ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL-ANDRÉ MEYER

Théorie ergodique et potentiels

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 89-96
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_89_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 89-96.

THÉORIE ERGODIQUE ET POTENTIELS

par Paul-André MEYER

Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré (E est un ensemble, $\mathscr{E}$ une tribu, et μ une mesure positive σ-finie), et soit T un opérateur positif sur l'espace $L^1(\mu)$, dont la norme est au plus égale à 1. Soient g et h deux éléments de L^1_+. Le célèbre théorème ergodique de Chacón et Ornstein affirme l'existence d'une limite finie pour le rapport :

$$D_n(g, h) = \frac{\sum\limits_0^n T^k g}{\sum\limits_0^n T^k h}$$

μ-presque partout sur l'ensemble où le dénominateur n'est pas nul pour tout n.

On démontre ce résultat, comme tous les théorèmes analogues, en deux étapes, dont la première est une certaine inégalité, dite « ergodique maximale ». On peut faire deux reproches à la démonstration de Chacón et Ornstein : la seconde étape (qui consiste à déduire le théorème de convergence du lemme maximal) est assez pénible ; d'autre part, la démonstration du lemme maximal est courte, mais absolument « incompréhensible ». Or il existe une autre inégalité maximale, due à A. Brunel [1], qui se prête mieux à la démonstration du théorème de convergence. Nous verrons aussi que le lemme de Brunel est lié à la théorie du potentiel, et que cela permet de mieux le comprendre.

Nous n'avons fait dans cet exposé que traduire la Note de Brunel dans le langage des « noyaux élémentaires » de Deny. Nous donnons dans l'exposé suivant une démonstration nouvelle d'un résultat de Chacón, qui permet d'évaluer exactement la limite de $D_n(g, h)$; le lemme maximal de Brunel se montre, là encore, plus commode que celui de Chacón et Ornstein.

[1] *C.R. Acad. Sciences*, t. 256, Juin 1963, p. 5481.

1. Noyaux, fonctions excessives, réduites.

Soit (E, $\mathscr{E}$) un espace mesurable, et soit $\mathscr{B}_+$ le cône convexe des fonctions mesurables positives sur E, finies ou non. Un *noyau* N sur E est une application de $\mathscr{B}_+$ dans $\mathscr{B}_+$ qui satisfait à :

$$\mathrm{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{N}f_n$$

pour toute suite (f_n) d'éléments de $\mathscr{B}_+$. On désigne par I le noyau identité ($\mathrm{I}f = f$ pour tout f). Le noyau N opère aussi sur les fonctions mesurables f telles que $\mathrm{N}(f^+)$ et $\mathrm{N}(f^-)$ soient finies, par la formule $\mathrm{N}f = \mathrm{N}(f^+) - \mathrm{N}(f^-)$.

Le noyau N est dit *sous-markovien* si l'on a $\mathrm{N}1 \leqslant 1$.

Soit μ une mesure positive sur (E, $\mathscr{E}$); l'application $f \to \mu(\mathrm{N}f)$ sur $\mathscr{B}_+$ est une mesure, que l'on désigne par $\mu\mathrm{N}$.

Une fonction positive f (une mesure positive μ) est dite *excessive* si l'on a $\mathrm{N}f \leqslant f$ (resp. $\mu\mathrm{N} \leqslant \mathrm{N}$). Nous parlerons surtout ici de fonctions excessives. Une fonction excessive f est dite *invariante* sur un ensemble A si l'on a $\mathrm{N}f = f$ en tout point de A.

Le noyau $\mathrm{G_N} = \mathrm{I} + \mathrm{N} + \mathrm{N}^2 + \cdots$ est appelé le *noyau potentiel* de N. Toute fonction de la forme $\mathrm{G_N}\, f (f \in \mathscr{B}_+)$ est excessive. Soit f une fonction excessive telle que $\mathrm{N}f$ soit finie. Posons $g = f - \mathrm{N}f$; on a $f = \mathrm{G_N} g + h$, où h est invariante sur E tout entier.

