ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES NEVEU

Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 1 (1965), p. 31-42
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_31_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 31-42.

RELATIONS ENTRE LA THÉORIE DES MARTINGALES ET LA THÉORIE ERGODIQUE

par **Jacques NEVEU**

Sommaire.

Cet exposé est un essai d'unification des théorèmes de convergence ponctuelle de la théorie des martingales (vectorielles) et de la théorie ergodique. Après avoir montré que les démonstrations de ces théorèmes pouvaient être faites en suivant un plan commun et avoir apporté quelques simplifications et variantes à ces démonstrations, nous montrons comment un théorème de Ionescu Tulcea généralisant le théorème des martingales décroissantes peut être considéré comme un « cas particulier limite » d'un théorème ergodique.

Notations.

Dans toute la suite, (Ω, α, P) désignera un espace de probabilité et F un espace de Banach dont la norme sera notée $|\,.\,|$ (si $F = R$, cette norme sera la « valeur absolue »). Pour tout p réel de l'intervalle $[1, \infty[$, on désignera par L^p_F (ou par L^p, si $F = R$) l'espace vectoriel des classes de P-équivalence f d'applications fortement mesurables de Ω dans F telles que $|f(\,.\,)|^p$ soient intégrables. Muni de la norme $\|f\|_p = (\int|f|^p\,dP)^{1/p}$ cet espace vectoriel est un espace de Banach et on sait que cet espace est réflexif dès que F est réflexif dès que $p \in]1, \infty[$. On désignera par L^∞_F (ou par L^∞ si $F = R$) l'espace de Banach des classes de P-équivalence f d'applications fortement mesurables et essentiellement bornées de Ω dans F, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess.sup}_{\Omega} |f(\,.\,)|.$$

On appelera contraction de l'espace L^1_F un endomorphisme de norme $\leqslant 1$ de cet espace; en particulier pour toute sous-σ-algèbre α_0 de α, l'espérance conditionnelle E^{α_0} est une contraction de L^1_F.

1. Théorème des martingales vectorielles.

Nous commencerons par énoncer le théorème des martingales et à en établir une démonstration succincte. Cette démonstration est quelque peu plus simple que celle que l'on trouve dans la littérature [11], [7]; on verra de plus dans les paragraphes ultérieurs que la méthode de démonstration que nous suivons peut aussi servir en théorie ergodique.

THÉORÈME 1. — (DES MARTINGALES VECTORIELLES). *Quelle que soit la suite croissante ou décroissante* $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ *de sous-*σ*-algèbres de* α *et quel que soit* $f \in L_F^1$, *la convergence suivante a lieu au sens de la convergence presque sûre*

$$\lim_{n\to\infty} E^{\alpha_n} f = E^{\alpha_\infty} f$$

à condition de désigner par α_∞ *la* σ*-algèbre limite des* α_n *(c'est-à-dire* $\bigcap_n \alpha_n$ *si la suite* $\{\alpha_n\}$ *est décroissante ou la* σ*-algèbre engendrée par l'algèbre* $\bigcup_n \alpha_n$ *si* $\{\alpha_n\}$ *est croissante). La convergence précédente a lieu également dans* L_F^1 *et plus généralement dans* L_F^p *si* $f \in L_F^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Démonstration. — 1) La première partie de la démonstration consiste à remarquer que le résultat du théorème est évident pour un sous-espace vectoriel dense de L_F^1 de f.

Supposons d'abord la suite $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ croissante. Tout $f \in L_F^1$ qui pour un entier $m \geqslant 0$ est α_m-mesurable vérifie alors $E^{\alpha_n} f = f$ lorsque $m \leqslant n \leqslant \infty$; tout $f \in L_F^1$ tel que $E^{\alpha_\infty} f = 0$ vérifie $E^{\alpha_n} f = 0$ pour tout n. Ainsi le résultat du théorème est évident pour tout $f \in L_F^1$ de l'un des 2 types précédents et par conséquent encore pour tout élément du vectoriel L qu'engendrent ces f. D'autre part, d'après la théorie de l'intégration, tout f α_∞-mesurable dans L_F^1 est limite de $f_m \in L_F^1$ qui sont α_m-mesurables (m variable $< \infty$). On a donc, pour tout $f \in L_F^1$, $E^{\alpha_\infty} f \in \bar{L}$; comme on a aussi $f - E^{\alpha_\infty} f \in L$ puisque $E^{\alpha_\infty}(f - E^{\alpha_\infty} f) = 0$, E^{α_∞} étant une projection, on a démontré que L_F^1 est la fermeture de L.

