ALAIN GUICHARDET

Caractères des algèbres de Banach involutives

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 1 (1963), p. 1-81

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13 (1963), 1 à 81.

CARACTÈRES DES ALGÈBRES DE BANACH INVOLUTIVES

par **Alain GUICHARDET** (Paris)

INTRODUCTION

La méthode des représentations induites, mise au point par G. W. Mackey, permet de trouver toutes les représentations unitaires irréductibles de certains produits semi-directs dits «réguliers», de groupes abéliens; nous étudions dans le chapitre II de ce travail certains produits semi-directs non réguliers; à vrai dire, nous ne décrivons pas toutes leurs représentations irréductibles, mais seulement certaines d'entre elles, que nous appelons « normales »; nous étudions aussi les représentations factorielles « normales » de ces groupes, et, à côté de résultats positifs, nous obtenons des contre-exemples à plusieurs conjectures naturelles.

La notion de représentation factorielle « normale » a été introduite par R. Godement (cf. [14]) pour les groupes localement compacts unimodulaires; en fait plusieurs auteurs ont déjà remarqué que, même pour des groupes très simples, cette notion n'était pas tout à fait assez large; nous en exposons systématiquement une extension au chapitre I, en nous plaçant dans le cadre des algèbres de Banach involutives (sur la définition des caractères des C*-algèbres, cf. aussi [31]).

Donnons maintenant un résumé plus détaillé du chapitre I; les résultats du § 1 sont très semblables à ceux de [14], mais les méthodes de démonstration diffèrent sensiblement; étant donnée une algèbre de Banach involutive A admettant une unité approchée, une représentation factorielle π de A sera dite « normale » si $\pi(A)$ contient au moins un élément non nul admettant une trace dans le facteur engendré par $\pi(A)$; nous définissons les traces et les caractères de A de façon à obtenir une correspondance biunivoque entre d'une part, les caractères définis à une constante multiplicative près, et d'autre part les représentations factorielles normales définies à une quasi-équivalence près (théorème 1).

Le théorème 1 du § 2 concerne la nature borélienne de la correspondance précédente; plus précisément supposons A séparable et telle que toute forme linéaire positive centrale sur A soit continue; si on munit l'ensemble $C_{f,1}$ des caractères de A de type fini et de norme 1 de la structure borélienne sous-jacente à la topologie de la convergence simple et l'ensemble $\tilde{A}_f$ des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de type fini de la structure borélienne définie dans [8], la correspondance en question induit un isomorphisme borélien de $C_{f,1}$ sur $\tilde{A}_f$. Le théorème 2 suppose que A est une C*-algèbre séparable; il affirme d'une part que sur le sous-ensemble $\hat{A}_{nor}$ de $\hat{A}$ formé des classes d'équivalence de représentations irréductibles normales la structure borélienne de Mackey et la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson sont identiques et analytiques; et d'autre part que si on munit l'ensemble C_I des caractères de type I de A de la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes les applications $\lambda \rightarrow \lambda(x)$ ou $x \in A^+$ (les caractères sont considérés comme des applications de A^+ dans $[0, +\infty]$) et si A vérifie une hypothèse supplémentaire assez large, la correspondance canonique entre le quotient de C_I par la relation de proportionnalité et $\hat{A}_{nor}$ est un isomorphisme borélien.

Les résultats du § 3 (relatifs à la décomposition des traces en sommes continues de caractères) s'inspirent de travaux non publiés de R. Godement; celui du n° 2 (unicité de la décomposition), qui était énoncé sans démonstration par R. Godement, précise certains résultats connus antérieurement (cf. par exemple [35], p. 288 et [8], th. 3).

Les produits semi-directs $G = G_0 \times G_1$ étudiés dans le chapitre II sont supposés vérifier les conditions suivantes :

— G_0 est discret et dénombrable;

— G_1 est distingué, abélien et sa topologie est à base dénombrable;

— la fonction 1 sur G_0 est limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif a supports compacts;

— une condition, dite « condition (*) », relative aux mesures positives sur $\hat{G}_1$, qui intervient dans [4] pour la contruction des exemples de facteurs (ch. I, § 9, n° 3).

Le § 1 est consacré essentiellement à la représentation des éléments de la C*-algèbre A de G par des applications $x: a \rightarrow x_a$ de G_0 dans la C*-algèbre A_1 de G_1 (prop. 1), ainsi qu'à leur approximation par des éléments pour lesquels x_a est nul sauf pour un nombre fini d'éléments a (prop. 2); on notera A^{e_0} la sous-algèbre, isomorphe à A_1, formée des $x \in A$ pour lesquels $x_a = 0$ si $a \neq e_0$ (élément neutre de G_0).

Le § 2 est consacré aux représentations factorielles normales et aux idéaux primitifs de A; le théorème 1 donne une méthode pour obtenir toutes les classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de type II_1 à partir de mesures positives sur $\hat{G}_1$ invariantes et ergodiques pour l'action de G_0; cette méthode est celle utilisée dans [29] pour construire des exemples de facteurs. Le théorème 2 donne une méthode pour obtenir toutes les classes d'équivalence de représentations irréductibles normales (telles que $\pi(A^{e_0})$ soit de rang infini) à partir des trajectoires infinies discrètes de G_0 dans $\hat{G}_1$; cette méthode est basée sur la notion de « système cinématique » exposée dans [36]. Le corollaire de la prop. 4 établit une relation entre le genre (CCR, GCR, NGCR) de A et la nature des trajectoires de G_0 dans $\hat{G}_1$. Le théorème 3 permet de décrire les idéaux primitifs I de A tels que $A^{e_0}/I \cap A^{e_0}$ soit de rang infini, à l'aide de certaines parties fermées de $\hat{G}_1$, exactement les adhérences des trajectoires infinies de G_0; on a mis en remarque une description de la topologie de Jacobson sur l'ensemble de ces idéaux.

Le § 3 est consacré à l'étude détaillée d'un exemple : le groupe G des transformations $x \rightarrow ax + b$ où a est une puissance entière de 2 et b un nombre rationnel dyadique; G est un produit semi-direct vérifiant les conditions requises au début du chapitre II; A est NGCR.

Dans le n° 2, en utilisant des mesures invariantes ergodiques sur $\hat{G}_1$ assez voisines de celles considérées dans [33], nous donnons des exemples de représentations factorielles de type II_1 de A qui ont même noyau sans pour autant être quasi-équivalentes, ce qui répond par la négative à une conjecture de J. Dixmier.

Dans le nº 3 on montre que les représentations irréductibles π pour lesquelles $\pi(A^{e_0})$ est de rang fini sont de dimensions finies et que leurs classes d'équivalence correspondent biunivoquement aux couples (T, θ), où T est une trajectoire finie de G_0 dans $\hat{G}_1$ et θ un élément de $\hat{G}_0$; on en déduit que A admet un système complet de représentations irréductibles de dimensions finies; comme A n'est pas GCR, ceci répond par la négative à une conjecture de G. W. Mackey ([28], p. 154).

Dans le nº 4 on précise la nature des caractères de type I de A; tout d'abord l'intersection des idéaux de définition de ces caractères est nulle; de plus, les seuls d'entre eux qui soient des caractères au sens de [14] sont ceux de type fini; enfin les idéaux de définition de certains de ces caractères ne contiennent aucune fonction a support fini sur G.

Le nº 5 contient quelques indications concernant les idéaux primitifs de A; en particulier l'idéal $\{0\}$ est primitif et tout idéal primitif non nul contient strictement un idéal primitif non nul; il existe un idéal bilatère fermé maximal I tel que A/I soit NGCR.

Dans le nº 6 on montre que l'espace des caractères partout définis de A, muni de la topologie de la convergence simple, n'est pas localement compact.

Enfin le nº 7 concerne la structure borélienne de l'ensemble des classes de représentations irréductibles normales de A; on montre (prop. 8) que la structure borélienne de Mackey et la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson, qui sont identiques et analytiques dans le cas général, sont ici standard.

Signalons pour terminer que ce travail constitue la thèse de doctorat de l'auteur; je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Dixmier sans l'aide constante de qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour, ainsi qu'à MM. Choquet et Schwartz qui ont bien voulu se joindre à lui pour en constituer le jury.

NOTATIONS ET RAPPELS

Soit G un groupe localement compact; on désignera par $L^1(G)$ (resp. $L^2(G)$) l'espace des fonctions sur G à valeurs complexes et intégrables (resp. de carré intégrable) pour la mesure de Haar à gauche sur G. Il ne sera question ici que de représentations *unitaires continues* dans des espaces hilbertiens et de l'équivalence *unitaire* de telles représentations. Nous appellerons *C*-algèbre de* G l'algèbre complétée de $L^1(G)$ pour la norme $f \to \sup_{\pi} \|\pi(f)\|$, π parcourant l'ensemble des représentations de G (sur cette notion cf. [30], § 18, nº 3 et [9], p. 369).

Par *algèbre normée involutive* nous entendrons « algèbre normée munie d'une involution *isométrique* ». Soit A une algèbre normée involutive; on notera A^+ l'ensemble des éléments positifs de A (i.e. de la forme xx^*); une représentation π de A dans un espace hilbertien H est dite *non dégénérée* si on a $\pi(A)h \neq \{0\}$ pour tout élément h non nul de H; elle est dite *factorielle* si l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$ est un facteur; deux représentations π_1 et π_2 sont dites *quasi-équivalentes* s'il existe un isomorphisme de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_1(A)$ sur l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_2(A)$ transformant $\pi_1(x)$ en $\pi_2(x)$ pour tout $x \in A$. Nous appellerons *unité approchée* de A toute famille filtrante $(x_i)_{i \in I}$ telle que $x_i \in A$, $\|x_i\| \leqslant 1$ et que $\|x_i y - y\|$ et $\|y x_i - y\|$ tendent vers 0 suivant le filtre des sections de I pour tout $y \in A$.

Soit A une algèbre normée involutive admettant une unité approchée (x_i) et soit π une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien H; $\pi(x_i)$ *converge ultra-fortement* *vers* 1; en effet, il suffit de vérifier la convergence forte puisque l'on a

$$\|\pi(x_i)\| \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$$

et on peut supposer qu'il existe un élément $h \in \mathrm{H}$ tel que l'ensemble $\pi(\mathrm{A})h$ soit partout dense dans H; il suffit alors de vérifier que

$$\|\pi(x_i)\pi(y)h - \pi(y)h\| \to 0$$

pour tout $y \in \mathrm{A}$, ce qui résulte immédiatement de la définition.

Soit A une algèbre de Banach involutive admettant une unité approchée (x_i); pour toute forme linéaire positive continue f sur A on a

$$\lim\ f(x_i) = \lim f(x_i^*) = \lim f(x_i^* x_i) = \|f\|$$

en vertu de [34], th. 4.5.14.

Suivant [12] une C*-algèbre sera dite *NGCR* si elle n'admet aucun idéal bilatère fermé GCR différent de $\{0\}$.

Soient A une C*-algèbre abélienne et X l'espace topologique des caractères de A; rappelons que l'*isomorphisme de Gelfand* est l'application de A sur l'espace des fonctions continues sur X nulles a l'infini définie par $x \to \hat{x}$ avec $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$.

Pour toute algèbre hilbertienne A on notera $\mathfrak{U}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathfrak{V}(\mathrm{A})$) l'algèbre de von Neumann à gauche (resp. à droite) associée à A; et pour tout élément x borné relativement à A, U_x (resp. V_x) l'opérateur de multiplication à gauche (resp. à droite) par x.

Pour tout espace topologique localement compact Z on note $\mathcal{C}(\mathrm{Z})$ (resp. $\mathcal{K}(\mathrm{Z})$, resp. $\mathrm{L}_\infty(\mathrm{Z})$) l'espace des fonctions sur Z à valeurs complexes et continues (resp. continues et à support compacts, resp. continues et nulles à l'infini). Pour tout espace vectoriel topologique H on désigne par $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ l'espace des endomorphismes continus de H.

Si f est une application d'un ensemble E dans un autre ensemble et F un sous-ensemble de E, on note $f|\mathrm{F}$ la restriction de f à F; on emploie la même notation pour la restriction d'une mesure à un sous-ensemble mesurable.

CHAPITRE PREMIER

CARACTÈRES DES ALGÈBRES DE BANACH INVOLUTIVES

§ 1. Traces et caractères.

Dans tout ce paragraphe A désigne une *algèbre de Banach involutive admettant une unité approchée.*

1. Généralités.

Définitions. — *Soit* I *un idéal autoadjoint de* A; *nous appellerons* trace définie sur I *toute fonction* σ *définie sur* $I \times I$ *à valeurs complexes et vérifiant :*

(i) σ *est une forme sesquilinéaire hermitienne positive;*

(ii) $\sigma(y, x) = \sigma(x^*, y^*)$ *pour* $x \in I$, $y \in I$;

(iii) $\sigma(zx, y) = \sigma(x, z^*y)$ *pour* $x \in I$, $y \in I$, $z \in A$;

(iv) *pour tout* $x \in I$ *la forme linéaire positive* f *sur* A *définie par* $f(z) = \sigma(zx, x)$ *est continue et de norme* $\sigma(x, x)$;

(v) *les éléments* xy ($x \in I$, $y \in I$) *sont partout denses dans* I *pour la structure préhilbertienne (non nécessairement séparée) déduite du produit scalaire* $\sigma(x, y)$.

