ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RENÉ THOM

Généralisation de la théorie de Morse aux variétés feuilletées

Annales de l'institut Fourier, tome 14, n° 1 (1964), p. 173-189
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_173_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 1 (1964) 173-190.

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DE MORSE AUX VARIÉTÉS FEUILLETÉES

par **René THOM**, Strasbourg.

Introduction.

On sait quel puissant moyen de classification des structures différentiables nous est donné par la théorie de Morse, telle qu'elle a été généralisée par des auteurs tels que A. Wallace S. Smale, etc.... Il est naturel de penser que cette méthode pourra également se révéler efficace dans l'étude des structures plus fines que sont les variétés feuilletées. Dans cet exposé, je donne une tentative dans cette voie, qu'il est permis de considérer comme assez peu concluante, et, en tout cas, très incomplète. En effet, je m'arrêterai ici devant le problème essentiel de la théorie, qui est l'apparition de la « récurrence ». Une différence essentielle va en effet séparer notre théorie de la théorie classique : alors que, dans cette dernière, on n'a à considérer qu'un nombre fini de points critiques (classifiés par un entier, l'index) et que les valeurs critiques correspondantes peuvent être supposées isolées, il n'en ira plus de même dans notre cas; d'une part, il sera difficile de classifier les singularités qui vont se présenter « génériquement »; d'autre part, l'ensemble des valeurs critiques est en général infini, non discret, ce qui entraîne qu'au voisinage d'une valeur critique c, le type topologique de la variété feuilletée $f \leqslant c + \varepsilon$ va présenter une infinité de variations (infinité non dénombrable, en général). Je donnerai à la fin quelques remarques sur cette question, liée évidemment au problème de la stabilité structurelle des systèmes dynamiques; j'ai cependant l'espoir que la méthode indiquée pourra fournir une voie d'attaque de cette difficile question.

1° Relation d'équivalence compacte.

Soit M^n une variété différentiable compacte de dimension n, éventuellement à bord; un feuilletage (X) de codimension k dans M est défini par la donnée d'un atlas (U_j) sur M^n, et pour chaque U_j, par la donnée d'une application de rang k : q_j : $U_j \to \mathbf{R}^k$, les q_j devant satisfaire sur une intersection $U_i \cap U_j$ à des conditions évidentes de commutation avec les difféomorphismes de changement de carte dans la source et le but. En un point x du bord V de M^n, s'il existe, on pourra supposer la variété M plongée dans un voisinage ouvert régulier. Dans le produit $M^n \times M^n$ de la variété par elle-même, on forme le graphe (G) associé au feuilletage (X) : un couple (x, y) appartient à (G), si x et y sont deux points de M^n d'une même feuille. Le graphe (G) est une sous-variété de codimension k, contenant la diagonale de $M \times M$, et invariante par la symétrie $(x, y) \to (y, x)$. Toutefois, (G) n'est pas en général une sous-variété propre, c'est-à-dire telle que la topologie induite par le plongement dans $M \times M$ coïncide avec sa topologie de variété. Il n'en est ainsi que si (G) est une sous-variété fermée de $M \times M$, donc compacte; en ce cas l'adhérence d'une feuille est confondue avec cette feuille elle-même. On dira dans ce cas, pour simplifier l'expression, que la relation d'équivalence, ou encore le feuilletage (X) est *compact* (*e*).

Les conditions imposées au graphe (G) d'un feuilletage « compact » sont très restrictives; d'un point de vue homologique notamment, on peut en déduite des conditions pour qu'une section du fibré des $(n\text{-}k)$-plans de M soit l'ensemble des plans tangents à un feuilletage. Supposons, pour l'instant M compacte sans bord; soit $T(\Delta)$ un voisinage tubulaire de la diagonale Δ dans $M \times M$; le quotient par la symétrie $(x, y) \to (y, x)$ du complémentaire $M \times M - T(\Delta)$ est le produit symétrique réduit M_2 de la variété M; M_2 est une variété à bord dont le bord Q est un espace fibré de base Δ et de fibre $PR(n-1)$, espace projectif réel de dimension $n-1$. La donnée d'une section du fibré des $(n\text{-}k)$ plans de M équivaut à la donnée, dans Q, d'une sous-variété W de codimension k, fibrée en $(n\text{-}k\text{-}1)$ plans projectifs sur la diagonale (Δ) : chaque fibre de Q contient la fibre de W comme sous-espace projectif de codimension k. En considérant un voisinage régulier de W dans Q, on peut associer à W une application g: $Q \rightarrow MO(k)$, où $MO(k)$ est la compactification d'Alexandroff du fibré universel en k-boules. S'il existe dès lors un feuilletage « compact » dont W est l'ensemble des $(n-k)$-plans tangents, le quotient par symétrie du graphe (G), soit (g) est une variété à bord dans M_2, de bord W. Une condition nécessaire pour qu'il existe un tel feuilletage compact est donc que l'application g : $Q \rightarrow MO(k)$ admette une extension $g_1 = M_2 \rightarrow MO(k)$. On pourrait encore raffiner cette condition par la remarque suivante; soit A le sous-espace du produit symétrique réduit de M_2 par lui-même constitué des couples (x, y) (x, z) dont les deux composantes ont une et une seule coordonnée commune. Il existe une application canonique de A dans M_2, définie par la formule : ψ : $(x, y), (x, z) \rightarrow (y, z)$. Dès lors le graphe (g) a la propriété que son intersection par A donne pour image par ψ (g) lui-même, propriété qu'il est possible d'exprimer sur les classes d'homologie; si z est la classe d'intersection de $(g \times g)$ par A dans $(M_2)_2$ alors $\psi(z) = g$.