Supposons ensuite que la suite $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Tout $f \in L_F^1$ qui pour un entier $m \geqslant 0$ vérifie $E^{\alpha_m} f = 0$, vérifie alors $E^{\alpha_n} f = 0$ pour tout n tel que $m \leqslant n \leqslant \infty$; tout $f \in L_F^1$ qui est α_∞-mesurable vérifie $E^{\alpha_n} f = f$ pour tout $n \leqslant \infty$. Le résultat du théorème est donc évident pour tout $f \in L_F^1$ de l'un de ces 2 types et donc pour tout élément du vectoriel L que ces f engendrent. Pour montrer ensuite que L est dense dans L^1_F on se ramène d'abord facilement au cas $F = R$ en passant par les fonctions étagées; dans le cas où $F = R$, il revient au même en vertu du théorème de Hahn–Banach, de démontrer que tout $g \in L^\infty$ orthogonal à L est nul. Or un tel g est nécessairement α_n-mesurable pour tout $n < \infty$ et donc α_∞-mesurable; en effet, $f - E^{\alpha_n}f$ étant dans L pour tout $f \in L^1$, on a

$$\int f(g - E^{\alpha_n}g)\, dP = \int (f - E^{\alpha_n}f)g\, dP = 0 \qquad (f \in L^1)$$

et par suite $g = E^{\alpha_n}g$. Mais g étant orthogonal à tout f α_∞-mesurable de L^1 et étant elle-même α_∞-mesurable, on a nécessairement $g = 0$.

2) Comme la suite $\{E^{\alpha_n}\}_{n \geqslant 0}$ d'endomorphismes de L^1_F est bornée, l'ensemble des f pour lesquels la suite $\{E^{\alpha_n}f\}_{n \geqslant 0}$ converge vers $E^{\alpha_\infty}f$ dans L^1_F est fermé; d'après l'alinéa précédent, cette convergence a donc lieu pour tout $f \in L^1_F$. Semblablement comme les E^{α_n} sont des endomorphismes de L^p_F de normes 1 et comme on voit facilement que $L \cap L^p_F$ est dense dans L^p_F si $1 \leqslant p < \infty$, la convergence précédente a lieu également dans L^p_F si $f \in L^p_F$ et si $1 \leqslant p < \infty$.

Pour montrer de même que l'ensemble des $f \in L^1_F$ pour lesquels la suite $\{E^{\alpha_n}f\}_{n \geqslant 0}$ converge vers $E^{\alpha_\infty}f$ au sens presque sûr, est fermé dans L^1_F et achever ainsi la démonstration du théorème, on associera à tout $f \in L^1_F$ une suite $\{f_j\}_{j \geqslant 1}$ dans L telle que $\|f_j - f\|_1 < 2^{-j}$ et on appliquera le lemme suivant de convergence uniforme à la suite $\{g_j = f_j - f\}$.

LEMME. — *Si $\{\alpha_n\}_{n \geqslant 0}$ est une suite monotone de sous σ-algèbres de α et si $\{g_j\}_{j \geqslant 1}$ est une suite dans L^1_F telle que $\sum \|g_j\|_1 < \infty$, on a, lorsque $j \to \infty$:*

$$\sup_n |E^{\alpha_n}g_j| \to 0 \text{ p.s.}$$

Ce lemme découle, comme on va le montrer, du lemme maximal suivant:

LEMME MAXIMAL. — *Si $\{\alpha_n\}_{n \geqslant 0}$ est une suite monotone de sous σ-algèbres de α,*

1°) *on a, pour tout $f \in L^1$, l'inégalité:*

$$\int_{\Omega_f} f\, dP \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad \Omega_f = \bigcup_n \{E^{\alpha_n}f > 0\},$$

2°) *on a, pour tout $f \in L^1_F$ et tout réel $a > 0$, l'inégalité:*

$$\int_{\Omega_{f,a}} (|f| - a)\, dP \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad \Omega_{f,a} = \bigcup_n \{|E^{\alpha_n}f| > a\}.$$

