ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNADETTE COLLIN

Remarques axiomatiques sur les points-frontière irréguliers dans le problème de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 14, n° 2 (1964), p. 485-491

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_485_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 485-492.

REMARQUES AXIOMATIQUES SUR LES POINTS-FRONTIÈRE IRRÉGULIERS DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET

par Bernadette COLLIN

1. Introduction.

Dans l'axiomatique des fonctions harmoniques développée par M. Brelot [2] et [3], à laquelle nous renvoyons, on étudie le problème de Dirichlet pour un ouvert ω relativement compact de l'espace de base Ω (localement compact, non compact, connexe et localement connexe), et on démontre que l'ensemble des points-frontière irréguliers est polaire.

Les hypothèses sont les axiomes fondamentaux 1, 2, 3, l'existence d'un potentiel > 0, l'axiome de domination D, et l'existence d'une base dénombrable d'ouverts pour Ω.

La démonstration est basée sur l'identité des points-frontière irréguliers et des points de $\complement\omega$ où $\complement\omega$ est effilé. Elle utilise un théorème de convergence (s'appuyant sur D) qui nécessite l'existence d'une base dénombrable d'ouverts.

Or si l'on se reporte dans le cas classique, à la démonstration originale d'Evans (1933 [6]) de la propriété précédente des points irréguliers ([1]), puis à la démonstration de Vasilesco [8] et plus spécialement à la présentation un peu sommaire qu'en a donnée M. Brelot en 1938 [1], on s'aperçoit qu'on peut faire une adaptation au cas axiomatique pour un *domaine* ω sans utiliser l'existence d'une base dénombrable d'ouverts. On se servira de ce que l'axiome D entraîne la même

([1]) Dans le cas du plan, elle avait été démontrée, sous une forme équivalente d'abord par Kellogg (1928) *C.R. Ac. Sc.*, 187, p. 526.

propriété dans tout domaine partiel et aussi la propriété suivante (2) :

D*. — Si pour un potentiel localement borné dans Ω, sa restriction à son support S est continue en un point x_0, ce potentiel est continu en x_0 dans Ω.

C'est ce que nous allons expliciter et nous en tirerons quelques conséquences. En particulier, en ajoutant l'hypothèse d'une base dénombrable, on aura aussitôt une autre démonstration du théorème sur les points irréguliers d'un ouvert. Mais ce qui justifie surtout ce travail, que M. Brelot a bien voulu me suggérer, c'est l'existence effective d'exemples [5], où nos conditions axiomatiques sont satisfaites, y compris D, mais *sans* base dénombrable d'ouverts.

2. Hypothèses et Rappels.

Hypothèses. — Axiomes 1, 2, 3, D, existence d'un potentiel > 0 dans Ω. Pour un point-frontière x_0, d'un ouvert ω relativement compact, on rappelle, [2] :

α) Un critère nécessaire et suffisant de régularité de x_0 : si V est surharmonique > 0, finie, continue en x_0, il faut et il suffit que :

$$\hat{R}_V^{\complement\omega \cap \delta}(x_0) = V(x_0)$$

quel que soit le voisinage δ de x_0. Cela montre le caractère local et la conservation de la régularité par diminution de ω.

β) Une condition suffisante de régularité est l'existence sur $\omega \cap \delta$ pour un voisinage δ de x_0, d'une fonction surharmonique > 0 tendant vers 0 en x_0.

En outre :

γ) Si un ensemble est polaire relativement à un domaine partiel, il est polaire dans Ω.

δ) Un critère (nécessaire et) suffisant pour que e soit polaire est que, si V est surharmonique > 0, R_V^e soit nul en un point au moins ou $\hat{R}_V^e = 0$ partout.

(2) MM. Boboc, Constantinescu et Cornéa dont les aimables critiques ont permis d'améliorer le texte sur les épreuves ont remarqué l'équivalence de D et D* (même sans base dénombrable d'ouverts) grâce aux résultats de leur article du Colloque de théorie du potentiel (Ces Annales t. 15, 1).

ε) Soient ω un ouvert partiel et e polaire fermé dans ω. Si u est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans $\omega - e$, elle se prolonge de façon unique selon une fonction surharmonique dans ω, et celle-ci est harmonique si u est harmonique et bornée dans $\omega - e$.

3. Propriété des points irréguliers.

Nous allons étudier les points-frontière d'un domaine relativement compact ω. Introduisons un domaine relativement compact Ω_0 tel que $\varpi \subset \Omega_0$.