Ces conditions homologiques portant sur la section (W) sont vraisemblablement de peu d'intérêt; en effet, leur emploi est malaisé, car le calcul de l'homologie d'un produit symétrique réduit M_2 n'est pas chose simple; de plus elles ne donnent que des conditions nécessaires pour l'existence d'un feuilletage compact, ce qui est une restriction excessive lorsqu'on s'intéresse seulement à l'existence d'un feuilletage associé à une classe de section du fibré des $(n-k)$-plans.

2° Théorie de Morse sur une variété feuilletée.

Soit M^n une variété différentiable douée d'un feuilletage (X) de codimension k; on fait choix tout d'abord sur M^n d'une fonction f standard (« nice function » au sens de Smale); les points critiques de f sont non dégénérés et les valeurs de f en ces points sont ordonnées par index croissant (on les supposera ici toutes distinctes). Soit (G) le graphe, dans le produit M, du feuilletage (X). Une première idée, pour généraliser la théorie de Morse, consiste à étudier, sur la variété (G), la fonction g définie par $g(x, y) = \text{Sup}\ (f(x), f(y))$.

Cette fonction (qui n'est d'ailleurs différentiable que par morceaux) va présenter des points critiques sur (G) dans les cas suivants :

1° $f(x) = f(y)$, et $df(x) = 0$;

2° $f(x) = f(y)$, et f est stationnaire en x sur la feuille de x, en y sur la feuille de y. Lorsqu'on déplace (x) transversalement au feuilletage dans le sens f décroissant, il se peut que y se déplace dans le sens f croissant, de sorte que g admet en (x, y) un minimum relatif. On voit donc qu'outre les points critiques de g associés naturellement à ceux de f, il existera des points critiques de g — au sens topologique — correspondant à *certaines* feuilles bitangentes à une variété de niveau $f = c$. Des exemples simples (systèmes différentiels sur le tore) montrent que, si O est la valeur minimum de f, il est possible que g ait une infinité de points critiques pour $g < \varepsilon$. Pour éviter, au moins au début, l'apparition et l'accumulation d'une infinité de valeurs critiques, il est préférable d'adopter la convention suivante : Dans la variété à bord $f \leqslant c$ on considère seulement la relation d'équivalence (X_c) définie par la restriction du feuilletage (X) à la variété $f \leqslant c$. On gagne à adopter cette façon d'opérer que, pour d'assez petites valeurs de c, la relation (X_c) est *compacte*. En effet, si c est assez voisin de zéro, l'inégalité $f \leqslant c$ définit une boule toute entière située dans une carte U_i du feuilletage, et convexe dans cette carte. Aussi la projection π est-elle sur cette boule une relation d'équivalence compacte.

En désignant par $M(c)$ l'ensemble $f \leqslant c$, on va étudier la variation du type topologique $(M(c), X_c)$ lorsque c varie. Dans ce but, il est tout d'abord nécessaire de préciser l'ensemble (C) des points où l'hypersurface de niveau $f = c$ est tangente au feuilletage (X). Je dis que cet ensemble (C) est « génériquement » une sous-variété sans singularités de dimension $k - 1$. En effet, dans une carte locale U on doit considérer la restriction de la projection : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ à une portion de l'hypersurface de x niveau $f = c$. On doit donc considérer des applications de $\mathbf{R}^{n-1}$ dans $\mathbf{R}^k$ qui admettent une factorisation de la forme : $\mathbf{R}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbf{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}^k$, i injection, π projection linéaire. Comme le corang à la source de l'application $\pi \circ i$ ne peut excéder $n - k$, dimension du noyau de π, le corang au but ne peut excéder un. Réciproquement, toute application de $\mathbf{R}^{n-1}$ dans $\mathbf{R}^k$ de corang plus petit que un (au but) admet localement une factorisation de la forme $\pi \circ i$. Il résulte du lemme de transversalité que le lieu critique d'une telle application est génériquement sans singularités : en effet, les singularités du lieu critique ne se présentent qu'aux points de corang 2 (singularité S_2 dans la terminologie de [1]). Par contre, il y aura lieu de distinguer dans la variété « de contact » C les sous-espaces où le contact n'est plus ordinaire; ces sous-ensembles correspondent aux symboles $S_j \ldots S_1$ de [1], et, en toute généralité, leur classification n'est pas connue; néanmoins, dans les faibles dimensions ($n < 6$, par exemple), cette classification peut être menée à bien : il n'existera alors que les singularités de la forme $(S_1)^j$, correspondant à des sous-variétés sans singularités de codimension j dans (C); la premier cas de singularités plus compliqué se présente avec la singularité S_2S_1 de $\mathbf{R}^5$ dans $\mathbf{R}^4$, donc pour un feuilletage de codimension 4 de $\mathbf{R}^6$.