En effet, la deuxième partie de ce lemme maximal montre que l'on a, pour tout $a > 0$ et tout indice j:

$$P[\sup_n |E^{\alpha_n} g_j| > a] \leqslant \frac{1}{a} \|g_j\|_1 .$$

L'hypothèse de convergence de la série des $\|g_j\|_1$ et le lemme de Borel–Cantelli entrainent alors que

$$\limsup_{j \to \infty} \{\sup_n |E^{\alpha_n} g_j| > a\} = \emptyset \text{ p.s.} \qquad (a > 0)$$

et donc que $\sup_n |E^{\alpha_n} g_j| \to 0$ p.s. lorsque $j \to \infty$.

Enfin pour démontrer le lemme maximal, on se ramène d'abord au cas d'une suite finie de σ-algèbres $\{\alpha_n\}_{0 \leqslant n \leqslant N}$ et puis au cas d'une suite finie croissante en passant dans le cas décroissant à la suite $\{\alpha_{N-n}\}$. Il reste alors, suivant un raisonnement classique, à remarquer que la suite $\{f_n, \alpha_n\}_{0 \leqslant n \leqslant N}$ définie par $f_n = E^{\alpha_n} f$ ou par $f_n = E^{\alpha_n}|f| - a$ suivant le cas du lemme considéré, vérifie l'inégalité de définition des sous-martingales, soit $f_n \leqslant E^{\alpha_n} f_{n'}$ si $n \leqslant n'$, pour qu'il s'en suive que:

$$\int_{\left\{\sup_{n \leqslant N} f_n > 0\right\}} f_N \, dP = \sum_{n \leqslant N} \int_{\left\{\substack{f_n > 0 \\ f_m \leqslant 0 \text{ si } m < n}\right\}} f_N \, dP$$

$$\geqslant \sum_{n \leqslant N} \int_{\left\{\substack{f_n > 0 \\ f_m \leqslant 0 \text{ si } m < n}\right\}} f_n \, dP \geqslant 0$$

et donc dans le 1er cas, que: $\int_{\Omega_f} f \, dP = \int_{\Omega_f} f_N \, dP \geqslant 0$ et dans le 2e cas que: $\int_{\Omega_{f,a}} (|f| - a) \, dP \geqslant \int_{\Omega_{f,a}} f_N \geqslant 0$.

2. Théorèmes ergodiques.

Parmi les résultats de convergence presque sûre obtenus en théorie ergodique, les deux théorèmes suivants sont sans doute les plus importants; ils représentent l'aboutissement actuel d'une longue suite de généralisations du théorème de Birkhoff démontré en 1932.

THÉORÈME 2. — *Si* T *désigne une contraction positive de l'espace* L^1, *la limite:* $\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m \leqslant n} T^m f \Big/ \sum_{m \leqslant n} T^m g \right)$ *existe au sens de la convergence presque sûre, quels que soient* f, $g \in L^1$ *pourvu que* g *soit strictement positive sur* Ω.

Ce théorème a été démontré pour la première fois par Chacon et Ornstein [3] après que E. Hopf l'ait démontré dans le cas particulier où T possède un élément invariant strictement positif [6]; le théorème suivant est une autre généralisation de ce résultat de E. Hopf due à Dunford et Schwarz [4] et à Chacon [2].

THÉORÈME 3. — *Soit* T *une contraction de* L^1_F *telle que l'on ait:*

$$\operatorname{ess.sup}_{\Omega}(|Tf|/g) \leqslant \operatorname{ess.sup}_{\Omega}(|f|/g)$$

pour tout $f \in L^1_F$ *et pour une application mesurable* g *de* (Ω, α, P) *dans la demi-droite positive* $]0, \infty[$. *Si* $f \in L^1_F$, *la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m \leqslant n} T^m f \right)$$

existe alors au sens p.s. dès qu'elle existe dans L^1_F ; *elle existe donc pour tout* $f \in L^1_F$, *lorsque* F *est réflexif.*

Démonstration des théorèmes 2 *et* 3. — 1) Nous allons démontrer ces théorèmes en suivant le même plan de démonstration que dans le cas du théorème des martingales et en commençant donc par remarquer que le théorème est exact pour certains $f \in L^1$.

