

GUSTAVE CHOQUET

**Démonstration non probabiliste d'un
théorème de Gettoor**

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 2 (1965), p. 409-413

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_409_0

© Annales de l'institut Fourier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION NON PROBABILISTE D'UN THÉORÈME DE GETOOR

par **Gustave CHOQUET**

Getoor a démontré par une méthode probabiliste un résultat qui, dans $\mathbf{R}^p (p \geq 3)$ et pour le noyau newtonien, se traduit ainsi : Pour toute mesure de Radon $\mu \geq 0$ qui ne charge aucun ensemble polaire, il existe un plus petit fermé fin (c'est-à-dire un ensemble fermé pour la topologie fine) qui porte μ .

Nous allons affaiblir un peu la restriction imposée à μ , et donner de cet énoncé modifié une démonstration non probabiliste fort simple. En vue de son extension à un cadre axiomatique plus général, nous allons placer cette démonstration elle-même dans un cadre axiomatique.

AXIOMES. — On se donne :

- Un espace topologique E à base dénombrable d'ouverts.
- Une tribu \mathfrak{B} de parties de E qui contient les ouverts de E .
- Un ensemble ordonné F dont toute partie a une borne inférieure et contient un sous-ensemble fini ou dénombrable de même borne inférieure.
- Une application b (appelée *base*) de $\mathfrak{X}(E)$ dans $\mathfrak{X}(E)$.
- Une application c (appelée *capacité*) de \mathfrak{B} dans F .

On définit alors sur \mathfrak{B} un pré-ordre noté \prec , en posant :

$(X \prec Y)$ si pour tout ouvert ω de E , $c(X \cap \omega) \leq c(Y \cap \omega)$.

On suppose vérifiés les axiomes suivants :

- 1) *Les applications b et c sont croissantes.*
- 2) $(X_n \subset Y_n \text{ et } c(X_n) = c(Y_n) \text{ pour } n = 1, 2, \dots)$
 $\implies (c(\cup X_n) = c(\cup Y_n)).$
- 3) *Pour tous $X, Y \in \mathfrak{B}$, $(X \prec Y) \implies (b(X) \subset b(Y)).$*

On se donne enfin sur \mathcal{B} une mesure σ -additive μ , à valeurs dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemples. — 1) Dans le cadre classique d'un noyau newtonien sur $E = \mathbf{R}^p$, on prendra $\mathcal{B} =$ tribu des parties boréliennes de E ; on prendra $F = \overline{\mathbf{R}}$; enfin $c(X)$ désignera la capacité newtonienne de X , et $b(X)$ le dérivé fin de X , c'est-à-dire l'ensemble des points de E qui sont points d'accumulation de X pour la topologie fine.

Que l'axiome 2 soit satisfait résulte alors par exemple du fait que sur \mathcal{B} la capacité newtonienne est fortement sous-additive, et que pour toute suite (X_n) croissante,

$$\lim c(X_n) = c(\cup X_n).$$

Que l'axiome 3 soit satisfait résulte par exemple du critère d'effilement donné par Wiener.

2) Dans le cadre de l'axiomatique Brelot (avec base dénombrable d'ouverts et axiomes D), on prendra ⁽¹⁾ pour F l'ensemble des fonctions surharmoniques ≥ 0 , muni de l'ordre usuel: $\varphi_1 \leq \varphi_2$ si $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pour tout x . On désignera par $c(X)$ la réduite $\hat{R}_{V_0}^X$ d'une fonction surharmonique $V_0 > 0$, finie et continue, choisie de telle sorte que, pour tout X et pour tout point x_0 , l'effilement de X en x_0 se traduise par $\hat{R}_{V_0}^X(x_0) < V_0(x_0)$. Enfin on posera (selon Brelot):

$b(X) =$ (ensemble des points de l'espace E en lesquels X n'est pas effilé).

Le développement de l'axiomatique Brelot montre que nos axiomes sont alors vérifiés, en prenant encore pour \mathcal{B} l'ensemble des boréliens.

Notion de μ -noyau d'un ensemble.

Soit $X \in \mathcal{B}$.

DÉFINITION 1. — *On appelle capacité réduite de X relative à μ la borne inférieure $f(X)$ des capacités des $Y \in \mathcal{B}$ tels que:*

$$Y \subset X \quad \text{et} \quad \mu(X \setminus Y) = 0.$$

⁽¹⁾ Nous n'avions d'abord considéré que le cas $F = \overline{\mathbf{R}}$; mais d'après M. Brelot, ce cas semble moins commode pour l'étude de son axiomatique.

DÉFINITION 2. — On appelle μ -noyau de X tout $Y \in \mathfrak{B}$ tel que :

$$Y \subset X; \quad \mu(X \dot{-} Y) = 0; \quad c(Y) = f(X).$$

On dit que Y est un μ -noyau absolu de X si pour tout ouvert ω de E , $(Y \cap \omega)$ est un μ -noyau de $(X \cap \omega)$.

LEMME 3. — a) Tout $X \in \mathfrak{B}$ contient un μ -noyau Y .

b) Si Y_n est un μ -noyau de X_n ($n = 1, 2, \dots$), $(\cup Y_n)$ est un μ -noyau de $(\cup X_n)$.

Démonstration. — a) D'après la définition de $f(X)$ et les propriétés de F , il existe une suite d'éléments Y_n de \mathfrak{B} tels que :

$$Y_n \subset X; \quad \mu(X \dot{-} Y_n) = 0; \quad \inf\{c(Y_n)\} = f(X).$$

Si l'on pose $Y = \cap Y_n$, on a bien :

$$Y \subset X; \quad \mu(X \dot{-} Y) = 0; \quad f(X) \leq c(Y) \leq f(X),$$

d'où $c(Y) = f(X)$.

b) Pour montrer que $\cup Y_i$ est un μ -noyau de $\cup X_i$, il suffit de montrer que toute partie Z de $\cup Y_i$ telle que $\mu((\cup Y_i) \dot{-} Z) = 0$ a même « capacité » que $\cup Y_i$.

