on a donc $P_0\,(\theta) = 0$ et comme $(P_0\,;m, m')$ est un système canonique, P_0 est à coefficients entiers et non identiquement nul ce qui entraîne bien que θ est algébrique.

CHAPITRE III

RÉPARTITION MODULO 1 : RÉSULTATS PARTICULIERS

Nous démontrons dans ce chapitre des résultats plus précis notamment en ce qui concerne la distinction entre les nombres de l'ensemble T et ceux de l'ensemble **S** (entiers algébriques dont tous les conjugués sont strictement intérieurs au cercle unité). Nous ferons des hypothèses plus restrictives que dans le chapitre précédent, mais, comme dans le deuxième théorème de ce chapitre, il nous suffira de supposer les ensembles considérés de fréquence strictement supérieure à 1 et non pas infinie.

1. Cas où $||\lambda\theta^n||$ tend vers 0 rapidement (θ algébrique irrationnel).

THÉORÈME. — *Supposons donné un nombre algébrique réel* $\theta > 1$ *de degré* $s > 1$. *Soit d'autre part, un nombre réel quelconque* $\lambda \neq 0$ *et un ensemble* **J** *de fréquence* $A > 1$.
Si on a :

$$\overline{\lim_{n \in \mathbf{J}}} \; ||\lambda\theta^n||^{1/n} \leqslant \theta^{-1/(s-1)}$$

alors θ *appartient à l'ensemble* **S** *et est une unité algébrique.*

Démonstration.

Soit $\rho_0 = \overline{\lim_{n \in \mathbf{J}}} \; ||\lambda\theta^n||^{1/n}$, donnons-nous un nombre réel ρ tel que $\rho_0 < \rho < 1$. Comme dans la démonstration du théorème 2 du chapitre 2 nous avons pour $n \in \mathbf{J}$: $|\varepsilon_n| < C_0 \rho^n$ où C_0 ne dépend pas de n. Quitte à enlever un nombre fini de termes à **J** nous pouvons encore supposer que pour $n \in \mathbf{J}$

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon(\theta)$$

(car $\rho < 1 \rightarrow C_0 \rho^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$).

Nous pouvons alors reprendre termes pour termes la démonstration

du théorème 1 du chapitre 2 en supposant $s > 1$. Mais au paragraphe 1.5 nous avions majoré $\max\limits_{\nu=0,\dots,s-1} |\varepsilon_{m+\nu}|$ et $\max\limits_{\nu=0,\dots,s-1} |\varepsilon_{m'+\nu}|$ par $\varepsilon(\theta)$ ici nous les majorons respectivement par : $C_0\,\rho^m$ et $C_0\,\rho^{m'}$.

On obtient alors à la place de l'inégalité (7) l'inégalité :

$$\left\{\begin{array}{ll} |\alpha_1 - \lambda\theta^m| < C_1\,\rho^{m'}\,\theta^{-M} & \text{en posant } C_1 = C\,C_0 \\ |\alpha_\sigma|\ \max(1, |\theta_\sigma|/\rho) < C_1\,\rho^m & \end{array}\right. \tag{7}$$

L'inégalité 9 devient alors :

$$|a_0| \prod_{\sigma\neq 1} \max(1, |\theta_\sigma|/\rho) < [(\rho^{s-1}\,\theta)^m\,(C_5 + C_6/\theta^m)]^{1/[(B-1)m-2s]} \tag{9}$$

Faisant tendre x_0 donc m vers l'infini on obtient :

$$|a_0| \prod_{\sigma\neq 1} \max(1, |\theta_\sigma|/\rho) \leqslant (\rho^{s-1}\,\theta)^{1/(B-1)}$$

Nous pouvons maintenant faire tendre ρ vers ρ_0 et on a, à la limite

$$|a_0| \prod_{\sigma\neq 1} \max(1, |\theta_\sigma|/\rho_0) \leqslant (\rho_\delta^{s-1}\,\theta)^{1/(B-1)} \leqslant 1$$

puisque $\rho_\delta^{s-1}\,\theta \leqslant 1$.

Ceci implique comme a_0 est entier $|a_0| = 1$, et $\forall\sigma \neq 1\ |\theta_\sigma| \leqslant \rho_0 < 1$ donc $\theta \in S$. En outre, $\theta \prod\limits_{\sigma\neq 1} |\theta_\sigma| \leqslant 1$, or c'est un entier non nul, donc il y a égalité, θ est une unité algébrique.

2. Cas où λ est algébrique (θ algébrique).

THÉORÈME. — *Soient donnés deux nombres algébriques réels* $\lambda \neq 0$ *et* $\theta > 1$. *Soit d'autre part* **J** *un ensemble de fréquence* $A > 1$. *Si l'on a :*

$$\overline{\lim_{n\in J}}\ ||\lambda\theta^n||' < \varepsilon(\theta) \quad \text{(même définition que dans le chapitre 2)}$$

alors, θ *appartient à l'ensemble* T *et* λ *appartient au corps de* θ. *Si l'on a en outre :*

$$\overline{\lim_{n\in J}}\ ||\lambda\theta^n|| = 0$$

alors, θ *appartient à l'ensemble* **S**.

Remarque.

Ce théorème soulève le problème de savoir s'il existe des éléments θ de T n'appartenant pas à **S**, et tels que pour un $\lambda \neq 0$, on ait

$$\lim_{n \in J} ||\lambda \theta^n|| = 0,$$

(λ étant nécessairement dans ce cas un nombre transcendant).

Démonstration.

2.1. — Nous reprenons la démonstration du théorème 1 du chapitre 2 jusqu'au système d'inégalités (7).

Désignons par d un dénominateur pour les quantités $\gamma_{\sigma,\nu}$ de la formule (4) — (par dénominateur, nous entendons un entier positif tel que $d\,\gamma_{\sigma,\nu}$ soit entier algébrique pour tout σ et ν).

Les formules (4) montrent alors, $u_{m+\nu}$ et $u_{m'+\nu}$ étant des entiers naturels, que $d\,\alpha_\sigma$ et $d\,\alpha_\sigma\,\theta_\sigma^M$ sont des entiers algébriques. En posant alors, $x_\sigma = d\,\alpha_\sigma\,\theta_\sigma^m$, $\mu = d\,\lambda$, $\varepsilon = \max\limits_{m \leqslant n \leqslant m'+s-1} |\varepsilon_n|$, les formules (7) deviennent :

$$\begin{cases} |\mu - x_1| < C\,\varepsilon\,\theta^{-m'} \\ |x_\sigma\,\theta_\sigma^n| < C\,\varepsilon \quad \text{pour} \quad n = m, m' \quad \text{et} \quad \sigma \neq 1 \\ x_\sigma\,\theta_\sigma^n \quad \text{entiers algébriques conjugués pour } n = m, m'. \end{cases} \tag{7}$$

Nous allons montrer que dès que m est assez grand le système (7), admet pour seule solution $x_1 = \mu$. Pour cela nous allons utiliser le théorème de Roth dans la forme que lui donne Lang [3].

2.2. — Posons $x_1 = x \in \mathbf{Q}(\theta)$, μ est un nombre algébrique puisque $\mu = d\lambda$ par hypothèse, d'autre part dès que x_0 est assez grand, donc m, on a : $m' > A'm$ où A' est un nombre réel quelconque vérifiant

$$1 < A' < B.$$

Soit $K = \mathbf{Q}(\theta)$ et soit M_K l'ensemble des valeurs absolues sur K. K étant un corps de nombre on a la formule du produit.

$$\alpha \neq 0, \qquad \alpha \in K, \qquad \prod_{v \in M_K} |\alpha|_v^{N_v} = 1$$

où $N_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$ est le degré de l'extension algébrique K_v (complété de K pour la valuation v) sur $\mathbf{Q}_v$ (complété de $\mathbf{Q}$ pour la même valuation). Nous poserons $||\alpha||_v = |\alpha|_v^{N_v}$. Sur K il y a au plus s valeurs absolues

archimédiennes (obtenues en prenant $|\alpha|_v = |\alpha_\sigma|$ valeur absolue ordinaire du conjugué α_σ de α). Nous appellerons v_0 la valeur absolue ordinaire telle que $|\theta|_{v_0} = |\theta| = \theta$.

Comme $\theta \in \mathbf{R}$, $Q_{v_0} = K_{v_0} = \mathbf{R}$ donc $N_{v_0} = 1$.

Soit alors

$$\begin{cases} S' \text{ l'ensemble des } v \in M_K \text{ avec } |\theta|_v > 1 \quad (v_0 \in S') \\ S'' \text{ l'ensemble des } v \in M_K \text{ avec } |\theta|_v < 1 \end{cases}$$

S' et S'' sont finis. Nous poserons alors pour $v \in S'$

$$\alpha_v = \begin{cases} \mu & \text{si } v = v_0 \\ 0 & \text{si } v \neq v_0 \end{cases}$$

$\alpha_v \in K_v$ et nous pouvons prolonger $\| \ \|$ à K_v. et nous considérons les deux quantités :

$$E = \prod_{v \ S'} \min(1, \|\alpha_v - x\|_v)$$

$$F = \prod_{v \ S''} \min(1, \|1/x\|_v)$$

F est bien défini car dès que m est assez grand $|\lambda - x| < |\lambda|$ d'après (7) donc $x \neq 0$.

2.3. — Si v est non archimédienne on a : $x\theta^m$ étant entier d'après (7)

$$\|x\|_v < \|\theta\|_v^{-m} \quad \text{et de même} \quad \|x\|_v \leqslant \|\theta\|_v^{-m'}$$

Si $v \neq v_0$ et v archimédienne on a en posant $C_1 = C\,\varepsilon$ d'après (7)

$$\|x\|_v \leqslant C_1 \|\theta\|_v^{-m} \quad \text{et de même} \quad \|x\|_v \leqslant C_1 \|\theta\|_v^{-m'}$$

Enfin si $v = v_0$ on a d'après (7)

$$\|\alpha_{v_0} - x\|_{v_0} \leqslant C_1\, \theta^{-m'} = C_1 \|\theta\|_{v_0}^{-m'}.$$

2.4. — On en déduit :

$$E \leqslant C_2 \prod_{v \in S'} \|\theta\|_v^{-m} \leqslant C_2 \Big(\prod_{v \in S'} \|\theta\|_v \Big)^{-A'm}$$

puisque pour $v \in S'$, $\|\theta\|_v > 1$ et que $m' > A'm$, où $C_2 = C_1^{\mathrm{card}\,(S')}$ ne dépend pas de m (en prenant $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$). D'après la formule du produit on en déduit donc :

$$E \leqslant C_2 \Big(\prod_{v \in S''} \|\theta\|_v \Big)^{mA'}. \tag{8}$$

2.5. — D'autre part, (7) montre que si $v \neq v_0$ est archimédienne : $\|x\theta^m\|_v < C_1$ et si $v \neq v_0$ est non archimédienne $\|x\theta^m\|_v \leqslant 1$. En po-

sant $C_3 = \max(1, C_1)$ on a donc $\forall v \neq v_0 \quad ||\theta||_v^m \leqslant C_3 ||1/x||_v$. D'autre part, pour $v \in S''$ $||\theta||_v < 1 \leqslant C_3$. Donc pour $v \in S''$

$$||\theta||_v^m \leqslant C_3 \min(1, ||1/x||_v).$$

En comparant avec (8) il vient :

$$E \leqslant C_4 F^{A'} \quad \text{où} \quad C_4 = C_2 C_3^{A' \operatorname{card}(S'')} \quad \text{ne dépend pas de } m. \tag{9}$$

2.6. — La hauteur de x est donnée par la formule :

$$H(x) = \prod_{v \in M_K} \max(1, ||x||_v) = \prod_{v \in S''} \max(1, ||x||_v) \times \prod_{v \in S''} \max(1, ||x||_v).$$

Mais, si $v \in S''$ ou bien $v = v_0$ et $||x||_v \leqslant |\lambda| + C_1$ d'après (7)
ou bien $v \in S'$, $v \neq v_0$ et $||x||_v \leqslant C_1 ||\theta||_v^{-m'} < C_1$
ou bien $v \in S'$ et $||x||_v \leqslant ||\theta||_v^{-m'} = 1$

donc :

$$H(x) \leqslant C_5 \prod_{v \in S''} \max(1, ||x||_v) \quad \text{où} \quad C_5 = (C_1 + |\lambda|) C_2^{\operatorname{card}(S')-1}$$

ne dépend pas de m, or :

$$\max(1, ||x||_v) = 1/\min(1, ||1/x||_v).$$

Donc :

$$F \leqslant C_5 H(x)^{-1}. \tag{11}$$

2.7. — On a donc en comparant (9) et (11) :

$$\prod_{S \ni a} \min ||\alpha_v - x||_v) \prod_{v \in S''} \min(1, ||1/x||_v) < \frac{C_6}{H(x)^{1+A'}} \tag{12}$$

où $C_6 = C_4 C_5^{A'+1}$ ne dépend pas de m, et où $1 + A' > 2$.

D'après le théorème de Roth cette équation n'a qu'un nombre fini de solutions en x. En d'autres termes pour une infinité de m le système d'inégalités (7) sera vérifié avec la même valeur x. $|\mu - x_1|$ étant aussi petit qu'on le veut, on aura donc $\mu = x_1 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbf{Q}(\theta)$ et d'autre part $|x_\sigma \theta_\sigma^m| < C\varepsilon$ entraîne si ε est fixe, que $|\theta_\sigma|$ *est nécessairement* $\leqslant 1$. Car x_σ étant conjugué de $x_1 \neq 0$ ne peut pas être nul. En outre, si ε tend vers 0 avec m (comme dans la deuxième partie du théorème) on ne peut avoir $|\theta_\sigma| = 1$ car alors $|x_\sigma| < C\varepsilon$ devrait être aussi petit qu'on le veut c'est-à-dire nul ce qui est impossible.

Il reste donc à montrer que θ est entier, mais sinon il existerait une valuation non archimédienne v telle que : $|\theta|_v > 1$. Comme

$$|x|_v \, |\theta|_v^m \leqslant 1$$

(puisque $x\theta^m$ entier) pour une infinité de m, ceci entraînerait encore $|x|_v = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ce qui est contradictoire.

Remarque.

Dans le cas où, par exemple, $\theta = 10$, nous obtenons un résultat de transcendance bien connu :

Soit λ un nombre réel, dont le développement décimal est :

$$\lambda = [\lambda] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n/10^{n+1}$$

où a_n n'est pas nul à partir d'un certain rang. Alors, si sur un ensemble **J** *de fréquence supérieure à* 1, *on a* $a_n = 0$ *pour* $n \in \mathbf{J}$, λ *est transcendant.* En effet on a si $m_\nu \leqslant n \leqslant m'_\nu \to n \in \mathbf{J}$ *et* $m'_\nu > \mathrm{B} m_\nu$

$$||\lambda \cdot 10^n|| = \sum_{k=m'_\nu+1}^{\infty} a_n/10^{k+l-n}$$

donc

$$||\lambda \cdot 10^n|| \leqslant \sum_{k=m'_\nu+1}^{\infty} 9/10^{k+l-n} = 1/10^{m'_\nu+1-n}$$

Si nous considérons alors un nombre B inférieur à la fréquence de **J** mais supérieur à 1, il existe une suite infinie m_ν satisfaisant aux conditions indiquées. Soit **K** l'ensemble de fréquence supérieure ou égale à $\frac{\mathrm{B}+1}{2}$ tel que $n \in \mathbf{K} \Longleftrightarrow \exists\, \nu$ tel que $m_\nu \leqslant n < \frac{\mathrm{B}+1}{2} m_\nu$. Alors sur **K** $||\lambda \cdot 10^n|| \to 0$. Si λ n'était pas transcendant λ devrait appartenir d'après le théorème à **Q** (10) c'est-à-dire être rationnel. Son développement décimal admettrait alors une période, qui pour ν assez grand serait entièrement contenue dans un intervalle $m_\nu \leqslant n < \frac{\mathrm{B}+1}{2} m_\nu$ donc nulle. Il existerait bien une puissance de 10 telle que $\lambda \cdot 10^k$ soit entier, c.q.f.d.

CHAPITRE IV

RÉPARTITION MODULO 1 : QUESTIONS D'EXISTENCE, DE MESURE ET DE DENSITÉ

Introduction.