Considérons d'abord le théorème 2 et fixons g. On peut alors montrer que le théorème est exact pour toute balayée $f = g_A$ de g sur un ensemble arbitraire $A \in \alpha$. Le théorème est ainsi démontré pour tout f du sous-vectoriel L_g de L^1 engendré par ces balayées et il est facile de montrer alors, en appliquant le théorème de Hahn-Banach, que L_g est dense dans L^1. Pour les détails de cette démonstration, nous renvoyons le lecteur à [8] ou [9]. Alternativement on peut d'ailleurs encore procéder de la manière suivante: on se ramène d'abord à ne considérer que des opérateurs T conservatifs et on remarque alors que le théorème est exact a) pour tout f dans l'image de L^1 par $T - I$ (lemme 3 de [3]) *b*) pour tout $f \in L^1$ tel que f/g soit mesurable par rapport à la σ-algèbre des ensembles invariants par T, donc tel que $T^n f = (f/g)T^n g$ (*cf.* [6]); on montre ici encore que le sous-vectoriel de L^1 engendré par ces f est dense dans L^1_F en appliquant le théorème de Hahn-Banach. (On notera néanmoins que chacune des 2 démonstrations précédentes de l'exactitude du théorème sur un sous-vectoriel dense de L^1 utilise déjà le lemme maximal ci-dessous).

Le théorème 3 d'autre part est évident pour tout $f \in L^1_F$ invariant par T. Il est exact aussi pour tout $f \in L^1_F$ de la forme $f = (T - I)f'$ où $f' \in L^1_F$ est tel que $\operatorname{ess.sup}_{\Omega}(|f'|/g) \leqslant C < \infty$; l'hypothèse faite sur T implique en effet que l'on a pour un tel f :

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{m \leqslant n} T^m f\right| = \frac{1}{n+1}\left|T^{n+1}f' - f'\right| \leqslant \frac{2C}{n+1} g \to 0$$

lorsque $n \nearrow \infty$. Le théorème est ainsi démontré sur le sous-vectoriel L de L^1_F engendré par les f de l'un des 2 types précédents ; or on sait que la fermeture de L coïncide avec l'ensemble des f pour lesquels la suite $\frac{1}{n+1}\sum_{m \leqslant n} T^m f$ converge dans L^1_F. En effet cette convergence dans L^1_F est évidente d'après ce qui précède, pour tout $f \in L$ et donc aussi pour tout $f \in \bar{L}$ puisque la suite d'opérateurs

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m \leqslant n} T^m\right\}$$

est bornée ; inversement si $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{m \leqslant n} T^m f\right) = g$ existe dans L^1_F, g est invariant par T et appartient donc à L tandis que

$$f - g = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m \leqslant n}(f - fT^m)$$

appartient à $\bar{L}$ en tant que limite d'éléments dans l'image de $I - T$.

Pour démontrer que $\bar{L} = L^1_F$ lorsque F est réflexif, on considère l'opérateur T′ défini sur les espaces $L^p_F(g\,.\,P)$ par $T'(f) = \frac{1}{g}T(f\,.\,g)$ et dont les normes en tant qu'opérateurs sur $L^1_F(g\,.\,P)$ et sur $L^\infty_F(g\,.\,P)$ sont inférieures à 1 ; la norme de cet opérateur sur $L^2_F(g\,.\,P)$ est donc encore inférieure à 1 et comme cet espace est réflexif si F l'est, un théorème classique montre que la suite $\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m \leqslant n} T'^m f\right\}$ converge dans $L^2_F(g\,.\,P)$ pour tout f de cet espace. Cela entraîne que cette convergence a lieu aussi dans $L^1_F(g\,.\,P)$ pour tout $f \in L^1_F(g\,.\,P)$ et par suite, en repassant à l'opérateur T, que $\bar{L} = L^1_F$.

2) Pour démontrer que l'ensemble des f pour lesquels les théorèmes 2 et 3 sont respectivement exacts sont des ensembles fermés et achever ainsi la démonstration de ces théorèmes, on pourra utiliser

le lemme suivant qui se déduit de lemmes maximaux de la même manière que dans le cas du théorème des martingales.

