

ROBERT FAURE

**Solutions périodiques d'équations différentielles et méthode de Leray Schauder. Cas des vibrations forcées**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 14, n° 1 (1964), p. 195-204

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1964\\_\\_14\\_1\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_195_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET MÉTHODE DE LERAY SCHAUDER

(Cas des vibrations forcées).

par Robert FAURE (Dakar)

---

On rencontre très souvent en Physique des équations différentielles à coefficients périodiques; la recherche des solutions périodiques correspondantes s'avère en général difficile lorsque l'importance des phénomènes interdit l'emploi de la méthode des petits paramètres ou des méthodes voisines.

La méthode de Leray-Schauder permet alors de conclure dans de nombreux cas à l'existence de ces solutions quelle que soit l'importance de l'excitation.

Nous allons indiquer plusieurs cas simples et nous verrons qu'avec une légère extension du théorème fondamental de Leray-Schauder, nous pouvons affirmer l'existence de solution dans des systèmes d'équations relativement plus compliqués.

Nous admettrons ici dans les différents exemples que l'existence d'une solution périodique unique a été démontrée au voisinage des positions d'équilibre; la valeur zéro du paramètre  $\lambda$  correspondant à cette position.

*Première partie.* — Dans leur article : *Topologie et Équations fonctionnelles* MM. Leray et Schauder ont établi le théorème suivant que nous désignerons dans les applications par (LS).

Soit l'équation fonctionnelle

$$x - \mathcal{F}(x, \lambda) = 0 \quad (\text{E})$$

satisfaisant aux hypothèses suivantes (H).

L'inconnue  $x$  et toutes les valeurs de  $\mathcal{F}$  appartiennent à un espace linéaire, norme et complet  $\mathcal{E}$ .

L'ensemble des valeurs du paramètre  $\lambda$  constitue un segment  $K$  de l'axe des nombres réels.

$\mathcal{F}(x, \lambda)$  est définie par tous les couples  $(x, \lambda)$  ou  $x$  est un élément quelconque de  $\mathcal{E}$ ,  $\lambda$  un point quelconque de  $K$ .

H'  $\left\{ \begin{array}{l} \text{En chaque point } \lambda \text{ de } K, \mathcal{F}(x, \lambda) \text{ est complètement} \\ \text{continue; ceci signifiant que } \mathcal{F}(x, \lambda) \text{ transforme tout} \\ \text{ensemble borné de points } x \text{ de } \mathcal{E} \text{ en un ensemble} \\ \text{compact.} \end{array} \right.$

Sur tout son ensemble borné de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}(x, \lambda)$  est uniformément continue par rapport à  $\lambda$ .

En un point particulier  $\lambda_0$  de  $K$ , toutes les solutions sont connues et l'on peut étudier leur indice, on suppose essentiellement que la somme de leurs indices n'est pas nulle <sup>(1)</sup>.

On suppose de plus démontré par un procédé quelconque que les solutions de (E) sont bornées dans leur ensemble.

*Conclusion.* — Alors il existe surement dans  $\mathcal{E} \times K$  un continu de solutions le long duquel  $\lambda$  prend toutes les valeurs de  $K$ .

*Applications.* — Indiquons tout d'abord trois applications :

$T$  est la période,  $\omega$  la pulsation  $\omega T = 2\pi$ .

Les équations appartiennent au Domaine réel.

Le paramètre  $\lambda$  est positif *dans tous les cas qui suivront.*

I. — Équation

$$x'' + f(x)x' + x = \lambda e(t)$$

avec

$$f(x) = a + g(x) \quad a \neq 0$$

$g(x)$  est une fonction continue quel que soit  $x$  et Lipschitzienne au voisinage de 0 avec  $g(0) = 0$ .

On suppose  $\omega > 1$ .

$H$  est l'espace de Hilbert des séries de Fourier de période  $T$

avec pour tout  $\varphi \in H$   $\|\varphi\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t) dt}$  <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Ceci a lieu en particulier quand la solution existante est unique.

<sup>(2)</sup> Les intégrales sont prises au sens de Lebesgue.