Soit f une fonction excessive, et soit A un ensemble mesurable. On montre (voir par exemple Deny ([2])) que l'ensemble des fonctions excessives qui majorent f en tout point de A possède un plus petit élément $\mathrm{H_A}f$, et que $\mathrm{H_A}f$ est égale à f sur A, invariante sur $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. La démonstration de Deny présente l'intérêt de montrer que $\mathrm{H_A}f$ est le résultat de l'application à f d'un certain noyau positif $\mathrm{H_A}$: on a donc $\mathrm{H_A}(f + g) = \mathrm{H_A}f + \mathrm{H_A}g$. Nous n'aurons pas besoin ici de cette propriété, et nous indiquerons une autre démonstration de l'existence de $\mathrm{H_A}f$.

Partons d'une fonction positive mesurable *quelconque* g, et définissons par récurrence les fonctions :

$$g_0 = g$$

$$g_1 = g \vee \mathrm{N}g$$

$$\cdots\cdots$$

$$g_n = g \vee \mathrm{N}g_{n-1}$$

([2]) Les noyaux élémentaires, Séminaire Brelot–Choquet–Deny, 4ème année (1959–60).

On a $g_0 \leqslant g_1$, et on en déduit immédiatement par récurrence que les g_n vont en croissant. Soit $g' = \lim_{n \to \infty} g_n$. On a évidemment $g' = g \vee Ng'$. Il en résulte que g' est excessive. Soit h une fonction excessive qui majore g: on vérifie immédiatement que l'on a $g_n \leqslant h$ pour tout n, donc $g' \leqslant h$; g' est donc la plus petite majorante excessive de g. Enfin, la relation $g' = g \vee Ng'$ montre que g' est invariante sur l'ensemble $\{g \leqslant Ng'\}$, et en particulier sur l'ensemble $\{g = 0\}$.

Soit alors f une fonction excessive; la fonction $H_A f$ s'obtient en appliquant ce procédé à $g = f \,.\, I_A$.

La fonction $H_A f$ est appelée d'habitude la *réduite de f sur* A. Lorsque le noyau N est sous-markovien, la fonction 1 est excessive, et sa réduite $H_A 1$ est le *potentiel d'équilibre* e_A de A.

2. Pseudo-noyaux; exemples.

Au lieu de considérer un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$, considérons un espace mesuré $(E, \mathscr{E}, \lambda)$, où λ désigne une mesure positive σ-finie (cette mesure n'interviendra en réalité que par sa classe d'ensembles négligeables; on pourrait donc supposer qu'elle est bornée). Nous désignerons par $\dot{f}$ la classe d'une fonction mesurable f, par $\dot{\mathscr{B}}_+$ le cône convexe des classes d'équivalence de fonctions positives mesurables (finies ou non). Un *pseudo-noyau* sur E est une application N de $\dot{\mathscr{B}}_+$ dans $\dot{\mathscr{B}}_+$ qui satisfait à:

$$N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dot{f}_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} N(\dot{f}_n)$$

pour toute suite $(\dot{f}_n)$ d'éléments de $\dot{\mathscr{B}}_+$. Nous commettrons l'abus de langage ordinaire, qui consiste à considérer N comme opérant sur $\mathscr{B}_+$, $N f$ étant n'importe quel élément de la classe d'équivalence de $N\dot{f}$. Ici encore, Nf sera défini pour toute fonction f telle que $N(f^+)$ et $N(f^-)$ soient presque partout finies. On remarquera en revanche que la mesure μN ne peut être définie que pour une mesure μ absolument continue par rapport à λ.

Il existe divers moyens de ramener les pseudo-noyaux aux noyaux. Nous ne chercherons pas ici à les utiliser. Il est clair en effet que la théorie des réduites que nous avons indiquée pour les noyaux s'étend immédiatement aux pseudo-noyaux.