LEMME. — *Pour toute suite* $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ *dans* L^1 *ou* L^1_F *telle que* $\sum_j \|g_j\|_1 < \infty$, *on a, sous les hypothèses respectives des théorèmes* 2 *et* 3*:*

$$\sup_n \left| \frac{\sum_{m\leqslant n} T^m g_j}{\sum_{m\leqslant n} T^m g} \right| \to 0, \qquad \sup_n \frac{1}{n+1} \left| \sum_{m\leqslant n} T^m g_j \right| \to 0$$

au sens p.s. lorsque $j \to \infty$.

LEMME MAXIMAL 2. — *Pour toute contraction positive* T *de* L^1 *et tout* $f \in L^1$, *on a*

$$\int_{\Omega_f} f\, dP \geqslant 0 \qquad si \qquad \Omega_f = \bigcup_n \left\{ \sum_{m\leqslant n} T^m f > 0 \right\}.$$

LEMME MAXIMAL 3. — *Pour toute contraction* T *de* L^1_F *vérifiant l'hypothèse du théorème* 3, *pour tout* $f \in L^1_F$ *et tout réel* $a > 0$, *on a*

$$\int_{\Omega_{f,a}} (|f| - ag)\, dP \geqslant 0 \qquad si \qquad \Omega_{f,a} = \bigcup_n \left\{ \frac{1}{n+1} \left| \sum_{m\leqslant n} T^m f \right| > ag \right\}.$$

La démonstration suivante des lemmes maximaux est une variante de celle que l'on peut trouver dans [6] et [2]. Elle repose sur la construction par récurrence suivante.

Etant donné un élément h_0 de L^1 et une application mesurable e_0 de (Ω, α, P) dans la boule unité de E, posons, par récurrence sur n:

$$h_{n+1} = |T(h_n^+ e_n)| - h_n^-, \qquad e_{n+1} = \frac{T(h_n^+ e_n)}{|T(h_n^+ e_n)|}.$$

Il est clair que $h_n \in L^1 (n \geqslant 0)$ et que les e_n sont encore des applications mesurables de (Ω, α, P) dans la boule unité de E, pourvu que l'on convienne de poser $e_{n+1} = 0$ lorsque $T(h_n^+ e_n) = 0$.

Montrons alors que l'on a:

(1) $$\int_H h_0 \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad H = \bigcup_{n\geqslant 0} (h_n > 0).$$

A cet effet remarquons d'abord que la suite $(h_n^-)_{n\geqslant 0}$ décroît dans L^1 et que la suite d'intégrales $(\int h_n\, dP)_{n\geqslant 0}$ est décroissante puisque:

$$\begin{aligned}\int h_{n+1}\, dP &= \int |T(h_n^+ e_n)|\, dP - \int h_n^-\, dP \\ &\leqslant \int |h_n^+ e_n|\, dP - \int h_n^-\, dP \\ &= \int h_n\, dP.\end{aligned}$$

Il s'en suit alors que l'on a pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned}\int h_0^+ \, dP &\geqslant \int h_0^- \, dP + \int h_n \, dP \\ &\geqslant \int (h_0^- - h_n^-) \, dP \\ &\geqslant \int_{\{h_n^- = 0\}} h_0^- \, dP\end{aligned}$$

puisque $h_0^- - h_n^-$ est non-négative partout. Les inclusions

$$(h_0^+ > 0) \subset \bigcup_0^n (h_m > 0) \subset (h_n^- = 0),$$

dont la deuxième résulte de la décroissance de la suite (h_n^-), entrainent alors que:

$$\int_{\bigcup_0^n (h_m > 0)} (h_0^+ - h_0^-) \, dP \geqslant 0,$$

et on obtient le résultat annoncé en faisant tendre $n \nearrow \infty$.

Il est facile d'autre part d'établir par récurrence sur n que l'on a:

$$T^m(h_0^+ e_0) = h_m^+ e_m + \sum_1^m T^{l-1}[(h_{l-1}^- - h_l^-)e_l]$$

en tenant compte de ce que

$$T(h_m^+ e_m) = h_{m+1}^+ e_{m+1} + (h_m^- - h_{m+1}^-)e_{m+1}.$$

On en déduit, par sommation que:

$$(2) \qquad \sum_0^n T^m(h_0^+ e_0) = \sum_0^n h_m^+ e_m + \sum_0^n T^k \left[\sum_1^{n-k} (h_{l-1}^- - h_l^-)e_l \right].$$