Remarque 1. — Si A est une C*-algèbre la première partie de l'axiome (iv) est une conséquence des précédents; en effet sur une C*-algèbre, toute forme linéaire positive est continue ([34], th. 4.8.15).

Notations. — On notera N l'idéal autoadjoint de A formé des $x \in I$ tels que $\sigma(x, x) = 0$ et Λ l'application canonique de I sur I/N; I/N, muni du produit scalaire

$$(\Lambda x | \Lambda y) = \sigma(x, y),$$

est un espace préhilbertien séparé; on notera H l'espace hilbertien complété et J l'involution dans H prolongeant l'application $\Lambda x \to \Lambda x^*$; pour tout $z \in A$ on désignera par $\pi(z)$ (resp. $\rho(z)$) l'opérateur linéaire dans I/N transformant Λx en $\Lambda(zx)$ (resp. $\Lambda(xz)$) pour tout $x \in I$.

Proposition 1. — *L'algèbre* I/N *est une algèbre hilbertienne; les opérateurs* $\pi(z)$ *et* $\rho(z)$ *sont continus pour tout* $z \in A$ *et leurs prolongements linéaires continus à* H *définissent des représentations* π *et* ρ *de* A *et de l'algèbre conjuguée dans* H; *on a* $J\pi(z)J = \rho(z^*)$ *pour tout* $z \in A$.

Les axiomes (i), (ii) et (iv) des algèbres hilbertiennes (cf. [4], ch. 1, § 5, déf. 1) sont trivialement vérifiés. Démontrons la continuité de $\pi(z)$: on a, en vertu des axiomes (iii) et (iv) :

$$(\pi(z)\Lambda x|\pi(z)\Lambda x) = \sigma(z^*zx, x) \leqslant ||z^*z||\sigma(x, x) = ||z^*z||(\Lambda x|\Lambda x).$$

L'axiome (iii) des algèbres hilbertiennes se trouve démontré du même coup. Enfin pour $x \in I$ et $z \in A$ on a

$$\rho(z^*)\Lambda x = J\pi(z)J\Lambda x$$

par suite $\rho(z)$ est continu et les prolongements de $\pi(z)$ et $\rho(z)$ à H vérifient $\rho(z) = J\pi(z)J$.

Définition. — *La représentation* π (*resp.* ρ) *sera dite représentation gauche* (*resp. droite*) canoniquement associée à σ.

Remarque 2. — Les restrictions de π et ρ à I sont non dégénérées en vertu de l'axiome (v).

Remarque 3. — Pour tout $x \in I$ la forme linéaire positive sur A : $f(z) = \sigma(zx, x)$ converge vers $\sigma(x, x)$ suivant *toute* unité approchée de A, car

$$\sigma(zx, x) = (\pi(z)\Lambda x|\Lambda x)$$

et $\pi(z)$ tend fortement vers 1 (cf. Notations et rappels).

Remarque 4. — Soit E une partie de I partout dense dans I pour la topologie initiale; les éléments xy ($x \in E$, $y \in E$) sont partout denses dans I pour le produit scalaire $\sigma(x, y)$; il suffit en effet de montrer que tout élément $\Lambda(uv)$ de I/N ($u \in I$, $v \in I$) est limite d'éléments $\Lambda(xy)$ ($x \in E$, $y \in E$), ce qui résulte de la continuité du produit par rapport à chacune des variables.

Il en résulte que si A est séparable il en est de même de H.

Remarque 5. — Supposons que I admette une unité approchée; l'axiome (v) est alors équivalent au suivant :

(v') la forme linéaire positive f sur I : $f(z) = \sigma(zx, x)$ tend vers $\sigma(x, x)$ suivant au moins une unité approchée de I. Ceci est alors vrai pour *toute* unité approchée de I.

(v') $\Longrightarrow$ (v) : il suffit de montrer que si $x \in$ I et si (z_i) est une unité approchée de I, $z_i x \to x$ pour la structure préhilbertienne, c'est-à-dire

$$\sigma(z_i x - x, \quad z_i x - x) \to 0;$$

or

$$\sigma(z_i x - x, z_i x - x) = \sigma(z_i^* z_i x, x) - \sigma(z_i x, x) - \overline{\sigma(z_i x, x)} + \sigma(x, x);$$

mais (z_i) est aussi unité approchée pour l'adhérence $\bar{\mathrm{I}}$ de I; si donc k est la norme de la restriction à I de la forme linéaire positive $z \to (zx, x)$, on a (cf. Notations et rappels) :

$$\lim \sigma\,(z_i x, x) = \lim \overline{\sigma(z_i x, x)} = \lim \sigma(z_i^* z_i x, x) = k$$

et $k = \sigma(x, x)$; d'où l'assertion.

(v) $\Longrightarrow$ (v') : même démonstration que pour la remarque 3.

Exemple 1. — Soit g une forme linéaire positive définie sur un idéal autoadjoint I de A et vérifiant :

(i) $g(zx) = g(xz)$ pour $x \in$ I et $z \in$ A;

(ii) pour tout $x \in$ I la forme linéaire positive f sur A : $f(z) = g(zxx^*)$ est continue et de norme $g(xx^*)$;

(iii) les éléments $xy(x \in \mathrm{I}, y \in \mathrm{I})$ sont partout denses dans I pour le produit scalaire $g(xy^*)$.

On vérifie immédiatement que la forme $\sigma(x, y) = g(xy^*)$ est une trace définie sur I.

Exemple 2. — Pour toute forme linéaire positive centrale continue g sur A, la forme $\sigma(x, y) = g(xy^*)$ est une trace définie sur A; pour le montrer nous allons nous ramener à l'exemple 1 : l'axiome (i) et la première partie de l'axiome (ii) sont trivialement vérifiés; deuxième partie de l'axiome (ii) : soit (z_i) une unité approchée de A; on a

$$\|f\| = \lim g(z_i xx^*) = g(xx^*).$$

Axiome (iii) : il suffit de démontrer que $z_i x$ tend vers x pour la structure préhilbertienne; même démonstration qu'à la remarque 5.

Exemple 3. — Soient π une représentation non dégénérée de A, $\mathcal{A}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$, Tr une trace normale sur $\mathcal{A}$, $\mathfrak{m}$ son idéal de définition; on suppose que les éléments ST $\left(S \text{ et } T \in \pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ sont partout denses dans $\pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ pour le produit scalaire Tr(ST*). Alors la forme $\sigma(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(xy^*)$ est une trace définie sur $\pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$.

Les axiomes (i), (ii), (iii) et (v) des traces sont trivialement vérifiés; l'axiome (iv) résulte de la continuité ultra-faible de $\operatorname{Tr} \pi(zxx^*)$ par rapport à $\pi(z)$ et du fait que $\pi(z)$ tend ultra-fortement vers 1 suivant toute unité approchée de A.

Notations. — En plus des notations posées après la remarque 1, nous noterons $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{V}$) l'algèbre de von Neumann gauche (resp. droite) associée à l'algèbre hilbertienne I/N, Tr la trace naturelle sur $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{m}$ son idéal de définition.

LEMME 1. — *La forme* $\tilde{\sigma}(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(xy^*)$ *est une trace définie sur* $\tilde{I} = \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ *et prolongeant* σ.

On a évidemment $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{\sigma}$ prolonge σ; les hypothèses de l'exemple 3 sont satisfaites parce que $\pi(I)$ est isomorphe à I/N et partout dense dans $\pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ pour le produit scalaire Tr (ST*); donc $\tilde{\sigma}$ est une trace.

LEMME 2. — *Soient* σ *et* σ' *deux traces définies respectivement sur* I *et* I', σ' *prolongeant* σ, *et soient* N, Λ, H, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{m}$, π, ρ, (*resp.* N', ...) *les éléments correspondants. On a*

$$\pi'^{-1}\left(\mathfrak{m}'^{\frac{1}{2}}\right) \subset \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right).$$

On a évidemment $N = N' \cap I$; pour $x \in I$ on a $\|\Lambda x\| = \|\Lambda' x\|$; il existe donc un isomorphisme T de H sur un sous-espace fermé H'_0 de H' tel que $T\Lambda x = \Lambda' x$ pour tout $x \in I$; posons $P = TT^*$. On a

$$\pi'(a)T = T\pi(a) \tag{1}$$

pour tout $a \in A$, car, pour tout $x \in I$:

$$\pi'(a)\, T\Lambda x = \Lambda'(ax) = T\Lambda(ax) = T\pi(a)\, \Lambda x.$$

On a de même $\rho'(a)T = T\rho(a)$ et on en déduit que $T^*\rho'(a) = \rho(a)\, T^*$ et aussi que P permute à $\pi'(A)$ et $\rho'(A)$.

Soit maintenant $a \in \pi'^{-1}\left(\mathfrak{m}'^{\frac{1}{2}}\right)$; l'opérateur $\pi'(a)$ est de la forme U'_h où h est borné dans H' ; montrons que T^*h est borné dans H et que $\pi(a) = U_{T^*h}$, c'est-à-dire que l'on a, pour tout $x \in I$:

$$\rho(x^*)\, T^*h = \pi(a)\, \Lambda x.$$

On a, pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned}\rho(x^*)\, T^*h &= T^*\rho'(x^*)\, h = T^*U'_h\Lambda' x = T^*\pi'(a)\, \Lambda' x \\ &= T^*\pi'(a)\, T\Lambda x = \pi(a)\, \Lambda x\end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée; par suite $\pi(a) \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$.

Corollaire. — *On a* $I' \subset \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$.

Remarque 6. — Si $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{V}'$ sont des facteurs et si $\sigma \neq 0$, $\Lambda'(I)$ est partout dense dans H' et π et π' sont équivalentes. En effet P n'est pas nul et permute à $\pi'(A)$ et $\rho'(A)$; on a donc $P = 1$; l'équivalence de π et π' résulte alors de (1).

Définition. — *Une trace σ définie sur un idéal* I *sera dite* maximale *s'il n'existe aucune trace prolongeant σ et définie sur un idéal contenant strictement* I.

Proposition 2. — (i) *Une trace σ est maximale si et seulement si on a* $\tilde{I} = I$ *avec les notations du lemme* 1.

(ii) *La trace $\tilde{\sigma}$ du lemme* 1 *est maximale.*

(i) Si σ est maximale on a $\tilde{I} = I$ puisque $\tilde{\sigma}$ prolonge σ. Inversement supposons $\tilde{I} = I$; soit σ' un prolongement de σ défini sur $I' \supset I$; on a (cor. du lemme 2)

$$I' \subset \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right) = \tilde{I} = I$$

donc $I' = I$.

(ii) Il suffit de montrer que $\tilde{\tilde{I}} = \tilde{I}$; or $\tilde{\tilde{I}} = \tilde{\pi}^{-1}\left(\tilde{\mathfrak{m}}^{\frac{1}{2}}\right)$ et (lemme 2)

$$\tilde{\pi}^{-1}\left(\tilde{\mathfrak{m}}^{\frac{1}{2}}\right) \subset \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right) = \tilde{I}.$$

Définition. — *La trace $\tilde{\sigma}$ du lemme* 1 *sera dite* prolongement maximal canonique *de σ.*

Remarque 7. — Toute trace maximale est le prolongement maximal canonique d'une trace obtenue par la méthode de l'exemple 1.

Soit en effet σ maximale définie sur I; soient π, $\mathfrak{U}$, Tr, $\mathfrak{m}$ les éléments associés; pour $x \in \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ posons $g(x) = \mathrm{Tr}\,\pi(x)$; on voit facilement que g vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de l'exemple 1 et que σ est le prolongement maximal canonique de la trace sur $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$ associée à g.