Si θ *est un entier rationnel* $\geqslant 2$, *et si* $\varphi(n)$ *est une fonction de l'entier n telle que* $\varphi(n) > 0$ *alors, il existe un ensemble* **J** *de fréquence infinie tel que l'ensemble des* λ *pour lesquels on a :*

$$\forall\, n \in \mathbf{J}, \qquad \|\lambda\theta^n\| < \varphi(n)$$

a la puissance du continu.

En effet posons : $\psi(m) = \min\limits_{m \leqslant k \leqslant m^2} \varphi(k) > 0$ et définissons une suite d'entiers $m_1 < m_2 \ldots$ par les conditions : $m_0 = 1, m_{k+1}$ est le plus petit entier tel que $\theta^{m_{k+1}} > \theta^{m_k^2} \max(1, 1/\psi(m_k))$. Alors, tous les nombres réels donnés par un développement θ-aire :

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu/\theta^{m_\nu+1} \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant a_\nu \leqslant \theta - 1$$

sont distincts, leur ensemble a donc la puissance du continu. Par ailleurs si **J** désigne l'ensemble défini par :

$$n \in \mathbf{J} \Longleftrightarrow \exists\, k \quad m_k \leqslant n \leqslant m_k^2$$

On a si λ est un des nombres définis précédemment et si $n \in \mathbf{J}$ avec $m_k \leqslant n \leqslant m_k^2$

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \theta^n \sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_\nu/\theta^{m_{\nu+1}+1} \leqslant (\theta^n/\theta^{m_{k+1}+1}) \times$$
$$\times\ 1/(1 - 1/\theta) = \theta^n/\theta^{m_{k+1}} \leqslant \theta^{m_k^2 - m_{k+1}}$$

mais, $\theta^{m_k^2 - m_{k+1}} < \psi(m_k)$ par définition de m_{k+1} ; et comme pour $m_k \leqslant n \leqslant m_k^2$, $\varphi(n) \geqslant \psi(m_k)$ on a finalement : $\|\lambda\theta^n\| < \varphi(n)$ pour $n \in \mathbf{J}$ et **J** est trivialement de fréquence infinie. c.q.f.d.

Nous ne pouvons espérer montrer un théorème analogue pour tout

$\theta \in \mathbf{S}$, car en reprenant la démonstration du théorème 1 du chapitre 3, nous voyons que : *si* θ *est irrationnel on a nécessairement :*

$$\overline{\lim_{n \in \mathbf{J}}} \|\lambda \theta^n\|^{1/n} \geqslant \theta^{-1/(s-1)}$$

sur tout ensemble $\mathbf{J}$ *de fréquence supérieure à* 1. (Car on a obtenu pour $\sigma \neq 1$ $|\theta_\sigma| \leqslant \rho_0$ donc $\theta \rho_0^{s-1} \geqslant \prod_{\sigma=1}^{s} |\theta_\sigma| \geqslant 1$). Nous allons voir dans le théorème suivant que ce résultat est le meilleur possible au moins dans le cas des $\theta \in \mathbf{S}$ unités algébriques dont tous les conjugués sont égaux en module (ce qui est le cas des unités quadratiques, et des θ du 3e degré, unités et à conjugués imaginaires).

Ce théorème va également constituer une réciproque au théorème 1 du chapitre 2 en démontrant l'existence d'une large classe de λ tels que $\|\lambda \theta^n\| \to 0$ sur un ensemble de fréquence infinie.

1. Ensemble des λ tels que $\|\lambda \theta^n\| \to 0$ (où $\theta \in \mathbf{S}$ irrationnel)

THÉORÈME. — *Soit* $\theta \in \mathbf{S}$ *irrationnel, nous posons*

$$\rho = \max_{\sigma \neq 1} |\theta_\sigma| < 1,$$

où $\theta_1 = \theta$, $\theta_2, \ldots, \theta_s$ *sont les conjugués de* θ. *Soit, d'autre part,* $C(n) > 0$ *une fonction croissante de l'entier* n *tendant vers l'infini quand* $n \to \infty$. *Alors, il existe un ensemble* $\mathbf{J}$ *de fréquence infinie, tel que l'ensemble des* λ *réels pour lesquels :*

$$\forall n \in \mathbf{J}, \qquad \|\lambda \theta^n\| < C(n) \rho^n$$

a la puissance du continu. (*Donc* a fortiori *l'ensemble des* λ *tels que :*

$$\overline{\lim} \|\lambda \theta^n\|^{1/n} < 1 \quad \textit{ou} \quad \|\lambda \theta^n\| \to 0).$$

Démonstration.

1.1. — D'après le principe des tiroirs, pour tout n entier, il existe une entier algébrique $\beta(n)$ du corps $\mathbf{Q}(\theta)$ non nul tel qu'en désignant ses conjugués par $\beta_1(n) = \beta(n), \beta_2(n), \ldots, \beta_s(n)$ on ait :

$$\begin{cases} |\beta_1(n)| < \gamma\, 2^{-n(s-1)} \\ |\beta_\sigma(n)| < 2^n \quad \text{si} \quad \sigma \neq 1. \end{cases} \tag{1}$$

γ étant une constante $\geqslant 1$ ne dépendant que du corps $\mathbf{Q}(\theta)$. La norme de β c'est-à-dire $\prod_{\sigma=1}^{s} \beta_\sigma$ est un entier non nul, on a donc en utilisant la majoration des β_σ pour $\sigma \neq 1$

$$|\beta_1(n)| \geqslant 2^{-n(s-1)}. \tag{2}$$

1.2. — Définissons alors deux suites d'entiers n_k et m_k de la manière suivante : $n_1 = 1$, n_k étant choisi, m_k est le plus petit entier tel que :

$$C(m_k) > s \times 2^{n_k+1} \tag{3}$$

et m_k étant déterminé par (3) (ce qui est toujours possible puisque $C(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$) n_{k+1} est le plus petit entier tel que :

$$2^{n_{k+1}(s-1)} \geqslant \max\{2\gamma \times 2^{n_k(s-1)},\ \gamma \times 2^{-n_k} \times (\theta/\rho)^{m_k^2}\} \tag{4}$$

Soit $\mathbf{J}$ l'ensemble des entiers n tels que :

$$n \in \mathbf{J} \Leftrightarrow \exists\ k \text{ tel que } m_k \leqslant n < m_k^2$$

$\mathbf{J}$ *est manifestement de fréquence infinie* puisque lorsque $k \to \infty$, $m_k \to \infty$. Soit, d'autre part Λ l'ensemble des λ somme d'une série de la forme :

$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \beta(n_k)$ où ε_k est une suite quelconque de 0 et de 1. (Une telle série convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta(n)|$ est convergente puisque

$$|\beta(n)| < \gamma\, 2^{-n(s-1)}).$$

On a si les suites ε_k, ε'_k diffèrent et si :

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \beta(n_k), \qquad \lambda' = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k \beta(n_k).$$

$\lambda - \lambda' = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \beta(n_k)$ avec $\eta_k = -1, 0, 1$. Mais non identiquement nul.

Soit k l'entier minimum tel que $\eta_k \neq 0$

on a :

$$|\lambda - \lambda'| \geqslant |\beta(n_k)| - \sum_{h=k+1}^{\infty} |\beta(n_k)|$$

d'après (2)

$$|\beta(n_k)| \geqslant 2^{-n_k(s-1)}$$

d'après (1)

$$\sum_{h=k+1}^{\infty} |\beta(n_k)| \leqslant \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} |\beta(n)| < 2\gamma \times 2^{-n_{k+1}(s-1)}$$

donc finalement $|\lambda - \lambda'| > 2^{-n_k(s-1)} - 2\gamma \times 2^{-n_{k+1}(s-1)} \geqslant 0$ d'après (4).

Par conséquent si les suites ε_k et ε'_k diffèrent, $|\lambda - \lambda'| > 0$ c'est-à-dire λ est différent de λ', il y a donc correspondance biunivoque entre l'ensemble Λ et les suites de 0 et de 1, Λ *a donc la puissance du continu.*

1.4. — Mais, soit $n \in \mathbf{J}$ donc $m_k \leqslant n < m_k^2$ et soit $\lambda \in \Lambda$, posons $x = \sum_1^k \varepsilon_h \beta(n_h)$, x est un entier algébrique du corps $\mathbf{Q}(\theta)$, de conjugués.

$$x_\sigma = \sum_1^k \varepsilon_h \beta_\sigma(n_h)$$

On a :

$$|\lambda - x| \leqslant \sum_{h=k+1}^{\infty} |\beta(n_h)| < 2\gamma \times 2^{-n_{k+1}(s-1)}$$

$$|x_\sigma| \leqslant \sum_1^k |\beta_\sigma(n_h)| < 2^{n_k+1}$$

pour $\sigma \neq 1$ (d'après (1)).

Or la quantité $u = \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \theta_\sigma^n$ fonction symétrique des entiers $x_0 \theta_0^n$ est un entier rationnel.

On a donc :

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant |\lambda\theta^n - u| < 2\gamma \times 2^{-n_{k+1}(s-1)n}\theta + (s-1) \times 2^{n_k+1} \times \rho^n =$$
$$= \rho^n \{2\gamma \times 2^{-n_{k+1}(s-1)} (\theta/\rho)^n + (s-1) \times 2^{n_k+1}\}$$

majorons n par m_k^2, $2\gamma \times 2^{-n_{k+1}(s-1)} (\theta/\rho^{m_k^2})$ par 2^{n_k+1} d'après (4) et $s \times 2^{n_k+1}$ par $C(m_k)$ d'après (3).

On obtient : $\|\lambda\theta^n\| < C(m_k)\rho^n < C(n)\rho^n$ puisque $m_k \leqslant n$, et que $C(n)$ est une fonction croissante de l'entier n. C.q.f.d.

2. Questions métriques.

Nous venons de voir que pour certains θ l'ensemble des λ tels que $\|\lambda\theta^n\|$ tende vers 0 a la puissance du continu : néanmoins cet ensemble

n'est pas trop grand au sens de la mesure. Nous allons donner également un théorème métrique relativement aux θ.

THÉORÈME A. — *$\forall \theta$ réel > 1, l'ensemble des $\lambda \neq 0$ tels qu'il existe un ensemble* **J** *de fréquence supérieure à* 1, *avec :*

$$\lim_{n \in J} \|\lambda\theta^n\| < \frac{1}{1+\theta}$$

est de mesure nulle au sens de Lebesgue.

THÉORÈME B. — *L'ensemble des θ réels > 1, tels qu'il existe un ensemble de* **J** *de fréquence supérieure à* 1, *et un nombre réel $\lambda \neq 0$ avec :*

$$\lim_{n \in J} \|\lambda\theta^n\| < \frac{1}{2(1+\theta)^2}$$

est de mesure nulle au sens de Lebesgue.

Démonstration du théorème A. — Nous appellerons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A)$ l'ensemble des λ tels qu'il existe un ensemble **J** de fréquence supérieure à A sur lequel on ait :

$$\forall n \in \mathbf{J} \ \|\lambda\theta^n\| < \frac{1}{1+\theta}$$

et nous supposerons en outre que $1 \leqslant \lambda < \theta$.

2.1. — Il suffit de montrer que $\forall A > 1$ la mesure de $\mathcal{E}(A)$ est nulle. En effet, si λ est un nombre vérifiant les conditions du théorème A, comme $\|x\| = \|-x\|$, $|\lambda|$ est également un nombre vérifiant les conditions de ce théorème, et de même alors $|\lambda|\,\theta^{-k}$ $\forall k \in \mathbf{Z}$ (car si **J** est de fréquence > 1 $(k + \mathbf{J}) \cap \mathbf{N}$ l'est également) on peut donc choisir k de manière que $1 \leqslant |\lambda|\,\theta^{-k} < \theta$. Quitte à enlever un nombre fini de termes (ce qui ne change pas sa fréquence) à l'ensemble $(k + \mathbf{J}) \cap \mathbf{N}$ on peut supposer que sur cet ensemble **J'** on a :

$$\|\mu\theta^n\| < \frac{1}{1+\theta} \quad \text{où } \mu = |\lambda|\,\theta^{-k}$$

donc si A est un nombre inférieur à la fréquence de **J'** on a

$$\mu \in \mathcal{E}(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

puisque quel que soit $A > 1$, $\exists\, n$ tel que $1 + \frac{1}{n} \leqslant A$ donc,

$$\mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \supset \mathcal{E}(A).$$

Donc, à tout λ vérifiant les conditions du théorème A nous avons fait correspondre de manière unique un nombre

$$\mu \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Réciproquement l'ensemble des λ auxquels correspond un même nombre μ est l'ensemble des nombres de la forme $\pm\, \mu\, \theta^k$ ($k \in \mathbf{Z}$) qui est dénombrable. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des μ est de mesure nulle mais cet ensemble est union dénombrable d'ensemble $\mathcal{E}(A)$ avec

$$A = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

donc, il suffit bien de montrer que chaque ensemble $\mathcal{E}(A)$ est de mesure nulle.

2.2. — Soit $\mathcal{E}_m$ l'ensemble des λ tels que :

$$\begin{cases} 1 \leqslant \lambda < \theta \\ \|\lambda\theta^n\| < \dfrac{1}{1+\theta} \quad \text{pour} \quad m \leqslant n < Am. \end{cases}$$

Alors $\lambda \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow$ pour une infinité de m, $\lambda \in \mathcal{E}_m$. En d'autres termes $\mathcal{E}$ est la limite supérieure des ensembles $\mathcal{E}_m$; pour montrer que $\mathcal{E}$ est de mesure nulle, il suffit donc de montrer que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |\mathcal{E}_m|$ où $|\mathcal{E}_m|$ est la mesure de $\mathcal{E}_m$, est convergente. Mais, soit $\lambda \in \mathcal{E}_m$ et soit u_n l'entier le plus proche de $\lambda\theta^n$ pour $m \leqslant n < Am$, on a :

$$\theta^m - \frac{1}{1+\theta} < u_m < \theta^{m+1} + \frac{1}{1+\theta}$$

u_m ne peut donc prendre que $\theta^m(\theta - 1) + \dfrac{2}{1+\theta}$ valeurs différentes.

D'autre part pour $m \leqslant n < Am - 1$, $|u_{n+1} - \theta u_n| < 1$ donc u_m étant déterminé il en est de même de u_{m+1} et par récurrence de $u_{m'}$ où $m' = [Am] - 1$. Mais on a :

$$|\lambda - u_{m'}\,\theta^{-m'}| < \frac{1}{1+\theta}\,\theta^{-m'}$$

λ doit donc nécessairement être sur l'un des segments de centre $u_{m'}\,\theta^{-m'}$ de longueur $\dfrac{2}{1+\theta}\,\theta^{-m'}$ où l'entier $u_{m'}$ est associé de manière unique à un entier u_m ne pouvant prendre que $\theta^m(\theta-1)+\dfrac{2}{1+\theta}$ valeurs différentes. La mesure de $\mathscr{E}_m$ est inférieure à la somme des longueurs de ces segments. Tenant compte de la relation $m' \geqslant Am-2$ on obtient :

$$|\mathscr{E}_m| < C\,\theta^{-(A-1)m} \qquad \text{C ne dépendant pas de } m.$$

Comme $\theta > 1$, $A > 1$ il en résulte bien que $\sum_{m=1}^{\infty} |\mathscr{E}_m|$ est une série convergente. c.q.f.d.

Démonstration du théorème B.

2.3. — En vertu de la même remarque qu'au paragraphe 2.1. il suffit de montrer que l'ensemble $\mathscr{E}_\alpha(A)$ des $\theta > 1$ tels que $\exists\,\lambda$ avec $1 \leqslant \lambda < \theta$, et $\mathbf{J}$ de fréquence supérieure à $A(>1)$ avec :

$$\|\lambda\theta^n\| < \frac{1-\alpha}{2(1+\theta)^2} \qquad \text{pour} \qquad n \in \mathbf{J}$$

est de mesure nulle pour tout $\alpha > 0$.