Etant donné $f \in L_F^1$ et a réel > 0, posons maintenant

$$h_0 = |f| - ag \qquad \text{et} \qquad e_0 = \frac{f}{|f|}$$

de telle sorte que $h_0^- \leqslant ag$ et que $f = h_0^+ e_0 + (ag - h_0^-)e_0$. La relation (2) implique alors:

$$(2') \qquad \sum_0^n T^m f = \sum_0^n h_m^+ e_m + \sum_0^n T^k[(ag - h_0^-)e_0 + \sum_1^{n-k} (h_{l-1}^- - h_l^-)e_l]$$

Or, comme

$$\left|(ag - h_0^-)e_0 + \sum_1^{n-k} (h_{l-1}^- - h_l^-)e_l\right| \leqslant (ag - h_0^-) + \sum_1^{n-k} (h_{l-1}^- - h_l^-)$$
$$\leqslant ag.$$

l'hypothèse faite sur T entraîne que:

$$\left|\sum_0^n T^k[(ag - h_0^-)e_0 + \sum_1^{n-k} (h_{l-1}^- - h_l^-)e_l]\right| \leqslant (n+1)ag;$$

par conséquent, la relation (2′) entraîne que:

$$\left\{\left|\sum_0^n T^m f\right| > (n+1)ag\right\} \subset \left\{\sum_0^n h_m^+ e_m \neq 0\right\} \subset \bigcup_0^n (h_m > 0)$$

et il vient alors

$$\{|f| > ag\} \subset \Omega_{f,a} \subset \mathrm{H}.$$

L'inégalité du lemme maximal 3 découle alors de l'inégalité (1).

La démonstration du lemme maximal 2 est analogue bien que plus simple. On remarquera d'abord que si $\mathrm{F} = \mathrm{R}$ et si T est une contraction positive de L^1, alors $e_n = +1$ ($n \geqslant 0$) dès que $e_0 = +1$. Si f est alors un élément arbitraire de L^1 et si on pose $h_0 = f$, la relation (2) qui s'écrit ici

$$\sum_0^n \mathrm{T}^m h_0^+ = \sum_0^n h_m^+ + \sum_0^n \mathrm{T}^k (h_0^- - h_n^-)$$

montre que

$$\sum_0^n \mathrm{T}^m f \leqslant \sum_0^n h_m^+.$$

On en déduit immédiatement que $(f > 0) \subset \Omega_f \subset \mathrm{H}$ et l'inégalité (1) démontre le lemme.

3. Relation entre le théorème des martingales et le théorème ergodique.

Plusieurs auteurs ont essayé de confondre le théorème des martingales et les théorèmes ergodiques précédents en un seul théorème. A. et C. Ionescu Tulcea ont ainsi démontré [7] que l'inégalité du lemme maximal 3 restait valable si au lieu d'une seule contraction

T, on en considérait une suite $\{T_p\}$ vérifiant la même hypothèse que T ainsi que la relation algébrique $T_{p+1}T_p = T_{p+1}$ pour tout p (ou la relation $T_pT_{p+1} = T_p$ pour tout p); l'ensemble $\Omega_{f,a}$ doit alors être remplacé par l'ensemble

$$\Omega_{f,a} = \bigcup_p \bigcup_n \left\{ \frac{1}{n+1} \left| \sum_{m \leqslant n} T_p^m f \right| > a \right\}.$$

Ce résultat qui généralise évidemment le lemme maximal 3, inclut aussi comme cas particulier la deuxième partie du lemme maximal 1 comme on le voit en prenant $T_p = E^{\alpha_p}$. Remarquons à ce propos qu'un raisonnement analogue à celui de Tulcea permet aussi de montrer que le lemme maximal 2 reste valable pour une autre suite $\{T_p\}$ de contractions positives de L^1 telles que $T_{p+1}T_p = T_{p+1}$ (ou $T_pT_{p+1} = T_p$), à condition de prendre pour Ω_f l'ensemble

$$\Omega_f = \bigcup_p \bigcup_n \left\{ \sum_{m \leqslant n} T_p^m f > 0 \right\};$$

cette généralisation du lemme maximal 2 inclut alors comme cas particulier la première partie du lemme maximal 1.

Nous allons montrer maintenant que le théorème des martingales décroissantes et même le théorème plus général suivant dû à Ionescu Tulcea peuvent être considérés en fait comme un « cas particulier limite » du théorème ergodique.