2. Caractères. Représentations factorielles normales.

Définitions. — *Soient σ et σ' deux traces maximales définies respectivement sur* I *et* I'; *on dira que σ* majore *σ' si* $I \subset I'$ *et si* $\sigma'(x, x) \leqslant \sigma(x, x)$ *pour tout* $x \in I$. *Une trace maximale sera appelée* caractère *si* $\sigma \neq 0$ *et si toute trace maximale majorée par σ est proportionnelle à σ.*

Proposition 3. — *Soient σ une trace maximale non nulle, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ les algèbres de von Neumann associées; les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont des facteurs;*

(ii) *σ est un caractère.*

Définissons N, Λ, H, Tr, $\mathfrak{m}$, π, ρ comme au nº 1.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : soient σ' une trace majorée par σ et I' son idéal de définition; pour x et $y \in I$, $\sigma'(x, y)$ ne dépend que de Λx et Λy; c'est une forme sesquilinéaire, hermitienne, positive, continue, qui se prolonge donc à H par continuité; il existe un opérateur hermitien continu E dans H tel que $0 \leqslant E \leqslant 1$ et

$$\sigma'(x, y) = (E\Lambda x|\Lambda y) \quad \text{pour} \quad x \text{ et } y \in I;$$

on voit immédiatement que $E \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$, donc E est un scalaire k et on a

$$\sigma'(x, y) = k\sigma(x, y)$$

pour x et $y \in I$ et par suite pour x et y quelconques.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : supposons que σ soit un caractère; soit E un élément hermitien de $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ tel que $0 \leqslant E \leqslant 1$; soit $\mathfrak{n}_E$ l'idéal autoadjoint des $T \in \mathfrak{U}$ tels que

$$E^{\frac{1}{2}}T \in \mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}};$$

soit $I_E = \pi^{-1}(\mathfrak{n}_E) \supset I$; pour x et $y \in I_E$ posons

$$\sigma_E(x, y) = \mathrm{Tr}\,(E\pi(xy^*)).$$

La fonction $T \to \mathrm{Tr}\,(ET)$ est une trace normale sur $\mathfrak{U}^+$, dont l'idéal de définition est $\mathfrak{n}_E^2$; pour montrer que σ_E est une trace il suffit (exemple 3) de montrer que les éléments ST (S et $T \in \pi(A) \cap \mathfrak{n}_E$) sont partout denses dans $\pi(A) \cap \mathfrak{n}_E$ pour le produit scalaire $(S, T) \to \mathrm{Tr}\,(EST^*)$; montrons d'abord que $\pi(A) \cap \mathfrak{n}$ est partout dense dans $\pi(A) \cap \mathfrak{n}_E$ pour ce produit scalaire.

Soit $T \in \pi(A) \cap \mathfrak{n}_E$; on a $E^{\frac{1}{2}}T = U_h$ avec h borné, et $E^{\frac{1}{2}}T^* = U_h^*$; donc

$$\text{adhérence image } U_h \subset \text{adhérence image } E^{\frac{1}{2}};$$

posons $X = E^{\frac{1}{2}}(I/N)$; comme $h \in \overline{U_h(H)}$, $h \in \overline{X}$ et il existe une suite $x_n \in I$ telle que $E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n \to h$; posons $T_n = U_{\Lambda x_n} \in \pi(A) \cap \mathfrak{n}$; on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(E(T_n - T)(T_n - T)^*) &= \mathrm{Tr}(U_{E^{1/2}\Lambda x_n - h}U^*_{E^{1/2}\Lambda x_n - h}) \\ &= \left(E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n - h \middle| E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n - h\right) \to 0\end{aligned}$$

d'où l'assertion.

D'autre part les éléments ST (S et $T \in \pi(A) \cap \mathfrak{n}$) sont partout denses dans $\pi(A) \cap \mathfrak{n}$ pour le produit scalaire $(S, T) \to \mathrm{Tr}(ST^*)$, et *a fortiori* pour le produit scalaire plus petit $(S, T) \to \mathrm{Tr}(EST^*)$.

On a donc prouvé que σ_E était une trace; elle est évidemment majorée par σ; son prolongement maximal canonique doit donc être proportionnel à σ : pour x et $y \in I$

$$\sigma_E(x, y) = k\sigma(x, y) \qquad \text{avec} \qquad k \geqslant 0$$
$$(E\Lambda x|\Lambda y) = k(\Lambda x|\Lambda y)$$

donc $E = k$ et $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont des facteurs.

Définition. — *Une représentation factorielle non dégénérée* π *de* A *est dite* normale *si le facteur engendré par* $\pi(A)$ *est semi-fini et si* $\pi(A)$ *en contient un élément à trace non nul.*

Une représentation *irréductible* d'une C*-*algèbre* est alors normale si et seulement si $\pi(A)$ contient l'algèbre K des opérateurs compacts; cette condition étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire : si π est normale, $\pi(A) \cap K$ est un idéal non nul de $\pi(A)$, et par conséquent est irréductible; mais $\pi(A) \cap K$ est une algèbre CCR (cf. [22], th. 7. 4) et par suite est égale à K.

En particulier toute représentation factorielle non dégénérée d'une algèbre GCR est de type I et normale.

Proposition 4. — *Soient* π *une représentation factorielle normale de* A, $\mathfrak{A}$ *le facteur engendré par* $\pi(A)$, Tr *la trace canonique sur* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{m}$ *son idéal de définition. Alors*

(i) $\mathfrak{A}$ *est l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi(A) \cap \mathfrak{m}$;

(ii) *la forme* $\sigma(x, y) = \operatorname{Tr} \pi\ (xy)$ *est un caractère défini sur* $I = \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$;

(iii) *soient* π_1 *la représentation gauche canoniquement associée à* σ *et* $\mathfrak{U}$ *le facteur engendré par* $\pi_1(A)$*; il existe un isomorphisme et un seul de* $\mathfrak{U}$ *sur* $\mathfrak{A}$ *transformant* $\pi_1(x)$ *en* $\pi(x)$ *pour tout* $x \in A$;

(iv) *tout caractère sur* A *s'obtient de cette façon.*

(iv) *résulte immédiatement des prop.* 1 *et* 3.

Muni du produit scalaire $(S, T) \rightarrow \operatorname{Tr}(ST^*)$, $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ est une algèbre hilbertienne achevée; soit H' l'espace hilbertien complété ; il existe un isomorphisme Φ (resp. un antiisomorphisme Ψ) de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ $\left(\text{resp. } \mathfrak{V}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ tel que pour $R \in \mathfrak{A}$ et $S \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$

$$(\Phi(R))(S) = RS \qquad \text{et} \qquad (\Psi(R))(S) = SR.$$

Posons, pour tout $a \in A$

$$\pi_1(a) = \Phi(\pi(a))$$
$$\pi_2(a) = \Psi(\pi(a^*));$$

les opérateurs $\pi_1(a)$ (resp. $\pi_2(a)$) engendrent $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ $\left(\text{resp. } \mathfrak{V}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ puisque les $\pi(a)$ sont iltrafortement denses dans $\mathfrak{A}$.

Soit maintenant $H'_0 \subset H'$ l'adhérence de $\pi(I) = \pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$; on a $H'_0 \neq 0$; de plus pour $x \in I$ et $a \in A$

$$(\pi_1(a))(\pi(x)) = (\Phi(\pi(a)))(\pi(x)) \ = \pi(a)\pi(x) \ = \pi(ax) \in \pi(I),$$
$$(\pi_2(a))(\pi(x)) = (\Psi(\pi(a^*)))(\pi(x)) = \pi(x)\pi(a^*) = \pi(xa^*) \in \pi(I)$$

donc $\pi(I)$, et par suite H'_0, est stable par $\pi_1(A)$ et $\pi_2(A)$; par suite $H'_0 = H'$ et $\pi(I)$ est partout dense dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ pour le produit scalaire $\operatorname{Tr}(ST^*)$.

Pour montrer que σ est une trace, il suffit (exemple 3) de prouver que tout élément T de $\pi(I)$ est limite pour ce produit scalaire d'éléments $RS(R$ et $S \in \pi(I))$; or T est limite d'éléments $R_nS_n\left(R_n \text{ et } S_n \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$; puis tout élément R_n (resp. S_n) est limite, d'après ce qui précède, d'éléments $R_{n,p}$ (resp. $S_{n,p}$) de $\pi(I)$; σ est donc une trace.

L'idéal N des $x \in I$ tels que $\sigma(x, x) = 0$ est identique au noyau de π; I/N est isomorphe a $\pi(I)$; l'algèbre de von Neumann gauche $\mathfrak{U}$ associée à σ est donc isomorphe à $\mathfrak{U}(\pi(I)) = \mathfrak{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$, donc à $\mathfrak{A}$ et l'isomorphisme en question transforme $\pi_1(a)$ en $\pi(a)$ pour tout $a \in A$.

On a ainsi démontré (i) et (iii). Pour terminer la démonstration de (ii) il reste à prouver que σ est maximale, i.e. que si $\pi_1(a)$ est de la forme U_h (h borné dans H′) alors $a \in I$; or, $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ étant achevée, on a $h \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$

$$\pi_1(a) = U_h = \Phi(h)$$
$$\pi(a) = h \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$$

d'ou enfin $a \in I$.

Théorème 1. — *La formule* $\sigma(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(xy^*)$ *établit une correspondance biunivoque entre*

a) *l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales de* A.

b) *l'ensemble des caractères sur* A *définis à un facteur constant près.*

Résulte aussitôt de la prop. 4.

Définition. — *On appellera* type d'un caractère *le type de la représentation associée.*

Proposition 5. — *Soient* σ *et* σ' *deux caractères de* A *définis respectivement sur* I *et* I′ *et soit* A′ *une sous-*-algèbre partout dense dans* A; *supposons que* $I \cap A' = I' \cap A'$ *et que* σ *et* σ' *soient égaux et non nuls sur* $I \cap A'$. *Alors* σ *et* σ' *sont égaux.*

Soient N, Λ, H, π, ρ, (resp. N′, ...) les éléments associés à σ (resp. σ') posons $I_0 = I \cap A'$; $\Lambda(I_0)$ est stable par $\pi(A')$ et $\rho(A')$, donc aussi son adhérence $\overline{\Lambda(I_0)}$ dans H; $\overline{\Lambda(I_0)}$ est donc stable par $\pi(A)$ et $\rho(A)$, et comme $\Lambda(I_0) \neq 0$ on a $\overline{\Lambda(I_0)} = H$.

On voit de même que $\overline{\Lambda'(I_0)} = H'$.

Pour x et $y \in I_0$ on a $(\Lambda x|\Lambda y) = (\Lambda' x|\Lambda' y)$; il existe donc un isomorphisme T de H sur H' tel que $T\Lambda x = \Lambda' x$ pour tout $x \in I_0$; soient alors $x \in I_0$ et $y \in A'$; on a

$$T\pi(y)\Lambda x = T\Lambda(yx) = \Lambda'(yx) = \pi'(y)\Lambda' x = \pi'(y)T\Lambda x$$

d'où $T\pi(y) = \pi'(y)T$ pour tout $y \in A'$ et, par continuité, pour tout $y \in A$; π et π' sont équivalentes et σ et σ' sont proportionnels, donc égaux.

Définition. — *Soit* G *un groupe localement compact; nous appellerons* caractère de G *tout caractère de la* C^**-algèbre* A *de* G.

Supposons maintenant G unimodulaire; il est facile de construire une application injective de l'ensemble des caractères de G au sens de [14] dans l'ensemble des caractères au sens actuel; il suffit pour cela de montrer que

a) toute représentation factorielle normale au sens de [14] est normale au sens actuel relativement à $L^1(G)$ (elle sera alors normale relativement à A et on pourra prendre le caractère correspondant);

b) deux caractères au sens de [14] qui coïncident sur $L^1(G)$ sont identiques.

Or tout caractère $\varkappa$ au sens de [14] est défini sur un idéal bilatère partout dense K de l'algèbre M(G); mais $K \cap L^1(G)$ est partout dense dans K puisque ε est adhérent à $L^1(G)$; soit π une représentation factorielle telle que, pour tout $\alpha \in K$

$$\varkappa(\alpha, \alpha) = \operatorname{Tr} \pi(\alpha\alpha^*);$$

on a *a*) puisque $\pi(K \cap L^1(G))$ est partout dense dans $\pi(K)$; et *b*) résulte de la prop. 5.

On verra plus loin que cette application n'est pas surjective en général (ch. II, § 3, n° 4, rem. 1).

§ 2. Structures boréliennes.

1. Généralités.

Dans tout ce paragraphe, A *désigne une algèbre de Banach involutive, séparable, admettant une unité approchée et telle que toute forme linéaire positive centrale sur* A *soit continue;* A *peut* *être en particulier une* C^**-algèbre séparable ou une algèbre de Banach involutive séparable avec élément unité.*

On considère les caractères comme des formes linéaires définies sur des idéaux autoadjoints de A; plus précisément tout caractère s'obtient de la façon suivante: soient π une représentation factorielle normale de A, Tr la trace canonique du facteur engendré par $\pi(A)$, $\mathfrak{m}$ son idéal de définition; on pose, pour $x \in \pi^{-1}(\mathfrak{m})$

$$\lambda(x) = \operatorname{Tr} \pi(x);$$

l'idéal $I = \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ sera dit *idéal restreint de définition de* λ; pour $x \geqslant 0$, $x \notin I$ nous poserons $\lambda(x) = +\infty$.

Nous noterons C l'ensemble des caractères et le munirons de la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes les fonctions $\lambda \to \lambda(x)$ $(x \in A^+)$; nous noterons par ailleurs C_f l'ensemble des caractères de type fini (ce sont des formes linéaires continues sur A), $C_{f,1}$ l'ensemble de ceux qui sont de norme 1 et C_I l'ensemble des caractères de type I. Nous désignerons par C^0 l'espace quotient de C par la relation de proportionnalité, muni de la structure borélienne quotient, et C_I^0 l'ensemble des éléments de type I de C^0, muni de la structure borélienne induite par celle de C^0. Enfin pour tout idéal autoadjoint I de A nous noterons C(I) l'ensemble des caractères dont l'idéal restreint de définition contient I et qui ne sont pas identiquement nuls sur I.