Il existe dans Ω_0 un potentiel > 0 et une fonction harmonique $h > 0$. Pour les fonctions h-harmoniques et h-surharmoniques dans Ω_0, qui comprennent d'ailleurs les constantes, les hypothèses énoncées plus haut dans Ω sont satisfaites. D'autre part, pour le problème de Dirichlet relatif à ω, les points-frontière réguliers et irréguliers sont les mêmes.

C'est-à-dire que nous nous ramenons au cas que nous allons traiter où les constantes sont harmoniques en conservant le langage initial et les mêmes hypothèses.

Lemme. — *Les points-frontière irréguliers d'un domaine relativement compact ω_0 forment une réunion dénombrable de compacts.*

Soit K un compact non polaire contenu dans ω_0. $(\hat{R}_1^K)_{\omega_0}$, potentiel > 0 dans ω_0, est, dans $\omega_0 - K$, la solution du problème de Dirichlet, pour valeurs frontière 1 sur K et 0 sur $\partial\omega_0$ donc s'annule en tous les points-frontière réguliers de ω_0.

Réciproquement, si $(\hat{R}_1^K)_{\omega_0}$ s'annule en x_0, comme il est > 0, harmonique au voisinage, x_0 est régulier.

Les points-frontière irréguliers sont donc caractérisés par : $\limsup (\hat{R}_1^K)_{\omega_0} > 0$ et l'ensemble de ces points est réunion dénombrable des ensembles fermés E_n des points de $\partial\omega_0$ où $\limsup (\hat{R}_1^K)_{\omega_0} \geqslant \dfrac{1}{n}$.

Théorème. — *Les points-frontière irréguliers d'un domaine relativement compact forment un ensemble polaire.*

Soit F l'ensemble des points-frontière irréguliers de ω. Il suffit de montrer que toute partie compacte E de F est polaire.

On peut recouvrir $\partial\omega$ par une famille finie de domaines relativement compacts ω_p. Leur réunion avec ω constitue un nouveau domaine D.

Soit δ la composante connexe de $\complement_D E$ (complémentaire de E dans D) contenant ω. La frontière de δ contient E et, comme pour tout domaine relativement compact ([7] chap. I), au moins un point régulier x_1.

D'après (α) ou (β) de II, les points de E sont irréguliers pour δ.

Considérons la réduite dans D, $(R_1^E)_D$, et la partie fermée e de E où la restriction de cette fonction dans D — E admet une lim inf $\leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ on a évidemment

$$(R_1^e)_D \leqslant (R_1^E)_D$$

dans D — E.

De plus, soit u le prolongement selon la fonction maxima semi-continue inférieurement dans D de la fonction égale à $(R_1^E)_D$ dans D — E. Considérée dans D — e, u admet donc une lim inf $\leqslant 1 - \varepsilon$ aux points de e; donc aussi $(R_1^e)_D$, prise dans D — e et continue dans D — e.

Le potentiel $(\hat{R}_1^e)_D$ dans D est d'après l'axiome D majoré par toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans D majorant $1 - \varepsilon$ sur e, donc par $(R_{1-\varepsilon}^e)_D$ ou $(1 - \varepsilon)\,(R_1^e)_D$. On conclut :

$(R_1^e)_D = 0$ dans D — e, ce qui implique, d'après la propriété rappelée (δ), que e est polaire dans D, donc, d'après (γ), dans Ω.

Donnons à ε les valeurs $\frac{1}{n}\cdot$ La réunion des ensembles e correspondants est polaire. Elle représente l'ensemble E_1 des points de E où la restriction φ de $(R_1^E)_D$ à D — E satisfait à lim sup $\varphi < 1$.

Soit E_2 l'ensemble des points de E où lim sup $\varphi = 1$. E_2 est fermé.

Montrons que E_2 est vide. Pour cela, supposons E_2 non vide. $(\hat{R}_1^E)_D$ est un potentiel dans D, borné, harmonique dans D — E. Considérons cette fonction dans l'ouvert D — E_2 où E_1 est fermé relativement. D'après la propriété (ε) de II, on conclut que $(\hat{R}_1^E)_D$ est le prolongement harmonique dans $D - E_2$ de la restriction de cette fonction dans $D - E$.

Ainsi $(\hat{R}_1^E)_D$ est harmonique dans $D - E_2$ et son support S est contenu dans E_2.