2.4. — Mais si $\mathscr{E}_\alpha(A, X) = \mathscr{E}_\alpha(A) \cap [X, y[$ où $y = X^{(A+1)1/2}$, l'ensemble considéré est une union dénombrable de $\mathscr{E}_\alpha(A, X)$ avec A et $X > 1$. (Il suffit de prendre par exemple les $\mathscr{E}_\alpha(A, X_k)$ où $X_k = \exp\left\{\left(\dfrac{A+1}{2}\right)^k\right\}$). Il suffit donc de montrer que $\mathscr{E}_\alpha(A, X)$ est de mesure nulle pour tout $A > 1$, $X > 1$.

2.5. — Soit alors $\mathscr{E}_m$ l'ensemble des nombres θ tels que $X \leqslant \theta < y$ et tels que $\exists\,\lambda$, $1 \leqslant \lambda < \theta$ avec :

$$\|\lambda\theta^n\| < \frac{1-\alpha}{2(1+\theta)^2} \qquad \text{pour} \qquad m \leqslant n < Am.$$

Comme précédemment l'ensemble $\mathscr{E}(A, X)$ est la limite supérieure des ensembles $\mathscr{E}_m$, il suffit donc de montrer $\sum_{m=1} |\mathscr{E}_m|$ est une série convergente.

Nous cherchons donc — A, X étant fixés — la mesure de l'ensemble $\mathscr{E}_m$: nous appellerons C_1, C_2, ... les constantes ne dépendant pas de m, et

nous poserons $m' = [Am] - 1 \geqslant Am - 2$. Soit alors $\theta \in \mathcal{E}_m$ et λ associé $(1 \leqslant \lambda < \theta)$.

2.6. — Si pour $m \leqslant n \leqslant m'$, u_n est l'entier le plus proche de $\lambda\theta^n$ et si $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$ on a pour $m \leqslant n \leqslant m' - 2$

$$u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \lambda\theta^{n+2} - \frac{(\lambda\theta^{n+1} + \varepsilon_{n+1})^2}{\lambda\theta^n + \varepsilon_n} + \varepsilon_{n+2}$$

d'où :

$$u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{\lambda\theta^n(\varepsilon_{n+2} - 2\theta\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n\theta^2) + \varepsilon_n\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1}^2}{\lambda\theta^n + \varepsilon_n}$$

mais

$$|\varepsilon_n| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\alpha}{2(1+\theta)^2}\right)$$

donc :

$$|\varepsilon_n\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1}^2| < \frac{1}{2}$$

et :

$$|\varepsilon_{n+2} - 2\theta\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n\theta^2| < \frac{1-\alpha}{2}$$

d'où

$$|u_{n+2} - u_{n+1}^2/u_n| < \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1}{1 - 1/(2X^m)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{X^m - 1/2}$$

comme X est > 1, dès que $m > C_1$ on a :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}^2/u_n| < 1/2.$$

Donc, ayant choisi $u = u_m$ et $v = u_{m+1}$ le choix des u_n est déterminé de manière unique et en particulier le rapport $u_{m'}/u_{m'-1}$ est déterminé.

2.7. — Mais $u < \lambda\theta^m + \frac{1}{2} < \theta \times \theta^m + \frac{1}{2} < y^{m+1} + \frac{1}{2}$ donc dès que m est assez grand $(m > C_2)$ on a au plus $C_3\, y^m$ choix possibles pour u. u étant choisi on a si $\varepsilon = \frac{1}{2(1+\theta)^2}$: $|v - u| < \varepsilon$ et : $(u - \varepsilon)^{\frac{1}{m+1}} < \theta < (u + \varepsilon)^{\frac{1}{m}}$ donc :

$$u(u - \varepsilon)^{\frac{1}{m+1}} - \varepsilon < v < u(u + \varepsilon)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon.$$

Si nous posons :

$$\delta(u) = u\,(u+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} - u\,(u-\varepsilon)^{\frac{1}{(m+1)}} + 2\varepsilon = u\,(u-\varepsilon)^{\frac{1}{(m+1)}}$$

$$\left[(u+\varepsilon)^{\frac{1}{m\,(m+1)}}\left(\frac{u-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m+1}} - 1\right] + 2\varepsilon$$

pour $u > 1$, $\delta(u)$ est une fonction croissante de u, donc $\delta(u) < \delta(y)$.

Quand $m \to \infty$ $\delta(y) \to 2\varepsilon$ donc est borné supérieurement indépendamment de m par une constante $C_4\,u$ étant choisi il y a donc au plus C_4 valeurs possibles pour v.

Finalement, il existe au plus $C_5\,y^m$ choix de valeurs possibles pour le couple (u, v).

Mais soit un de ces choix, alors $u_{m'-1}$ et $u_{m'}$ sont déterminés et θ appartient alors nécessairement au segment $\left[\frac{u_{m'}-\varepsilon}{u_{m'-1}+\varepsilon}, \frac{u_{m'}+\varepsilon}{u_{m'-1}-\varepsilon}\right]$ de longueur bornée par : $C_6\,\theta^{-m'} < C_6\,X^{-m'}$.

Donc la mesure de $\mathcal{E}_m$ est bornée par $C_7\,X^{-Am}\,y^m < C_7\,(y\,X^{-A})^m$ or $y = X^{\frac{A+1}{2}}$ donc $y\,X^{-A} = X^{\frac{A+1}{2}} < 1$, $|\mathcal{E}_m|$ est bien borné par le terme général d'une série convergente. c.q.f.d.

3. Résultats particuliers aux nombres de Salem.

Un nombre de Salem est un nombre qui appartient à la classe T sans appartenir à la classe S, c'est-à-dire a au moins un conjugué sur le cercle unité [11]. Nous avons vu (théorème 2 du chapitre 3) que si θ est un nombre de Salem et si $\lambda \neq 0$ est un nombre algébrique, alors $\overline{\lim_{n \in J}} \|\lambda\theta^n\| > 0$ sur tout ensemble $\mathbf{J}$ de fréquence supérieure à 1. D'autre part en employant une méthode analogue à celle du théorème 1 de ce chapitre, on peut montrer qu'il existe un ensemble $\mathbf{J}$ de fréquence infinie tel que sur $\mathbf{J}$ l'ensemble des λ pour lesquels $\overline{\lim_{n \in J}} \|\lambda\theta^n\| < \varepsilon$ a la puissance du continu aussi petit que soit ε.

Ici nous nous proposons de montrer que pour λ convenablement choisi $\lambda\theta^n$ est dense modulo 1 sur un segment entourant l'origine quand n décrit un ensemble quelconque de fréquence > 1. Pour cela nous

aurons besoin d'un lemme d'approximation généralisant le théorème de Kronecker :

LEMME. — *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *des nombres réels rationnellement indépendants avec* 1 (*c'est-à-dire qu'une relation*

$$p_0 + p_1 \xi_1 + \ldots + p_k \xi_k = 0$$

avec p_i *entiers n'est possible que si* $p_i = 0 \; \forall \, i$) *et soit* **J** *un ensemble de fréquence supérieure à* 1. *Alors, pour tout système de nombres réels* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, n \in \mathbf{J} \quad \text{tel que} \quad \|n\xi_i - \alpha_i\| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Remarque.

On pourrait obtenir le même résultat en imposant des conditions beaucoup plus faibles sur l'ensemble **J** par exemple de contenir au moins un élément de toute progression arithmétique.

Démonstration.

Par définition de la fréquence si B est un nombre réel quelconque tel que $1 < \mathrm{B} < \mathrm{A}$, il existe une suite infinie $m_1 < m_2 < \ldots$ telle que $n \in \mathbf{J}$ si $m_\nu \leqslant n \leqslant \mathrm{B} m_\nu$.

Le point du cube unité de $\mathbf{R}^k$ de coordonnée $m_\nu \xi_i - [m_\nu \xi_i]$ a lorsque $\nu \to \infty$, au moins un point d'accumulation ρ_i $(i = 1, \ldots, k)$ avec $0 \leqslant \rho_i \leqslant 1$.

Posons alors $\beta_i = \alpha_i - \rho_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

D'après le théorème de Kronecker, il existe un entier $n > 0$ tel que $\|n\xi_i - \beta_i\| < \varepsilon/2 \quad \forall \, i = 1, \ldots, k$.

Choisissons alors ν assez grand pour que $m_\nu + n < \mathrm{A} m_\nu$ c'est-à-dire $m_\nu > n/(\mathrm{A} - 1)$ et que $\|m_\nu \xi_i - \rho_i\| < \varepsilon/2 \quad \forall \, i = 1, \ldots, k$.

On a bien alors $\|(m_\nu + n)\, \xi_i - \alpha_i\| < \varepsilon$ et $m_\nu + n \in \mathbf{J}$. C.q.f.d.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème suivant qui généralise un résultat connu :

THÉORÈME. — *Soit* **J** *un ensemble d'entiers de fréquence strictement supérieure à* 1 *et soit* $\varepsilon > 0$. *Si* τ *est un nombre de Salem, il existe un*

entier du corps de τ, *soit* λ, *tel que en désignant par* u_n *l'entier le plus voisin de* $\lambda\tau^n$ *l'ensemble des points limites quand* $n \in \mathbf{J} \to \infty$ *des quantités* $\varepsilon_n = \lambda\tau^n - u_n$, *est dense sur un segment centré à l'origine et de longueur* $2\,\eta$ *où* $\eta < \varepsilon$.

Démonstration.

Soit τ, $1/\tau$, τ_h $(h = 1, ..., k)$ et τ_h les conjuguées de τ. D'après le principe des tiroirs on peut trouver un entier $\lambda \in \mathbf{Q}(\tau)$ de conjugués respectifs λ', λ_h et λ_h $(h = 1, ..., k)$ tel que :

$$\eta = \sum_{h=1}^{k} |\lambda_h| < \min(\varepsilon, 1/2).$$

Posant

$$\lambda_h = r_h\, e^{-2i\pi\varphi_h}, \quad \tau_h = e^{2i\pi\omega_h}, \quad u_n = \lambda\tau^n + \lambda'/\tau^n + \sum_{h=1}^{k} (\lambda_h\, \tau_h^n + \lambda\, \tau_h^n)$$

u_n est un entier et l'on a :

$$\lambda\tau^n = -\lambda'/\tau^n - 2 \sum_{h=1}^{k} r_h \cos 2\,\pi\,(n\omega_h - \varphi_h) + u_n\,.$$

Quand $n \to \infty$ les points limites de $\lambda\tau^n - u_n$ sont ceux de

$$-2 \sum_{h=1}^{k} r_h \cos 2\,\pi\,(n\omega_h - \varphi_h),$$

ils sont donc bien sur le segment $[-\eta, +\eta]$. Mais réciproquement si β est un point de ce segment, il existe des quantités

$$\beta_h\ (h = 1, ..., k) \text{ telles que } \beta = -2 \sum_{h=1}^{k} r_h \cos 2\,\pi\,\beta_h.$$

D'autre part, un résultat connu est que les quantités $\omega_1, ..., \omega_k$ sont rationnellement indépendantes avec 1; on peut donc appliquer le lemme avec $\xi_h = \omega_h$, $\alpha_h = \varphi_h + \beta_h$ ce qui achève la démonstration [12].

4. Réciproque du corollaire du chapitre II .

Nous avons montré dans le chapitre II que, étant donné un nombre algébrique réel $\theta > 1$, s'il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$, et un ensemble $\mathbf{J}$ de fréquence infinie tels que : $\lim_{n \in \mathbf{J}} ||\lambda\theta^n|| = 0$ alors θ appartient néces-

sairement à l'ensemble T des entiers algébriques dont tous les conjugués sont à l'intérieur ou sur le cercle unité.

Nous allons montrer ici que, réciproquement, *à tout* $\theta \in T$ *on peut faire correspondre un* $\lambda \neq 0$ *et un ensemble* **J** *de fréquence infinie pour lesquels* $\lim_{n \in J} ||\lambda\theta^n|| = 0$. Nous aurons donc ainsi une *caractérisation des nombres de l'ensemble* T.

En vertu du premier paragraphe de ce chapitre et de l'introduction, il suffit de montrer le résultat pour un nombre de Salem (et dans ce cas d'après le théorème 2 du chapitre III, le λ dont nous prouverons l'existence sera certainement un nombre transcendant). Nous pouvons donc conclure grâce au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* τ *un nombre de Salem, il existe un ensemble* **J** *de fréquence infinie, tel que l'ensemble des nombres réels* λ *pour lesquels :*

$$\lim_{n \in J} ||\lambda\tau^n|| = 0$$

a la puissance du continu.

Remarque.

Ce résultat prouve en outre que *pour un ensemble de* λ *ayant la puissance du continu, la suite* $\lambda\tau^n$ *n'est pas uniformément répartie modulo* 1. En effet, $\forall A > 1$ et $\forall \varepsilon > 0$ le rapport entre le nombre d'entiers $n \leqslant N$ tels que $||\lambda\tau^n|| < \varepsilon$ et le nombre total d'entier $n \leqslant N$ est pour une infinité de valeurs de N supérieur à $1 - \frac{1}{A}$, donc en faisant tendre A vers l'infini, ε restent fixe a une limite supérieure égale à 1 ce qui est contraire à l'hypothèse de répartition uniforme qui entraînerait une limite égale à $2\,\varepsilon$.

Démonstration.

4.1. — Posons $\tau_l = e^{2i\pi\omega_l}$ $(l = 1, ..., k)$, les τ_l étant les conjugués de τ de degré $2\,k + 2$ qui a donc pour conjugués les nombres τ, $1/\tau$, τ_1, ..., τ_k, τ_1, ..., τ_k (voir SALEM [12]).

D'après un résultat déjà cité les quantités ω_1, ..., ω_k sont rationnellement indépendantes avec 1, donc d'après le théorème de Kronecker

classique, quelque soit le point $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$ de $\mathbf{R}^k$, et $\forall\, n \geqslant 1$, il existe un entier g vérifiant :

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k} ||\xi_j - g\omega_j|| < 1/n \qquad g \geqslant 0.$$

Nous pouvons prendre le même entier g pour tous les points de $\mathbf{R}^k$ différant seulement par un vecteur à coordonnées entières c'est-à-dire supposer ξ dans le cube unité qui est compact. L'ensemble des ξ correspondant à un même entier g est alors un ouvert, et l'ensemble de ces ouverts recouvre le cube unité. On peut donc en extraire un recouvrement fini. En appelant $G(n)$ l'entier g maximum correspondant à ce recouvrement on a donc :

$$\forall\, \xi \in \mathbf{R}^k,\ \exists\, g \text{ tel que } 0 \leqslant g \leqslant G(n) \text{ et } \max_{1 \leqslant j \leqslant k} ||\xi_j - g\omega_j|| < 1/n$$

Nous pouvons supposer $G(n)$ croissante, on pourrait d'ailleurs donner un majorant pour $G(n)$ (théorie des approximations diophantiennes non homogènes) mais nous n'en aurons pas besoin ici.

4.2. — D'après le théorème de Minkowski, il existe une constante $C > 1$ telle que :

$\forall\, \delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier algébrique $\alpha \neq 0$ appartenant au corps $\mathbf{Q}(\tau)$ vérifiant les inégalités :

$$\begin{cases} |\alpha| < \delta \\ |\beta_l| < \varepsilon \\ |\gamma| < C/(\delta^{2k}) \end{cases} \qquad \forall\, l = 1, ..., k \qquad (1)$$

en appelant β_l le conjugué de α dans l'isomorphisme de $\mathbf{Q}(\tau)$ sur $\mathbf{Q}(\tau_l)$ qui transforme τ en τ_l et γ le conjugué de α dans l'automorphisme de $\mathbf{Q}(\tau)$ qui transforme τ en $1/\tau$.