En ce qui concerne les représentations nous emploierons les notations suivantes :

pour tout $n = 1, 2, \ldots \infty$, H_n est un espace hilbertien fixé de dimension n;

$A_{\mathrm{rep},n}$: ensemble des représentations de A dans H_n;

$A_{\mathrm{irr},n}$: ensemble des éléments irréductibles de $A_{\mathrm{rep},n}$;

$A_{\mathrm{irr,nor},n}$: ensemble des éléments normaux de $A_{\mathrm{irr},n}$;

A_{rep} : ensemble somme des $A_{\mathrm{rep},n}$;

A_{irr}(resp. A_{fac}) : ensemble des éléments irréductibles (resp. factoriels) de A_{rep};

$A_{\mathrm{irr,nor}}$: ensemble des éléments normaux de A_{irr};

$\hat{A}$: quotient de A_{irr} par la relation d'équivalence;

$\hat{A}_{\mathrm{nor}}$: ensemble des éléments normaux de $\hat{A}$;

$\tilde{A}$: quotient de A_{fac} par la relation de quasi-équivalence;

$\tilde{A}_f$: ensemble des éléments de type fini de $\tilde{A}$.

Les structures boréliennes de $A_{\mathrm{rep},\,n}$, A_{rep} et $\hat{A}$ sont définies comme dans [28], et celle de $\tilde{A}$ comme dans [8].

Nous noterons enfin Ψ (resp. Ψ^0) l'application canonique de C (resp. C^0) dans $\tilde{A}$ et Φ (resp. Φ^0) l'application canonique de C_I (resp. C_I^0) sur $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$.

LEMME 1. — *Si* I *est l'idéal autoadjoint engendré par une famille dénombrable d'éléments positifs* x_i, C(I) *est borélien dans* C.

Car soit $\lambda \in C$; on a $\lambda \in C(I)$ si et seulement si

a) pour tout i : $\lambda(x_i) < +\infty$.

b) pour au moins un i : $\lambda(x_i) > 0$.

LEMME 2. — *Soient* I *un idéal autoadjoint de* A, X(I) *l'ensemble des traces (non nécessairement maximales), considérées comme des formes sesquilinéaires, définies sur* I; *on munit* X(I) *de la structure borélienne* B(I), *la moins fine rendant boréliennes les fonctions* $\sigma \to \sigma(x, y)$ (x *et* $y \in I$). *Il existe alors une application borélienne* Ω *de* X(I) *dans* A_{rep} *telle que, pour toute* $\sigma \in X(I)$, $\Omega(\sigma)$ *soit équivalente à la représentation gauche canoniquement associée à* σ.

Nous reprenons les notations du § 1 et notons N_σ, Λ_σ, H_σ, π_σ les éléments associés à σ. Pour tout $p = 1, 2, \ldots \infty$ soit $(e_1, e_2, \ldots)$ une base orthonormale de l'espace H_p. Soit enfin (x_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite multiplicativement stable et partout dense dans I; on sait (§ 1, rem. 4) que les éléments $\Lambda_\sigma x_n$ sont partout denses dans H_σ; soient $\mathcal{K}_\sigma$ l'espace vectoriel engendré algébriquement par les $\Lambda_\sigma(x_n)$ et d_σ sa dimension algébrique.

Je dis que

(i) pour tout $p = 1, 2, \ldots \infty$ l'ensemble Z_p des $\sigma \in X(I)$ tels que $d_\sigma = p$ est borélien dans X(I);

(ii) il existe une suite $h_1(\sigma)$, $h_2(\sigma)$, ... telle que

a) pour tout $\sigma \in X(I)$, $h_1(\sigma)$, $h_2(\sigma)$, ... engendrent algébriquement $\mathcal{K}_\sigma$;

b) si $d_\sigma = \infty$, $h_1(\sigma)$, $h_2(\sigma)$, ... forment un système orthonormal; si $d_\sigma < \infty$, $h_1(\sigma)$, ... $h_{d_\sigma}(\sigma)$ forment un système orthonormal et $h_n(\sigma) = 0$ pour $n > d_\sigma$;

c) pour tout n il existe un recouvrement de X(I) par des parties boréliennes disjointes $Z'_{n,1}$, $Z'_{n,2}$, ... possédant la propriété suivante :

sur chaque $Z'_{n,i}$, $h_n(\sigma)$ se met sous la forme $\sum_i f_i(\sigma)\Lambda_\sigma(x_i)$ où les f_i sont des fonctions boréliennes identiquement nulles pour i assez grand.

La démonstration est celle de [4], ch. II, § 1, lemme 1 ou l'on remplace simplement Z par X(I), ζ par σ, $\mathcal{H}(\zeta)$ par H_σ, x_1, x_2, ... par $\Lambda(x_1), \Lambda(x_2), \ldots$, y_1, y_2, ... par h_1, h_2, ... et « mesurable » par « borélien ».

Le sous-espace $\mathcal{K}_\sigma$ étant partout dense dans H_σ, $h_1(\sigma)$, $h_2(\sigma)$, ... forment une base orthonormale de H_σ; pour $\sigma \in Z_p$ soit U_σ l'isomorphisme de H_σ sur H_p transformant h_n en e_n et soit π'_σ la représentation de A dans H_p définie par

$$\pi'_\sigma(x) = U_\sigma \pi_\sigma(x) U_\sigma^{-1};$$

le lemme sera démontré si on prouve que toutes les fonctions

$$\sigma \rightarrow (\pi'_\sigma(x)k_1|k_2) \qquad (k_1 \quad \text{et} \quad k_2 \in H_p, \ x \in A)$$

sont boréliennes sur Z_p.

Supposons d'abord k_1 et k_2 combinaisons linéaires des e_i:

$$k_1 = \sum_i \lambda_{1,i} e_i$$
$$k_2 = \sum_j \lambda_{2,j} e_j;$$

on a alors

$$(\pi'_\sigma(x)k_1|k_2) = \sum_i \sum_j \lambda_{1,i}\lambda_{2,j}(\pi_\sigma(x)h_i(\sigma)|h_j(\sigma))$$

et il suffit de montrer que toutes les fonctions

$$\sigma \rightarrow (\pi_\sigma(x)h_i(\sigma)|h_j(\sigma))$$

sont boréliennes sur chaque ensemble $Z_p \cap Z'_{i,r} \cap Z'_{j,s}$; or sur un tel ensemble on a

$$h_i(\sigma) = \sum_l f_l(\sigma)\Lambda_\sigma(x_l)$$
$$h_j(\sigma) = \sum_m g_m(\sigma)\Lambda\sigma(x_m)$$
$$(\pi_\sigma(x)h_i(\sigma)|h_j(\sigma)) = \sum_l \sum_m f_l(\sigma)g_m(\sigma)(\Lambda_\sigma(xx_l)|\Lambda_\sigma(x_m))$$
$$= \sum_l \sum_m f_l(\sigma)g_m(\sigma)\sigma(xx_l, x_m).$$

Si maintenant k_1 et k_2 sont quelconques dans H_p, la fonction $\sigma \rightarrow (\pi'_\sigma(x)k_1|k_2)$ est limite d'une suite de fonctions boréliennes, donc borélienne.

Proposition 1. — *Supposons qu'il existe une suite d'idéaux autoadjoints* I_n *de* A, *engendrés par des familles dénombrables d'éléments positifs, telle que l'on ait*

$$C = \bigcup_n C(I_n);$$

alors Ψ^0 *est borélienne.*

Il suffit de démontrer que Ψ est borélienne, ou encore (lemme 1) que $\Psi|C(I)$ est borélienne pour tout idéal autoadjoint I. Or soit Π l'application de C(I) dans X(I) définie par

$$\Pi(\lambda) = \sigma \quad \text{avec} \quad \sigma(x, y) = \lambda(xy^*) \quad \text{pour} \quad x \text{ et } y \in I;$$

Π est borélienne pour la structure borélienne B(I) du lemme 2 en vertu de l'identité.

$$4\lambda(xy^*) = \lambda((x+y)(x+y)^*) - \lambda((x-y)(x-y)) \\ + i\lambda|((x+iy)(x+iy)^*) - i\lambda((x-iy)(x-iy)^*).$$

D'autre part on a pour tout $\lambda \in C(I)$

$$\Omega(\Pi(\lambda)) \in \Psi(\lambda)$$

d'après la remarque 6 du § 1, n° 1; en notant Θ l'application canonique de A_{fae} sur $\tilde{A}$ on a donc

$$\Psi|C(I) = \Theta \circ \Omega \circ \Pi$$

et la proposition résulte du lemme 2.

2. Représentations factorielles de type fini.

Soient σ une trace maximale, I son idéal de définition, π la représentation gauche canoniquement associée à σ, $\mathfrak{U}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$, Tr la trace naturelle sur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{m}$ son idéal de définition; on a évidemment

$$\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset I = \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Supposons que $I = A$; on a alors $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) = A$, car $\pi(A) \subset \mathfrak{m}$ puisque tout élément de A est égal au produit de deux autres éléments de A (cf. [3], th. 1); ceci permet de parler de *traces partout définies* sans préciser si on les considère comme des formes linéaires ou sesquilinéaires; d'autre part, en rapprochant ceci de l'exemple 2 du § 1, n° 1, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque entre les traces partout définies et les formes linéaires positives centrales sur A :

$$\sigma(x, y) = \lambda(xy^*).$$

On notera D l'espace des formes linéaires positives centrales de norme $\leqslant 1$; avec la topologie de la convergence simple sur A, D est compact, métrisable et à base dénombrable ([2], ch. III, § 3, prop. 6).

PROPOSITION 2. — *Pour qu'un caractère soit partout défini, il faut et il suffit qu'il soit de type fini.*

La condition énoncée étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire; ce fait étant trivial si A admet une unité, supposons A sans unité, et soit A′ l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité; si λ est un caractère partout défini sur A, il est continu d'après l'hypothèse faite sur A au début du § 2 et se prolonge en une forme linéaire positive centrale λ' sur A′ définie par

$$\lambda'(x + \alpha\, 1) = \lambda(x) + \alpha\|\lambda\|.$$

Soit π (resp. π') la représentation gauche canoniquement associée à λ (resp. λ'); π' est évidemment de type fini; un raisonnement calqué sur celui du lemme 2 du § 1 montre que π est équivalente à la représentation que $\pi'|A$ induit dans un sous-espace stable par $\pi'(A')$; par conséquent π est de type fini.

(On peut d'ailleurs démontrer que π est équivalente à $\pi'|A$ elle-même.)

COROLLAIRE 1. — *Si* A *est l'idéal autoadjoint engendré par une famille dénombrable* E *(et en particulier si* A *admet une unité),* C_f *est borélien dans* C.

En effet soit σ un caractère considéré comme forme sesquilinéaire; on a $\sigma \in C_f$ si et seulement si σ est partout défini (prop. 2), donc si et seulement si on a $\sigma(x, x) < +\infty$ pour tout $x \in E$.

COROLLAIRE 2. — *L'ensemble* $C_{f,1}$ *est un* G_δ *dans* D.

On vérifie immédiatement que $C_{f,1}$ est l'ensemble des points extrémaux non nuls de D et l'assertion résulte de [13], appendice 1.

COROLLAIRE 3. — *L'espace borélien* $C_{f,1}$ *est standard.*

THÉORÈME 1. — *Le sous-ensemble* $\tilde{A}_f$ *de* $\tilde{A}$, *formé des éléments de type fini, est borélien dans* $\tilde{A}$ *et standard; l'application cano-*

nique de C *dans* $\tilde{A}$ *induit un isomorphisme borélien de* $C_{f,1}$ *sur* $\tilde{A}_f$.

Considérons, comme dans la prop. 1, l'application borélienne Π de $C_{f,1}$ dans X(A) muni de la structure borélienne B(A) et l'application borélienne Ω de X(A) dans A_{rep}; l'application $\Lambda = \Omega \circ \Pi$ est borélienne et injective, et comme $C_{f,1}$ est standard et A_{rep} dénombrablement engendré, Λ est un isomorphisme borélien de $C_{f,1}$ sur Λ $(C_{f,1})$ (cf. [28], th. 3.2); de plus Λ $(C_{f,1})$ rencontre chaque classe de quasi-équivalence de A_{fac} en un point au plus; si Θ est l'application canonique de A_{fac} sur $\tilde{A}$, $\Theta|\Lambda(C_{f,1})$ est un isomorphisme borélien de $\Lambda(C_{f,1})$ sur Θ $(\Lambda(C_{f,1}))$ ([8], prop. 2), lequel est alors standard et borélien dans $\tilde{A}$; enfin on a évidemment

$$\Psi|C_{f,1} = \Theta \circ \Lambda$$

et, d'après la prop. 2

$$\Psi(C_{f,1}) = \tilde{A}_f.$$

3. Représentations irréductibles normales.

Lemme 3. — *Pour tout* $n = 1, 2, \ldots \infty$, *tout* $x \in A$ *et tout* $T \in \mathcal{L}(H_n)$, $\|\pi(x) - T\|$ *est une fonction borélienne de* π *pour* $\pi \in A_{rep,\,n}$.

