ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-LOUIS KOSZUL

Propriétés de stabilité des lois d'opération propres

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 1 (1964), p. 21-29

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_21_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 1 (1964), 21-30.

PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ DES LOIS D'OPÉRATION PROPRES

par J. L. KOSZUL (Strasbourg).

Soient X un espace topologique séparé et G un groupe localement compact. Une loi d'opération continue $m: G \times X \rightarrow X$ de G dans X est dite *propre* lorsque, pout tout couple de points $x, y \in E$, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que l'ensemble des $s \in G$ pour lesquels $m(s, U) \cap V \neq \emptyset$ soit relativement compact dans G [2]. Si X est localement compact, métrisable et paracompact, pour qu'une loi d'opération continue de G dans X soit propre, il est nécessaire qu'elle laisse invariante une métrique compatible avec la topologie de X [4 bis]. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. On démontrera dans cet article que, moyennant certaines hypothèses sur X (vérifiées lorsque X est une variété connexe dont le groupe fondamental est engendré par un nombre fini d'éléments), si m^0 est une loi d'opération propre de G dans X telle que le quotient de X par m^0 soit compact, alors toute loi d'opération m assez voisine de m^0 et laissant invariante une métrique compatible avec la topologie de X est encore une loi propre et le quotient de X par m est compact. Ce résultat généralise un théorème de A. Weil sur la déformation des sous-groupes discrets d'un groupe de Lie [5]. Sa démonstration repose sur un « Critère de propreté » obtenu en aménageant la construction utilisée par divers auteurs pour obtenir une présentation finie de certains groupes discrets opérant proprement dans un espace (Coxeter [3], Gerstenhaber [4], Behr [1]). Une forme simplifiée et affaiblie de ce Critère suffirait dans les questions de stabilité auxquelles on s'intéresse ici. On a cependant voulu le donner avec des hypothèses assez générales pour qu'il soit directement applicable en d'autres circonstances, par exemple dans le cas des groupes définis par des polygones Fuchsiens qui, d'après un théorème classique de Poincaré, sont des groupes discrets opérant proprement dans le demi-plan.

1. Parties adaptées.

Soit G un groupe topologique opérant continuement à gauche dans un espace topologique X et soit A une partie de X. On dira qu'une partie S de G est *adaptée* à A si elle vérifie les conditions suivantes :

1) S *contient l'élément neutre* e *de* G.

2) *Si* $s, s' \in S$ *et si* $A \cap sA \cap s'A \neq \emptyset$, *alors* $s^{-1}s' \in S$.

Lorsque S est adaptée à une partie A de X, pour tout $s \in S$ tel que $A \cap sA \neq \emptyset$, on a $s^{-1} \in S$. D'autre part, l'ensemble des couples $((t, a), (t', a'))$ de $(G \times A)^2$ tels que $ta = t'a'$ et $t^{-1}t' \in S$ constitue une relation d'équivalence dans $G \times A$.

Dans la suite du N°, on supposera que S est une partie de G adaptée à A et on notera Y l'espace quotient de $G \times A$ par la relation d'équivalence que définit S. L'application canonique de $G \times A$ sur le quotient Y sera notée q. L'application continue $(t, a) \to ta$ de $G \times A$ dans X se factorise en $f \circ q$ où f est une application continue de Y dans X ayant pour image GA.

Lemme 1. — *Si* A *est connexe et si* G *est engendré par les éléments* $s \in S$ *tels que* $A \cap sA \neq \emptyset$, *alors* Y *est connexe.*

Soit en effet S′ le sous-ensemble de S constitué par les éléments $s \in S$ tels que $A \cap sA \neq \emptyset$. Si L est une partie de G telle que $q(L, A)$ soit connexe, alors, pour tout $t \in L$ et tout $s \in S'$, $q(L, A) \cup q(st, A)$ est connexe car c'est la réunion de deux parties connexes ayant un point commun. Il en résulte que $q(LS', A)$ est connexe. On en déduit que $q(S'^p, A)$ est connexe pour tout entier $p > 0$. Puisque G est engendré par S′ et que $S' = (S')^{-1}$, ceci prouve que Y est connexe.