Bien entendu, lorsque la valeur (c) varie, la variété de contact (C) ne va pas rester isotope à elle-même; elle va subir des modifications que nous préciserons lors de la traversée d'un point critique de la fonction f; mais elle peut également se transformer lors de la traversée de certaines valeurs régulières (a) de f; ceci correspond à une transition générique entre deux formes génériques de (C). Ces transitions génériques se présentent en des points isolés, correspondant à des singularités génériques d'applications : $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}$ qui admettent une factorisation de la forme

$$\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R},$$

avec conservation de la dernière coordonnée t. La description de ces points de transition ne peut être faite explicitement que pour les petites dimensions ($n < 6$); nous la ferons brièvement plus bas dans le cas $n \leqslant 3$.

On sera amené à considérer trois espèces de valeurs critiques pour f.

1° Valeurs critiques de premières espèce.

Ce sont les valeurs critiques de f au sens usuel; on suppose que chaque valeur critique c correspond à un seul point critique O, quadratique non dégénéré. On appellera type du point critique O le nombre p des carrés négatifs, index la différence $|-p+(n-p)|$ du nombre des carrés positifs moins le nombre de carrés négatifs de la différentielle seconde d^2f en O. On suppose de plus que la feuille de X passant par O coupe transversalement le cône quadratique tangent à l'hypersurface de niveau $f = f(O)$; cette condition, trivialement réalisée lorsque $p = 0$ ou n, pourrait d'ailleurs être satisfaite après une déformation arbitrairement petite de la fonction f. On peut trouver autour de O une carte locale de coordonnées $x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots u_q$ dans laquelle les équations du feuilletage (X) sont : $u_j = u_{j_0}$, et pour laquelle $f - f(O)$ prend la forme :

$$f - f(O) = -x_i^2 - \cdots - x_s^2 - u_1 \cdots - u_t^2 \\ + x_{s+1}^2 + \cdots + x_r^2 + \cdots + u_{t+1}^2 + \cdots + u_q^2.$$

L'entier s, plus petit que r et p, sera appelé le X-*type de* O. La « sphère d'attachement » associée à O, d'équation :

$$x_1 + \cdots x_s^2 + u_1 + \cdots u_t^2 = \varepsilon,\ x_{s+j} = u_{t+i} = 0$$

se présente comme le joint de deux sphères : une $(s-1)$-sphère contenue dans la feuille de O, et une $(t-1)$-sphère située dans un plan transverse au feuilletage. Le lieu (Γ) de contact est dans la carte le q-plan $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$; la restriction de f à la variété (Γ) présente donc en O un point critique de type $t = p - s$. Ceci décrit par suite la variation de la variété de contact (C) lors de la traversée du point critique O.

2° Valeurs critiques de seconde espèce.

Soit toujours $(x_1, \ldots, x_r, u_1, u_{2_i}, \ldots, u_q)$ une carte locale dans laquelle $u_j = c_j$ représente les feuilles de (X); si O est un point régulier de l'ensemble (Γ) de contact, on peut supposer que f se met sous la forme : $f = u_1 + g_2(x_j) + \Sigma\, c_j^r u_r x_j + \cdots$.

Le plan tangent à (Γ) défini par les équations : $\dfrac{\partial g_2}{\partial x_i} + \Sigma\, c_i s\, u_s + \cdots = 0$ ne contient la feuille $u_j = 0$ que si la forme quadratique g_2 est dégénérée; dans la situation générique, g_2 est de rang $(r-1)$ et s'écrit :

$$g_2 = -\Sigma(x_i)^2 + \Sigma(x_j)^2 + (x_{r+1})^3 + \cdots$$

et $f - f(O) = u_1 + g_2 + u_1 x_{r+1} + \Sigma\ c_j^r u_r x_j$. Alors on peut paramétrer localement (Γ) par les q variables $u_2, u_3 \ldots u_q$ et x_{r+1}. La restriction de f à (Γ) débute, au second ordre, par l'expression :

$$f = -2x_r^2 - \sum_i \Big(\sum_s c_i^s u_s\Big)^2 + \sum_j \Big(\sum_t c_j^t u_t\Big)^2 + \cdots.$$

Par suite $f|(\Gamma)$ admet en O un point critique (en général non dégénéré), dont le type ne peut excéder celui de la forme g_2 (de même pour l'index); de plus, O est un point de la variété de transition $s_1(\Gamma)$ qui sépare la strate de type r de la strate de type $(r+1)$ dans (Γ); et la restriction de f à cette variété $S^1(\Gamma)$ admet également 0 pour point critique non dégénéré.