Soient $h_1, h_2, \ldots$ des éléments partout denses dans la boule unité de H_n; on a

$$\|\pi(x) - T\| = \sup_p \|(\pi(x) - T)\,h_p\|;$$

il suffit donc de montrer que pour tout $h \in H_n$ la fonction $\pi \to \|(\pi(x) - T)\,h\|$ est borélienne; or on a

$$\begin{aligned}\|(\pi(x) - T)\,h\|^2 &= ((\pi(x) - T)^*\,(\pi(x) - T)\,h|h)\\ &= (\pi(x^*x)\,h|h) - (\pi(x)\,Th|h) - (\pi(x)\,h|Th) + (T^*Th|h).\end{aligned}$$

Théorème 2. — *On suppose que* A *est une* C*-*algèbre séparable.*

(i) $\hat{A}_{nor}$ *est borélien dans* $\hat{A}$ *pour la structure borélienne de Mackey.*

(ii) *Sur* $\hat{A}_{nor}$ *la structure borélienne de Mackey et la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson sont identiques et analytiques.*

(iii) *Si* Φ^0 *désigne l'application canonique de* C_I^0 *sur* $\hat{A}_{nor}$, $(\Phi^0)^{-1}$ *est borélienne.*

(iv) *Supposons qu'il existe une suite d'idéaux autoadjoints* I_n *de* A, *engendrés par des familles dénombrables d'éléments positifs, telle que l'on ait* $C = \bigcup_n C(I_n)$; *alors* Φ^0 *est un isomorphisme borélien.*

Démonstration.

(i) Montrons en premier lieu que $A_{\mathrm{irr,\,nor},\,n}$ est borélien dans $A_{\mathrm{irr},\,n}$, pour tout n; soient (x_i) une suite partout dense dans A et T un opérateur compact non nul dans H_n; A étant une C*-algèbre, un élément π de $A_{\mathrm{irr},\,n}$ est normal si et seulement si il existe un élément $x \in A$ tel que $\pi(x) = T$; ou encore si pour tout entier positif r il existe un entier i tel que

$$||\pi(x_i) - T|| \leqslant \frac{1}{r}$$

et l'assertion est une conséquence du lemme 3.

Il résulte de ce qui précède, d'une part que $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$ est borélien dans A pour la structure borélienne de Mackey, et d'autre part que $A_{\mathrm{irr,\,nor},\,n}$ est standard.

(ii) Montrons maintenant que $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$ est analytique pour la structure borélienne de Mackey; il suffit ([28], p. 141) de trouver des applications boréliennes f_j ($j = 1, 2, \ldots$) de $A_{\mathrm{irr,\,nor},\,n}$ dans l'ensemble réel telles que deux éléments π et ρ de $A_{\mathrm{irr,\,nor},\,n}$ soient équivalents si et seulement si $f_j(\pi) = f_j(\rho)$ pour tout j; mais les éléments de $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$ étant définis par leurs noyaux (cf. [12], dém. du th. 1, $a5) \Longrightarrow a6)$) on peut prendre $f_j(\pi) = ||\pi(x_j)||$ et l'assertion résulte du lemme 3.

Démontrons enfin l'identité des deux structures boréliennes sur $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$; la première étant analytique et plus fine que la seconde il suffit ([28], th. 4. 2) de prouver que la seconde est « dénombrablement engendrée », c'est-à-dire

a) séparée.

b) engendrée par une famille dénombrable d'ensembles boréliens.

Or

a) $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$ est homéomorphe pour la topologie de Jacobson à un ensemble d'idéaux primitifs de A, lequel est certainement un T_0-espace, et la structure borélienne sous-jacente est séparée;

b) la topologie de Jacobson sur $\hat{A}$ est à base dénombrable ([10], cor. du th. 3.2.) et ceci reste évidemment vrai pour $\hat{A}_{\mathrm{nor}}$.

(iii) Il suffit de trouver une application borélienne Λ de $A_{\mathrm{irr,\,nor}}$ dans C_{I} qui, par passage aux quotients, donne $(\Phi^0)^{-1}$; soit $(h_{n,i})$ une base orthonormale de H_n; pour $\pi \in A_{\mathrm{irr,\,nor},\,n}$ on définira $\Lambda(\pi)$ par

$$\Lambda(\pi)(x) = \sum_i (\pi(x)h_{n,i}|h_{n,i}) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in A^+;$$

l'application Λ possède trivialement les propriétés requises.

(iv) résulte de (iii), de la prop. 1 et de [7].

§ 3. Décomposition des traces.

Dans tout ce paragraphe A désigne une algèbre de Banach involutive, séparable et admettant une unité approchée.

1. Existence de la décomposition.

Soient I un idéal autoadjoint de A, E une partie partout dense dans I et multiplicativement fermée; toute trace σ définie sur I est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur E (cf. § 1, n° 1, rem. 3); (si en particulier σ est maximale et si E est un idéal autoadjoint, σ est le prolongement maximal canonique de $\sigma|E$ en vertu du lemme 2, § 1, n° 1).

Définissons X(I) et B(I) comme au lemme 2 du § 2 et E comme ci-dessus; B(I) est identique à la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes les fonctions $\sigma \to \sigma(x, y)$ où x et $y \in$ E; en effet pour x et $y \in$ I la fonction $\sigma \to \sigma(x, y)$ est limite d'une suite de fonctions $\sigma \to \sigma(x_n, y_n)$ où x_n et $y_n \in$ E (cf. § 1, n° 1, rem. 4). Choisissant E dénombrable, on voit que B(I) est *dénombrablement engendrée.*

Théorème 1. — *Soient σ une trace maximale et* I *son idéal de définition.*

(i) *Il existe un idéal autoadjoint* I_0 *partout dense dans* I, *un ensemble* X *de caractères deux à deux non proportionnels et dont les idéaux de définition (comme formes sesquilinéaires) contiennent* I_0, *une topologie compacte à base dénombrable et une mesure positive* μ *sur* X *tels que, pour x et $y \in I_0$ l'application $\chi \to \chi(x, y)$ soit μ-mesurable et*

$$\sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi).$$

(ii) *Désignons par* Ψ *l'application canonique de* C *dans* $\tilde{\mathrm{A}}$; *il existe une partie* X' *de* X, *borélienne, de complémentaire* μ*-négligeable et telle que* $\Psi(\mathrm{X}')$ *soit borélien dans* A *et standard et que la restriction de* Ψ *à* X' *soit un isomorphisme borélien.*

Démonstration. Nous noterons N, Λ, H, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, Tr, $\mathfrak{m}$, π les éléments associés à σ (cf. § 1, nº 1), $\mathfrak{a}$ l'algèbre hilbertienne achevée associée à I/N, $\mathfrak{Z}$ le centre de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$; enfin $\{x_1, x_2, \ldots\}$ une $*$-algèbre sur le corps des rationnels complexes, dénombrable et partout dense dans I pour la norme.

a) *Décomposition de* $\mathcal{A}$.

Soit $\mathrm{H} = \int_{\mathrm{Z}}^{\oplus} \mathrm{H}(z) d\nu(z)$ une décomposition de H associée à $\mathfrak{Z}$, Z étant localement compact à base dénombrable, ν positive bornée et $\mathrm{H}(z) \neq 0$ pour tout z. Il existe des décompositions

$$\mathfrak{a} = \int^{\oplus} \mathfrak{a}(z)\, d\nu(z)$$

($\mathfrak{a}(z)$ étant achevée et partout dense dans $\mathrm{H}(z)$ pour tout z) et

$$\Lambda(x_n) = \int^{\oplus} \Lambda(x_n)(z)\, d\nu(z)$$

les $\Lambda(x_n)(z)$ étant partout denses dans $\mathfrak{a}(z)$ et formant une $*$-algèbre sur le corps des rationnels pour presque tout z, soit pour $z \in \mathrm{Z}'$.

Soient $\mathfrak{U}(z)$, $\mathfrak{V}(z)$, Tr_z, $\mathfrak{m}(z)$ les éléments associées à $\mathfrak{a}(z)$; $\mathfrak{U}(z)$ et $\mathfrak{V}(z)$ sont des facteurs pour presque tout z, soit pour $z \in \mathrm{Z}'' \subset \mathrm{Z}'$.

b) *Décomposition de* π.

Par une méthode classique on associe à chaque $a \in \mathrm{A}$ une décomposition

$$\pi(a) = \int^{\oplus} \pi(a)(z)\, d\nu(z)$$

de façon que presque partout, soit pour $z \in \mathrm{Z}''' \subset \mathrm{Z}''$, $a \to \pi(a)(z)$ soit une représentation π_z de A dans $\mathrm{H}(z)$ et que l'on ait pour tout n

$$\pi_z(x_n) = \mathrm{U}_{\Lambda(x_n)(z)}.$$

Pour $z \in \mathrm{Z}'''$, $\pi_z(\mathrm{A})$ contient les opérateurs $\mathrm{U}_{\Lambda(x_n)(z)}$, donc engendre l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{U}(z)$, et π_z est factorielle et normale.

c) *Caractères* χ_z. Pour $z \in Z'''$, π_z définit un idéal autoadjoint $I_z = \pi_z^{-1}\left(\mathfrak{m}(z)^{\frac{1}{2}}\right)$ et un caractère χ_z défini sur I_z :

$$\chi_z(x,\ y) = \mathrm{Tr}_z\,(\pi_z(xy^*));$$

on a en particulier pour tout m et tout n :

$$\chi_z(x_m,\ x_n) = (\Lambda(x_m)(z)|\Lambda(x_n)(z));$$

I_z contient les x_n, donc aussi l'idéal autoadjoint I_0 qu'ils engendrent, pour tout $z \in Z'''$.

D'autre part il existe (cf. [31], th. 1) une partie $Z^{IV} \subset Z'''$ de complémentaire ν-négligeable telle que si z et $z' \in Z^{IV}$ et $z \neq z'$, alors χ_z et $\chi_{z'}$ soient non proportionnels.

d) *Modification de la topologie de* Z^{IV}.

L'espace Z^{IV} n'est pas nécessairement localement compact; mais considérons sur Z la relation d'équivalence R dont les classes sont les points de Z^{IV} et l'ensemble $Z - Z^{IV}$; elle est ν-mesurable et il existe un espace localement compact à base dénombrable Y et une application ν-propre q de Z sur Y telle que

$$R(z,\ z') \Longleftrightarrow q(z) = q(z')$$

(cf. [1], ch. 6, § 3, prop. 2); l'espace $X = q(Z^{IV})$ est localement compact; soit μ la restriction de $q(\nu)$ à X; considérons X comme un ensemble de caractères et écrivons χ au lieu de χ_z pour $z \in Z^{IV}$; pour x et $y \in I_0$ la fonction $\chi \to \chi(x,\ y)$ est μ-mesurable et on a

$$\sigma(x,\ y) = \int \chi(x, y)\, d\mu\,(\chi).$$

e) *Démonstration de* (ii).

Définissons X(I) et B(I) comme au lemme 2 du § 2; il existe des compacts $K_p \subset X$ deux à deux disjoints, tels que $X - \bigcup_p K_p$ soit μ-négligeable et que les applications $\chi \to \chi(x_m,\ x_n)$ soient continues sur chaque K_p; ces applications sont boréliennes sur $X' = \bigcup_p K_p$ et X' est standard pour la structure borélienne sous-jacente à la topologie; l'application identique de X' dans $X(I_0)$ est borélienne; c'est donc un isomorphisme et X' est borélien dans $X(I_0)$ (cf. [28], th. 3.2). Soit Ω la restriction à X' de l'application borélienne de $X(I_0)$ dans A_{rep} définie au lemme 2 du § 2; Ω est injective, c'est donc un isomorphisme borélien de X' sur $\Omega(X')$ et $\Omega(X')$ est borélien dans A_{fac} et standard; puis $\Psi(X')$ est borélien dans $\tilde{A}$ et standard et Ψ est un isomorphisme borélien de X' sur $\Psi(X')$ (cf. [8], prop. 2).

Corollaire (*contenu implicitement dans* [35]). — *L'algèbre* $L^1(G)$ *d'un groupe localement compact séparable unimodulaire admet un système complet de représentations factorielles normales.*

Soit σ la trace définie sur $L^1(G) \cap L^2(G)$ par le produit scalaire de $L^2(G)$; on sait que $\sigma(x, x) = 0$ entraîne $x = 0$, et le corollaire résulte de la décomposition de σ en caractères.

2. Unicité de la décomposition.

Lemme 1. — *Soient* $\overline{A}$ *un facteur,* B *une* $*$-*algèbre fortement dense dans* $\overline{A}$, I *un idéal autoadjoint non nul de* B; I *est fortement dense dans* $\overline{A}$.