Or si pour tout n , $c(Z \cap Y_n) = c(Y_n)$, l'axiome 2 montre que $c(Z \cap (\cup Y_n)) = c(\cup Y_n)$, c'est-à-dire $c(Z) = c(\cup Y_n)$.

Si donc on a $c(Z) < c(\cup Y_n)$, il existe un n_0 tel que :

$$c(Z \cap Y_{n_0}) < c(Y_{n_0}).$$

Comme Y_{n_0} est un μ -noyau, cette inégalité entraîne

$$\mu(Y_{n_0} \dot{-} Z) > 0,$$

donc *a priori* $\mu((\cup Y_n) \dot{-} Z) > 0$, contrairement à l'hypothèse; cette contradiction démontre l'énoncé *b*.

LEMME 4. — Tout $X \in \mathfrak{B}$ contient un μ -noyau absolu.

Démonstration. — Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts de E . On va définir par récurrence une suite décroissante (Y_n) de μ -noyaux de X tels que, pour tout $n \geq 1$, $Y_n \cap \omega_n$ soit un noyau de $X \cap \omega_n$, et on posera $Y = \cap Y_n$.

On pose pour cela :

$Y_0 =$ un μ -noyau quelconque de X .

Puis, Y_0, Y_1, \dots, Y_n étant définis, on pose :

$$Y_{n+1} = (Y_n \dot{-} \omega_{n+1}) \cup (\text{un } \mu\text{-noyau de } Y_n \cap \omega_{n+1}).$$

Pour tout n , on a $Y \subset Y_n$ et $\mu(X \dot{-} Y_n) = 0$; d'où résulte que $Y \cap \omega_n$ est, comme $Y_n \cap \omega_n$, un noyau de $X \cap \omega_n$.

Comme tout ouvert ω est une réunion de tels ω_n , le lemme 3b montre que $Y \cap \omega$ est un noyau de $X \cap \omega$, d'où l'énoncé cherché.

THÉORÈME 5. — *La famille des $b(X)$ obtenues à partir des $X \in \mathfrak{B}$ qui portent μ (i.e. $\mu(E \dot{-} X) = 0$) a un plus petit élément B (appelé μ -base de E).*

Pour tout μ -noyau absolu X de E , on a $b(X) = B$.

Démonstration. — Soit X un μ -noyau absolu de E , et soit $Y \in \mathfrak{B}$ tel que $\mu(E \dot{-} Y) = 0$.

Pour tout ouvert ω de E , on a :

$$c(X \cap \omega) = f(\omega) \leq c(Y \cap \omega)$$

d'où $Y \prec X$, d'où aussi d'après l'axiome 3 : $b(X) \subset b(Y)$.

COROLLAIRE 6. — *Tous les μ -noyaux absolus de E ont même dérivé fin.*

Cas particulier. — Dans ce qui suit, l'expression « X porte μ » signifiera « X contient un $Y \in \mathfrak{B}$ qui porte μ ».

DÉFINITION 7. — *On dira qu'une partie X de E est b -fermée si $b(X) \subset X$. On dira que X est b -parfait si $b(X) = X$.*

THÉORÈME 8. — *Si pour tout $X \in \mathfrak{B}$, $b(X)$ est b -fermé, et si μ est portée par la μ -base B de E , B est le plus petit ensemble b -fermé qui porte μ ; et B est b -parfait.*

Démonstration. — Soit X un μ -noyau absolu de E , et soit Y un ensemble b -fermé qui porte μ .

Il existe un $Y' \in \mathcal{B}$ tel que Y' porte μ et $Y' \subset Y$. On a donc :

$$X \prec Y' \subset Y, \quad \text{d'où} \quad b(X) \subset b(Y') \subset b(Y) \subset Y.$$

La μ -base $B = b(X)$ est donc bien contenue dans Y .

Enfin, puisque B porte μ , $b(B)$ porte aussi μ . Comme B est b -fermé, on a $b(B) \subset B$; et comme $b(B)$ est b -fermé, on a $B \subset b(B)$, d'où $B = b(B)$, autrement dit B est b -parfait.

Exemples. — Dans chacun des exemples envisagés plus haut, il est bien exact que tout ensemble $b(X)$ est b -fermé, donc le théorème 8 est applicable. Notons d'autre part que dans ces exemples, « b -fermé » est synonyme de « finement fermé »; le théorème 8 peut donc s'énoncer sous la forme initiale indiquée dans l'introduction. Notons enfin que dans le premier exemple, « b -parfait » équivaut à « finement fermé sans point finement isolé »; tandis que dans le second exemple cette équivalence n'est valable que lorsque tout point de E est polaire.

Dans ces deux exemples, toute mesure μ se décompose canoniquement en une mesure μ_B portée par la μ -base B de E , et une mesure $(\mu - \mu_B)$ portée par le complémentaire de B .

La μ_B -base de E est B lui-même, et B est aussi un μ_B -noyau absolu de μ_B .

La mesure $\mu - \mu_B$ est portée par un ensemble P ; par exemple, pour tout μ -noyau absolu X de E , $(X \setminus b(X))$ est polaire et porte $(\mu - \mu_B)$.

En particulier, si μ ne charge aucun ensemble polaire, on a $\mu = \mu_B$; mais il peut arriver, même dans le premier exemple, que μ charge un ensemble polaire, et que cependant $\mu = \mu_B$.

Manuscrit reçu en mars 1965.

Gustave CHOQUET,
16, avenue d'Alembert,
Antony (Seine).