La norme de α est égale à $\alpha\gamma \prod_1^l \beta_l \bar{\beta}_l$, c'est un entier rationnel non nul donc sa valeur absolue est $\geqslant 1$. On en déduit que α satisfait également aux inégalités :

$$\begin{cases} |\alpha| > \delta/C \\ |\beta_l| > \varepsilon/C \\ |\gamma| > 1/(\delta\varepsilon^{2k}) \end{cases} \qquad \forall\, l = 1, ..., k \qquad (2)$$

4.3. — Soit pour $\nu \geqslant 1$ une suite de solutions $\alpha(\nu)$, $\beta_l(\nu)$, $\gamma(\nu)$ du système (1) où nous prenons $\varepsilon = 1/\nu$ (en fait, on pourrait prendre

le terme général de n'importe quelle série divergente), et $\delta = \delta(\nu)$. On pose $\delta(1) = 1$ et l'on définit ensuite par récurrence $\delta(\nu)$ assez décroissante pour que l'on ait :

$$\delta(\nu + 1)\,\tau^{G(\nu+1)} < \frac{1}{2}\,\delta(\nu)\,\tau^{G(\nu)} \text{ soit } \delta(\nu + 1) < \frac{1}{2}\,\delta(\nu)\,\tau^{G(\nu)-G(\nu+1)} \tag{3}$$

$$\nu^{2k}/\delta(\nu) < \frac{1}{2}(\nu + 1)^{2k}/\delta(\nu + 1) \text{ soit } \delta(\nu + 1) < \frac{1}{2}\left(\frac{\nu + 1}{\nu}\right)^{2k}\delta(\nu) \tag{4}$$

$$2\,\delta(\nu + 1)\,\tau^{G(\nu+1)} < \frac{1}{2}\,\delta(\nu) \text{ soit } \delta(\nu + 1) < \frac{\zeta}{2\,C}\,\delta(\nu)\,\tau^{-G(\nu+1)} \tag{5}$$

où $\zeta = \min(1, \tau - 1)$

et telle que, en désignant par m_ν l'entier vérifiant :

$$\times\, 2\,C\nu^{2k}/\delta(\nu) < \tau^{m_\nu} \text{ soit } m_\nu = 1 + \tau^{m_\nu - 1} \leqslant \nu^2\left[\frac{\operatorname{Log}^{(2C_\nu^{2k+1}/\delta(\nu))}}{\operatorname{Log}\tau}\right] \tag{6}$$

on ait en outre :

$$\tau^{m_\nu^2} \times 2\,\delta(\nu + 1)\,\tau^{G(\nu+1)} < \frac{1}{\nu^2} \text{ soit } \delta(\nu + 1) < \frac{1}{2\,\nu^2}\,\tau^{-G(\nu+1)-m_\nu^2}$$

Il est toujours possible de trouver une telle fonction $\delta(\nu)$. Nous noterons **J** l'ensemble des entiers n tels qu'il existe $\nu > 1$ avec

$$m_\nu \leqslant n \leqslant m_\nu^2 .$$

Comme m_ν tend vers l'infini quand $\nu \to \infty$, *l'ensemble* **J** *est de fréquence infinie.*

4.4. — Soit e_ν une suite de nombres égaux soit à 0 soit à 1 et tels que la série :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu/\nu$$

soit divergente.

Posons $|\beta_l(\nu)| = \rho_l(\nu)$ de sorte que : $\beta_l(\nu) = \rho_l(\nu)\,e^{2i\pi\varphi_l(\nu)}$.

Définissons alors par récurrence les quantités $g(\nu)$, $B_l(\nu)$, $R_l(\nu)$, $\psi_l(\nu)$ de la manière suivante :

a — $B_l(0) = 0$

b — *Si* $B_l(\nu-1)$ *a été défini* alors $R_l(\nu-1) = |B_l(\nu-1)|$,

$$\psi_l(\nu-1) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} B_l(\nu-1)$$

(et $\psi_l(\nu-1) = 0$ si $R_l(\nu-1) = 0$ de sorte que :

$$B_l(\nu-1) = R_l(\nu-1)\, e^{2i\pi\psi_l(\nu-1)}.$$

c — *Une fois défini* $\psi_l(\nu-1)$ $g(\nu) = 0$ si $e_\nu = 0$ et sinon $g(\nu)$ est un entier tel que :

$$0 \leqslant g(\nu) \leqslant G(\nu)$$

et

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant k} \left\| \varphi_l(\nu) - \psi_l(\nu-1) - \frac{1}{2} + g(\nu)\,\omega_l \right\| < \frac{1}{\nu}$$

(d'après 4.1 $g(\nu)$ existe bien).

d — *Une fois défini* $g(\nu)$ alors $B_l(\nu) = B_l(\nu-1) + e_\nu\, \beta_l(\nu)\, \tau_l^{g(\nu)}$ de sorte que :

$$B_l(\nu) = \sum_{h=1}^{\nu} e_h\, \beta_l(h)\, \tau_l^{g(h)}.$$

4.5. — Montrons que $B_l(\nu)$ *tend vers* 0 *quand* $\nu \to \infty$ pour cela soit $\nu_1, \nu_2, \ldots$ la suite des indices ν tels que $e_\nu = 1$. Par hypothèse la série $\sum_{j=1}^{\infty} 1/\nu_j$ est divergente. Si ν est l'un des termes de cette suite :

$$B_l(\nu) = B_l(\nu-1) + \beta_l(\nu)\, e^{2i\pi g(\nu)\omega_l} \quad \text{puisque} \quad \tau_l = e^{2i\pi\omega_l}.$$

Pour alléger l'écriture supprimons l'indice l qui n'intervient pas dans les majorations :

$$\begin{aligned} R(\nu)\, e^{2i\pi\psi(\nu)} &= R(\nu-1)^{2i\pi\psi(\nu-1)} + \rho(\nu)\, e^{2i\pi(\varphi(\nu)+g(\nu)\omega)} \\ &= e^{2i\pi\psi(\nu-1)} \{R(\nu-1) + \rho(\nu)\, e^{2i\pi(\varphi(\nu)-\psi(\nu-1)+g(\nu)\omega)}\}. \end{aligned}$$

En posant :

$$\eta = \varphi(\nu) - \psi(\nu-1) + g(\nu)\,\omega - \frac{1}{2}$$

on a par définition de $g(\nu)$ $\|\eta\| < \frac{1}{\nu}$ et la relation s'écrit :

$$\begin{aligned} R(\nu)\, e^{2i\pi\psi(\nu)} &= e^{2i\pi\psi(\nu-1)} \{R(\nu-1) + \rho(\nu)\, e^{i\pi+2i\pi\eta}\} \\ &= e^{2i\pi\psi(\nu-1)} \{R(\nu-1) - \rho(\nu)\, e^{2i\pi\eta}\} \end{aligned}$$

d'où :

$$R(\nu) = \left|R(\nu - 1) - \rho(\nu)\, e^{2i\pi\eta}\right| \leqslant \left|R(\nu - 1) - \rho(\nu)\right| + \\ + \left|\rho(\nu)\right| \left|1 - e^{2i\pi\eta}\right|$$

mais :

$$\rho(\nu) < \frac{1}{\nu}, \qquad \left|1 - e^{2i\pi\eta}\right| < 2\pi \left\|\eta\right\| < \frac{2\pi}{\nu}$$

donc :

$$R(\nu) \leqslant \left|R(\nu - 1) - \rho(\nu)\right| + \frac{2\pi}{\nu^2}.$$

Comme $R(\nu) = R(\nu_j)$ si $\nu_j \leqslant \nu < \nu_{j+1}$ il suffit de montrer que $R(\nu_j) = r_j$ tend vers 0 quand $j \to \infty$ (car la série $\sum_{j=1}^{\infty} 1/\nu_j$ étant divergente, en particulier, la suite ν_j est infinie). Comme $\nu_1 \geqslant 1 > 0$ $R(\nu_1 - 1) = 0$ et on a finalement :

$$r_1 \leqslant \rho(\nu_1) + 2\pi/\nu_1^2, \quad r_{j+1} \leqslant \left|r_j - \rho(\nu_{j+1})\right| + 2\pi/\nu_{j+1}^2. \tag{8}$$

Montrons tout d'abord qu'il existe une suite partielle infinie telle que lorsque l'indice j tend vers l'infini sur cette suite partielle, la quantité r_j tend vers 0. Plus précisément montrons que pour une infinité d'indices j on a : $r_j < \rho(\nu_{j+1}) < 1/\nu_{j+1}$.

S'il n'en était pas ainsi il existerait un indice j_0 tel que pour $j \geqslant j_0$: $r_j \geqslant \rho(\nu_{j+1})$, on aurait donc : $\left|r_j - \rho(\nu_{j+1})\right| = r_j - \rho(\nu_{j+1})$ et d'après (8) : pour

$$j \geqslant j_0, \quad r_{j+1} < r_j - \rho(\nu_{j+1}) + \frac{2\pi}{\nu_{j+1}^2} < r_j - 1/(C\,\nu_{j+1}) + \frac{2\pi}{\nu_{j+1}^2}$$

d'après (2). On aurait donc en faisant la somme membre à membre :

$$0 < r_{j_0+h} < r_{j_0} - \sum_{i=1}^{h} 1/C\,\nu_{j_0+i} + 2\pi \sum_{i=1}^{h} 1/\nu_{j_0+i}^2$$

soit

$$\sum_{i=1}^{h} 1/\nu_{j_0+i} < Cr_{j_0} + 2\pi\, C \sum_{i=1}^{h} 1/\nu_{j_0+i}^2$$

mais lorsque $h \to \infty$, le premier membre n'est pas borné puisque la série $\sum_{1}^{\infty} 1/\nu_j$ est divergente tandis que le deuxième membre l'est puisque la série

$\sum_1^\infty 1/\nu_j^2$ est convergente, il y a donc contradiction.

Soit maintenant un nombre réel quelconque $\varepsilon > 0$. La série $\sum_1^\infty 1/\nu_j$ étant convergente, il existe j_1 tel que :

$$2\pi \sum_{j=j_1+1}^{\infty} 1/\nu_j^2 < \varepsilon/2 \qquad \text{et,} \qquad 1/\nu_{j_1+1} < \varepsilon/2$$

et nous venons de montrer qu'il existe j_2 tel que $j_2 \geqslant j_1$ et $r_{j_2} < \varepsilon/2$. Alors pour $j \geqslant j_2$ on a :

$$0 < r_j \leqslant \varepsilon/2 + 2\pi \sum_{i=j_2+1}^{j} 1/\nu_i^2 < \varepsilon \tag{9}$$

ce qui achève la démonstration.

Montrons (9) par récurrence : c'est évident pour $j = j_2$. Supposons (9) vraie pour j et montrons-le pour $j + 1$ on a donc

$$r_j \leqslant \varepsilon/2 + 2\pi \sum_{i=j_2+1}^{j} 1/\nu_i^2$$

Mais alors ou bien $r_j \leqslant \rho(\nu_{j+1})$ et d'après (8)

$$\begin{aligned} r_{j+1} \leqslant \rho(\nu_{j+1}) - r_j + 2\pi/\nu_{j+1}^2 &< 1/\nu_{j+1} \\ &+ 2\pi/\nu_{j+1}^2 < 1\,\varepsilon/2 + 2\pi/\nu_{j+1}^2 \end{aligned}$$

d'où *a fortiori* l'inégalité (9) ou bien $r_j > \rho(\nu_{j+1})$ et alors d'après (8)

$$\begin{aligned} r_{j+1} \leqslant r_j - \rho(\nu_{j+1}) + 2\pi/\nu_{j+1}^2 &< r_j \\ &+ 2\pi/\nu_{j+1}^2 < \varepsilon/2 + 2\pi \sum_{i=j_2+1}^{j+1} 1/\nu_i^2 \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité (9).

4.6. — Posons maintenant

$$\left.\begin{aligned} A(\nu) &= \sum_{h=1}^{\nu} e_h\, \alpha(h)\, \tau^{g(h)} \\ C(\nu) &= \sum_{h=1}^{\nu} e_h\, \gamma(h)\, (1/\tau)^{g(h)} \end{aligned}\right\}$$

$A(\nu)$ est un entier algébrique du corps

$$\mathbf{Q}(\tau) \quad \text{et} \quad B_l(\nu), \quad B_l(\nu) \quad (l = 1, \ldots, k),$$

$C(\nu)$ sont ses conjugués respectifs. Donc quelque soit l'entier $n \geqslant 0$ le nombre :

$$u_n = A(\nu)\,\tau^n + C(\nu)\,\tau^{-n} + \sum_{l=1}^{k} \{B_l(\nu)\,\tau_l^n + \overline{B_l(\nu)}\,\tau_l^n\} \tag{10}$$

est un entier rationnel. D'autre part, d'après l'inégalité (1)

$$\left| e_h\,\alpha(h)\,\tau^{g(h)} \right| < \delta(h)\,\tau^{G(h)}$$

mais d'après l'inégalité (3) on voit que la série de terme général $\delta(h)\,\tau^{G(h)}$ est convergente. Il en résulte que la série de terme général $e_h\,\alpha(h)\,\tau^{g(h)}$ converge vers un nombre λ et que l'on a toujours en utilisant l'inégalité (3) :

$$\left|\lambda - A(\nu)\right| < 2\delta(\nu+1)\,\tau^{G(\nu+1)}. \tag{11}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité (4) et l'inégalité (1) il vient :

$$\left|C(\nu)\right| < 2C\,\nu^{2k}/\delta(\nu) \tag{12}$$

Enfin lorsque ν restant fixe, n varie la quantité

$$\sum_{l=1}^{k} \{B_l(\nu)\,\tau_l^n + \overline{B_l(\nu)}\,\tau_l^n\}$$

reste bornée par : $2\sum_{l=1}^{k} |B_l(\nu)|$ qui d'après le paragraphe 4.5 tend vers 0 quand $\nu \to \infty$.

4.7. — Soit alors n tel que $m_\nu \leqslant n \leqslant m_\nu^2$ on a :

$$||\lambda\tau^n|| \leqslant |\lambda\tau^n - u_n| < |\lambda - A(\nu)|\,\tau^n + |C(\nu)|/\tau^n + 2\sum_{l=1}^{k} |B_l(\nu)|$$

d'où :

$$||\lambda\tau^n|| \leqslant 2\delta(\nu+1)\,\tau^{G(\nu+1)}\,\tau^{m_\nu^2} + (2C\,\nu^{2k}/\delta(\nu))/\tau^{m_\nu} + 2\sum_{l=1}^{k} |B_l(\nu)|$$

et d'après les inégalités (6) et (7)

$$||\lambda\tau^n|| < 2/\nu^2 + 2\sum_{l=1}^{k} |B_l(\nu)|$$

donc $||\lambda\tau^n||$ tend vers 0 quand ν tend vers l'infini, c'est-à-dire quand $n \in \mathbf{J}$ tend vers l'infini.

4.8. — Nous avons donc montré que pour tout λ somme d'une série

$$\sum_{h=1}^{\infty} e_h\,\alpha(h)\,\tau^{g(h)} \qquad \text{on a :} \qquad \overline{\lim_{n \in \mathbf{J}}}\, ||\lambda\tau^n|| = 0.$$

Il reste à montrer que l'ensemble des λ distincts ainsi obtenus quand on donne aux e_h des valeurs quelconques avec toujours $e_h = 0$ ou 1 et $\sum_1^\infty e_h/h$ divergente a la puissance du continu.

Mais l'ensemble des suites (e_h) satisfaisant à ces conditions a la puissance du continu car on peut prendre par exemple $e_h = 1$ si h pair ce qui rend la série divergente et ensuite e_h quelconque si h impair ce qui donne bien la puissance du continu.

Il suffit donc de montrer qu'à deux suites e_h distinctes correspondent des nombres λ distincts. Soient donc :

$$\lambda = \sum_1^\infty e_h\, \alpha(h)\, \tau^{g(h)}, \qquad \lambda' = \sum_1^\infty e'_h\, \alpha(h)\, \tau^{g'(h)}$$

deux nombres correspondants à des suites distinctes et supposons $\lambda = \lambda'$.

Soit h l'entier minimum tel que $e_\nu \neq e'_\nu$ et soit par exemple $e_h = 1$, $e'_h = 0$ alors si $\nu < h$ $g(\nu) = g'(\nu)$.