THÉORÈME 4. — *Soit* $\{P_n\}_{n \geqslant 1}$ *une suite de contractions idempotentes de* L_F^1 *telles que* $P_mP_n = P_n = P_nP_m$ *lorsque* $n \geqslant m$ *et telles que* $\operatorname{ess\,sup}_\Omega(|P_n f|/g) \leqslant \operatorname{ess\,sup}_\Omega(|f|/g)$ *pour tout* $n \geqslant 1$, *tout* $f \in L_F^1$ *et pour une fonction réelle mesurable strictement positive g. Alors la limite* $\lim_{n\to\infty} P_n f$ *existe au sens p.s. si elle existe dans* L_F^1; *en particulier si* F *est réflexif elle existe pour tout* $f \in L_F^1$.

Démonstration. — Si la suite $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ de réels vérifie

$$a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots < 1$$

et $\lim \uparrow a_n = 1$, la formule: $T = \sum_{n \geqslant 1} (a_n - a_{n-1})P_n$ définit sous les hypothèses du théorème une contraction de L_F^1 à laquelle le théorème 3 est applicable. Les propriétés algébriques des P_n entrainent d'autre part que l'on a:

$$T^\kappa = \sum_{n \geqslant 1} [(a_n)^\kappa - (a_{n-1})^\kappa]P_n$$

ce qui montre déjà, puisque $(a_n)^\kappa \downarrow 0$ lorsque $\kappa \uparrow \infty$, que la suite $\{T^\kappa f\}$ converge dans L^1_F dès que $\{P_n f\}_{n \geqslant 1}$ y converge. Pour un tel f, la suite $\left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{\kappa \leqslant m} T^\kappa f \right\}$ est alors p.s. convergente en vertu du théorème 3.

Il est possible de spécifier la suite $\{a_n\}$ pour que l'on ait:

$$\sum_{n \geqslant 1} \left\| \frac{1}{m_n + 1} \sum_{\kappa \leqslant m_n} T^\kappa - P_n \right\| < \infty$$

pour une suite bien choisie $\{m_n\}$ d'entiers tendant vers $+\infty$. Les valeurs à donner aux a_n et le calcul qui démontre alors la convergence de la série précédente sont donnés dans [10] dans le cas d'espérances conditionnelles, mais le résultat reste entièrement valable dans le cas plus général considéré ici. Cette convergence entraîne que pour tout $f \in L^1_F$, les expressions $\left(\frac{1}{m_n + 1} \sum_{\kappa \leqslant m_n} T^\kappa f - P_n f \right)$ sont les termes d'une série convergente dans L^1_F, donc d'une suite tendant vers zéro p.s. et dans L^1_F. On en déduit immédiatement que la limite de la suite $\{P_n f\}$ existe au sens p.s. dès que la limite p.s. des

$$\frac{1}{m_n + 1} \sum_{\kappa \leqslant m_n} T^\kappa f$$

existe, donc dès que la suite $\{P_n f\}$ converge dans L^1_F.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Brunel, Sur un lemme ergodique voisin du lemme de E. Hopf et sur une de ses applications, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 256 (1963), 5681-5684.

[2] R. V. Chacon, An ergodic theorem for operators satisfying norm conditions, *J. Math. Mech.*, 11 (1962), 165-172.

[3] R. V. Chacon and D. Ornstein, A general ergodic theorem, *Illinois J. Math.*, 4 (1960), 153-160.

[4] N. Dunford and J. T. Schwarz, Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rat. Mech. Anal.*, 5 (1956), 129-178.

[5] W. F. Eberlein, Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 217-240.

[6] E. Hopf, The general temporally discrete Markov process, *J. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1954), 13-45.

[7] A. and C. IONESCU TULCEA, Abstract ergodic theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107 (1963), 107-124.
[8] J. NEVEU, Sur le théorème ergodique ponctuel, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 252 (1961), 1554-1556.
[9] J. NEVEU, Bases mathématiques du calcul des Probabilités, Masson éd., Paris (1964).
[10] J. NEVEU, Remarques sur la théorie des martingales, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen* (1964).
[11] F. S. SCALORA, Abstract martingale convergence theorems, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 347-374.

Jacques NEVEU,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre Curie,
Paris (5e).