Lemme 2. — *On suppose que* X *est un espace métrique connexe, que* S *est un voisinage de l'élément neutre* e *de* G *et que* G *opère isométriquement dans* X. *S'il existe un nombre* $\rho > 0$ *tel que pour tout* $a \in A$, *la boule ouverte de centre* a *de rayon* ρ *soit* *contenue dans un* $s\mathrm{A}$ *avec* $s \in \mathrm{S}$, *alors* $\mathrm{G}\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$ *et* $f\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *est un revêtement de* X.

Soit d la distance sur X invariante par G. Si $x \in \overline{\mathrm{G}\mathring{\mathrm{A}}}$, il existe un point $a \in \mathring{\mathrm{A}}$ et un élément $t \in \mathrm{G}$ tels que $d(x, ta) < \rho$ et $d(t^{-1}x, \mathrm{A}) \leqslant d(t^{-1}x, a) < \rho$. On a donc $t^{-1}x \in \mathrm{S}\mathring{\mathrm{A}}$, et $x \in \mathrm{G}\mathring{\mathrm{A}}$ ce qui prouve que $\mathrm{G}\mathring{\mathrm{A}}$ est fermé. Puisque X est connexe, on a donc $\mathrm{G}\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$. Démontrons maintenant la seconde assertion. On commencera par établir que l'application $f\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est *ouverte*. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathrm{G} \times \mathrm{A}$ saturé par la relation d'équivalence définie par S et soit $(t, a) \in \mathcal{O}$. Si s est un élément de S tel que $s\mathrm{A}$ soit voisinage de a, alors (t, a) est équivalent à $(ts, s^{-1}a)$ qui appartient donc à $\mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe un voisinage V de $s^{-1}a$ contenu dans A tel que $(ts, \mathrm{V}) \subset \mathcal{O}$. Par suite $f(q(\mathcal{O})) \supset ts\mathrm{V}$ qui est un voisinage de $ta = f(q(t, a))$. Donc $f(q(\mathcal{O}))$ est un ouvert de X, ce qui prouve que f est ouverte. Montrons maintenant que f est *localement injective*. Soit $q(t, a)$ un point de Y. On peut supposer a intérieur à A. Soit U un voisinage ouvert de t dans G tel que $\mathrm{U}^{-1}\mathrm{U} \subset \mathrm{S}$. Le saturé de $\mathrm{U} \times \mathring{\mathrm{A}}$ pour la relation d'équivalence définie par S est la réunion des $\mathrm{U}s \times (s^{-1}\mathring{\mathrm{A}}) \cap \mathrm{A}$ où $s \in \mathrm{S}$ et c'est par conséquent un ouvert de $\mathrm{G} \times \mathrm{A}$. Par suite $q(\mathrm{U} \times \mathring{\mathrm{A}})$ est un voisinage ouvert de $q(t, a)$. Si $(t', a') \in \mathrm{U} \times \mathring{\mathrm{A}}$, $(t'', a'') \in \mathrm{U} \times \mathring{\mathrm{A}}$ et si $t'a' = t''a''$, alors $t^{-1'}t'' \in \mathrm{U}^{-1}\mathrm{U} \subset \mathrm{S}$, donc $q(t', a') = q(t'', a'')$, ce qui montre que f est injective sur $q(\mathrm{U} \times \mathring{\mathrm{A}})$. Montrons maintenant que $f\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un *revêtement*. Soient x un point de X et B la boule ouverte de centre x de rayon $\rho/2$. Soit N l'ensemble des éléments $t \in \mathrm{G}$ tels que $t\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$. Pour tout $t \in \mathrm{N}$, notons σ_t l'application continue de B dans Y définie par $\sigma_t(z) = q(t, t^{-1}z)$. Il est clair que $f \circ \sigma_t$ est l'identité sur B. Si $t, t' \in \mathrm{N}$ et si les images de σ_t et de $\sigma_{t'}$, ne sont pas disjointes, il existe un point $z^0 \in \mathrm{B}$ tel que $q(t, t^{-1}z^0) = q(t', (t')^{-1}z^0)$. Ceci entraîne $t^{-1}t' \in \mathrm{S}$ et par suite, $\sigma_t(z) = \sigma_{t'}(z)$ pour tout $z \in \mathrm{B}$. Montrons enfin que $f^{-1}(\mathrm{B})$ est réunion des $\sigma_t(\mathrm{B})$ pour $t \in \mathrm{N}$. Soit $q(r, a)$ un point de $f^{-1}(\mathrm{B})$. Soit s un élément de S tel que $s\mathrm{A}$ contienne la boule ouverte de centre a de rayon ρ. La boule de centre ra de rayon ρ est contenue dans $rs\mathrm{A}$. Comme $ra \in \mathrm{B}$, on a $\mathrm{B} \subset rs\mathrm{A}$, donc $rs \in \mathrm{N}$ et $\sigma_{rs}(ra) = q(rs, s^{-1}a) = q(r, a)$, ce qui achève la démonstration.