En effet, sinon soit ν_0 le plus petit entier tel que $g(\nu) \neq g'(\nu)$ et $\nu_0 < h$ on a alors :

$$\sum_{\nu_0}^\infty e_\nu\, \alpha(\nu)\, \tau^{g(\nu)} = \sum_{\nu_0}^\infty e'_\nu\, \alpha(\nu)\, \tau^{g'(\nu)}.$$

Comme si $e_\nu = 0$ $g(\nu) = 0$ par définition on a donc tenant compte de

$$e_{\nu_0} = e'_{\nu_0}, \quad e_{\nu_0} = 1$$

d'où :

$$|\alpha(\nu_0)|\, |\tau^{g(\nu_0)} - \tau^{g'(\nu_0)}| \leqslant \sum_{\nu=\nu_0+1}^\infty |\alpha(\nu)|\, |e_\nu\, \tau^{g(\nu)} - e'_\nu\, \tau^{g'(\nu)}|$$

mais quelque soit ν :

$$|e_\nu\, \tau^{g(\nu)} - e'_\nu\, \tau^{g'(\nu)}| < \tau^{G(\nu)} \qquad \text{et} \qquad |\tau^{g(\nu_0)} - \tau^{g'(\nu_0)}| \geqslant \tau - 1$$

puisque

$$g(\nu_0) \neq g'(\nu_0)$$

d'où :

$$|\alpha(\nu_0)|\, (\tau - 1) \leqslant \sum_{\nu_0+1}^\infty |\alpha(\nu)|\, \tau^{G(\nu)}$$

et tenant compte de (1), (2), (3).

$$\delta(\nu_0)\, (\tau - 1)/C \leqslant 2\delta(\nu_0 + 1)\, \tau^{G(\nu_0+1)}$$

ce qui entraîne une contradiction avec (5) donc $g(\nu) = g'(\nu)$ pour $\nu < h$. De $\lambda = \lambda'$ on tire alors :

$$\sum_{\nu=h}^{\infty} e_\nu \, \alpha(\nu) \, \tau^{g(\nu)} = \sum_{\nu=h}^{\infty} e'_\nu \, \alpha(\nu) \, \tau^{g'(\nu)}$$

soit en vertu de l'hypothèse faite sur e_h et e'_h

$$\alpha(h) \, \tau^{g(h)} = \sum_{\nu=h+1}^{\infty} \alpha(\nu) \, \{e'_\nu \, \tau^{g'(\nu)} - e_\nu \, \tau^{g(\nu)}\}$$

donc :

$$|\alpha(h)| \, \tau^{g(h)} \leqslant \sum_{\nu=h+1}^{\infty} |\alpha(\nu)| \, |e'_\nu \, \tau^{g'(\nu)} - e_\nu \, \tau^{g(\nu)}|$$

et *a fortiori*

$$|\alpha(h)| \leqslant \sum_{\nu=h+1}^{\infty} |\alpha(\nu)| \, \tau^{G(\nu)}$$

en tenant compte encore de (1), (2), (3)

$$\delta(h)/C \leqslant 2\delta(h+1) \, \tau^{G(h+1)}$$

Ce qui entraîne une nouvelle contradiction avec (5) et achève la démonstration.

CHAPITRE V

DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR. FONCTIONS ENTIÈRES

Introduction.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'infini admettant dans un voisinage de l'infini le développement :

$$f(z) = \mathrm{E}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1} \quad \text{où} \quad \mathrm{E}(z) \text{ est un polynome en } z.$$

Nous appellerons *rayons d'holomorphie* de f le rayon de convergence de la série représentant $f(z) - \mathrm{E}(z)$ et *rayon de méromorphie* la borne inférieure des nombres réels $\rho > 0$ tels que $f(z)$ soit méromorphe pour $|z| > \rho$ (à distance finie).

Soit $f(z)$ nulle à l'infini (c'est-à-dire telle que $\mathrm{E}(z) = 0$). Si le rayon d'holomorphie de f est strictement inférieur à 1 et si u_n est entier quelque soit n entier, alors u_n est nul à partir d'un certain rang et $f(z)$ est un polynôme en $1/z$. Il n'en est plus ainsi si nous imposons seulement à u_n d'être entier sur un ensemble de fréquence infinie, par exemple la fonction :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2\,z)^{\mathrm{N}(k)} \qquad \text{où } \mathrm{N}(k) = 2^{2^k}$$

a pour rayon d'holomorphie $1/2$, son développement est à coefficients entiers pour $n \neq \mathrm{N}(k)$, c'est-à-dire sur un ensemble de fréquence infinie et ce n'est manifestement pas une fraction rationnelle.

La seule chose que nous pouvons dire sur de telles fonctions (rayon d'holomorphie < 1 et u_n entier sur un ensemble de fréquence infinie) c'est que les u_n sont nuls sur un ensemble de fréquence infinie : Ostrowski a montré par application du principe des 3 régions [4] qu'une fonction dont le développement a ses coefficients nuls sur un ensemble de fréquence infinie, est limite uniforme d'une même suite de polynômes dans tout domaine fermé où elle est prolongeable à partir de l'infini.

Plus précisément,

$$\text{soit } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1} \; ; \quad u_n \text{ nul pour } n \in \mathbf{J},$$

si l'ensemble $\mathbf{J}$ est de fréquence infinie, il existe deux suites d'entiers m_ν et m'_ν tels que :

$$n \in \mathbf{J} \text{ si } m_\nu \leqslant n \leqslant m'_\nu \quad \text{et} \quad m'_\nu / m_\nu \to \infty \quad \text{quand } \nu \to \infty.$$

Si nous posons alors :

$$\mathrm{P}_\nu(1/z) = \sum_{n=0}^{m_\nu - 1} u_n/z^{n+1}$$

dans tout domaine fermé où f est prolongeable à partir de l'infini, f est limite uniforme des polynômes $\mathrm{P}_\nu(1/z)$ (à condition que le domaine ne contienne pas l'origine).

En particulier f est uniforme et nous pourrons parler de son domaine d'holomorphie ou de son domaine de méromorphie. Il en résulte que si f est une fonction algébrique, f est nécessairement une fraction rationnelle. Ceci résulte également du théorème de Roth sur le corps des fonctions méromorphes à l'infini et grâce à ce théorème il suffit pour conserver le résultat que la fréquence de l'ensemble considéré soit strictement supérieure à 1. En considérant ensuite le développement d'une fraction rationnelle, on voit alors que nécessairement f doit être un polynôme en $1/z$ ce qui généralise pour les fonctions le résultat établi dans la remarque de la fin du chapitre 3.

DÉFINITION. — *Nous appellerons fonction d'Ostrowski une fonction méromorphe à l'infini et dont le développement au voisinage de l'infini a ses coefficients nuls sur un ensemble de fréquence infinie.*

Une telle fonction est d'après ce qui précède uniforme et limite uniforme sur tout compact dans son domaine d'holomorphie des fonctions $\mathrm{E}(z) + \mathrm{P}_\nu(1/z)$ les P_ν ayant été précédemment définis et $\mathrm{E}(z)$ étant la partie principale relative à l'infini (c'est-à-dire un polynôme en z).

LEMME. — *Une fonction d'Ostrowski, ne peut avoir à distance finie de singularité isolée distincte de l'origine. En particulier son rayon d'holomorphie coïncide avec son rayon de méromorphie.*

En outre, si une fonction d'Ostrowski est méromorphe à l'origine, c'est la somme d'un polynôme en $1/z$ *et d'un polynôme en* z.

Démonstration.

$$\text{Soit } f(z) = \mathrm{E}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}$$

où $\mathrm{E}(z)$ est un polynôme et soit a une singularité isolée de f à distance finie.

Supposons que l'on ait $a \neq 0$, alors, il existe un cercle γ de centre a entièrement contenu dans le domaine d'holomorphie de f tel que l'origine soit à l'extérieur de ce cercle. Les coefficients du développement en série de Laurent de f sont donnés par :

$$v_{-k} = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\gamma} f(z)\,(z-a)^{k-1}\,dz \qquad k \in \mathbf{Z}$$

mais, γ est compact donc sur γ il y a convergence uniforme vers $f(z)$ des quantités $\mathrm{E}(z) + \mathrm{P}_\nu(1/z)$ donc :

$$v_{-k} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\gamma} \{\mathrm{E}(z) + \mathrm{P}_\nu(1/z)\}\,(z-a)^{k-1}\,dz.$$

Pour $k \geqslant 1$ la quantité sous la limite est nulle donc $v_{-k} = 0$. C.q.f.d.

D'autre part si $a = 0$ et si f est méromorphe à l'origine, il existe K tel que sur un cercle γ contenu dans le domaine d'holomorphie de f et centré à l'origine on ait :

$$\frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\gamma} f(z)\,z^k\,dz = 0 \quad \text{pour } k \geqslant \mathrm{K}$$

on a donc :

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\gamma} \{\mathrm{E}(z) + \mathrm{P}_\nu(1/z)\}\;z^k\,dz = 0 \quad \text{pour } k \geqslant \mathrm{K}.$$

Mais la quantité sous le signe limite est constante dès que $m_\nu > k$ et égale à u_k. On a donc $u_k = 0$ pour $k \geqslant \mathrm{K}$.

D'où :

$$f(z) = \mathrm{E}(z) + \sum_{n=0}^{\mathrm{K}-1} u^n/z^{n+1}. \text{ C.q.f.d.}$$

Remarque. — On peut montrer de la même manière que le domaine

d'holomorphie de f est simplement connexe sur la sphère de Riemann quand E (z) est une constante.

1. Généralisation d'un résultat de Borel [2].

THÉORÈME. — *Soit $f(z)$ holomorphe à l'infini et admettant le développement $\sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}$. Soit ρ_0 le rayon de méromorphie de f.*

Si $\rho_0 < 1$ et si u_n est entier pour $n \in \mathbf{J}$ où l'ensemble $\mathbf{J}$ est de fréquence infinie, alors, f est le quotient d'une fonction d'Ostrowski dont le rayon d'holomorphie est inférieur ou égal à ρ_0, par un polynôme à coefficients entiers dont les racines sont des entiers algébriques.

Remarque.

Il en résulte que f est uniforme, n'admet qu'un nombre fini de pôles qui sont tous des entiers algébriques et n'admet pas de singularités essentielles isolées sauf peut-être l'origine. Si f est en outre méromorphe à l'origine il en résulte que f est une fraction rationnelle.

Démonstration.

1.1. — Soit K un nombre réel supérieur à 1 et au rayon d'holomorphie de la fonction f, soit ρ un nombre réel tel que $\rho_0 < \rho < 1$. Par hypothèse, il existe un polynôme $Q(z) = z^t + \alpha_1 z^{t-1} + \ldots + \alpha_t$ tel que $Q(z) f(z)$ soit holomorphe pour $|z| \geqslant \rho$ et borné dans ce domaine.

On a donc

$$|u_n| \leqslant C_1 K^n \ , \quad Q((u_n)) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{[z]=\rho} Q(z) f(z) z^n \, dz$$

d'où :

$$|Q((u_n))| < C_2 \rho^n$$

C_1 et C_2 étant des constantes ne dépendant pas de n. (Nous pouvons également supposer $C_1 > 1$).

Dans toute la suite nous nous donnons un entier $\nu \geqslant 0$ et nous appelons C_1, C_2 ... les constantes indépendantes du choix de ν.

1.2. — Considérons le déterminant de Hankel :

$$D_{n,k} = \begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+1} \\ u_{n+k} & \dots & u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

Une combinaison classique de lignes et colonnes donne pour $k \geqslant t$

$$D_{n,k} = \begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+t-1} & u'_n & \dots & u'_{n+k-t} \\ u_{n+t-1} & \dots & u_{n+2t-2} & u'_{n+t-1} & \dots & u'_{n+k-1} \\ u'_n & \dots & u'_{n+t-1} & u''_n & \dots & u''_{n+k-t} \\ u'_{n+k-t} & \dots & u'_{n+k-1} & u''_{n+k-t} & \dots & u''_{n+2k-2t} \end{vmatrix}$$

avec :

$$u'_n = Q((u_n)), \quad u''_n = Q((u'_n)) = Q^2((u_n)).$$

La majoration d'Hadamard donne alors :

$$|D_{n,k}| \leqslant (C_3 K^n)^t (C_4 \rho^n)^{k-t+1} \leqslant \{C_5 \rho^n K^{tn/(k-t+1)}\}^{k-t+1}$$

Quand $k \to \infty$ $t/(k-t+1) \to 0$ donc, il existe C_6 tel que

$$k \geqslant C_6 \to \rho K^{t/(k-t+1)} < 1$$

et par conséquent : $\exists$ C_7 tel que :

$$k \geqslant C_6 \ , \ C_7 \to |D_{n,k}| < 1.$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer C_6 entier égal à H.

1.3. — Par hypothèse sur l'ensemble **J**, $\forall$ A > 1 et $\forall$ x_0 $\exists$ x entier $> x_0$ tel que $n \in$ **J** pour $x \leqslant n < Ax$.

Nous prendrons $x_0 = A = \nu$.

Alors, si $\nu \geqslant C_7$, $|D_{n,H}|$ est entier pour $x \leqslant n < Ax - 2H$ et inférieur à 1, donc nul.

En vertu du théorème 1.4 a du chapitre I, il existe donc un système canonique $(P ; m, m')$ pour la suite u_n tel que

$$\begin{cases} \text{degré de } P \leqslant H \\ x_0 \leqslant x \leqslant m \leqslant x + H \ , \ M = m' - m \geqslant x(A-1) - 2H \end{cases}$$

(avec $x_0 = A = \nu$, $(P ; m, m') = (P_\nu ; m_\nu, m'_\nu)$).

1.4. — Appliquons le lemme 2.2 du chapitre I.

En posant

$$P(z) = a_0 z^s + \ldots + a_s \qquad (a_0 > 0)$$

a_0^M divise $D_{m,s-1}$ donc $a_0^M \leqslant |D_{m,s-1}|$.

Tous les coefficients de $D_{m,s-1}$ sont majorés par :

$$C_1 K^{m+2s-2} \leqslant C_1 K^{m+2H-2}$$

donc :

$$|D_{m,s-1}| \leqslant s\,!\,(C_1 K^{m+2H-2})^s \leqslant H\,!\,(C_1 K^{m+2H-2})^H = C_8 K^{mH}.$$

On a alors :

$$a_0 \leqslant C_8^{1/M} K^{mH/M}$$

quand $\nu \to \infty$

$$M = m' - m \geqslant x(A-1) - 2H \geqslant \nu(\nu-1) - 2H$$

tend vers l'infini

$$m/M \leqslant (x + H) / (x(A-1) - 2H)$$

tend vers zéro car $x \to \infty$ et $A = \nu \to \infty$;
donc $C_8^{1/M} K^{mH/M} \to 1$ dès que ν est assez grand cette quantité est inférieure à 2 donc a_0 égal à 1. Donc, dès que ν est assez grand les racines de P_ν sont des entiers algébriques.

1.5. — Montrons qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes P_ν possibles. Ils sont de degré borné par H, ils sont à coefficients entiers, il suffit donc de montrer que leurs coefficients sont bornés ou ce qui revient au même ici que leurs racines sont bornées.

Mais d'après le lemme 2.3 du chapitre 1 si ζ est une racine de P on a :

$$\text{soit } |\zeta| \leqslant K \text{ soit } |\zeta|^{M-s+1} \leqslant (2K^2 C_1)^{s^2} K^{M+ms} / |D_{m,s-1}|$$

Ici $s \leqslant H$, $|D_{m,s-1}|$ est un entier, donc on a :

$$\text{soit } |\zeta| \leqslant K \text{ soit } |\zeta|^{M-H+1} \leqslant C_9 K^{M+mH}$$

$$\text{c'est-à-dire } |\zeta| \leqslant C_9 K^{(M+mH)/(M-H+1)}$$

Il suffit donc de montrer que $(M + mH) / (M - H + 1)$ est bornée. Mais :

$$(M + mH) / (M - H + 1) \leqslant (M + H(x + H)) / (M - H + 1)$$

et

$$x \leqslant \frac{M + 2H}{A - 1} \leqslant \frac{M + 2H}{\nu - 1} \leqslant M + 2H \text{ si } \nu \geqslant 2$$

d'où :

$$(M + mH) / (M - H + 1) \leqslant (M(H + 1) + 3H^2) / (M - H + 1)$$

Quand $\nu \to \infty$, $M \to \infty$ et la quantité du second membre tend vers une limite finie égale à $H + 1$. Donc le premier membre reste borné. C.q.f.d.

1.6. — Les polynômes P_ν étant en nombre fini, il existe donc un polynome P fixe tel que $P_\nu = P$ pour une infinité de ν et d'après 1.4 les racines de P sont des entiers algébriques.