Voici quelques exemples de pseudo-noyaux:

1) Supposons que T soit un opérateur positif, de norme $\leqslant 1$, sur un espace $L^1(E, \mathscr{E}, \mu)$, où μ est positive et σ-finie. Soit (i_n) une suite croissante d'éléments de L^1_+, telle que $\sup i_n = +\infty$; il est facile de vérifier que l'on obtient un pseudo-noyau qui prolonge T en posant, pour toute fonction mesurable positive f:

$$Tf = \sup_n T(f \wedge i_n)$$

La mesure μ est excessive par rapport à ce pseudo-noyau. Soit S l'opérateur transposé de T, sur L^∞. On vérifie aussi sans peine que S se prolonge en un pseudo-noyau sur E, qui est *sous-markovien.*

2) Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et soit $(\mathscr{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$. Prenons pour espace E l'ensemble $\mathbf{N} \times \Omega$: une fonction f sur E s'identifie à une suite $(f_0, f_1 \ldots, f_n, \ldots)$ de fonctions sur Ω. Nous dirons que f est $\mathscr{E}$-mesurable si f_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable pour tout n — $\mathscr{E}$ est donc la tribu constituée par les ensembles $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tels que $A_n \in \mathscr{F}_n$ pour tout n. Soit $f = (f_n)$ une fonction mesurable positive; nous poserons $\mu(f) = \sum_n \int f_n \, d\mathbf{P}$, et nous définirons un pseudo-noyau sur E en posant, si $f = (f_0, f_1 \ldots)$:

$$Sf = (\mathbf{E}[f_1 | \mathscr{F}_0], \mathbf{E}[f_2 | \mathscr{F}_1], \ldots),$$

où $\mathbf{E}[\ |\ ]$ représente un opérateur d'espérance conditionnelle. Ce pseudo-noyau est sous-markovien, et la mesure μ est σ-finie, et excessive par rapport à S. Les fonctions excessives par rapport au noyau S sont les surmartingales positives par rapport à la famille $(\mathscr{F}_n)$. Dans ce cas, la construction de la réduite que nous avons indiquée au n° 1 est due à Snell.

3. Le lemme ergodique maximal.

Soit T un pseudo-noyau sur un espace $(E, \mathscr{E}, \mu)$, où μ est positive et σ-finie. Nous supposerons que μ est T-excessive: autrement dit, que T définit un opérateur de norme $\leqslant 1$ dans L^1, et nous désignerons par S le pseudo-noyau transposé, qui vérifie la relation:

$$\int Tf \,.\, g \, d\mu = \int f \,.\, Sg \, d\mu$$

lorsque f appartient à L^1 et g à L^∞, et par conséquent aussi lorsque

f et g sont positives et mesurables. Nous poserons

$$T_{i,n}f = \sum_{k=i}^{k=n} T^k f.$$

Nous allons démontrer le lemme suivant dû à A. Brunel:

LEMME 1. — *Soit f un élément de $L^1(\mu)$, et soit A un ensemble mesurable contenu dans l'ensemble:*

$$E_f = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \left\{ x : \sup_{n \geqslant k} T_{k,n} f(x) > 0 \right\}.$$

Soit e_A le potentiel d'équilibre de A par rapport à S; on a alors:

$$\int f \,.\, e_A \, d\mu \geqslant 0.$$

Ce lemme est élémentaire dans le cas où le pseudo-noyau T possède un pseudo-noyau potentiel G_T borné dans L^1. Le pseudo-noyau S possède en effet un potentiel G_S borné dans L^∞, de sorte que $e_A = G_S g$, où $g = e_A - Se_A$ est nulle hors de A, et positive. On a donc:

$$\int f \,.\, e_A \, d\mu = \int f \,.\, G_S g \, d\mu = \int G_T f \,.\, g \, d\mu = \int_A G_T f \,.\, g \, d\mu$$

Il nous suffit donc de montrer que $G_T f$ est positive sur A. Or, pour tout $x \in A$, la somme $G_T f(x) = \sum_0^\infty T^k f(x) = \lim_{n \to \infty} T_{0,n} f(x)$ se présente par paquets dont la somme est positive. Elle est donc positive, et le lemme est établi.