2. Critère de propreté.

Théorème 1. — *Soient* G *un groupe localement compact opérant continuement et isométriquement dans un espace métrique connexe et simplement connexe* X. *Soient* A *une partie connexe de* X *et* S *un voisinage de l'élément neutre dans* G *adapté à* A. *On suppose que* G *est engendré par les éléments* $s \in S$ *tels que* $sA \cap A \neq \emptyset$ *et qu'il existe un nombre* $\rho > 0$ *tel que, pour tout* $a \in A$, *la boule ouverte de centre* a *de rayon* ρ *soit contenue dans l'un des* sA *avec* $s \in S$. *Dans ces conditions, si* $t \in G$ *et si* $tA \cap A \neq \emptyset$, *alors* $t \in S$. *Si* S *est relativement compact, alors* G *opère proprement dans* X.

Soit en effet Y le quotient de l'espace $G \times A$ par la relation d'équivalence que définit S et soit f l'application continue de Y dans X introduite au n° 1. Il résulte du Lemme 1 que Y est connexe. Le lemme 2 montre que $f\colon Y \to X$ est un revêtement de X. Puisque X est simplement connexe, f est donc bijective. Si q désigne l'application canonique de $G \times A$ sur Y et si (t, a) est un élément de $G \times A$ tel que $ta \in A$, alors

$$f(q(t, a)) = f(q(e, ta)),$$

donc $q(t, a) = q(e, ta)$, ce qui signifie que $t \in S$ et démontre la première assertion. Soient maintenant x, x' deux éléments de X. Il existe des éléments $r, r' \in G$ tels que rA et $r'A$ soient respectivement des voisinages de x et de x'. Si L désigne l'ensemble des éléments $t \in G$ tels que $(tr'A) \cap (rA) \neq \emptyset$, on a $r^{-1}Lr \in S$, donc L est relativement compact si S l'est; en ce cas, G opère donc proprement.

Corollaire. — *Soit* G *un groupe discret opérant isométriquement dans un espace métrique connexe, localement connexe et simplement connexe* X. *Soient* A *un compact connexe de* X *et* S *une partie finie de* G *adaptée à* A. *On suppose que* SA *est un voisinage de* A *et que* G *est engendré par les éléments* $s \in S$ *tels que* $sA \cap A \neq \emptyset$. *Alors* G *opère proprement dans* X, *le quotient de* X *par* G *est compact et tout élément* $t \in G$ *tel que* $tA \cap A \neq \emptyset$ *appartient à* S.

En effet, A étant compact et S étant fini, S est adaptée à un voisinage V de A. Par suite, S est adaptée au voisinage relativement compact B de A égal à la composante connexe de A dans $V \cap SA$. Puisque $A \subset B$, le groupe G est engendré par les éléments $s \in S$ tels que $sB \cap B \neq \emptyset$. Soit ρ un nombre > 0 tel que B contienne tous les points de X dont la distance à A est $< \rho$. Pour tout $b \in B$, il existe un $s \in S$ tel que $s^{-1}b \in A$, donc tel que sB contienne la boule ouverte de centre b de rayon ρ.