$H_0$  est un sous-espace de  $H$   $H_0 \subset H$

$$f \in H_0 \quad \text{si} \quad \int_0^T f(t) dt = 0$$

On prend  $e(t) \in H_0$ ; en changeant  $x$  en  $\lambda x(E_1)$  devient

$$(E'_1) \quad x'' + f(\lambda x)x' + x = \lambda e(t)$$

en multipliant par  $x$  et en intégrant entre 0 et T on obtient après intégration par partie

$$(1) \quad \int_0^T x^2 dt - \int_0^T x'^2 dt = \int_0^T e(t)x dt$$

$\nu u(E'_1)x \in H_0$  et (1) fournit compte tenu de  $\omega > 1$  et de l'inégalité de Schwartz.

$$(2) \quad \|x'\| < \frac{\eta\omega}{\omega^2 - 1}.$$

On écrit l'équation  $(E'_1)$  sous la forme

$$(3) \quad \begin{aligned} u'' + au' + u &= e(t) - g(\lambda\nu)\nu' \\ \nu' &\in H_0, \quad \nu \in H_0 \end{aligned}$$

soit

$$u' = \mathcal{F}(\nu', \lambda).$$

La transformation  $\mathcal{F}$  transforme tout ensemble borné  $(^3)$   $\mathcal{A}$  de  $H_0$  en un ensemble compact  $\mathcal{A}' \subset H_0$ .

On peut dès lors appliquer (LS) et affirmer l'existence d'une solution quel que soit  $\lambda > 0$ .

II. — Système d'équation du 2<sup>e</sup> ordre.

Équations des circuits électriques (cf. Graffi).

Après transformation simple comme à I, on étudie le système

$$\text{II} \quad L_1 x_1'' + M x_2'' + f_1(\lambda x_1)x_1' + x_1 = e_1(t),$$

$$\text{III} \quad M x_1'' + L_2 x_2'' + f_2(\lambda x_2)x_2' + x_2 = e_2(t),$$

(<sup>3</sup>) Si  $y' \in \mathcal{A}$  ensemble borné de  $H_0$ , il existe une suite  $y'_1 \dots y'_n$  convergeant faiblement vers une limite de  $L'$ ,  $y$  converge alors au sens habituel vers  $L$  avec  $y \in H_0$ ,  $L \in H_0$ .

De la suite  $f(y_n)y'_n \in H_0$  bornée, on peut extraire une sous suite convergeant faiblement, la transformation  $\mathcal{F}$  la transforme en convergente forte au sens de l'espace de Hilbert.

$L_1, L_2, M$  constantes réelles positives avec  $L_1 L_2 - M^2 > 0$

$$e_1(t), \quad e_2(t) \in H_0$$

$f_1(x), f_2(x)$  sont de la forme  $a + g(x)$

$g(x)$  est continue quel que soit  $x$ ,  $g(0) = 0$

$g(x)$  est Lipschitzienne au voisinage de zéro.

Il est clair que l'on a  $x_1 \in H_{10}, x_2 \in H_{20}$ . On multiplie (II) par  $x_1$  (III) par  $x_2$ ; on intègre entre 0 et T, on a compte tenu d'identité simple

$$\begin{aligned} \int_0^T (L_1 x_1'^2 + 2 M x_1' x_2' + L_2 x_2'^2) dt - \int_0^T (x_1^2 + x_2^2) dt \\ = - \int_0^T (e_1(t) x_1 + e_2(t) x_2) dt. \end{aligned}$$

Si on choisit  $\omega$  suffisamment grand pour que

$$\left( L_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) \left( L_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) - M^2 > 0.$$

On voit aisément que  $\|x_1'\|, \|x_2'\|, \|x_1\|, \|x_2\|$  sont bornées.

On écrit alors le système (II), (III) sous la forme  $u = \mathcal{F}(v, \lambda)$  avec

$$\begin{aligned} L_1 u_1'' + M u_2'' + a_1 u_1' + u_1 &= -g_1(\lambda v_1) v_1' + e_1(t) \\ M u_1'' + L_2 u_2'' + a_2 u_2' + u_2 &= -g_2(\lambda v_2) v_2' + e_2(t) \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  est le produit des sous-espaces  $H_{10}, H_{20}$ .