La restriction de $\hat{R}_1^E$ à S est une fonction s.c.i, donc continue sur un ensemble partout dense dans S (théorème de Baire). Ainsi, elle est continue en un point x_0 de E_2. Et, d'après D*, $\hat{R}_1^E$ est continue en x_0 dans Ω, et elle y vaut 1 puisque la lim sup de sa restriction sur $D - E$ vaut 1.

Étudions sa restriction sur δ. D'une part elle tend vers 1 en x_0. D'autre part, comme elle vaut dans $D - E$, donc aussi dans δ, la solution du problème de Dirichlet pour la donnée 0 sur ∂D et 1 ailleurs, elle tend vers 0 au point régulier x_1, donc elle n'est pas constante. $1 - \hat{R}_1^E$ est alors une fonction harmonique > 0 dans δ tendant vers 0 en x_0 et d'après la propriété (β) x_0 serait régulier pour δ, d'où la contradiction.

Ainsi E est identique à E_1, polaire dans D donc dans Ω.

4. Quelques conséquences.

1° *a*) Dans les hypothèses bien plus générales de [4], e est dit faiblement effilé en x_0 si $\inf_\sigma \hat{R}_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$ (σ voisinage variable de x_0).

Avec nos hypothèses (Axiomes 1, 2, 3, existence d'un potentiel > 0), la notion de point-frontière irrégulier x_0 d'un ouvert relativement compact ω est équivalente, d'après le critère de régularité, rappelé en (α), à l'effilement faible en x_0 de $\complement\omega$. Ceci conduit à la propriété suivante :

Si e est faiblement effilé en chacun de ses points, toute partie compacte K de e, dont le complémentaire dans un domaine ω (relativement compact le contenant) est connexe, est polaire.

b) Soit, dans nos hypothèses, une famille $\{u_i\}$ de fonctions hyperharmoniques $\geqslant 0$. On sait d'ailleurs dans des hypothèses bien plus générales (voir [4]) que l'ensemble « exceptionnel » e où $\widehat{\inf u_i} < \inf u_i$ est réunion dénombrable de certains ensembles e_n faiblement effilés en tout point. Nous pouvons donc ajouter que ces ensembles e_n possèdent la propriété précédente.

2° Montrons que, *si on ajoute l'hypothèse d'existence d'une base dénombrable d'ouverts dans* Ω, on retrouve des résultats connus à savoir que :

a) L'ensemble des points-frontière irréguliers d'un ouvert ω relativement compact est polaire.

Car alors ω est réunion dénombrable de ses domaines composants et tout point irrégulier pour ω est irrégulier pour l'un de ces domaines.

b) L'ensemble « exceptionnel » considéré plus haut est polaire (théorème de convergence).

On suppose d'abord que les u_i sont dénombrables, donc l'ensemble exceptionnel et les e_n sont boréliens donc k-analytiques. Grâce à (2°, *a*) et à l'équivalence rappelée dans (1° *a*) on voit que toute partie compacte de e_n est polaire et par suite chaque e_n (voir [2] ou [3]) donc aussi l'ensemble « exceptionnel ». On sait passer de là au cas d'une famille quelconque (comme dans [2] ou [3]). Rappelons que c'est de ce théorème de convergence qu'on déduisait la propriété précédente (*a*) des points irréguliers.

Remarque. — Il y aurait lieu d'examiner l'extension possible à des axiomatiques plus larges comme celle de Bauer, mais en ajoutant encore l'axiome D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Fonctions sous-harmoniques et balayage, *Bulletin de l'Académie royale des Sciences de Belgique*, t. 24, 1938, p. 301-312 et p. 421-436.

[2] M. Brelot, Lectures on potential theory, *Collection du Tata Institute* n° 19, Bombay, 1960.

[3] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, *Séminaire de théorie du potentiel II*, 1958.

[4] M. Brelot, Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement, *Séminaire de théorie du potentiel VI*, 1962.

[5] Constantinescu et Cornea, On the axiomatic of harmonic functions I, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 13, 1963, p. 387.

[6] G. C. EVANS, Applications of Poincaré's sweeping out process, *Proceed. Nat. Ac. Sc.*, 19, 1933, p. 457-461.

[7] Mme R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 12, 1962, p. 415-571.

[8] F. VASILESCO, La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet, *Act. Sc.*, n° 660, 1938.

Manuscrit reçu en juillet 1964

Bernadette COLLIN,
25 rue Gassendi, Paris 14e.