Le corollaire s'obtient alors en appliquant le Théorème à la partie B de X et à la partie S de G qui lui est adaptée.

3. Stabilité.

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Dans l'ensemble des applications continues de $G \times X$ dans X, la topologie de la convergence compacte induit une topologie sur l'ensemble M(G, X) des lois d'opération continues de G dans X. Par *voisinage* d'une loi $m^0 \in M(G, X)$, on entendra dans la suite un voisinage de m^0 dans M(G, X) pour cette topologie. L'espace des trajectoires de G dans X pour la loi m^0 sera noté X/m^0.

THÉORÈME 2. — *Soient* G *un groupe topologique localement compact et* X *un espace topologique localement compact, connexe et localement connexe. On suppose qu'il existe un compact* K *de* X *tel que tout revêtement connexe de* X *admettant une section sur* K *soit trivial. Soit* m^0 *une loi d'opération propre de* G *dans* X *telle que* X/m^0 *soit compact et soit* C *un compact de* X *tel que* $m^0(G, C) = X$. *Pour tout voisinage compact connexe* A *de* C, *il existe un voisinage relativement compact* S *de* e *dans* G *et un voisinage* W *de* m^0 *dans* M(G, X) *tels que, si* $m \in W$ *et si* m *laisse invariante une métrique compatible avec la topologie de* X :

1) $m(G, \mathring{A}) = X$

2) *si* $t \in G$ *et si* $m(t, A) \cap A \neq \emptyset$, *alors* $t \in S$.

Soient en effet A un voisinage compact connexe de C et B un voisinage ouvert relativement compact de A. Puisque m^0 est propre, l'ensemble S des éléments $s \in G$ tels que $m^0(s, B) \cap B \neq \emptyset$ est un voisinage ouvert relativement compact de l'élément neutre $e \in G$. Le voisinage W de m^0 va s'obtenir comme intersection de voisinages $W_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, obtenus comme suit :

Il existe un voisinage W_1 *de* m^0 *dans* $M(G, X)$ *tel que, pour toute loi* $m \in W_1$, S *soit adaptée à* A. L'ensemble $L = \overline{S^2} - S$ est un compact de G et $m^0(L, A) \cap A = \emptyset$ puisque

$$m^0(L, B) \cap B = \emptyset.$$

Soit W_1 le voisinage de m^0 constitué par les lois d'opération m telles que $m(L, A) \cap A = \emptyset$. Si $m \in W_1$ et si

$$A \cap m(s, A) \cap m(s', A) \neq \emptyset,$$

avec $s, s' \in S$, alors $m(s^{-1} s', A) \cap A \neq \emptyset$, donc $s^{-1}s' \in \overline{S^2} - L = S$, autrement dit, S est adaptée à A pour la loi m.

Il existe un voisinage W_2 *de* m^0 *dans* $M(G, X)$ *tel que, pour toute loi* $m \in W_2$, G *soit engendré par l'ensemble des éléments* $s \in S$ *tels que* $m(s, A) \cap A \neq \emptyset$. Soient en effet C' un voisinage compact de C contenu dans $\mathring{A}$ et T l'ensemble compact des éléments $s \in G$ tels que $m^0(s, C) \cap C' \neq \emptyset$. Soit G' le sous-groupe de G engendré par T. Puisque $m^0(G, C) \supset C'$, on a $m^0(T, C) \supset C'$ ce qui entraîne que $m^0(G', C)$ est ouvert. Si $r \in G$ et si $m^0(r, C') \cap m^0(G', C) \neq \emptyset$, alors $r \in G'$. Comme $X = m^0(G, C)$, il en résulte que $m^0(G', C)$ est fermé. L'espace X étant connexe, on a $X = m^0(G', C)$. Pour tout $t \in G$, il existe un $t' \in G'$ tel que $m^0(t, C') \cap m^0(t', C) \neq \emptyset$ ce qui entraîne $t^{-1}t' \in T$, donc $t \in G'$. Ainsi $G = G'$. Pour tout $t \in T$, soit $c(t)$ un élément de C tel que $m^0(t, c(t)) \in C'$ et soit $V(t)$ un voisinage compact de t dans G tel que $m^0(V(t), c(t)) \subset \mathring{A}$. Il existe une partie finie $T^* \subset T$ telle que $T = \bigcup_{t \in T^*} V(t)$. Soit W_t le voisinage de m^0 constitué par les lois m telles que $m(V(t), c(t)) \subset \mathring{A}$. Si $W_2 = \bigcap_{t \in T^*} W_t$, alors, pour tout $r \in T$, il existe un $t \in T^*$ tel que $m^0(r, c(t)) \in \mathring{A}$ et par suite $m(r, A) \cap A \neq \emptyset$ quel que soit $m \in W_2$. Puisque $T \subset S$ et que G est engendré par T, on voit que si $m \in W_2$, G est engendré par les éléments $s \in S$ tels que $m(s, A) \cap A \neq \emptyset$.