Ceci donne la description du type le plus simple (générique 1) de point critique de seconde espèce; il peut en exister d'autres, également « génériques », situés sur les variétés « exceptionnelles » $(S_1)^k\,(\Gamma)$: ce cas se présente notamment pour les champs de vecteurs.

3° Valeurs critiques de troisième espèce.

Soit, dans la variété à bord $M(c)$ $(f \leqslant c)$, $K(C)$ l'ensemble saturé par (X_c) de la variété de contact C. L'ensemble $K(c)$ ainsi obtenu est un « ensemble stratifié » (Voir [2] pour la définition); en supposant toujours, en ce qui suit, $K(C)$ compact, on forme l'intersection de $K(C)$ avec C dans le bord $f^{-1}(c)$ de $M(c)$; c'est en général un ensemble stratifié, qu'on rajoute par subdivision à la stratification de $K(C)$. On itère cette construction, et, pour raison de dimension le processus se termine; on désignera encore par $K(C)$ l'ensemble saturé ainsi stratifié. On appellera *valeur critique de troisième espèce* toute valeur (c) pour laquelle la stratification de $K(c)$ change de type topologique. De manière précise, si l'on forme l'ensemble $K(\Gamma) = U_c K(C)$, pour toutes les valeurs c d'un intervavalle] a,b [il n'existe aucune valeur critique dans cet intervalle, si l'application (induite par f) $K(\Gamma) \to]\,a, b[$ est stratifié (au sens de [2]), la stratification de l'intervalle-but étant triviale (sans sommets entre a et b).

Lorsque l'ensemble $K(C)$ n'est plus compact, la notion même de valeur critique cesse d'être définie; cependant, dans certains cas, où l'ensemble K(C) admet une stratification infinie structurellement stable une généralisation n'apparaît pas impossible.

Exemples. — Systèmes différentiels en dimension deux et trois.

On désignera, plus généralement, par n la dimension de l'espace et par k la codimension du feuilletage considéré ($n > k$).

L'ensemble (C) consiste de points isolés sur la variété $f = c$; les valeurs critiques de seconde espèce correspondent à la création (ou à l'annihilation) d'une paire de points de (C); elles sont associées aux points où les feuilles ont un contact inflexionnel avec les lignes de niveau de f.

(1) $$n = 2, \qquad k = 1.$$

L'intersection $K(C) \cap f^{-1}(c)$ consiste génériquement de points isolés; il y a *valeur critique de troisième espèce*, lorsque deux de ces points viennent à coïncider.

(2) $$n = 3, \qquad k = 2.$$

L'ensemble critique (C) est une courbe régulière, contenant des points isolés où le champ est tangent à (C). Ces points correspondent à la singularité $(S_1)^2$ du point-fronce. Les valeurs critiques de seconde espèce correspondent à l'apparition (ou à la disparition) d'une courbe simple de (C) comportant deux points-fronce, ou encore au raccord de deux telles courbes par l'intermédiaire d'un point de type-col.

L'ensemble $K(C) \cap f^{-1}(c)$ est un ensemble de courbes comportant des rebroussements ordinaires sur les trajectoires des points-fronce. Il y aura *valeur critique de troisième espèce* lorsque cet ensemble de courbes coupe non transversalement la courbe (C).

(3) $$n = 3, \qquad k = 1.$$

Pour $k = 1$ (feuilletages de dimension deux dans R^3), l'ensemble (C) se compose de points isolés; il y a valeur critique de seconde espèce lorsque deux de ces points viennent à coïncider (pour se détruire, ou se créer). L'ensemble $K(C) \cap f^{-1}(C)$ est un ensemble de courbes simples (admettant éventuellement des points doubles quadratiques aux points de (C); il y a *valeur critique de troisième espèce* lorsque ces points de (O) sont des points triples de $K(C) \cap f^{-1}(c)$.

Il importe d'observer que l'ensemble $K(C) \cap f^{-1}(c)$ doit être supposé saturé par rapport à la relation (X_c); par exemple, dans le cas $n = 3$, $k = 2$, le lieu (C) est supposé une courbe simple; alors $K(C) \cap f^{-1}(c)$ est en général une autre courbe simple (C′) qui coupe (C) transversalement; soit x le point d'intersection ainsi défini; il y a lieu d'ajouter à la stratification de K(C) la trajectoire de x, donc de considérer aussi le point $x' \in (C')$ qui est l'autre extrémité de cette trajectoire. Si pour une certaine valeur de c, le point x' vient à coïncider avec x, on aura une valeur critique de troisième espèce d'un type particulièrement important : en effet, ceci veut dire que la trajectoire issue de x est fermée. De telles valeurs critiques, caractérisées par la coïncidence de deux points x, x' situés sur la même feuille de (X_c) seront dites *valeurs de coïncidence.*

Théorie de Morse sur une variété feuilletée (M, X).