En ordonnant la suite partielle de ν ainsi définie, on a ainsi deux suites de nombres m_i, m'_i telles que : $(P ; m_i, m'_i)$ est un système canonique pour u_n.

et

$$\frac{m'_i + s - 2}{m_i} \geqslant 1 + \frac{s - 2}{m_i} + \frac{M_i}{m_i} \to \infty \quad \text{quand } i \to \infty$$

(puisque $m_i \leqslant x + H$, $M_i \geqslant (\nu - 1)x - 2H$, $x \geqslant \nu \to \infty$).

Soit alors $\mathbf{J}^*$ l'ensemble des n tels que : $n \in \mathbf{J}^* \Leftrightarrow \exists\, i$

$$m_i \leqslant n \leqslant m'_i + s - 2.$$

$\mathbf{J}^*$ est manifestement de fréquence infinie, en outre $P((u_n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{J}^*$.

Mais $|P((u_n))| < C K^n$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} P((u_n)) / z^{n+1}$ est convergente pour $|z| > K$ et l'on a dans ce domaine :

$$P(z) f(z) = E(z) + \sum_{n=0}^{\infty} P((u_n))/z^{n+1}$$

où $E(z)$ est un polynôme en z de degré au plus $s - 1$.

Mais, comme $P((u_n))$ est nul sur un ensemble de fréquence infinie, il en résulte que $P(z) f(z)$ est une fonction d'Ostrowski. Or $P(z) f(z)$ est méromorphe pour $|z| > \rho_0$, donc d'après le lemme est holomorphe dans ce domaine, ce qui achève la démonstration.

2. Fonction holomorphe en dehors d'un cercle non centré à l'origine.

THÉORÈME. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe en dehors du cercle $|z-1| \leqslant \rho_0 < 1$. Soit toujours $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}$ le développement de $f(z)$ autour du point à l'infini (valable pour $|z| > 1 + \rho_0$).*

Alors, si u_n est entier pour $n \in \mathbf{J}$ ensemble de fréquence infinie, $f(z)$ est une fraction rationnelle à coefficients entiers admettant pour seul pôle le point $z = 1$.

Remarque.

Ce théorème ne résulte pas du théorème précédent car le fait que u_n soit entier pour $n \in \mathbf{J}$ n'entraîne pas a priori que les coefficients du développement en série de puissances de $1/(z-1)$ sont entiers sur un ensemble de fréquence infinie. Nous le donnons ici, car il nécessite moins d'hypothèses et donne un résultat plus fort que la généralisation du théorème de Polya que nous donnerons au chapitre suivant. D'autre part il entraîne l'importante application aux fonctions entières que nous verrons au paragraphe suivant. Pour faire la démonstration nous aurons besoin d'un lemme :

LEMME. — *Soient* N *et* L *deux entiers positifs; considérons le système d'équations à* N *inconnues* $x_0, \ldots, x_{N-1}$

$$y_l = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \binom{L+l}{\nu} \qquad \textit{pour} \qquad l = 0, \ldots, N-1.$$

a) Ce système est un système de Cramer et si les y_l sont des entiers rationnels, il en est de même des x_ν;

b) on a :

$$\max_{\nu=0,\ldots,N-1} |x_\nu| \leqslant 2^{4N+L} \max_{l=0,\ldots,N-1} |y_l|$$

c) $\forall K > 1,\ \exists C > 0$ *tel que si* $L > CN$ *alors :*

$$\max_{\nu=0,\ldots,N-1} |x_\nu| \leqslant K^L \max_{l=0,\ldots,N-1} |y_l|.$$

Démonstration du Lemme. — La partie a est bien connue, elle se montre en formant les différences des quantités y_l. Pour démontrer b et c considérons le polynôme :

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \binom{z}{\nu}$$

Ce polynôme est de degré au plus $N - 1$, il est parfaitement déterminé par ses valeurs $y_0, \ldots, y_{N-1}$ aux points $L, \ldots, L + N - 1$ ses coefficients sont donc des formes linéaires par rapport aux y_l. Les x_n sont alors donnés par les relations :

$$x_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} P(\nu).$$

Ce sont donc des formes linéaires par rapport aux y_l et pour calculer le coefficient de y_l dans x_n il suffit de prendre le polynôme $P_{n,l}$ particulier correspondant à $y_\lambda = 0$ si $\lambda \neq l$ et $y_l = 1$. Ce polynôme $P = P_{n,l}$ est de la forme :

$$P = C \binom{z - L}{N} \Big/ (z - (L + l)) \quad \text{où} \quad C \text{ est une constante}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{(L+l-L)(L+l-L-1)\ldots(L+l-L-l+1)(L+l-L-l-1)\ldots(L+l-L-N+1)}{N!}$$

d'où :

$$C = (-1)^{N-l-1} N \binom{N-1}{l}$$

on a alors si

$$0 \leqslant \nu \leqslant N - 1 \qquad \text{et} \qquad L > \nu$$

$$|P(\nu)| \leqslant N \binom{N-1}{l} \times \frac{(L-\nu)\ldots(L+N-1-\nu)}{N!} \times \frac{1}{L+l-\nu}.$$

Or :

$$N \binom{N-1}{l} = (l+1) \binom{N}{l+1}, \quad \frac{l+1}{L+l-\nu} \leqslant 1,$$

$$L - \nu < L + 1, \ldots, \quad L + N - 1 - \nu < L + N$$

donc :

$$|P(\nu)| < \binom{N}{l+1} \binom{L+N}{N} < 2^N \binom{L+N}{N}.$$

Si $L \leqslant \nu$ alors $P(\nu) = 1$ ou 0 (selon que $l + L$ est égal à ν ou différent de ν) et la majoration donnée est encore valable. Par ailleurs $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = 2^n < 2^N$, le coefficient de y_l dans x_n est donc borné par $2^{2N} \binom{L+N}{N}$ et les y_l sont au nombre de $N \leqslant 2^N$ on a donc finalement :

$$\max_{\nu=0,\ldots,N-1} |x^\nu| < 2^{3N} \binom{L+N}{N} \max_{l=0,\ldots,N-1} |y_l|.$$

La partie b se déduit alors immédiatement de cette majoration en prenant $\left(\frac{L+N}{N}\right) < 2^{N+L}$.

Pour montrer la partie c utilisons la formule de Stirling :

$$\exists\, C_0 \quad \text{tel que} \quad N! \geqslant C_0\, e^{-N} N^N$$

$C_0 > 0$ ne dépend pas de N, on a alors :

$$\binom{N+L}{N} \leqslant \frac{(N+L)^N}{N!} \leqslant C_1\, e^N \left(\frac{L+N}{N}\right)^N$$

Quand $x \to \infty$, $(1+x)^{1/x} \to 1$. Donc étant donné K_0 avec $1 < K_0 < K$, il existe une constante C_2 telle que :

$$x > C_2 \implies (1+x)^{1/x} < K_0.$$

Alors si

$$L > C_2 N \qquad \left(\frac{L+N}{N}\right)^N = \left[\left(1 + \frac{L}{N}\right)^{\frac{N}{L}}\right]^L < K_0^L$$

D'où :

$$\max |x_\nu| < C_1\, 2^{3N}\, e^N\, K_0^L \max |y_l|.$$

Il suffit de montrer que pour

$$L > C_3 N \qquad C_1\, 2^{3N}\, e^N < \left(\frac{K}{K_0}\right)^L$$

ce qui est évident puisque $\frac{K}{K_0} > 1$ en prenant C_3 assez grand. Si $L > CN$ où $C = \max(C_2, C_3)$ on obtient bien la majoration c.

Démonstration du théorème. — Nous allons montrer que les coefficients du développement en série de Laurent en puissance de $z - 1$

sont des entiers. Comme $f(z)$ est holomorphe pour $|z-1| > \rho_0$ et que $\rho_0 < 1$, il en résultera que ces coefficients sont nuls à partir d'un certain rang d'où le résultat.

2.1. — Soit ρ un nombre réel tel que $\rho_0 < \rho < 1$ et soit Γ le cercle $|z-1| = \rho$ parcouru dans le sens direct. Soit d'autre part K un nombre réel tel que

$$1 < K < 1/\rho, \quad \text{d'où} \quad \rho K = r < 1.$$

Enfin posons :

$$M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Nous désignerons par $C_1, C_2, \ldots$ les quantités qui ne dépendent que de ρ, K, M et non des autres nombres que nous introduirons. En particulier on désignera par C(K) la quantité définie dans la partie c du lemme précédent. Posons alors pour $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$:

$$v_{n,k} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)\, z^n (z-1)^k\, dz$$

En prenant un cercle C centré à l'origine de rayon $> 1 + \rho$ on a :

$$v_{n,0} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)\, z^n\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\, z^n\, dz = u_n.$$

D'autre part, la fonction $f(z)$ admet pour $|z-1| > \rho_0$ le développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{0,n}/(z-1)^{n+1}.$$

Comme la majoration de la quantité sous l'intégrale entraîne l'inégalité :

$$|v_{n,k}| \leqslant M(1+\rho)^n \rho^{k+1} \tag{1}$$

nous en déduisons que, lorsque $n \to \infty$, $v_{0,n} \to 0$; il suffit donc de montrer que les quantités $v_{0,n}$ sont des entiers pour prouver le théorème.

2.2. — En développant sous l'intégrale $(z-1)^k$ selon les puissances de z, et z^k selon les puissances de $z-1$ nous obtenons les égalités :

$$v_{n,k+h} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} v_{n+i,h} \tag{2}$$

$$v_{n+k,h} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v_{n,h+i}. \tag{3}$$

De l'inégalité (1) nous tirons l'existence de deux entiers $C_1 \geqslant 1$ et $C_2 \geqslant 0$ tels que :

$$k \geqslant C_1 n, \qquad n \geqslant C_2 \Longrightarrow |v_{n,k}| < 1. \tag{4}$$

2.3. — *Calcul des* $v_{0,k}$ *quand* u_n *est entier pour* $m \leqslant n \leqslant Bm$ (où m et B sont des entiers vérifiant)

$$m \geqslant C_2 \qquad \text{et} \qquad B \geqslant 1 + C_1 + C(K)).$$

— Par hypothèse $v_{n,0}$ est entier pour $m \leqslant n \leqslant Bm$, d'après la formule (2) appliquée en prenant $h = 0$, il en résulte que $v_{m,k}$ est entier pour $m + k \leqslant Bm$ c'est-à-dire $k \leqslant (B - 1)\, m$. Posons $s = C_1 m$ comme $m \geqslant C_2$ il résulte de (4) que :

$$v_{m,k} = 0 \qquad \text{pour} \qquad s \leqslant k \leqslant (B - 1)\, m. \tag{5}$$

Appliquons alors (3) avec $h = s$ il vient finalement :

$$v_{m+k,s} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant k \leqslant (B - 1 - C_1)\, m \tag{6}$$

— Ceci va nous permettre d'exprimer $v_{0,n}$ comme un polynôme en n pour $n \geqslant s$. En effet, en appliquant (2) avec $n = 0$, $h = s$, il vient :

$$v_{0,k+s} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} v_{\nu,s}$$

Posons alors $\lambda_\nu = (-1)^\nu v_{\nu,s}$ d'après (6) λ_ν est nul pour

$$m \leqslant \nu \leqslant (B - C_1)\, m$$

on a donc :

$$(-1)^k v_{0,k+s} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_\nu \binom{k}{\nu} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant k \leqslant (B - C_1)\, m \tag{7}$$

(si $k < m - 1$ cette formule résulte du fait que

$$\binom{k}{\nu} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant k < \nu).$$

— La formule (7) montre que $|v_{0,k+s}|$ ne varie pas trop rapidement, or d'après la formule (1) nous voyons que $|v_{0,k+s}|$ est petit quand k est grand, il va en résulter que $|v_{0,k+s}|$ sera également petit quand k est petit et pour le montrer nous allons d'abord majorer les coefficients λ_ν au moyen du lemme.

En effet, posant

$$L = (B - C_1)\, m - (m - 1), \quad N = m, \quad y_l = (-1)^{L+l}\, v_{0,\, L+l+s}$$

pour $0 \leqslant l \leqslant N - 1$ les λ_ν sont solutions du système étudié dans le lemme. Or $L > (B - 1 - C_1)\, m \geqslant C\,(K)\, N$ on peut donc appliquer le résultat c du lemme, c'est-à-dire :

$$\max_{\nu=0,\ldots,N-1} |\lambda_\nu| \leqslant K^L \max_{l=0,\ldots,N-1} |y_l| \leqslant K^L\, M \rho^{L+s+1} \quad \text{d'après (1)}$$

d'où en reportant dans (7)

$$|v_{0,\, k+s}| \leqslant C_3\, 2^k\, r^{(B-1-C_1)\, m} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant (B - C_1)\, m \qquad (8)$$

— u_n s'exprime en fonction linéaire des $v_{0,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec des coefficients qui ne sont pas trop grands. Les $v_{0,k}$ étant négligeables d'après la majoration précédente pour $k \geqslant s$, u_n s'exprimera à une quantité petite près en fonction linéaire seulement des $v_{0,k}$ pour

$$0 \leqslant k \leqslant s - 1.$$

Les formules sont les mêmes que dans le lemme, les $v_{0,k}$ pour

$$0 \leqslant k \leqslant s - 1$$

s'exprimeront en fonction linéaire à coefficients entiers de s quantités u_n avec des indices consécutifs avec une erreur qui sera d'autant plus petite que ces entiers seront petits. En les prenant le plus petit possible de manière à ce qu'ils soient entiers, on en déduira que les $v_{0,k}$ seront presque des entiers pour $0 \leqslant k \leqslant s - 1$.

De manière précise, on a d'après (3) appliquée avec $h = 0$, $n = 0$

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_{0,i}$$

Posons alors :

$$w_n = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} v_{0,i}, \qquad \overline{w}_n = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} v_{0,i} \qquad (= 0 \quad \text{si} \quad n < s).$$

On a d'après (8) :

$$|\overline{w}_n| \leqslant C_3\, r^{(B-1-C_1)\, m} \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} 2^i \leqslant C_3 \times 3^n \times r^{(B-1-C_1)\, m}$$

pour $0 \leqslant n \leqslant \mathrm{B}m$. Les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} u_{m+l} = \sum_{\nu=0}^{s-1} x_\nu \binom{m+l}{\nu} \\ \text{pour} \quad l = 0, \ldots, s-1 \end{cases} \tag{9}$$

et

$$\begin{cases} \overline{w}_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{s-1} \bar{x}_\nu \binom{m+l}{\nu} \\ \text{pour} \quad l = 0, \ldots, s-1 \end{cases} \tag{10}$$

ont d'après le lemme a une solution unique, et comme

$$w_n = \sum_{\nu=0}^{s-1} v_{0,\nu} \binom{n}{\nu} = u_n - \overline{w}_n$$

on en déduit que :

$$v_{0,\nu} = x_\nu - \bar{x}_\nu \quad \text{pour} \quad \nu = 0, \ldots, s-1.$$

D'après le lemme a les x_ν sont entiers puisque u_{m+l} est entier car $m \leqslant m + l \leqslant m + s - 1 \leqslant \mathrm{B}m$ et nous pouvons majorer les solutions du système (10) en utilisant le lemme b :

$$\max_{\nu=0,\ldots,s-1} |\bar{x}_\nu| \leqslant (\mathrm{C}_3 \times 3^{m+s-1} \times r^{(\mathrm{B}-1-\mathrm{C}_1)m}) \times 2^{4s+m} \leqslant \mathrm{C}_4 (\mathrm{C}_5 r^{\mathrm{B}})^m.$$

Donc il existe s entier $x_0, \ldots, x_{s-1}$ tels que :

$$|v_{0,k} - x_k| < \mathrm{C}_4 (\mathrm{C}_5 r^{\mathrm{B}})^m \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant \mathrm{C}_1 m - 1. \tag{11}$$

2.4. — *Fin de la démonstration.*

Comme $r < 1$, il existe C_6 tel que $\mathrm{B} \geqslant \mathrm{C}_6 \Longrightarrow \mathrm{C}_5 r^{\mathrm{B}} \leqslant 1/2$.

Choisissons alors $\mathrm{A} = 1 + \max(\mathrm{C}_6, 1 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}(\mathrm{K}))$.