Il existe un voisinage W_3 *de* m^0 *tel que, pour toute loi* $m \in W_3$, $m(S, \mathring{A})$ *soit un voisinage de* A. En effet, puisque $m^0(S, C) \supset A$ et que $\mathring{A}$ est un voisinage de C, cela résulte facilement de la compacité de A.

Puisque $m^0(G, C) = X$, il existe un compact R dans G contenant S et tel que $m^0(R, C) \supset K$. Puisque $\mathring{A}$ est un voisinage de C et que K est compact, *il existe donc un voisinage* W_4 *de* m^0 *dans* M(G, X) *tel que* $m(R, \mathring{A}) \supset K$ *pour toute loi* $m \in W_4$. L'ensemble $R^{-1}R - S$ est compact et $m^0(R^{-1}R - S, A) \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent *il existe un voisinage* W_5 *de* m^0 *dans* M(G, X) *tel que, pour toute loi* $m \in W_5$, *on ait* $m(R^{-1}R - S, A) \cap A = \emptyset$.

Soit alors W l'intersection des voisinages W_i $(i = 1,2,3,4,5)$ et soit m une loi appartenant à W. Puisque $m \in W_1$, S est adaptée à A pour la loi m et les couples

$$((t, a), (t', a')) \in (G \times A)^2$$

tels que $m(t, a) = m(t', a')$ et $t^{-1}t \in S$ constituent une relation d'équivalence dans $G \times A$. L'espace quotient de $G \times A$ par cette relation d'équivalence sera noté Y_m et q_m désignera l'application canonique de $G \times A$ sur Y_m. Puisque $m \in W_2$, G est engendré par les éléments $s \in S$ tels que $m(s, A) \cap A \neq 0$. D'après le Lemme 2, ceci entraîne que Y_m est connexe. Puisque $m \in W_3$, on a $m(S, \mathring{A}) \supset A$. Supposons désormais que m laisse invariante une métrique compatible avec la topologie de X. Puisque A est compact il existe alors un nombre $\rho > 0$ tel que, pour cette métrique, toute boule ouverte de centre appartenant à A et de rayon ρ soit contenue dans une partie $m(s, A)$ avec $s \in S$. D'après le lemme 2, ceci montre que $m(G, \mathring{A}) = X$ (première assertion du théorème) et que l'application f_m de Y_m sur X qui se déduit de l'application $(t, a) \to m(t, a)$ par factorisation est un revêtement de X. Soient (r, a) et (r', a') deux éléments de $R \times \mathring{A}$ tels que $m(r, a) = m(r', a')$. On a $m(r^{-1}r', A) \cap A \neq \emptyset$ et puisque $m \in W_5$, ceci entraîne que $r^{-1}r' \in S$. Il en résulte que

$$q_m(r, a) = q_m(r', a')$$

ce qui signifie que la restriction de f_m à $q_m(R, \mathring{A})$ est injective. Il existe donc une section continue du revêtement $f_m : Y_m \to X$ définie sur $m(R, \mathring{A})$ et ayant pour image $q_m(R, \mathring{A})$. Puisque $m \in W_4$, cette section est définie sur K et le revêtement $f_m : Y_m \to X$ est donc trivial. La deuxième assertion du Théorème s'obtient alors en exprimant que f_m est injective.