Soit f: $M \to R$ une fonction différentiable « générique » sur la variété feuilletée (M, X); le lieu (Γ) des contacts des feuilles avec les variétés de niveau de f est une variété sans singularités (sauf aux points critiques de f) de dimension q égale à la codimension de X. Il existe une sous-variété $S_1(\Gamma)$ telle que, sur le complémentaire $\Gamma - S_1(\Gamma)$, le type de la restriction (strate) de f aux feuilles de X reste constant; à chaque composante de $\Gamma - S_1(\Gamma)$ on peut par suite associer un entier k compris entre O et $n - q$, le X-*type* de cette strate.

On munit ensuite M d'une métrique riemannienne qu'on normalise au voisinage de (Γ) de telle manière que, dans chaque feuille de (X), la métrique soit la métrique euclidienne de la carte associée. Dans ces conditions, on attache à tout point m de M le point d'aboutissement de la trajectoire du gradient de *f restreinte à la feuille de m*; un tel point est nécessairement un point de (Γ). On définit ainsi une stratification de la variété M, dont les strates sont de trois espèces :

1°) Le point d'aboutissement de la trajectoire $g(m)$ est un point critique de f, de X-type k; la strate correspondante est une k-boule ouverte.

2°) Le point extrémité de $g(m)$ est un point régulier de Γ, situé dans une strate ouverte U (c composante connexe de

$\Gamma - S_1(\Gamma)$; alors la strate correspondante, formée de tous les points dont les trajectoires aboutissent à U, est isomorphe au produit $U \times D_s$, où D_s est une s-boule ouverte, si le type de la strate U est égal à (s).

3°) L'extrémité de $g(m)$ est un point de $S_1(\Gamma)$; on a affaire à une strate exceptionnelle. En un point ordinaire de $S_1(\Gamma)$, l'ensemble des trajectoires aboutissant à ce point forme une demi-boule, dont la cohomologie à supports compacts est nulle.

Inégalités de Morse. — Soit $P(U, t)$ le polynôme de Poincaré de la cohomologie *à supports compacts* de la strate U; les inégalités classiques de M. Morse s'expriment comme suit : soit $P(M, t)$ le polynôme de Poincaré de la variété M; la différence : $\Sigma P(U, t) - P(M, t)$ est divisible par $(1 + t)$, et le quotient est un polynôme à coefficients *entiers positifs*.

Supposons que, dans notre cas, il n'existe sur $S_1(\Gamma)$ que des points de deuxième expèce ordinaires; les strates associées ont alors une cohomologie nulle (parce que les trajectoires aboutissant en chaque point de $S_1(\Gamma)$ forment une demi-boule). Si l'on désigne par c_k le nombre des points critiques (première espèce) de X-type k, par d_k la somme $\Sigma b_{k-i}(U)$ des nombres de Betti (cohomologie à supports compacts) des strates de Γ de X-type i, alors le polynôme $Q(t) = \Sigma(c_k + d_k)t^k$ est tel que $Q(t) - P(t)$ soit divisible par $(1 + t)$ avec un quotient à coefficients positifs.

Feuilletages stratifiés simples.

On suppose que, pour la variété à bord (M, X), l'ensemble K(C) saturé de l'ensemble (C) de contact sur le bord est stratifié; de cette manière, l'ensemble Γ se trouve également stratifié. On suppose que, sur chaque feuille, la fonction f ne présente qu'un nombre fini de points critiques. On construit dès lors un graphe (G) comme suit : A toute strate de X-type zéro dans Γ, on associe un sommet; à toute strate de X-type un, une arête dont les extrémités sont les sommets associés aux strates de X-type zéro qui contiennent les origines des deux trajectoires de gradient aboutissant en un point de cette strate. On dira que le feuilletage (M, X) est *simple*, si le graphe ainsi obtenu est un arbre (ou une réunion finie d'arbres). On peut associer (non canoniquement) à chaque arbre du graphe une strate de X-type zéro Γ ou du bord ∂M, et, entre ces strates il y a des relations d'incidence qui font de leur réunion un ensemble stratifié S; alors la relation d'équivalence définie par (X) dans M est alors définie par une application stratifiée $q : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{S}$ toute feuille de X est la contre-image $q^{-1}(s)$ d'un point s de S. Une feuille (F) de (X) correspond évidemment à un arbre du graphe (G); cet arbre n'est autre — par construction — que le 1-squelette de la subdivision cellulaire définie par les lignes de gradient de la restriction f F; par suite, toute feuille F est compacte et *simplement connexe*.