$H_{10}, H_{20}$  correspondants dans  $H_1$  et  $H_2$  à  $H_0$  pour H

$$\begin{aligned} u_1, u_1', u_1'' \in H_{10}, \quad v_1', v_1 \in H_{10} \\ u_2, u_2', u_2'' \in H_{20}, \quad v_2', v_2 \in H_{20}. \end{aligned}$$

Les diverses hypothèses du théorème (LS) sont vérifiées, on peut l'appliquer; pour  $\omega > \omega_0$  quel que soit  $\lambda > 0$ ; il existe une solution périodique de période T.

III. — Considérons maintenant l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = g(\lambda y) + e(t) \quad \text{IV}$$

1° Avec  $a \neq 0, b \neq 0, a, b$  réels,  $|a| = A, |b| = B$ .

2°  $g(y)$  fonction continue de  $y$ , quel que soit  $y$

$$H(y) = \frac{g(y)}{y} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |y| \rightarrow 0,$$

$H(y)$  est lipschitzienne au voisinage de 0.

3°  $\frac{g(y)}{y} \rightarrow +\infty$  si  $|y| \rightarrow +\infty$ .

4°  $e(t) \in H_0, \quad \|e(t)\| = \eta.$

On a visiblement  $\|y'\| < \frac{\eta}{A}$  pour toute solution de IV.

Si on écrit  $y = u + \alpha, y' = u'$

$$u \in H_0 \quad \text{on a} \quad |u| < \eta \frac{T}{A}$$

pour  $0 \leq t \leq T.$

La condition  $g(\lambda y) - by \in H_0$  déduite de IV montre que pour les valeurs de  $(\lambda) \lambda_1, \alpha$  est inférieur au plus grand nombre positif  $\alpha_1$  défini par  $g\left(\lambda_1 \left[\alpha_1 - \frac{\eta T}{A}\right]\right) - B\alpha_1 = 0$  on trouve de même un norme inférieur.

On écrit alors l'équation sous la forme  $x = \mathcal{F}(X)$  avec

$$\begin{aligned} x'' + ax' + bx &= g(\lambda X) + e(t) \\ \mathcal{E} &= H \end{aligned}$$

d'après (LS) la solution périodique existe quel que soit  $\lambda,$  et quel que soit  $T.$

On peut trouver quelques difficultés dans l'application de (LS) du fait qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir  $\mathcal{F}$  complètement continue, une extension de (LS) va être donnée qui permettra de résoudre de nouveaux problèmes.

*2<sup>e</sup> partie: Extension de la Méthode de Leray-Schauder.*

On considère un espace linéaire  $S$  normé, complet, séparable. Soit  $D'$  l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires et continues.

$$D' \subset D \quad \text{espace dual de } S.$$

Considérons dans  $D'$  la Boule fermée, centrée à l'origine des fonctionnelles normées par 1.

On sait que l'on peut construire un ensemble dénombrable de fonctionnelles telles que <sup>(4)</sup>.

1°  $\mathcal{A} = \{A_n\}$  avec  $\|A_n\| \leq 1.$

<sup>(4)</sup> Cf. Schauder: *Der Fixpunktsatz.*

2° On peut faire correspondre à toute fonctionnelle  $\|A\| \leq 1$  une suite  $A_{nm}$  extraite de  $A_n$  telle que limite de  $A_{nm}(x)$  soit  $A(x)$  pour  $m \rightarrow \infty$  pour tout  $x \in S'$ . Cela étant, on choisit une suite de nombres réels.  $\{\varepsilon_n\}$  tendant vers zéro; on construit la suite

$$C_n(x) = \varepsilon_n A_n(x) \quad n = 1 \dots$$

on désigne par  $\Psi'(x)$  cette suite.

Schauder établit que la correspondance  $x, \Psi'(x)$  est biunivoque; elle transforme tout ensemble borné, faiblement compact et faiblement fermé de  $S$  en un ensemble borné, compact et fermé de  $S'$  espace des suites convergeant vers zéro <sup>(5)</sup>.

Il en résulte que si on écrit l'équation

$$x = \mathcal{F}(x, \lambda) \quad x \in S$$

sous la forme

$$X = \Psi' \mathcal{F}(\Psi^{-1} X, \lambda) \quad X \in S'$$

le théorème de Leray-Schauder est valable si l'on remplace  $H'$  par  $H''$ .