Soient J l'adhérence forte de I et $\overline{A}_1$, B_1, I_1, J_1 les boules unité respectives de $\overline{A}$, B, I, J; l'application f: $(S, T) \to ST$ de $\overline{A}_1 \times \overline{A}_1$ dans $\overline{A}_1$ est fortement continue et on a

$$f(B_1 \times I_1) \subset I_1;$$

comme B_1 (resp. I_1) est fortement dense dans $\overline{A}_1$ (resp. J_1) on a

$$f(\overline{A}_1 \times J_1) \subset J_1$$

autrement dit J est un idéal à gauche de $\overline{A}$; on démontre de même que J est un idéal à droite, et comme il est fortement fermé et non nul, il est identique à $\overline{A}$.

Lemme 2. — *Soient* Z *un espace localement compact,* ν *une mesure positive sur* Z, I_0 *un idéal autoadjoint de* A, J_0 *une* $*$-*algèbre sur le corps des rationnels dénombrable et partout dense dans* I_0, (a_n) *une suite partout dense dans* A; *pour tout* $z \in Z$ *soit* σ_z *un caractère dont l'idéal de définition (comme forme sesquilinéaire)* I_z *contient* I_0 *et qui n'est pas identiquement nul sur* I_0. *On suppose les fonctions* $z \to \sigma_z(a_n x, y)$ *et* $z \to \sigma_z(x, y)$ ν-*mesurables pour tout* n *et tout couple* (x, y) (x *et* $y \in J_0$); *soient* N_z, Λ_z, H_z, $\mathfrak{U}_z$, $\mathfrak{V}_z$, π_z, ρ_z *les éléments associés à* σ_z (*cf.* § 1, n° 1).

Dans ces conditions les champs de vecteurs $z \rightarrow \Lambda_z(x)$ $(x \in J_0)$ *définissent* (*au sens de* [4], ch. II, § 1, prop. 4) *sur le champ* $z \rightarrow H_z$ *une structure de champ* ν*-mesurable pour laquelle les champs* $z \rightarrow \pi_z(a)$, $\rho_z(a)$ *pour* $a \in A$, $\mathcal{U}_z$, $\mathcal{V}_z$, $\Lambda_z(I_z)$ *sont* ν*-mesurables.*

Tout d'abord la fonction $z \rightarrow \sigma_z(ax, y)$ pour x et $y \in J_0$ et $a \in A$ est ν-mesurable; de plus pour x et $y \in J_0$ la fonction

$$(\Lambda x_z | \Lambda_z y) = \sigma_z(x, y)$$

est ν-mesurable; puis les $\Lambda_z(x)$ avec $x \in J_0$ sont partout denses dans $\Lambda_z(I_0)$ (cf. § 1, n° 1, rem. 4), lui-même partout dense dans H_z (cf. § 1, n° 1, rem. 6).

Alors pour $a \in A$ le champ $z \rightarrow \pi_z(a)$ est ν-mesurable car, pour x et $y \in J_0$

$$(\pi_z(a)\,\Lambda_z x | \Lambda_z y) = \sigma_z(ax, y);$$

même chose pour le champ $z \rightarrow \rho_z(a)$. Le champ $z \rightarrow \mathcal{U}_z$ est ν-mesurable puisque $\mathcal{U}_z$ est engendrée par les $\pi_z(a_n)$; même chose pour $\mathcal{V}_z$. Enfin le champ d'algèbres hilbertiennes $z \rightarrow \Lambda_z(I_z)$ est ν-mesurable en vertu de [4], ch. II, § 4, prop. 1.

Dans les lemmes 3 et 4 on posera

$$\begin{aligned} H &= \int^{\oplus} H_z\, d\nu(z) \\ \pi(a) &= \int^{\oplus} \pi_z(a)\, d\nu(z) \qquad \text{pour} \qquad a \in A \\ \mathcal{U}_0 &= (\pi(A))''; \end{aligned}$$

on supposera Z à base dénombrable et $\sigma_z(x, y)$ ν-intégrable pour x et $y \in J_0$.

Lemme 3. — *Si* $\mathcal{U}_0$ *est un facteur les caractères* σ_z *sont presque tous deux à deux proportionnels.*

Soient Tr_z la trace naturelle sur $\mathcal{U}_z$, $\mathcal{A}$ l'algèbre hilbertienne $\int^{\oplus} \Lambda_z(I_z)\, d\nu(z)$, $\mathcal{U}$ l'algèbre de von Neumann $\int^{\oplus} \mathcal{U}_z\, d\nu(z)$, Tr la trace sur $\mathcal{U}$ égale à $\int^{\oplus} Tr_z\, d\nu(z)$; $\mathcal{U}$ est associée à $\mathcal{A}$ et on a $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$.

La trace Tr est normale et fidèle sur $\mathcal{U}_0$; montrons qu'elle y est semi-finie : soit $T \in \mathcal{U}_0^+$, $T \neq 0$; pour $y \in J_0$ on a

$$\begin{aligned} Tr\, \pi(y^* y) &= \int^{\oplus} Tr_z\, \pi_z(y^* y)\, d\nu(z) \\ &= \int \sigma_z(y, y)\, d\nu(z) < +\infty \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Tr}\left(T^{\frac{1}{2}}\pi(y^*y)\,T^{\frac{1}{2}}\right) < +\infty;$$

or

$$T^{\frac{1}{2}}\pi(y^*y)\,T^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{U}_0 \qquad \text{et} \qquad \leqslant \|\pi(y)\|^2.T;$$

de plus $\pi(y)\,T^{\frac{1}{2}}$ n'est pas nul pour tout $y \in J_0$, car $\pi(I_0)$, étant un idéal autoadjoint non nul de $\pi(A)$, est fortement dense dans $\mathfrak{U}_0$ (lemme 1); $\pi(J_0)$ l'est aussi et en faisant tendre $\pi(y)$ vers 1 on obtiendrait $T = 0$; il existe donc $y \in J_0$ tel que

$$T^{\frac{1}{2}}\pi(y^*y)\,T^{\frac{1}{2}} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \leqslant T$$

et Tr est semi-finie sur $\mathfrak{U}_0$.

Soit $\mathcal{Z}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables; pour toute partie mesurable non négligeable Y de Z soit P_Y le projecteur de Z correspondant à Y; comme $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U} \subset \mathcal{Z}'$ on a $P_Y \in \mathfrak{U}_0'$.

La fonction sur $\mathfrak{U}$: $T \rightarrow \operatorname{Tr}(P_Y T)$ induit sur $\mathfrak{U}_0$ une trace normale; elle est semi-finie (même raisonnement que pour Tr) et fidèle puisque l'application $T \rightarrow T_{P_Y}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{U}_0$ sur $(\mathfrak{U}_0)_{P_Y}$; elle est donc proportionnelle à Tr :

$$\operatorname{Tr}(P_Y T) = h(Y)\operatorname{Tr}(T).$$

En particulier pour x et $y \in J_0$

$$\operatorname{Tr}(P_Y\pi(xy^*)) = \int_Y \sigma_Z(x, y)d\nu(z) = h(Y)\int_Z \sigma_Z(x, y)d\nu(z).$$

Soit $x_0 \in J_0$ tel que

$$\int_Z \sigma_Z(x_0, x_0)d\nu(z) \neq 0;$$

on a

$$h(Y) = \left(\int_Z \sigma_Z(x_0, x_0)d\nu(z)\right)^{-1}\int_Y \sigma_Z(x_0, x_0)d\nu(z),$$

$$\int_Y \sigma_Z(x, y)d\nu(z)$$
$$= \left(\int_Z \sigma_Z(x_0, x_0)d\nu(z)\right)^{-1}\left(\int_Y \sigma_Z(x_0, x_0)d\nu(z)\right)\left(\int_Z \sigma_Z(x, y)d\nu(z)\right)$$

pour x et $y \in J_0$.

Étant donné l'arbitraire de Y il existe un ensemble $Z_0 \subset Z$ de complémentaire négligeable tel que pour $z \in Z_0$ on ait

$$\sigma_Z(x, y) = \left(\int_Z \sigma_Z(x_0, x_0)d\nu(z)\right)^{-1}(\sigma_Z(x_0, x_0))\left(\int_Z \sigma_Z(x, y)d\nu(z)\right)$$

quels que soient x et $y \in J_0$; comme σ_Z n'est pas identiquement nul sur J_0, les caractères $\sigma_z (z \in Z_0)$ sont deux à deux proportionnels sur J_0, donc sur I_0, donc enfin deux à deux proportionnels.

LEMME 4. — *Si les σ_Z sont deux à deux non proportionnels on a*

$$\mathfrak{U}_0 = \int^{\oplus} \mathfrak{U}_Z d\nu(z).$$

L'algèbre de von Neumann $\mathfrak{U} = \int^{\oplus} \mathfrak{U}_z \, d\nu\,(z)$ est engendrée par $\mathfrak{U}_0$ et par l'algèbre $\mathfrak{Z}$ des opérateurs diagonalisables (cf. [4], ch. II, § 3, th. 1), autrement dit

$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}_0' \cap \mathfrak{Z}';$$

pour démontrer le lemme il suffit de prouver que $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{Z}$ ou encore, en posant $\mathfrak{Y} = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{Z}$, que $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$.

Je dis que $\mathfrak{Y}$ est le centre de $\mathfrak{U}_0$; en effet, d'une part

$$\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{U}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{U}_0'$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{U}_0' &\subset \mathfrak{Z}' \cap \mathfrak{U}_0' = \mathfrak{U}' \\ &\subset \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U} \\ \text{d'où} \qquad &\subset \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}' = \mathfrak{Z} \\ &\subset \mathfrak{Y}. \end{aligned}$$

Soient $H = \int_Z^{\oplus} H(y)\, d\lambda\,(y)$ une décomposition de H associée à $\mathfrak{Y}$ et g l'application de Z sur Y correspondant à l'injection canonique de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{Z}$ (cf. [15], § 1, prop. 1); on peut supposer $\lambda = g(\nu)$; soit $\nu = \int \nu_y \, d\lambda\,(y)$ une désintégration de ν associée à g. Pour presque tout $y \in Y$ les fonctions $z \to \sigma_z(a_n x, x')$ où x et $x' \in J_0$ sont ν_y-mesurables; appliquant le lemme 2 on peut donc considérer

$$K(y) = \int^{\oplus} H_z \, d\nu_y\,(z)$$

et

$$\pi_y(a) = \int^{\oplus} \pi_z(a)\, d\nu_y\,(z);$$

on sait ([15], § 5) qu'on peut identifier $K(y)$ à $H(y)$ pour presque tout y et qu'après cette identification on a

$$\pi(a) = \int^{\oplus} \pi_y(a)\, d\lambda\,(y).$$

Soit $\mathfrak{U}_0 = \int^{\oplus} \mathfrak{U}_0(y)\, d\lambda(y)$ une décomposition de $\mathfrak{U}_0$; $\mathfrak{U}_0(y)$ est presque partout un facteur engendré par $\pi_y(A)$; d'après le lemme 3, ν_y est ponctuelle pour presque tout y et on a $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$.

PROPOSITION 1. — *Soient σ une trace maximale,* I *son idéal de définition,* J *une $*$-algèbre sur le corps des rationnels complexes, dénombrable et partout dense dans* I, I_0 *l'idéal autoadjoint de* A *engendré par* J, X *un ensemble de caractères deux à deux non proportionnels muni d'une topologie localement compacte à base dénombrable et d'une mesure positive* μ, I_χ, N_χ, Λ_χ, H_χ, $\mathfrak{U}_\chi$, $\mathfrak{V}_\chi$, π_χ, ρ_χ *les éléments associés à tout* $\chi \in X$; *on suppose que pour tout* $\chi \in X$ *on a* $I_\chi \supset I_0$, *que* χ *n'est pas identiquement nul sur* I_0, *que pour* x *et* $y \in I_0$ *la fonction* $\chi \to \chi(x, y)$ *est* μ*-intégrable et que*

$$\sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi).$$

Alors

(i) *les champs de vecteurs* $\chi \to \Lambda_\chi(x)$ *où* $x \in J$ *définissent sur le champ* $\chi \to H_\chi$ *une structure de champ* μ*-mesurable pour laquelle les champs* $\chi \to \pi_\chi(a)$, $\rho_\chi(a)$ *pour* $a \in A$, $\mathfrak{U}_\chi$, $\mathfrak{V}_\chi$, *sont* μ*-mesurables;*

(ii) *Il existe un isomorphisme de* H *sur* $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$ *transformant* $\Lambda(x)$ *en* $\int^{\oplus} \Lambda_\chi(x)\, d\mu(\chi)$ *pour tout* $x \in I_0$, $\pi(a)$ *en* $\int^{\oplus} \pi_\chi(a)\, d\mu(\chi)$ *et* $\rho(a)$ *en* $\int^{\oplus} \rho_\chi(a)\, d\mu(\chi)$ *pour tout* $a \in A$, $\mathfrak{U}$ *en* $\int^{\oplus} \mathfrak{U}_\chi\, d\mu(\chi)$, $\mathfrak{V}$ *en* $\int^{\oplus} \mathfrak{V}_\chi\, d\mu(\chi)$ *et enfin* $\mathfrak{Z}$ *en l'algèbre des opérateurs diagonalisables.*

Démonstration.