Supposons que de plus, toute strate de l'ensemble stratifié K(c) soit définie transversalement (*i.e.*) comme intersection régulière ou par une application auxiliaire transversale dans un espace de jets. Il en ira de même alors si l'on perturbe assez peu le feuilletage (X), ou si l'on varie d'assez peu la valeur c de f; le graphe (G) demeure isomorphe à lui-même. On remarque qu'alors il est possible d'appliquer le théorème 3 de [2] relatif à l'invariance du type topologique des applications stratifiées sans éclatement; en effet, l'application stratifiée q: M $\rightarrow$ S est sans éclatement, car le corang de q sur toute strate est égal à la dimension (n-q) des feuilles de X, sauf éventuellement sur certaines strates du bord ∂M, de corang zéro; mais ces strates « extrémales » forment un sous-ensemble stratifié fermé envoyé isomorphiquement par q dans le bord de S. Ceci permet de conclure :

THÉORÈME 1. — *Si la variété feuilletée* M(c)/X(c) *est stratifiée simple, la variété* M(c')/X(c'), *où c' est assez voisin de c, est également stratifiée simple et a même type topologique que* M(c)/X(c).

THÉORÈME 2. — *Si* M/X *est stratifiée simple, pour tout feuilletage* X′ *assez voisin de* X *(en* C^q *topologie)*, M/X′ est *stratifiée simple et a même type topologique que* M/X. ($q \geqslant 1$)

Ces théorèmes montrent que, tant qu'on ne franchit aucune valeur critique à partir d'une valeur c pour laquelle le feuilletage est stratifié simple, la variété feuilletée reste stratifiée simple, et conserve le même type topologique. On remarquera que dans le cas d'une fonction f correcte, prenant la valeur O à son minimum, alors, pour c assez petit, la variété $M(c)$, $X(c))$ est stratifiée simple, car elle a le type topologique d'une boule convexe projetée linéairement sur un plan de coordonnées. Le théorème 2 montre que les feuilletages stratifiés simples ont la propriété de stabilité structurelle.

On va s'efforcer de préciser l'effet, sur une structure feuilletée stratifiée simple, de la traversée de points critiques des diverses espèces.

1° Point critique de première espèce.

Si pour $f \leqslant c - \varepsilon$, le feuilletage (M, X) est stratifié simple, il existe pour le bord $V_{c-\varepsilon}$ de $M(c)$ une stratification et une application q : $V \to S$, stratifiée, qui induit la relation d'équivalence définie par $X(c-\varepsilon)$; considérons la variété à bord $c-\varepsilon < f < c+\varepsilon$ (c valeur critique $c=f(O)$); dans cette variété l'ensemble (Γ) de contact est stratifié, ainsi que le saturé $K(\Gamma)$ dans $c-\varepsilon < f < c+\varepsilon$. Dans le cas générique, la restriction de $K(\Gamma)$ à $V_{c-\varepsilon}$ est un ensemble stratifié de $V_{c-\varepsilon}$ transversal à la stratification déjà donnée sur V par $X(c-\varepsilon)$; on forme la stratification intersection sur $V_{c-\varepsilon}$ qu'on sature de part et d'autre, sur $M(c-\varepsilon)$ pour $X(c-\varepsilon)$ d'une part, et sur $\{C-\varepsilon \leqslant f \leqslant c+\varepsilon\}$ d'autre part. Je dis que, ce faisant, on obtient encore une stratification finie, sauf dans le cas où le point O est de X-type égal à un. Si, en effet, le X-type de O est différent de un, il n'existe x dans $C-\varepsilon \leqslant f \leqslant c+2$ aucune strate de Γ de type un, sauf peut-être les prolongements de strates de même type coupant transversalement $V_{c-\varepsilon}$ et qui contiennent pas O. Or il est clair que seul importe de considérer un voisinage du point critique O. Soient k est le type de O, et r le X-type de O; la traversée de O équivaut topologiquement à adjoindre à $M(c-\varepsilon)$ un produit de disques $D^k \times D^{n-k}$; la portion du bord de la forme $D^k \times D^{n-k}$ se trouve identifiée avec un voisinage tubulaire normal de la « sphère d'attachement » S^{k-1} définie par la nappe de gradient aboutissant en O; mais cette identification doit être compatible avec le feuilletage (X); l'examen de la carte locale montre que les quotients par la relation (X) dans la *carte* sont :

		Pour le voisinage $S^{k-1}D^{n-k}$;	pour le produit $D^k \times D^{n-k}$
1°	$r = 0$	$S^{k-1} \times D^{q-k}$	$D^k \times D^{q-k}$
2°	$r = 1$	$S^{k-1} \times D^{q-k}$	$D^{k-1} \times D^{q-k+1}$
3°	$r > 1$	$D^{k-r} \times D^{q-k+r}$	$D^{k-r} \times D^{q-k+r}$

On constate sur ce tableau que dans un seul cas seulement, à savoir $r = 1$, la traversée du point critique induit dans le quotient local une identification (à savoir, ici, l'identification $S^{k-1} \to D^{k-1}$ par projection sur le plan équatorial); dans le cas 3°) le quotient n'est pas affecté par la traversée de O; dans le cas 1°) on rajoute au quotient un disque D^k de nouvelles feuilles, le bord ∂D^k étant donné. Par suite, dans les cas 1°) et 3°), l'application stratifiée q: $M(c - \varepsilon) \to S$ s'étend en une application stratifiée q': $M(c + \varepsilon) \to s'$, où $S' = S$ dans le cas 3°), et $S' = S \cup D^q$ dans le cas 1°). Dans le cas 2°), on ne peut rien dire « a priori »: il est possible en effet que le saturé global $K(\Gamma)$ ne soit plus un ensemble stratifié fini: en pareil cas, il existe dans l'intervalle $]c - \varepsilon, c]$ une infinité de valeurs critiques de troisième espèce s'accumulant vers c.