$H''$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{L'espace } \mathcal{E} \text{ étant de plus séparable,} \\ \text{en chaque point } \lambda \text{ de } K, \mathcal{F}(x, \lambda) \text{ transforme tout ensemble} \\ \text{borné de points } x \text{ de } \mathcal{E} \text{ en un ensemble faiblement} \\ \text{compact.} \end{array} \right.$

*Applications.* — On peut prendre pour  $S$  l'espace de Hilbert  $H$ . Nous allons utiliser le théorème de Leray-Schauder sous cette forme plus générale pour montrer l'existence de solutions périodiques dans deux nouveaux cas (rencontrés en Physique).

### I. — Équation

$$y'' + ay' + \frac{y}{y+k} = \lambda e(t) \quad (\text{cf. Huaux})$$

$a, k$  constantes réelles

$$e(t) \in H_0$$

soit en définitive pour nous

$$I' \quad y'' + ay' + \frac{y}{\lambda y + k} = e(t)$$

<sup>(5)</sup> Elle est aussi bicontinue.

on a visiblement

$$\|y'\| < \frac{\eta}{A} \quad A = |a|.$$

Multiplions par  $y''$  et intégrons entre 0 et T

$$(1) \quad \int_0^T y''^2 dt + \int_0^T \frac{yy''}{\lambda y + k} dt = \int_0^T e(t)y'' dt.$$

On tire de

$$(2) \quad \left[ \frac{yy'}{\lambda y + k} \right]_0^T = \int_0^T \frac{yy''}{(\lambda y + k)} dt + k \int_0^T \frac{y'^2}{(\lambda y + k)^2} dt$$

d'où

$$(3) \quad \int_0^T y''^2 dt - k \int_0^T \frac{y'^2}{(\lambda y + k)^2} dt = \int_0^T e(t)y'' dt$$

on en tire la conclusion suivante pour  $k < 0$

$$\|y''\| \leq \eta.$$

On vérifie de plus en écrivant l'équation sous la forme

$$(4) \quad \lambda yy'' + ky'' + ay'(\lambda y + k) + y = e(t)(\lambda y + k)$$

que

$$(5) \quad -\lambda \int_0^T y'^2 dt + \int_0^T y dt = \int_0^T e(t)y dt$$

si on écrit

$$\begin{aligned} y &= u + \lambda \alpha \\ u &\in H_0, \quad \lambda > \lambda_1 > 0 \\ |\alpha| &\leq \eta^2 + \frac{\eta^2}{\lambda_1 \omega}. \end{aligned}$$

L'équation s'écrit alors en définitive

$$(6) \quad \begin{aligned} ky'' + ak y' + y &= -\lambda yy'' - ayy' + e(t)(y + k), \\ y &= u + \lambda \alpha, \\ Y &= U + \lambda \alpha. \end{aligned}$$

On la met ainsi sous la forme

$$(u'', \alpha) = \mathcal{F}(U'', \alpha, \lambda).$$

Vu l'extension de Leray-Schauder, on peut affirmer l'existence d'une solution périodique quel que soit  $\lambda$ , pourvu que  $k < 0$ .



II. — Équations du Phénomène Bethenod (cf. Rocard; Faure)

$$\text{II} \quad Ax'' + Bx' + Cx = \frac{k}{2} i^2$$

$$\text{III} \quad \frac{d}{dt} [(L_0 + kx)i] + Zi = \lambda e(t)$$

A, B, C, K,  $L_0$ , Z sont des constantes positives.

On change ici  $x$  en  $\lambda^2 x$ ,  $i$  en  $\lambda i$  on a les équations

$$(1) \quad Ax'' + Bx' + Cx = \frac{k}{2} i^2$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} [(L_0 + k\lambda^2 x)i] + Zi = e(t)$$

Pour toute solution du système de période T on a clairement  $i \in H_0$ . On en déduit également

$$(3) \quad x \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} t_n \alpha_n e^{ni\omega t} \quad \text{avec} \quad i^2 \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{ni\omega t},$$

$$(4) \quad x' \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} t'_n \alpha_n e^{ni\omega t} \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \alpha_{-n}^*,$$

$$(5) \quad t_n = \frac{\frac{k}{2}}{C - An^2\omega^2 + Bn\omega i},$$

$$(6) \quad t'_n = \frac{k}{2} \frac{n\omega i}{C - An^2\omega^2 + Bn\omega i}.$$