(i) résulte immédiatement du lemme 2.

(ii) : pour $x \in I_0$ posons $\dot{x} = \int^{\oplus} \Lambda_\chi(x)\, d\mu(\chi)$; alors pour x et $y \in I_0$ on a

$$\begin{aligned}(\Lambda(x)|\Lambda(y)) &= \sigma(x, y) = \int \chi(x, y)\, d\mu(\chi) \\ &= \int (\Lambda_\chi(x)|\Lambda_\chi(y))\, d\mu(\chi) \\ &= (\dot{x}|\dot{y}).\end{aligned}$$

Il existe donc un isomorphisme Ω de H sur un sous-espace H_1 de $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$ transformant $\Lambda(x)$ en $\dot{x}$ pour tout $x \in I_0$; H_1 est stable par $\int^{\oplus} \pi_\chi(a)\, d\mu(\chi)$ pour tout $a \in A$, donc par l'algèbre de von Neumann engendrée et en particulier (lemme 4) par l'algèbre $\mathcal{Z}_1$ des opérateurs diagonalisables; mais ([4], ch. II, § 1, prop. 7) les transformés des $\dot{x}$ ($x \in I_0$) par les éléments de $\mathcal{Z}_1$ engendrent l'espace $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$; on a donc $H_1 = \int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$.

Puis Ω transforme $\pi(a)$ en $\int \pi_\chi(a)\, d\mu(\chi)$ pour tout $a \in A$ car pour $x \in I_0$ on a

$$\begin{aligned}\Omega\pi(a)\Lambda(x) = \Omega\Lambda(ax) = (\dot{ax}) &= \int^{\oplus} \Lambda_\chi(ax)\, d\mu(\chi)\\ &= \int^{\oplus} \pi_\chi(a)\Lambda_\chi(x)\, d\mu(x)\\ &= \left(\int^{\oplus} \pi_\chi(a)\, d\mu(\chi)\right)\Omega\Lambda(x).\end{aligned}$$

Même raisonnement pour $\rho(a)$.

Par suite Ω transforme $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) en l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\int^{\oplus} \pi_\chi(a)\, d\mu(\chi)$ $\left(\text{resp. } \int^{\oplus} \rho_\chi(a)\, d\mu(\chi)\right)$ c'est-à-dire (lemme 4) en $\int^{\oplus} \mathcal{U}_\chi\, d\mu(\chi)$ $\left(\text{resp. } \int^{\oplus} \mathcal{V}_\chi\, d\mu(\chi)\right)$; Ω transforme enfin $\mathcal{Z}$ en le centre de $\int^{\oplus} \mathcal{U}_\chi\, d\mu(\chi)$, c'est-à-dire $\mathcal{Z}_1$.

THÉORÈME 2. — *Soient σ une trace maximale,* I *son idéal de définition,* I_0 *l'idéal autoadjoint de* A *engendré par une suite* (x_n) *partout dense dans* I, X *un ensemble de caractères deux à deux non proportionnels, muni d'une topologie localement compacte à base dénombrable et d'une mesure positive* μ; *on suppose que*

a) pour tout $\chi \in X$, χ *n'est pas identiquement nul sur* I_0.

b) pour x *et* $y \in I_0$ *la fonction* $\chi \to \chi(x, y)$ *est définie et* μ*-intégrable et* $\sigma(x, y) = \int \chi(x, y)\, d\mu(\chi)$.

Définissons de même X′ *et* μ' *avec les mêmes propriétés. Il existe alors des sous-ensembles* X_0 *de* X *et* X'_0 *de* X′ *de complémentaires respectivement* μ*- et* μ'*-négligeables et une application bijective* μ*-propre* f *de* X_0 *sur* X'_0 *telle que* $f(x)$ *soit proportionnel à* χ *pour tout* $\chi \in X_0$; *si on pose* $f(\chi) = k(\chi)\chi$, *on a*

$$f(\mu) = (k \circ f^{-1})\mu'.$$

Démonstration. — Soit J l'algèbre involutive sur le corps des rationnels complexes engendrée par les (x_n); d'après la prop. 1 et [4], ch. II, § 6, th. 4 il existe des sous-ensembles X_0 de X et X'_0 de X' de complémentaires négligeables, une bijection de X_0 sur X'_0 telle que $f(\mu)$ soit équivalente à μ' et pour tout $\chi \in X_0$ un isomorphisme V_χ de H_χ sur $H'_{f(\chi)}$ tel que

$$V_\chi \Lambda_\chi(x) = \Lambda'_{f(\chi)}(x)$$

pour $x \in J$ et par suite pour $x \in I_0$. Alors V_χ transforme $\pi_\chi(a)$ en $\pi'_{f(\chi)}(a)$ pour tout $a \in A$ et tout $\chi \in X_0$ car pour $x \in J$ on a

$$\begin{aligned} V_\chi \pi_\chi(a) \Lambda_\chi(x) = V_\chi \Lambda_\chi(ax) &= \Lambda'_{f(\chi)}(ax) \\ &= \pi'_{f(\chi)}(a) \Lambda'_{f(\chi)}(x) = \pi'_{f(\chi)}(a) V_\chi \Lambda_\chi(x). \end{aligned}$$

Donc $f(\chi)$ est proportionnel à χ pour tout $\chi \in X_0$: soit $f(\chi) = k(\chi)\chi$ avec $k(\chi) > 0$. Posons $f(\mu) = h\mu'$ avec $h(\chi') > 0$: pour x et $y \in I_0$ on a

$$\begin{aligned} \int \chi(x, y)\, d\mu(\chi) = \sigma(x, y) &= \int \chi'(x, y)\, d\mu'(\chi') \\ &= \int (h(\chi'))^{-1} \chi'(x, y)\, d(f(\mu))(x') \\ &= \int (h(f(\chi)))^{-1} (f(\chi))(x, y)\, d\mu(\chi) \\ &= \int (k(\chi))(h(f(\chi)))^{-1} \chi(x, y)\, d\mu(\chi). \end{aligned} \tag{1}$$

On va d'abord montrer que $k(\chi)\,(h(f(\chi)))^{-1} \leqslant 1$ presque partout ; supposons en effet que l'on ait $k(\chi)\,(h(f(\chi)))^{-1} \geqslant \alpha > 1$ sur un ensemble E μ-intégrable non négligeable ; soit $\xi = (\xi(\chi))$ un élément de $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$ vérifiant

$$\|\xi(\chi)\| = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Choisissons ε de façon que

$$\alpha\left((\mu(E))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2 > \left((\mu(E))^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Comme les champs $\chi \to \Lambda_\chi(x)$ où $x \in I_0$ sont partout denses dans $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$ (prop. 1) il existe $x \in I_0$ tel que

$$\int_{X_0} \|\Lambda_\chi(x) - \xi(\chi)\|^2\, d\mu(\chi) \leqslant \varepsilon ;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \int_E \big|\|\Lambda_\chi(x)\| - 1\big|\, d\mu(\chi) &\leqslant \int_E \|\Lambda_\chi(x) - \xi(\chi)\|\, d\mu(\chi) \\ &\leqslant (\varepsilon . \mu(E))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\int_E \chi(x,x)\,d\mu(\chi) \geqslant (\mu(E))^{-1}\left(\int_E \|\Lambda_\chi(x)\|\,d\mu(\chi)\right)^2$$
$$\geqslant (\mu(E))^{-1}\left(\int_E (1 - |\,\|\Lambda_\chi(x)\| - 1\,|\,)\,d\mu(\chi)\right)^2$$
$$\geqslant \left((\mu(E))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

et

$$(2)\quad \int (k(\chi))(h(f(\chi)))^{-1}.\chi(x,x)\,d\mu(\chi) \geqslant \alpha\left((\mu(E))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

D'autre part

$$\int \chi(x,x)\,d\mu(\chi) = \int \|\Lambda_\chi(x)\|^2\,d\mu(\chi) \leqslant \left(\|\xi\| + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$(3)\qquad = \left((\mu(E))^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Les inégalités (2) et (3) sont, à cause du choix de ε, en contradiction avec (1), d'où l'assertion.

Posons alors

$$l(\chi) = (k(\chi))(h(f(\chi)))^{-1} - 1;$$

soient X_1 l'ensemble des $\chi \in X_0$ tels que $l(\chi) = 0$ et X_x $(x \in J)$ l'ensemble des $\chi \in X_0$ tels que $\Lambda_\chi(x) \neq 0$; on a $X_0 = \bigcup_{\in J} X_x$ puisque pour tout χ les $\Lambda_\chi(x)$ $(x \in J)$ sont partout denses dans H_χ, lequel est non nul; $X_1 \cap X_x$ est μ-négligeable pour tout $x \in J$ donc X_1 est μ-négligeable et on a

$$(h(f(\chi))) = k(\chi)$$

presque partout, soit

$$f(\mu) = h\mu' = (k \circ f^{-1})\mu'.$$

CHAPITRE II

REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DE CERTAINS PRODUITS SEMI-DIRECTS

Dans tout ce chapitre G désigne un groupe localement compact, produit semi-direct d'un sous-groupe G_0 *discret* par un sous-groupe distingué G_1 *unimodulaire*; on notera (a, b) un élément quelconque de G avec $a \in G_0$, $b \in G_1$, le produit étant défini par

$$(a, b)\,(a', b') = (aa', b.ab')$$

où $a \to (b \to ab)$ est un homomorphisme de G_0 dans le groupe des automorphismes de G_1; on a alors

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, a^{-1}b^{-1})$$

et en notant e_0 et e_1 les éléments neutres de G_0 et G_1,

$$(a, b) = (e_0, b)\,(a, e_1)$$
$$(a, e_1)\,(e_0, b)\,(a^{-1}, e_1) = (e_0, ab).$$

On notera $d(ab) = \delta_a^{-1}\,db$ l'action de G_0 sur la mesure de Haar de G_1; on a alors la mesure de Haar à gauche sur G

$$\int f(a, b)\,d(a, b) = \sum_a \delta_a \int f(a, b)\,db.$$

Désignons par A, A_0, A_1 les C^*-algèbres respectives de G, G_0, G_1. Nous supposerons que la fonction 1 sur G_0 (resp. G_1) est limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif à supports compacts; il en est alors de même pour G d'après [37], et la représentation régulière gauche π_0 (resp. π_1, resp. π) de G_0 (resp. G_1, resp. G) définit un isomorphisme de A_0 (resp. A_1, resp. A) sur son image.

§ 1. Préliminaires sur la C^*-algèbre de G.

1. Représentation des éléments de A par des applications de G_0 dans A.

Pour $f \in L^1(G)$ et $a \in G_0$ nous noterons f_a l'élément de $L^1(G_1)$ défini par

$$f_a(b) = \delta_a f(a, b);$$

pour $g \in L^1(G_1)$ nous noterons g^a l'élément de $L^1(G)$ défini par

$$g^a(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-1} g(b') & \text{si} \quad a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

enfin nous noterons $L^1(G_1)^a$ l'ensemble des g^a pour $g \in L^1(G_1)$.

L'application $f \to f_a$ induit sur $L^1(G_1)^a$ un isomorphisme d'espaces de Banach de $L^1(G_1)^a$ sur $L^1(G_1)$, et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$; on désignera par A^a l'adhérence de $L^1(G_1)^a$ dans A.

L'espace $L^2(G)$ est somme hilbertienne d'espaces $H_a (a \in G_0)$, images de $L^2(G_1)$ par des isomorphismes J_a tels que

$$(J_a h)\ (a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-\frac{1}{2}} h(b') & \text{si} \quad a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

tout opérateur continu T dans $L^2(G)$ est donc représenté par une matrice $(T_{a, a'})$ où

$$T_{a, a'} = J_a^* T J_{a'} \in \mathcal{L}(L^2(G_1)).$$

Soit $f \in L^1(G)$; pour $\varphi \in L^2(G)$ on a

$$(\pi(f)\varphi)(a, b) = \sum_{a'} \delta_{a'} \int f(a', b')\varphi(a'^{-1}a, a'^{-1}(b'^{-1}b))db'$$

d'où, pour $\psi \in L^2(G_1)$;

$$((\pi(f))_{a_1, a_2}\psi)(b) = \delta^{3/2}_{a_1 a_2^{-1}} \int f(a_1 a_2^{-1}, b')\psi(a_2 a^{-1}(b'^{-1}b))db';$$

$(\pi(f))_{a_1, a_2}$ ne dépend que de $a_1 a_2^{-1}$ et est donc de la forme $(\pi(f))_{a_1 a_2^{-1}}$ où

$$((\pi(f))_a\psi)(b) = \delta_a^{3/2} \int f(a, b')\psi(a^{-1}(b'^{-1}b))db'.$$

Pour $a \in G_0$ soit U_a l'opérateur unitaire dans $L^2(G_1)$ défini par

$$(U_a\psi)(b) = \delta_a^{\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}b);$$

on a alors

$$(1) \qquad (\pi(f))_a = \pi_1(f_a)U_a.$$

Par continuité, pour $x \in A$, $(\pi(x))_{a_1, a_2}$ est de la forme $(\pi(x))_{a_1a_2^{-1}}$ et on a

$$(\pi(x))_a U_a^{-1} \in \pi_1(A_1);$$

soit x_a l'élément de A_1 défini par

$$\pi_1(x_a) = \pi(x)_a U_a^{-1};$$

l'application $x \to x_a$ de A dans A_1 est linéaire, diminue les normes et prolonge l'application $f \to f_a$ déjà considérée.