THÉORÈME 3. — *Soit f une fonction sur la variété feuilletée* (M, X); *si c est une valeur critique de première espèce associée à un point critique* O *de* X-*type différent de un, alors, si* $M(c - \varepsilon)$, $X(c - \varepsilon)$ *est stratifiée simple,* $M(c + \varepsilon)$, $X(c + \varepsilon)$ *est stratifiée simple, et le type topologique (stratifié) de* $M(c + \varepsilon)$, $X(c + \varepsilon)$ *est complètement défini par la restriction de l'application q:* $M(c - \varepsilon) \to S$ *à la « sphère d'attachement » du point* O.

2° Valeurs critiques de seconde espèce.

Soit O un point critique de seconde espèce, du type ordinaire décrit plus haut; on voit de suite qu il n existe au voisinage de O de strate de type un que dans le cas des points de transition de X-type (0,1) ou (1,2); ce sont donc là les deux seuls cas pouvant conduire à une identification locale dans l'espace des feuilles. Or, dans ces deux cas, l'examen de la carte locale montre que les identifications imposées par les strates de type un mettent toujours en jeu une « nouvelle » strate de type zéro; l'identification n'opère donc pas dans

$f = c - \varepsilon$. On pourrait également le voir en remarquant que, quel que soit m, l'hypersurface $f = m$ se projette surjectivement sur l'espace des u_i qui est l'espace quotient local (espace des feuilles). Ce caractère surjectif tient au fait qu'on a à résoudre une équation du troisième degré en (x_r), laquelle admet toujours une racine réelle, quelles que soient les valeurs attribuées aux autres variables. On en conclut donc que la traversée d'un point de deuxième espèce du type ordinaire ne modifie pas le caractère stratifié simple du feuilletage. Le même raisonnement ne serait plus valable pour des points de type plus compliqués : par exemple pour un point de type $S'S(\Gamma)$ dans le cas d'un système différentiel on a une équation du 4° degré en (x). Il y aurait donc lieu de procéder à une étude particulière de ces cas.

Précisons encore le point suivant : dans le cas ordinaire, où on a à résoudre une équation du troisième degré en (X_r), il est fort possible que l'espace des feuilles ne soit pas l'espace R^q des variables (u_i) mais un espace étalé sur R^q; pour une valeur a donnée, l'ensemble $f \leqslant a$ découpe sur toute feuille au plus deux composantes connexes; on pourra donc obtenir, pour a négatif par exemple, un feuillet supplémentaire (Φ) de l'espace des feuilles F qui lorsque a tend vers la valeur critique $c = 0$, se réduit au point origine $(u_i = 0)$; en effet, pour $a > c$, l'équation du troisième degré n'a qu'une racine réelle et l'espace des feuilles locales est isomorphe à R^q. Il résulte de là que les identifications opérées sur l'espace des feuilles sont sans importance, car elles ne mettent en correspondance avec les feuilles de X données dans $M(c - \varepsilon)$ que des feuilles du feuillet local $\Phi_i(F)$; or puisque ces feuilles peuvent par déformation continue lorsque ε tend vers zéro se résorber en O, elles n'ont aucune connexion préexistante avec les feuilles de $M(c - \varepsilon)$. Ce « raisonnement » est également valable si l'on renverse le sens de variation de la fonction f. On pourra le vérifier explicitement sur l'équation $f = u + (x)^3 - ux$.

3° Valeurs critiques de troisième espèce.

Une description explicite des singularités de troisième espèce semble hors de portée; bornons-nous, pour simplifier, au cas d'un système différentiel (M, X); dans $M(a)$, on a une variété de contact formée de composantes connexes (C_i); il peut arriver que $K(C_i)$ ne rencontre pas C_j, mais que, pour une valeur $a' > a$, ces deux variétés sont en contact dans le bord $M(a')$ en un point $x \in M(a')$; pour une valeur $a'' > a'$, ces deux variétés se couperont suivant une petite sphère (s); si le X-type de C_j est répulsif, ceci peut avoir pour effet de créer de nouvelles stratifications dans l'espace $K(\Gamma)$. Par exemple, dans un autre lieu de $M(a'')$, un petit disque limité par une sphère s' dans $K(s)$. De telles valeurs critiques, qui n'ont pour effet que de subdiviser de manière finie des strates existantes (on pourrait les appeler: valeurs de contact), ne modifient pas le caractère stratifié simple d'une variété feuilletée.