THÉORÈME 3. — *Les hypothèses étant celles du Théorème 2, il existe un voisinage* W *de* m^0 *dans* M(G, X) *tel que si* $m \in W$ *et si* m *laisse invariante une métrique compatible avec la topologie de* X, *alors* m *est propre et* X/m *est compact.*

En effet, X étant localement compact, connexe et localement connexe, il existe un voisinage compact connexe A de C. Il résulte immédiatement du théorème que toute loi $m \in W$ est une loi d'opération propre. Puisque m est propre, l'espace X/m est séparé. Chaque trajectoire rencontrant le compact A, X/m est compact.

Remarque. — Dans la pratique, l'hypothèse mettant en jeu les revêtements de X se trouvera vérifiée lorsque X est localement connexe par arcs et que son groupe fondamental est engendré par un nombre fini d'éléments.

Les conclusions du Théorème 2 sont plus fortes que celles du théorème 1. Elles peuvent s'énoncer en termes de propreté de la manière suivante (comparer avec l'Appendice I de [6]). Soit M′ l'ensemble des lois $m \in M(G, X)$ qui laissent invariante une métrique compatible avec la topologie de X. D'après le Théorème 3, les lois $m \in M'$ qui sont propres et telles que X/m soit compact constituent un ouvert N de M′. On définit une loi d'opération continue de G dans l'espace produit $N \times X$ en posant $t(m, x) = (m, m(t, x))$ quels que soient $t \in G$ et $(m, x) \in N \times X$. Il résulte facilement du Théorème 2 que cette loi d'opération est *propre.*

Supposons que X soit une variété différentiable connexe dont le groupe fondamental est engendré par un nombre fini d'éléments. Soient G un groupe de Lie et m une famille différentiable à un paramètre de lois d'opération de G dans X. Plus précisément on supposera que m est une application différentiable de $\mathbf{R} \times G \times X$ dans X telle que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $(s, x) \to m_\theta(s, x) = m(\theta, s, x)$ soit une loi d'opération de G dans X laissant invariante une métrique compatible avec la topologie de X. Supposons que pour un $\theta^0 \in \mathbf{R}$ la loi m_{θ^0} soit propre et le quotient X/m_{θ^0} soit compact. Le Théorème 2 montre qu'il existe un voisinage ouvert I de θ^0 dans $\mathbf{R}$ tel que la loi $\tilde{m}$ de G dans $I \times X$ définie par $\tilde{m}(t, \theta, x) = (\theta, m_\theta(t, x))$ soit propre. On en déduit l'existence d'un champ de vecteurs P sur $I \times X$ invariant par $\tilde{m}$ et dont la projection sur I est le champ $d/d\theta$. Comme dans [6], par intégration de ce champ, on obtient pour θ assez voisin de θ^0 un automorphisme différentiable a_θ de X tel que $m_\theta(t, x) = a_\theta^{-1} m_{\theta^0}(t, a_\theta(x))$ quel que soit $(t, x) \in G \times X$. En d'autres termes, pour θ assez voisin de θ, m_θ est conjuguée de m_{θ^0}.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Behr, Uber die endliche Definierbarkeit von Gruppen, *Crelles Journal*, 211, (1962), 116-122.

[2] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Chap. 3, 3e édition, § 4.

[3] H. Coxeter, *Regular Polytopes*, Methen et Co, Londres, 1948. § 5, 3.

[4] M. Gerstenhaber, On the algebraic structure of discontinuous groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4 (1953), 745-750.

[4 bis] R. Palais, On the existence of slices for action of non compact Lie groups, *Ann. of Math.* 73 (1961), 295-323.

[5] A. Weil, On discrete subgroups of Lie Groups I, *Ann. of Math.* 72 (1960), 369-384.

[6] A. Weil, On discrete subgroups of Lie Groups II, *Ann. of Math.* 75 (1962), 578-602.