Posons

$$(L_0 + k\lambda^2 x)i = u.$$

La seconde équation prend la forme

$$(7) \quad \frac{du}{dt} + \frac{Zu}{L_0 + k\lambda^2 x} = e(t)$$

après multiplication par  $u'$  et intégration entre 0 et T on a

$$(8) \quad \int_0^T u'^2 dt + Z \int_0^T \frac{uu' dt}{L_0 + k\lambda^2 x} = \int_0^T e(t)u' dt$$

or on a

$$(9) \quad 2 \int_0^T \frac{uu' dt}{L_0 + k\lambda^2 x} - k\lambda^2 \int_0^T \frac{u^2 x' dt}{(L_0 + k\lambda^2 x)^2} = \left[ \frac{u^2}{z_0 + k\lambda^2 x} \right]_0^T = 0$$

d'où

$$(10) \quad \int_0^T u'^2 dt + \frac{k\lambda^2 Z}{2} \int_0^T \frac{u^2 x'}{(L_0 + k\lambda^2 x^2)^2} dt = \int_0^T u' e(t) dt$$

en revenant aux notations initiales

$$(11) \quad \int_0^T \frac{u^2 x' dt}{(L_0 + k\lambda^2 x^2)^2} = \int_0^T i^2 x' dt.$$

D'après la formule (4)

$$\int_0^T i^2 x' dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t'_n \alpha_n \alpha_{-n}$$

soit ici

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} n\omega i(t_n - t_{-n}) \alpha_n \alpha_{-n} = \omega^2 k B \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n^2 \alpha_n \alpha_{-n}}{(A - Cn^2 \omega^2)^2 + B^2 n^2 \omega^2}$$

qui est positif.

Il en résulte que  $\|u'\| < \eta$ .

On verrait de même en multipliant l'équation (2) par  $i$  et en intégrant entre 0 et T en opérant d'une manière analogue à la précédente que  $\|i\| \leq \frac{\eta}{Z}$  et que  $\|x'\|$  est borné également d'où  $\|x\|$  et  $\|u\|$  pour  $\lambda < \lambda_2$ . Dès lors en écrivant les équations sous la forme

$$(12) \quad L^2(Ax'' + Bx' + Cx) = \frac{K}{2} U^2 - (AX'' + BX' + CX)(K^2\lambda^4 X^2 + 2KL_0\lambda^2 X)$$

$$(13) \quad L_0 \frac{du}{dt} + Zu = e(t)(L_0 + K\lambda^2 X) - K\lambda^2 X \frac{dU}{dt}$$

$$\left(x, \frac{du}{dt}, u\right) = \mathcal{F}\left(X, \frac{dU}{dt}, U\right) \quad (6)$$

D'après (LS) il existe une solution périodique quel que soit  $\lambda > 0$ . Ces quelques résultats montrent que la majeure partie des théorèmes d'existence de solutions périodiques (solutions forcées) peuvent être obtenues par la méthode de Leray-Schauder.

(6) On pourrait également procéder comme dans le cas précédent.

## BIBLIOGRAPHIE

- FAURE, Vibrations non linéaires Actions asynchrone; cas du Phénomène Bethenod, *C.R.A.S.*, T. 243, pp. 1824-1826.
- FAURE, Solutions périodiques de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires dépendant d'un paramètre, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, T. 40, fasc. 3, 1961, p. 205-232.
- FAURE, Étude de certains systèmes d'équations différentielles à coefficients périodiques. Solutions voisines des positions d'équilibre et applications, *Mémoires Société des Sciences, Arts et Lettres du Hainaut*. Tome 76. (1962).
- GRAFFI, Forced oscillations for several non linear circuits, *Annals of Mathematics*, 1951, T. 54, pp. 262-271.
- HUAUX, Sur l'existence d'une solution périodique de l'équation différentielle non linéaire, *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences Belges; classe des Sciences* (1962), pp. 494-504.
- LERAY Jean et SCHAUDER Jules, Topologie et équations fonctionnelles. *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1934, pp. 45-78.
- ROCARD, Dynamique générale des vibrations.
- SCHAUDER Jules, Der Fixpunktsatz in Funktionall raumen. *Studia Mathematica*, 1930, T. 2, pp. 170-179.
-