Il peut arriver, toutefois, que des valeurs critiques de contact $c_1, \dots c_k$, du type décrit plus haut, s'accumulent vers une valeur « limite » a. Alors la stratification de $K(\Gamma)$ acquiert des strates de plus en plus fines, en sorte que, pour $f \leqslant a$, on n'a plus, en général, de stratification finie simple. En particulier: si F est une feuille compacte, et si un élément du groupe fondamental $w \in \pi_1(F)$ opère dans l'holonomie de cette feuille comme élément d'ordre infini, alors la plus petite valeur a de f pour laquelle on peut réaliser dans $M(a)$ un lacet de la classe (w) est nécessairement point d'accumulation de valeurs critiques de troisième espèce. Une telle valeur correspond parfois à un point critique de première espèce, de X-type égal à un.

Remarques générales et Problèmes ouverts.

Soit (M, X) une variété feuilletée, f une fonction « générique » sur (M, X) admettant zéro pour valeur minimum; on a vu que pour c assez petit, la variété $(M(c), X(x))$ est stratifiée simple; cette situation demeurera tant qu'on ne franchit que des valeurs critiques de première espèce de X-type différent de un, des valeurs « ordinaires » de seconde espèce, et des valeurs de contact de troisième espèce. Cette situation cessera, en général, après traversée d'une valeur limite, valeur d'accumulation de valeurs critiques de troisième espèce. On observera que la définition d'un feuilletage stratifié simple fait intervenir une fonction (f) générique; en fait, il s'agit là probablement d'une notion intrinsèque: on peut conjecturer que toute variété à bord feuilletée (le feuilletage étant « générique » sur le bord), dont toutes les feuilles sont compactes et simplement connexes, est stratifiée simple. Comparer à ce sujet le théorème de stabilité (B, II, 16) de G. Reeb dans [3].

Il serait également bon de préciser la (ou les) formes génériques d'apparition de la récurrence dans un feuilletage de codimension donnée; on saurait ainsi — ce qui est la conjecture généralement admise — si l'apparition de la récurrence est subordonnée à l'existence d'une feuille compacte dont l'holonomie est d'ordre infini (au moins dans le cas « générique »).

Enfin, il reste à savoir si, après le passage d'une valeur limite et l'apparition de feuilles non compactes et de récurrence, la notion de stratification perd tout intérêt. Les exemples connus de « configurations structurellement stables » (points homocliniques, etc.) suggèrent qu'il existe en pareil cas une stratification infinie, dont le type topologique global est invariant vis-à-vis des petites perturbations. Il y aurait lieu de savoir également comment varie le type topologique de $(M(c), X(c))$ en fonction du paramètre c. Peut-être n'est-il pas déraisonnable de penser que ce type ne varie que sur un ensemble parfait nulle part dense de valeurs de (c).

Applications à certains systèmes différentiels.

Observons tout d'abord que la théorie précédente s'étend au cas des variétés à bord (M, X); on suppose alors que le feuilletage (X) est générique sur le bord ∂M; on prend alors une fonction f, également générique sur le bord. On a, comme précédemment, la notion de variété stratifiée simple.

Stabilité structurelle des champs de vecteurs gradients.

Soit f une fonction qui ne présente sur M qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés m_j. On suppose que, pour une métrique riemannienne donnée, les nappes de gradients attachées à ces points critiques se coupent transversalement; soit $X = \text{grad}\, f$ ce champ. On enlève de M, autour de chaque point m_i, une boule de rayon r assez petit, et on applique la théorie précédente à la variété à bord $N = M - \bigcup_i D_i$, feuilletée par (X). La fonction choisie est la fonction f donnée. L'ensemble (Γ) se réduit à certaines variétés de contact (i) de X dans les sphères ∂D_j et leurs saturées, qui sont voisines des nappes de gradient, pour r petit; par suite, comme ces dernières, ces divers ensembles se coupent transversalement et leur réunion constitue un ensemble stratifié; le quotient S est représenté par certains ouverts des sphères D et la relation d'équivalence (X) est induite par une application stratifiée $q: N \rightarrow S$; comme ici toute feuille est simplement connexe, on a bien là une stratification simple, dont le type topologique est d'ailleurs indépendant du rayon r, si r est assez petit. Il en résulte que le champ (X) est structurellement stable dans la variété (N); comme les homéomorphismes de raccord qui expriment la stabilité structurelle laissent invariantes (globalement) les sphères D_j, on pourrait éventuellement étendre ces homéomorphismes à toute la variété M, en faisant tendre r vers zéro.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Thom. Les singularités des applications différentiables, *Annales de l'Institut Fourier*, 1956.

[2] R. Thom. La stabilité topologique des applications polynomiales, *L'Enseignement Mathématique*, t. VIII, 1-2, 1962.

[3] G. Reeb. Sur les espaces fibrés et les Variétés Feuilletées, *Actualités scientifiques et Industrielles*, Hermann, Paris n° 1183.