On pourrait chercher à établir le lemme de Brunel en modifiant un peu le noyau T, de manière à lui donner un potentiel borné, et en passant ensuite à la limite. Ce procédé, malheureusement, affecte trop gravement les sommes $T_{0,n} f$: je ne crois pas qu'il soit utilisable.

Démonstration. — *a*) Définissons les fonctions suivantes, par récurrence:

$$K_1(x) = \inf\{ n \in \mathbf{N} : T_{0,n} f(x) \geqslant 0 \}$$

(ou éventuellement $+\infty$ s'il n'existe pas de tel n)

$$K_{p+1}(x) = \inf\{ n \in \mathbf{N} : T_{K_p(x)+1,n} f(x) \geqslant 0 \}.$$

La relation $x \in A$ entraîne que tous les $K_p(x)$ sont finis. On a d'autre part $T_{i,K_1(x)} f(x) \geqslant 0$ pour tout $i \leqslant K_1(x)$, si $K_1(x)$ est fini, car sinon on aurait $T_{0,i-1} f(x) \geqslant 0$, et $K_1(x)$ ne serait pas *le plus petit* entier n tel que $T_{0,n} f(x) \geqslant 0$. De même, $K_p(x) < \infty$ entraîne $T_{i,K_p(x)} f(x) \geqslant 0$ pour tout $i \leqslant K_p(x)$.

b) Considérons l'ensemble $F = \mathbf{N} \times E$, muni de la tribu évidente. Une fonction mesurable g positive sur F s'identifie à une suite $(g_0, g_1 \ldots g_n \ldots)$. Sur cet espace, prenons la mesure positive λ définie par $\lambda(g) = \sum_n \lambda(g_n)$, et le pseudo-noyau sous-markovien S′ défini par:

$$S'(g_0, g_1, \ldots, g_n \ldots) = (Sg_1, Sg_2, \ldots, Sg_{n+1} \ldots).$$

Considérons un ensemble $B \subset F$ de la forme $(B_0, B_1 \ldots B_n, \emptyset, \emptyset \ldots)$, où $B_0 \supset B_1 \ldots \supset B_n$: cet ensemble a un potentiel fini, et son potentiel d'équilibre $e'_B = (b_0, b_1, \ldots b_n \ldots)$ est donc le potentiel de $e'_B - S'e'_B = (h_0, h_1, \ldots h_n \ldots)$. La fonction $(b_0 \vee Sb_0, b_0, b_1 \ldots)$ est S′-excessive et majore 1 sur B: elle majore donc e'_B, et l'on a

$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \ldots \qquad \text{et} \qquad Sb_0 \geqslant Sb_1 \ldots .$$

Sur l'ensemble $B_k \setminus B_{k+1}$, on a $h_{k+1} = h_{k+2} = \cdots = 0$, car e'_B est invariante hors de B; on a aussi

$$h_0 = 1 - Sb_1 \leqslant h_1 = 1 - Sb_2 \ldots \leqslant h_k = 1 - Sb_{k+1}.$$

L'entier n restant fixé, prenons pour B_i ($i \leqslant n$) l'ensemble

$$A \cap \{i \leqslant K_p \leqslant n\},$$

de sorte que $B_k \setminus B_{k+1} = A \cap \{K_p = k\}$. Nous avons:

$$\int f.\, b_0\, d\mu = \int f(h_0 + Sh_1 + \cdots + S^n h_n)\, d\mu$$
$$= \int (fh_0 + Tf.\, h_1 + \cdots T^n f.\, h_n)\, d\mu$$

Or la dernière fonction sous le signe somme est positive, car elle est égale sur $B_k \setminus B_{k+1}$ à

$$fh_0 + Tf.\, h_1 + \cdots T^k f.\, h_k$$
$$= h_0 T_{0,k} f + (h_1 - h_0) T_{1,k} f + \cdots + (h_k - h_{k-1}) T_{k,k} f,$$

et tous les termes de cette somme sont positifs.