Par hypothèse $\mathbf{J}$ étant de fréquence infinie, il existe une infinité de $m \geqslant \mathrm{C}_2$ tels que $n \in \mathbf{J}$ pour $m \leqslant n < \mathrm{A}m$ donc tels que u_n entier pour $m \leqslant n \leqslant \mathrm{B}m$ $(< \mathrm{A}m)$. Nous pouvons alors appliquer le résultat précédent et tenant compte de $\mathrm{C}_1 \geqslant 1$ on aura en particulier : pour une infinité de m il existe des entiers $x_k^{(m)}$, $0 \leqslant k \leqslant m - 1$ tels que :

$$|v_{0,k} - x_k^{(m)}| < \mathrm{C}_4 2^{-m} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant m - 1.$$

Dès que m est assez grand $\mathrm{C}_4 \times 2^{-m} < 1/2$ les entiers $x_k^{(m)}$ sont fixes et égaux par conséquent aux $v_{0,k}$ qui sont donc entiers, c.q.f.d.

3. Application : fonctions entières prenant des valeurs entières par un ensemble d'entiers.

Soit $f(z)$ une fonction entière, et définissons la quantité :

$$\alpha(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \log |f(re^{i\varphi})|$$

Nous nous proposons de généraliser un résultat de Polya [7].

THÉORÈME. — *Si $f(n)$ est entier rationnel pour $n \in \mathbf{J}$ où $\mathbf{J}$ est un ensemble de fréquence infinie et si*

$$\alpha(\varphi) \leqslant k < \operatorname{Log} 2, \quad \forall \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

alors, $f(z)$ est un polynome en z.

Remarque.

Plus précisément, $f(z)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de polynômes d'interpolation $\binom{z}{n}$ ($n \in \mathrm{N}$). Ceci résulte immédiatement une fois montré le théorème du premier résultat donné dans l'introduction à ce travail (c'est-à-dire aussi du lemme a du paragraphe précédent).

Démonstration.

La série $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-nx}$ converge pour $e^{\mathcal{R}x} > \alpha(0)$. On sait (voir par exemple [6]) que $\mathrm{F}(x)$ a comme seule singularités les singularités de la transformée de Laplace de f et les translatés de ces singularités par les translations $2k\pi i$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Ici la transformée de Laplace de f est holomorphe pour

$$|x| > \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha < \operatorname{Log} 2 < \pi.$$

Dans la bande $-\pi \leqslant \mathcal{J}(x) \leqslant \pi$, $\mathrm{F}(x)$ est donc holomorphe pour $|x| > \alpha$ et l'on sait alors que si γ est une courbe située dans cette bande et entourant le domaine $|x| \leqslant \alpha$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{zx}\, \mathrm{F}(x)\, dx.$$

Désignons alors par $\varphi(z)$ la fonction admettant pour $|z| > e^{\alpha(0)}$ le développement :

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}.$$

Il suffit de prouver que $\varphi(z) = \dfrac{A(z)}{(z-1)^s}$ ou $A(z)$ est un polynôme en z. En effet on a alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{zx} \frac{A(e^x)}{(e^x - 1)^s} dx = f(z)$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\lambda x}}{(e^x - 1)^s} dx = \binom{\lambda - 1}{s - 1}$$

est un polynôme en λ, ce qui montre en développant $A(e^x)$ que $f(z)$ est un polynôme en z.

Mais $\varphi(z)$ est holomorphe à l'extérieur du domaine transformé de $|x| \leqslant \alpha$ par $e^x = z$. En particulier si $\rho_0 = \max\limits_{|x| \leqslant \alpha} |e^x - 1|$, $\varphi(z)$ est holomorphe pour $|z - 1| > \rho_0$. Comme

$|e^x - 1| \leqslant e^{|x|} - 1$ et que $e^\alpha - 1 < e^{\mathrm{Log}\,2} - 1 = 1$ on a $\rho_0 < 1$.

Le théorème résulte alors du théorème du paragraphe précédent appliquée à la fonction $g(z) = \varphi(z) - f(0)$.

CHAPITRE VI

GÉNÉRALISATION D'UN RÉSULTAT DE POLYA [8]

Notations. — Etant donné un compact $\mathbf{S}$ du plan complexe, nous noterons $\tau(\mathbf{S})$ son diamètre transfini [8]. Si $T_k(z)$ désigne pour $k \geqslant 0$ les polynômes de Tchebischev de $\mathbf{S}$ et si $\tau_k = \max_{z \in \mathbf{S}} |T_k(z)|$, nous noterons $\mathbf{S}^*$ l'ensemble des points z tels que $|T_k(z)| \leqslant \tau_k \; \forall \, k \geqslant 0$.

Nous supposerons $\mathbf{S}$ infini de sorte que les polynômes de Tchebischev de $\mathbf{S}$ seront déterminés de manière unique (sinon nous poserons $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$).

Il est évident alors que $\mathbf{S}^* \supset \mathbf{S}$ d'où $\tau(\mathbf{S}^*) \geqslant \tau(\mathbf{S})$. Mais il y a égalité car :

$$\tau(\mathbf{S}^*) \leqslant \lim \tau_k^{1/k} = \tau(\mathbf{S}), \quad \text{d'où} \quad \tau(\mathbf{S}^*) = \tau(\mathbf{S}).$$

D'autre part les polynômes de Tchebischev de $\mathbf{S}^*$ sont les polynômes T_k en vertu de l'unicité des polynômes de Tchebischev pour $\mathbf{S}$. Il en résulte en particulier que l'opération $\mathbf{S} \to \mathbf{S}^*$ est une clôture (au sens algébrique).

Les théorèmes 1 et 2 du chapitre précédent suggèrent alors un énoncé du type : si $f(z)$ admettant au voisinage de l'infini le développement $\Sigma \, u_n/z^{n+1}$ est holomorphe en dehors d'un compact de diamètre transfini inférieur à 1 et si u_n est entier sur un ensemble de fréquence infinie alors $f(z)$ est le quotient d'une fonction d'Ostrowski par un polynôme dont les racines sont des entiers algébriques.

En fait, ne pouvant pas borner le degré de la relation de récurrence par un nombre fixe (ce qui déjà empêchait d'avoir un théorème plus fort au chapitre 2 dans le cas où l'on suppose seulement θ réel > 1), nous ne montrons qu'un résultat plus faible.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathbf{J}$ *un ensemble d'entiers, tel que pour tout nombre réel* $A > 0$ *il existe une infinité d'entiers* x *pour lesquels :*

$$\forall \, n \in \mathbf{N}, \quad x \leqslant n < Ax^2 \implies n \in \mathbf{J}$$

Soit, d'autre part, $\mathbf{S}$ *compact de diamètre transfini strictement inférieur à* 1 *et soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe en dehors de* $\mathbf{S}$ *et admettant au voisinage de l'infini le développement :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}.$$

Alors, si u_n *est entier pour* $n \in \mathbf{J}$, *il existe une suite de fractions rationnelles* $A_\nu(z)/B_\nu(z)$ *telle que dans tout domaine fermé où* f *est prolongeable à partir de l'infini,* f *est limite uniforme des fractions* $A_\nu(z)/B_\nu(z)$ *de sorte qu'en particulier* f *est uniforme et admet donc un domaine d'holomorphie maximum.*

En outre les racines de B_ν *appartiennent à l'ensemble fini des entiers algébriques du complémentaire du domaine d'holomorphie de* f, *qui sont ainsi que tous leurs conjugués dans* $\mathbf{S}^*$, *et éventuellement du point* $z = 0$ *s'il n'est pas dans le domaine d'holomorphie de* f.

Démonstration.

Dans toute la démonstration nous nous donnons un entier ν et nous désignons par $C_0, C_1, \ldots$ les constantes indépendantes de ν.

1 — Soit ρ un nombre réel tel que $\tau(\mathbf{S}) < \rho < 1$. On sait qu'il existe alors un compact $\mathbf{S}'$ de frontière Γ formée d'arcs analytiques contenant $\mathbf{S}$ en son intérieur et de diamètre transfini $\tau' < \rho$. Désignant par V_k les polynômes de Tchebischev de $\mathbf{S}'$ on a :

$$\lim_{k \to \infty} (\max_{z \in \mathbf{S}'} |V_k(z)|^{1/k}) \leqslant \tau' < \rho$$

on peut donc écrire pour $k \geqslant 0$

$$|V_k(z)| \leqslant C_0 \rho^k \quad \forall z \in \mathbf{S}' \quad \text{et en particulier sur } \Gamma.$$

Si nous désignons par $D_{n,t}$ le déterminant de Hankel

$$D_{n,t} = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+t} \\ u_{n+t} & u_{n+2t} \end{vmatrix}$$

une combinaison classique de lignes et colonnes montre que :

$$D_{n,t} = \begin{vmatrix} v_{00} & v_{0t} \\ v_{t0} & v_{tt} \end{vmatrix}$$

où

$$v_{hk} = \mathrm{T}_h\,\mathrm{T}_k((u_n)) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \mathrm{T}_h(z)\,\mathrm{T}_k(z)\,z^n f(z)\,dz$$

Γ étant prise dans le sens direct. On en déduit

$$|v_{h,k}| \leqslant \mathrm{C}_1\,\mathrm{K}^n\,\rho^{h+k} \quad \text{(en particulier} \quad |u_n| = |v_{00}| \leqslant \mathrm{C}_1\,\mathrm{K}^n)$$

et grâce à la majoration d'Hadamard :

$$|\mathrm{D}_{n,t}| \leqslant (\mathrm{C}_2\,\mathrm{K}^n\,\rho^{t/2})^{t+1}.$$

Il en résulte que : $n \geqslant \mathrm{C}_3$, $t \geqslant \mathrm{C}_4\,n \Longrightarrow |\mathrm{D}_{n,t}| < 1$ et nous pouvons supposer C_4 entier.

2. — D'après l'hypothèse sur $\mathbf{J}$, $\forall\,\nu$ entier il existe un entier x tel que :

$$\nu \leqslant x, \quad x \leqslant n < \nu x^2 \Longrightarrow n \in \mathbf{J} \tag{1}$$

c'est-à-dire u_n entier.

$\mathrm{D}_{x,k}$ est donc un entier $0 \leqslant k < \frac{1}{2}(\nu x^2 - x)$, et si $\nu \geqslant \mathrm{C}_3$ $k \geqslant \mathrm{C}_4\,x$, $\mathrm{D}_{n,k}$ est nul d'après les inégalités précédentes.

En vertu du théorème 1.4 b du chapitre 1, il existe donc un système canonique (P, m, m') dépendant de l'entier ν tel que si

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{P} = a_0 z^s + \ldots + a_s\,. \\ 0 \leqslant s \leqslant \mathrm{C}_4\,x\ ;\quad x \leqslant m \leqslant x + \mathrm{C}_4\,x\ ; \\ \mathrm{M} = m' - m \geqslant \dfrac{1}{4}\nu x^2 - \left(\dfrac{5}{4} + \dfrac{\mathrm{C}_4}{2}\right)x = \dfrac{1}{4}\nu x^2 - \mathrm{C}_5\,x \end{array}\right\} \tag{2}$$

3. — Par application du lemme 2.2 du chapitre 1

$$a_0^{\mathrm{M}} \leqslant |\mathrm{D}_{m,s-1}| \leqslant (\mathrm{C}_2\,\mathrm{K}^m\,\rho^{(s-1)/2})^s \leqslant (\mathrm{C}_2\,\mathrm{K}^m)^s \qquad (\text{si } s = 0,\ \mathrm{P} = 1)$$

d'où $a_0 \leqslant (\mathrm{C}_2\,\mathrm{K}^{(1+\mathrm{C}_4)x})^{\mathrm{C}_4 x} \Big/ \left(\frac{1}{4}\nu x^2 - \mathrm{C}_5\,x\right)$

quand $\nu \to \infty$ la quantité du second membre tend vers 1 car si $\nu > \mathrm{A}$ elle est inférieure à :

$$(\mathrm{C}_2\,\mathrm{K}^{(1+\mathrm{C}_4)x})^{\mathrm{C}_4 x} \Big/ \left(\frac{1}{4}\mathrm{A}x^2 - \mathrm{C}_5\,x\right) \text{qui tend vers } \mathrm{K}^{4(1+\mathrm{C}_4)\mathrm{C}_4/\mathrm{A}}$$

quand ν donc $x \to \infty$ et quand $\mathrm{A} \to \infty$ cette dernière quantité $\to 1$.

Comme a_0 est un entier > 0, dès que ν assez grand ($\nu > C_6$) la quantité du second membre est < 2 donc $a_0 = 1$.

4. — Par application du lemme 2.3 du chapitre 1, si ζ est une racine quelconque de P dans le corps des complexes ou bien $|\zeta| \leqslant K$ ou bien

$$|\zeta|^{M-s+1} \leqslant 2\, K^2\, C_1)^{s^2}\, K^{M+ms} \qquad \text{car } |D_{m,\,s-1}| \geqslant 1 \text{ puisque entier.}$$

Dans ce dernier cas :

$$|\zeta| \leqslant C_7^{s^2/(M-s+1)}\, K^{\left(1+\frac{ms}{M}\right)\Big/\left(1-\frac{s-1}{M}\right)}$$

et quand $\nu \to \infty$, $\dfrac{s^2}{m-s+1}$, $\dfrac{ms}{M}$ restent bornés et $\dfrac{s-1}{M} \to 0$ en vertu de (2). Donc ζ reste borné et, on a quelque soit ν $|\zeta| < C_7$.

5. — Soient alors $T_k(z)$ ($k = 0, 1, \ldots$) les polynômes de Tchebischev de **S** et posons : $\tau_k = \max\limits_{z \in \mathbf{S}} |T_k(z)|$. Soit ε un nombre réel > 0 et k un entier. Si nous désignons par γ la courbe algébrique :

$$|T_k(z)| = \tau_k + \varepsilon/2 \text{ parcourue dans le sens direct.}$$

γ entoure le compact **S** et on a donc :

$$T_k^h((u_n)) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_\gamma f(z)\, z^n\, (T_k(z))^h\, dz$$

d'où $|T_k^h((u_n))| \leqslant C_8^n\, (\tau_k + \varepsilon/2)^h$ pour $n \geqslant 1$.

Soit alors ζ une racine de P dans le corps des complexes et posons comme dans le premier chapitre

$$Q = z - \zeta, \quad P = a_0\, QR, \quad v_n = R((u_n)), \quad w_n = Q((u_n)) = u_{n+1} - \zeta u_n$$

On a :

$$v_{n+1} = \zeta\, v_n \quad \text{d'où } v_{m+l} = \zeta^l v_m$$

(dans les limites de définition).

Soit h le plus grand entier tel que $hk \leqslant M$ c'est-à-dire $h = [M/k]$, on a :

$$T_k^h((v_m)) = (T_k(\zeta))^h\, v_m\,.$$

Mais :

$$T_k^h((v_m)) = T_k^h\, R((u_m)) = R\, T_k^h((u_m)).$$

Les racines de P étant bornées par C_7 d'après le paragraphe précédent le coefficient γ_i de z^{s-1-i} dans R est borné par :

$$|\gamma^i| \leqslant \binom{s-1}{i} C_7^i \text{ et on en déduit :}$$

$$|T_k^h((\nu_m))| < \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} C_7^i C_8^{m+(s-1)-i} (\tau_k + \varepsilon/2)^h = C_8^m C_9^{s-1} (\tau_k + \varepsilon/2)^h. \tag{3}$$

Pour minorer ν_m nous utilisons la relation (2) du chapitre 1 et le fait que $|\text{dét } \mathcal{U}_m| \geqslant 1$ puisque entier non nul; alors $|\nu_m|\ |\text{dét } \mathcal{V}_m| \geqslant 1$

$$\text{et dét } \mathcal{V}_n = \begin{vmatrix} u_{m+1} - \zeta u_m & u_{m+1} & - \zeta u_{m+s-1} \\ u_{m+1} - \zeta u_m & u_{m+2s-1} & - \zeta u_{m+2s-2} \end{vmatrix}$$

donc :

$$|\text{dét } \mathcal{V}_m| \leqslant s\,! \,(C_1 K^{m+2s-1} + C_1 K^{m+2s-2} C_7)^{s-1} < 2^{s^2} C_{10}^{s-1} K^{(m+2s)(s-1)}$$

et finalement :

$$|T_k(\zeta)^h| \leqslant |T_k^h((\nu_m))|\ |\text{dét } \mathcal{V}_m| < 2^{s^2} C_{11}^{s-1} C_8^{\ (m+2s)(s-1)} \tau_k + \varepsilon/2)^h$$

Posant :

$$F = \{2^{s^2} C_{11}^{s-1} C_8^m K^{(m+2s)(s-1)}\}^{1/h}$$

(F dépend de ν) nous obtenons

$$|T_k(\zeta)| < F(\tau_k + \varepsilon/2) \tag{4}$$

Mais quand $\nu \to \infty$ k restant fixe

$$\frac{s^2}{h} \leqslant \frac{s^2 k}{M - h} \leqslant \frac{C_4^2 k x^2}{\frac{1}{4} \nu x^2 - C_5 - k} \to 0$$

et de même

$$\frac{s-1}{h} \to 0\,; \qquad \frac{m}{h} \to 0\,; \qquad \frac{(m + 2s)(s-1)}{h} \to 0$$

donc : $F \to 1$.

En particulier dès que ν est assez grand : $F < \dfrac{\tau_k + \varepsilon}{\tau_k + \varepsilon/2}$

Pour résumer nous avons donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \forall k \geqslant 0\ \exists\ \nu(k, \varepsilon) \text{ tel que :} \tag{5}$$

$$\nu > \nu_0(k, \varepsilon) \Rightarrow |T_k(\zeta)| < \tau_k + \varepsilon$$

pour toute racine ζ *du polynôme* P *associé à l'entier* ν.

6. — Lorsque $k \to \infty$, $\tau_k^{1/k} \to \tau(S) < 1$. Donc, il existe un entier k tel que $\tau_k < 1$. En prenant $\varepsilon > 0$ assez petit (k étant fixé une fois pour toutes) on a également $\lambda = \tau_k + \varepsilon < 1$.

D'après (5) on a donc dès que $\nu > C_{12}$, $|T_k(\zeta)| < \lambda < 1$.

Soit $\mathbf{S}''$ l'ensemble compact des z tels que $|T_k(z)| \leqslant \lambda$, cet ensemble a un diamètre transfini $\leqslant \lambda^{1/k}$ (car les polynômes $T_k(z)$ sont de degré hk et le maximum de leur valeur absolue quand z parcourt $\mathbf{S}''$ est $\leqslant \lambda^h$). Le diamètre transfini de $\mathbf{S}''$ étant strictement inférieur à 1, $\mathbf{S}''$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers algébriques.

Mais si $\nu > C_{12}$ et si ζ est racine de P, ζ est un entier algébrique d'après 3, tous les conjugués $\zeta\sigma$ de ζ sont racines de P et en outre $|T_k(\zeta\sigma)| < \lambda$ donc les conjugués de ζ (y compris ζ) appartiennent à $\mathbf{S}''$.

Il existe donc un ensemble fini $\mathcal{J}$ *d'entiers algébriques tels que si* ζ *est racine de* P, *pour* $\nu > C_{12}$ *alors* $\zeta \in \mathcal{J}$.

Soit alors $\mathcal{J}$ l'ensemble des $\zeta \in \mathcal{J}$ qui appartiennent à l'ensemble $\mathbf{S}^*$ défini au début de ce chapitre.

Si $\zeta \in \mathcal{J}$ il existe d'après la définition de $\mathbf{S}^*$ $\varepsilon(\zeta) > 0$ et $k(\zeta) > 0$ tel que : $|T_{k(\zeta)}(\zeta)| \geqslant \tau_{k(\zeta)} + \varepsilon(\zeta)$.

Soit alors $C_{13} = \max(C_{12}, \max\limits_{\zeta \in \mathcal{J} - \mathcal{J}} \nu(k(\zeta), \varepsilon(\zeta))$.

Si $\nu > C_{13}$ et si ζ est racine de P, d'après ce qui précède, tout conjugué ζ' de ζ appartient à $\mathcal{J}$. Mais, s'il n'appartenait pas à $\mathcal{J}$ on aurait : $|T_{k(\zeta')}(\zeta')| > \tau_{k(\zeta')} + \varepsilon(\zeta')$.

Comme $\nu > \max\limits_{\zeta \in \mathcal{J} - \mathcal{J}} \nu(k(\zeta), \varepsilon(\zeta))$ on a d'après (5)

$$|T_{k(\zeta')}(\zeta')| < \tau_{k(\zeta')} + \varepsilon(\zeta')$$

et il y a contradiction.

On en déduit donc :

(6) *Pour* $\nu > C_{13}$, *toute racine de* P *est un entier algébrique qui appartient ainsi que tous ses conjugués à l'ensemble* $\mathbf{S}^*$.

Remarquons que ce raisonnement n'était possible que si P admet des racines c'est-à-dire si $s \neq 0$ dès que ν est assez grand. Mais si pour une infinité de ν, $s = 0$ c'est-à-dire $P = P(0) = 1$, alors u_n est nul sur un ensemble de fréquence infinie, $f(z)$ est une fonction d'Ostrowski et le théorème résulte des propriétés énoncées dans le chapitre précédent.

7. — Soit $\nu > C_{13}$. Nous posons :

$$\begin{cases} E(z) = u_0 z^{s-1} + \ldots + (u_{s-1} + a_1 u_{s-2} + \ldots + a_{s-1} u_0) \\ Q(z) = E(z) + \sum_{n=0}^{m-1} P((u_n))/z^{n+1} \end{cases}$$

et dans la mesure où $f(z)$ et $Q(z) / P(z)$ sont définis :

$$R(z) = f(z) - Q(z) / P(z).$$

On a en particulier pour $|z| > K$ et $P(z) \neq 0$:

$$R(z) = \left(\sum_{n=m}^{\infty} P((u_n))/z^{n+1}\right)/P(z) = \left(\sum_{n=m'+s-1}^{\infty} P((u_n))/z^{n+1}\right)/P(z)$$

puisque $P((u_n)) = 0$ pour $m \leqslant n \leqslant m' + s - 2$.

Nous notons $\mathscr{E}_0$ l'ensemble des points ζ tels que : ou bien $\zeta = 0$, ou bien ζ est un entier algébrique appartenant ainsi que tous ses conjugués à S^* et $\mathscr{D}_\epsilon$ l'ensemble ouvert des z tels que $|z - \zeta| > \varepsilon \ \forall \zeta \in \mathscr{E}_0$. On a donc pour $\nu > C_{13}$ d'après (6), $|P(z)| > \varepsilon^s$.

Les racines de $P(z)$ sont bornées en module par C_7, donc les coefficients de P sont bornés par $(2 C_7)^s$ et on a pour $n \geqslant 0$:

$$|P((u_n))| < C_1 K^n (C_{14})^s.$$

La même majoration avec $n = 0$ est a fortiori valable pour les coefficients de $E(z)$ et l'on peut donc écrire :

$$|E(z)| < C_1 C_{14}^s (1 + |z| + \ldots + |z|^{s-1}).$$

Soit d'autre part ρ un nombre réel supérieur à $2K$ et à $1 + C_7$ et soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des points z tels que $|z| \geqslant \rho$. Supposons que

$$0 < \varepsilon < 1/2.$$

On a alors si $z \in \mathscr{R}$

$$|R(z)| < C_1 C_{14}^s 2^{-m'} \varepsilon^{-s}$$

(en supposant $s \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, ce qui est toujours possible).

et si

$$z \in \mathcal{D}_\epsilon - \mathcal{R} \quad , \quad \left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right| < C_1 C_{15}^s + C_1 C_{14}^s \frac{(K/\varepsilon)^m - 1}{(K/\varepsilon) - 1}$$

soit

$$\left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right| < C_1 (C_{16})^s (K/\varepsilon)^m.$$

8. — Soit alors $\mathcal{F}$ un domaine fermé où $f(z)$ est prolongeable à partir de l'infini : c'est-à-dire il existe un domaine ouvert $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ et contenant l'ensemble des points $|z| > B$ pour B convenable, et f est holomorphe dans le domaine $\mathcal{G}$ avec le développement $\Sigma\, u_n/z^{n+1}$ pour $|z| > B$.

Supposons en outre que $\mathcal{F} \cap \mathcal{E}_0 = \varnothing$.

Nous pouvons alors trouver un domaine $\mathcal{F}'$ fermé contenu dans $\mathcal{G}$, contenant $\mathcal{F}$ et l'ensemble des points $|z| \geqslant 1 + B$, et tel que $\mathcal{F}' \cap \mathcal{E}_0 = \varnothing$.

Nous prenons alors dans le paragraphe 7 $\rho \geqslant 1 + B$ et ε assez petit pour que $\mathcal{D}_\epsilon \supset \mathcal{F}'$ ce qui est toujours possible puisque $\mathcal{F}'$ est fermé.

D'après le principe des 3 régions [1] il existe une constante γ telle que $0 < \gamma < 1$ ne dépendant que des configurations de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{R}$ et telle que si M_0, M', M'' désignent les maxima des modules d'une fonction holomorphe sur $\mathcal{F}'$, sur respectivement $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{R}$ on ait :

$$M_0 \leqslant M'^{1-\gamma} M''^{\gamma}$$

(γ ne dépend donc pas de la fonction holomorphe prise).

Ici on a pour $z \in \mathcal{F}'$, f étant holomorphe $|f(z)| < C_{17}$. Prenons alors comme fonction holomorphe sur $\mathcal{F}'$ la fonction $R(z)$. On a d'après le paragraphe précédent si $z \in \mathcal{R}$ $|R(z)| < C_1 C_{14}^s \varepsilon^{-s} 2^{-m'}$

donc :

$$M'' < C_1 (C_{14}\, \varepsilon^{-1})^s s^{-m'}$$

et si

$$z \in \mathcal{F}' \cap (\mathcal{D}_\epsilon - \mathcal{R}) \quad , \quad \left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right| < C_1 (C_{16})^s (K/\varepsilon)^m$$

Comme :

$$|R(z)| \leqslant |f(z)| + \left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right|$$

on en déduit que :

$$M' < \max (M'', C_{17} + C_1 (C_{16})^s (K/\varepsilon)^m).$$

Et par application du principe des 3 régions on a donc :

$$\forall z \in \mathcal{F}, \quad \left| f(z) - \frac{Q(z)}{P(z)} \right| \leqslant M_0 < C_{18}\, C_{19}^{s}\, C_{20}^{m}\, 2^{-\gamma m'}$$

avec $\gamma > 0$.

Quand $\nu \to \infty$, s/m', m/m' tendent vers 0 le dernier membre de l'inégalité tend donc vers 0 et il y a convergence uniforme sur le domaine $\mathcal{F}$ des fractions $\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ vers $f(z)$.

Donc *dans tout domaine fermé où f est prolongeable à partir de l'infini et qui ne contient pas de point de l'ensemble fini $\mathcal{E}_0$, f est limite uniforme quand $\nu \to \infty$ des fractions* $\dfrac{Q}{P}$.

En particulier f est uniforme et il existe donc un domaine ouvert maximum $\mathcal{D}$ où f est holomorphe.

9. — Soit alors $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}_0$ appartenant à $\mathcal{D}$ et soit r un nombre réel > 0 tel que les cercles $|z - \zeta| = r$ pour $\zeta \in \mathcal{E}$ sont sans points communs et tous intérieurs au domaine $\mathcal{D}$.

Q/P est dans le domaine $\mathcal{D}$ holomorphe partout sauf peut-être aux points $\zeta \in \mathcal{E}$.

Soit $\omega_\zeta(z)$ la partie principale de Q/P au point $\zeta \in \mathcal{E}$ et posons :

$$A(z)/B(z) = Q(z)/P(z) - \sum_{\zeta \in \mathcal{E}} \omega_\zeta(z).$$

$A(z)$ et $B(z)$ étant des polynômes premiers entre eux, $B(z)$ admet pour seuls zéros les points de $\mathcal{E}$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{D}$. Il suffit donc de montrer que lorsque $\nu \to \infty$, sur tout fermé $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ la suite $A(z)/B(z)$ converge uniformément vers $f(z)$.

Soit $r > 0$ un nombre réel assez petit pour que les cercles $|z - \zeta| = r$ avec $\zeta \in \mathcal{E}$ soient sans points communs et entièrement contenus dans $\mathcal{D}$, soit $\mathcal{F}'$ le fermé formé par les points de $\mathcal{F}$ tels que $\forall \zeta \in \mathcal{E}$ $|z - \zeta| \geqslant r$. Sur $\mathcal{F}'$, $Q(z)/P(z)$ tend uniformément vers $f(z)$ quand $\nu \to \infty$, il suffit de montrer que sur $\mathcal{F}'$, $\sum_{\zeta \in \mathcal{E}} \omega_\zeta(z)$ tend uniformément vers 0 pour en déduire que $A(z)/B(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ sur $\mathcal{F}'$. Mais dans le cercle $|z - \zeta| \leqslant r$ la fonction $f(z) - A(z)/B(z)$ est holomorphe, en appliquant alors le principe du maximum on voit que si $\sum_{\zeta \in \mathcal{E}} \omega_\zeta(z)$

converge vers 0 uniformément sur $\mathcal{F}'$, $A(z)/B(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ sur $\mathcal{F}$.

Comme $\mathcal{E}$ est un ensemble fini, il suffit de montrer que $\omega_\zeta(z)$ converge vers 0 quand $\nu \to \infty$ uniformément pour $|z-\zeta| \geqslant r$. Soit C le cercle parcouru dans le sens direct $|z-\zeta| = r/2$. C est un fermé contenu dans le domaine $\mathcal{D}$ d'holomorphie de $f(z)$, ne contenant pas de point de l'ensemble fini $\mathcal{E}_0$, d'après le paragraphe 8, Q/P converge donc vers f uniformément sur C.

Par ailleurs :

$$\omega_\zeta(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu(\zeta)} \alpha_\mu/(z-\zeta)^{\mu+1}$$

et

$$\alpha_\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_C (z-\zeta)^\mu \, Q(z)/P(z)\, dz.$$

Et sur C :

$$\max_{z \in C} |Q(z)/P(z) - f(z)| = E \to 0 \quad \text{quand } \nu \to \infty.$$

Comme $f(z)$ est holomorphe pour $|z-\zeta| \leqslant r$ on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C (z-\zeta)^\mu f(z)\, dz = 0$$

pour $\mu \geqslant 0$.

Donc :

$$|\alpha_\mu| \leqslant \left|\frac{1}{2i\pi}\int_C (z-\zeta)^\mu (Q/P - f)\, dz\right| \geqslant E \times \left(\frac{r}{2}\right)^{\mu+1}$$

et pour $|z-\zeta| \geqslant r$ $|\omega_\zeta(z)| \leqslant E$ ce qui entraîne bien la convergence uniforme vers 0 de $\omega_\zeta(z)$ et achève ainsi la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung, *Springer Verlag* (1955), 69, ch. 3.

[2] E. Borel, Sur une application d'un théorème de M. Hadamard, *Bull. Sci. math.* (2), 18, (1894), 22-25.

[3] S. Lang, Diophantine Geometry, *Interscience publishers*, ch. 6, 91-119.

[4] A. OSTROWSKI, On the representation of analytic functions by power series, *J. London Math. Soc.* (1), (1926), 251-263.

[5] C. PISOT, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, série 2, t. 7 (1938), 205-248.

[6] C. PISOT, Sur les fonctions analytiques arithmétiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sci., Paris, 222 (1946), 988-990.

[7] G. POLYA, Ueber ganze ganzwertige Funktionen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1920), 1-10.

[8] G. POLYA, Ueber gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, *Math. Annal.*, 99 (1928), 687-706.

[9] G. RAUZY, Répartition modulo 1 pour des suites partielles d'entiers-développements en série de Taylor donnés sur des suites partielles, *C. R.*, 258 (1964), 4881-4884.

[10] G. RAUZY, Relations de récurrence mod. m., *Séminaire Delange Pisot, Théorie des nombres* (1963).

[11] R. SALEM, Power series with integral coefficients, *Duke Math. journal* (1945), 153-172.

[12] R. SALEM, Algebraic numbers and Fourier analysis, *H.M.M.*, Boston (1961), 32.

(*Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1965*).

GÉRARD RAUZY,
1, rue de la Madeleine,
Lille (Nord)