Faisons ensuite tendre n vers l'infini: l'ensemble $(B_0, \ldots B_n, \emptyset, \emptyset \ldots)$ tend en croissant vers l'ensemble:

$$B' = (A \cap \{K_p \geqslant 0\}, A \cap \{K_p \geqslant 1\}, A \cap \{K_p \geqslant n\} \cdots)$$

puis faisons tendre p vers l'infini: $K_p \to +\infty$ sur A, et l'ensemble

B′ tend vers (A, A, A, ...) dont le potentiel d'équilibre par rapport à S′ est tout simplement $(e_A, e_A, \ldots)$. Désignons en effet par $(u_0, u_1 \ldots)$ ce potentiel d'équilibre. Les deux fonctions excessives

$$(u_0 \vee Su_0, u_0, u_1 \ldots) \qquad \text{et} \qquad (u_1, u_2, \ldots)$$

majorent 1 sur (A, A, ...), donc aussi $(u_0, u_1 \ldots)$. On en déduit immédiatement que $u_0 = u_1 = u_2 \ldots$, et donc $u_i = e_A$ pour tout i.

Les potentiels d'équilibre se comportant bien dans les passages à la limite le long de suites croissantes, la relation $\int f.\, b_0\, d\mu \geqslant 0$ nous donne à la limite $\int f.\, e_A\, d\mu \geqslant 0$, et le lemme est établi.

4. Démonstration du théorème ergodique, d'après Brunel.

On prend deux éléments g et h de L^1_+, et on pose

$$D_n = \frac{T_{0,n}g}{T_{0,n}h} I_{\{T_{0,n}h > 0\}}$$

a) On montre d'abord que $\limsup D_n < +\infty$. Il suffit de le montrer sur $\{h > 0\}$ — on en déduira le résultat sur l'ensemble $\{\sup_n T_{0,n}h > 0\}$ en appliquant successivement le résultat précédent à $h, Th, T^2h \ldots$.

Soit donc $A = \{h > 0, \limsup D_n = +\infty\}$: on remarque que $A \subset E_{g-ch}$ pour toute constante positive c. Donc :

$$\int (g - ch) e_A\, d\mu \geqslant 0$$

c étant arbitraire, $\int h.\, e_A\, d\mu = 0$; comme $h > 0$ sur A, $e_A = 0$ et A est négligeable.

b) Le rapport converge évidemment sur l'ensemble où $T_{0,n}g$ a une limite finie lorsque $n \to \infty$. On a $\lim_{n\to\infty} T_{0,n}h = +\infty$, d'après *a*), sur l'ensemble $\{h > 0, \lim_{n\to\infty} T_{0,n}g = +\infty\}$. Soient a et b deux nombres rationnels tels que $0 < a < b < \infty$; montrons que l'ensemble :

$$A = \{h > 0\} \cap \left\{\lim_{n\to\infty} T_{0,n}g = +\infty\right\} \cap \{\liminf D_n < a, \limsup D_n > b\}$$

est négligeable. Il est clair que l'on a $A \subset E_{g-bh} \cap E_{ah-g}$; donc

$$\int (g - bh) e_A\, d\mu \geqslant 0, \qquad \int (ah - g) e_A\, d\mu \geqslant 0$$

d'où en ajoutant $\int (a - b)he_{\mathrm{A}}\, d\mu \geqslant 0$, d'où $e_{\mathrm{A}} = 0$, car $(a - b)h < 0$ sur A. D_n converge donc presque partout vers une limite finie sur $\{h > 0\}$. En appliquant ce résultat à $h, \mathrm{T}h, \mathrm{T}^2 h \ldots$ on obtient la convergence sur $\{\sup_n \mathrm{T}_{0,n} h > 0\}$, et le théorème est établi.

Paul-André MEYER,
Département de Mathématiques,
Palais de l'Université,
Strasbourg (Bas Rhin).