Pour $f \in L^1(G_1)^a$ la formule (1) montre que $\|f\|_A = \|f_a\|_{A_1}$; la restriction de l'application $x \to x_a$ à A^a est donc un isomorphisme d'espaces de Banach de A^a sur A_1 et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$. Pour tout $x \in A_1$ on notera x^a l'élément correspondant de A^a, qui est donc défini par

$$(x^a)_{a'} = \begin{cases} x & \text{si} \quad a' = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin si $x \in A$ on a

$$(\pi(xx^*))_{e_0} = \sum_a (\pi(x))_a (\pi(x))_a^*$$

la série convergeant fortement; donc $(xx^*)_{e_0} > 0$ et $(xx^*)_{e_0}$ est nul si et seulement si $x = 0$.

Nous avons ainsi démontré la

Proposition 1. — *A tout élément x de* A *est associée de façon biunivoque une application $a \to x_a$ de G_0 dans A_1 telle que pour $x \in L^1(G)$ on ait*

$$x_a \in L^1(G_1) \qquad \text{et} \qquad x_a(b) = \delta_a . x(a, b);$$

pour tout $a \in G_0$ l'application $x \to x_a$ est linéaire et continue; elle est positive et fidèle pour $a = e_0$; elle induit sur A^a un isomorphisme d'espaces de Banach de A^a sur A_1, et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$.

2. Action de G_0 dans A_1. Quelques formules.

Pour $f \in L^1(G_1)$ et $a \in G_0$ posons $(a.f)(b) = \delta_a f(a^{-1}b)$; on a

$$\pi_1(a.f) = U_a \pi_1(f) U_a^{-1}$$

donc $\|a.f\|_{A_1} = \|f\|_{A_1}$ et l'automorphisme $f \to a.f$ de $L^1(G_1)$ se prolonge en un automosphisme $x \to a.x$ de A_1; on a encore

$$\pi_1(a.x) = U_a \pi_1(x) U_a^{-1}$$

d'où on déduit facilement que pour $x \in A$ et $y \in L^1(G)$

$$(2) \qquad (x^*)_a = a.((x_{a^{-1}})^*)$$

$$(3) \qquad (xy)_a = \sum_{a'} x_a(a'.y_{a'^{-1}a})$$

la dernière série convergeant au sens de A_1.

Soit maintenant $(u_i)_{i \in I}$ une unité approchée de $L^1(G_1)$; on sait que (u_i) est aussi unité approchée pour A_1; on a, pour $z \in A_1$ et $a \in G_0$

$$(4) \qquad z^a = \lim z^{e_0}(u_i)^a$$

$$(5) \qquad (a.z)^{e_0} = \lim (u_i)^a z^{e_0}(u_i)^{a^{-1}};$$

en effet les deux membres de (4) sont dans A^a et il suffit de vérifier que

$$(z^a)_a = \lim (z^{e_0}(u_i)^a)_a;$$

or $(z^a)_a = z$ et $(z^{e_0}(u_i)^a)_a = zu_i$; de même les deux membres de (5) sont dans A^{e_0} et il suffit de vérifier que

$$((a.z)^{e_0})_{e_0} = \lim ((u_i)^a z^{e_0}(u_i)^{a^{-1}})_{e_0};$$

or on a

$$((a.z)^{e_0})_{e_0} = a.z$$

et

$$((u_i)^a z^{e_0}(u_i)^{a^{-1}})_{e_0} = u_i a.(zu_i).$$

Soit enfin ρ une représentation unitaire de G; pour $a \in G_0$ on a

$$\rho(a, e_1) = \lim \rho((u_i)^a)$$

et par suite, pour $z \in A_1$:

$$(4') \qquad \rho(z^a) = \rho(z^{e_0})\rho(a, e_1)$$

$$(5') \qquad \rho((a.z)^{e_0}) = \rho(a, e_1)\rho(z^{e_0})\rho(a, e_1)^{-1}.$$

Remarque. — Supposons G_1 discret; soit σ la forme linéaire positive sur A_1 prolongeant la forme $f \to f(e_1)$ sur $L^1(G_1)$:

alors A est isomorphe au « produit croisé » de A_1 par le groupe d'automorphismes G_0 pour la forme σ (cf. [38], th. 1).

3. Approximation des éléments de A.

(Le résultat de ce numéro a été démontré avec l'aide de P. Eymard, à qui est due, essentiellement, l'idée d'employer les éléments $P_i x$.)

En vertu de l'hypothèse faite au début de ce chapitre sur G_0, il existe une famille filtrante $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions de type positif sur G_0 à supports finis telles que $f_i(e_0) = 1$ et que $f_i(a) \to 1$ pour tout $a \in G_0$.

Soit $x \in A$; pour tout $i \in I$ posons

$$P_i x = \sum_a f_i(a)\,(x_a)^a;$$

comme $\|(x_a)^a\| \leqslant \|x\|$, P_i est un opérateur linéaire continu dans A; de plus si x est hermitien, $P_i x$ l'est aussi; en effet

$$(P_i x)^* = \sum_a f_i(a^{-1})\,((x_a)^a)^* = \sum_a f_i(a)\,((x_a)^a)^{-1})^*$$

et on voit facilement que

$$((x_a)^{a^{-1}})^* = (x_a)^a.$$

Lemme 1. — *On a* $\|P_i\| \leqslant 2$ *pour tout* $i \in I$ (*la norme* $\|\ \ \|$ *est prise au sens de* A).

Il suffit de montrer que $\|P_i x\| \leqslant \|x\|$ pour tout élément hermitien x de $L^1(G)$, ou encore que pour un tel x on a

$$|g(P_i x)| \leqslant \|x\|$$

pour toute forme linéaire positive continue g sur A telle que $\|g\| \leqslant 1$; une telle forme est définie par une fonction de type positif ψ sur G telle que $\psi(e_1, e_0) \leqslant 1$ et comme $P_i x \in L^1(G)$, on a

$$\begin{aligned} g(P_i x) &= \sum_a \delta_a \int \psi(a, b)\,(P_i x)\,(a, b)db \\ &= \sum_a \delta_a \int \psi(a, b) f_i(a) x(a, b)db; \end{aligned}$$

posons

$$\psi'(a, b) = f_i(a)\psi(a, b);$$

on obtient

$$g(P_i x) = \sum_a \delta_a \int \psi'(a, b) x(a, b)db. \tag{6}$$

La fonction sur G : $\psi''(a, b) = f_i(a)$ est de type positif; il en est alors de même de $\psi' = \psi''\psi$ et en outre $\psi'(e_0, e_1) \leqslant 1$; on a donc, d'après (6)

$$|g(P_i x)| \leqslant ||x||.$$

Proposition 2. — *On a* $x = \lim P_i x$ *pour tout* $x \in A$.

Il suffit, en vertu du lemme 1, de le démontrer pour $x \in L^1(G)$ et dans ce cas cela résulte du fait que pour toute partie finie E de G_0 :

$$\begin{aligned} ||x - P_i x||_1 &= \sum_a ||x_a - (P_i x)_a||_1 \\ &= \sum_a |1 - f_i(a)|\, ||x_a||_1 \\ &\leqslant \sum_{a \in E} |1 - f_i(a)|\, ||x_a||_1 + 2 \sum_{a \in G_0 - E} ||x_a||_1. \end{aligned}$$

Corollaire. — *Soit* ρ *une représentation de* G *et soit* x *un élément de* A; *si on a* $\rho((x_a)^{e_0}) = 0$ *pour tout* $a \in G_0$, *alors* $\rho(x) = 0$.

Car d'après la formule (4')

$$\rho((x_a)^h) = \rho((x_a)^{e_0})\rho(a, e_1) = 0 \qquad \text{pour tout } a$$
$$\rho(P_i x) = 0 \qquad \text{pour tout } i \text{ et enfin} \quad \rho(x) = 0.$$

4. Idéaux autoadjoints fermés de A et de A_1.

Lemme 2. — (i) *Soit* I *un idéal autoadjoint fermé de* A; *l'image* $\Pi(I)$ *de* $I \cap A^{e_0}$ *par l'application* $x \to x_{e_0}$ *est un idéal autoadjoint fermé de* A_1 *invariant par* G_0.

(ii) *Soit* J *un idéal autoadjoint fermé invariant de* A_1; *l'ensemble* $\Pi'(J)$ *des* x *de* A *tels que* $x_a \in J$ *pour tout* a *est un idéal autoadjoint fermé de* A *et on a*
$\Pi'(J) = J$.

(iii) *On a* $\Pi'\Pi(I) \subset I$ *pour tout idéal autoadjoint fermé* I *de* A.

Démonstration. — (i) $\Pi(I)$ est évidemment un idéal autoadjoint fermé; il est invariant par G_0 en vertu de la formule (5).

(ii) $\Pi'(J)$ est évidemment un sous-espace vectoriel fermé; il est autoadjoint d'après la formule (2); pour montrer que c'est un idéal il suffit de prouver que si $x \in \Pi'(J)$ et $y \in L^1(G)$, alors $xy \in \Pi'(J)$, ce qui résulte de la formule (3); la dernière assertion est évidente.

(iii) Soit ρ une représentation de A de noyau I; on a, pour tout $x \in A$, $x \in \Pi'\Pi(I)$ si et seulement si $x_a \in \Pi(I)$ pour tout a, donc si et seulement si $\rho((x_a)^{e_0}) = 0$ pour tout a et ceci entraîne $\rho(x) = 0$ (cor. de la prop. 2).

5. Homomorphisme de A sur A_0.

On désigne ici par λ le prolongement à A_1 de la forme linéaire positive sur $L^1(G_1)$ définie par $\lambda(g) = \int g(b)\,db$.

Proposition 3. — *Pour toute $f \in L^1(G)$ soit $\tilde{f}$ l'élément de $L^1(G_0)$ défini par*

$$\tilde{f}(a) = \delta_a \int f(a, b)\,db;$$

l'application $f \to \tilde{f}$ se prolonge en un homomorphisme de A sur A_0, dont le noyau est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\lambda(x_a) = 0$ pour tout a.

L'application $f \to \tilde{f}$ est évidemment linéaire et surjective; c'est un homomorphisme car pour f et $g \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned}
\tilde{f^*}(a) &= \delta_a \int \overline{f(a^{-1}, a^{-1}b^{-1})}\,db = \int \overline{f(a^{-1}, b)}\,db = (\tilde{f})^*(a) \\
(\widetilde{fg})(a) &= \delta_a \int \Big(\sum_{a'} \delta_{a'} \int f(a', b')\,g(a'^{-1}a, a'^{-1}(b'-b))\,db'\Big)db \\
&= \delta_a \sum_{a'} \Big(\int f(a', b')\,db' \int g(a'^{-1}a, b)\,db\Big) \\
&= \sum_{a'} \tilde{f}(a')\,\tilde{g}(a'^{-1}a) = (\tilde{f}\tilde{g})(a).
\end{aligned}$$

Elle se prolonge donc en un homomorphisme de A dans A_0, dont l'image est une C*-algèbre contenant $L^1(G_0)$ et par suite identique à A_0.

D'autre part, appliquant les résultats du n° 1 au cas où G_1 se réduit à e_1, on voit que tout élément u de A_0 est représenté par une fonction $u(a)$ et que pour tout $a \in G_0$, $u(a)$ dépend continûment de u; comme pour $x \in L^1(G)$ on a

$$\tilde{x}(a) = \lambda(x_a)$$

cette égalité reste vraie pour $x \in A$ et on a

$$\begin{aligned}
\tilde{x} = 0 \iff \tilde{x}(a) &= 0 \quad \text{pour tout } a \\
\iff \lambda(x_a) &= 0 \quad \text{pour tout } a.
\end{aligned}$$

§ 2. Représentations factorielles de G.

Dans tout ce paragraphe on suppose G_0 *discret et dénombrable* et G_1 *abélien à base dénombrable*; on suppose de plus que la fonction 1 sur G_1 est limite uniforme sur tout ensemble fini de fonctions de type positif à supports finis; les hypothèses du début du chapitre sont donc satisfaites. Enfin il sera question uniquement de représentations unitaires de G dans des espaces hilbertiens *à bases dénombrables*.

On sait que pour $f \in L^1(G_1)$ on a $||f||_{A_1} = ||\hat{f}||_\infty$ et que la transformation de Fourier $f \to \hat{f}$ se prolonge en un isomorphisme $\mathcal{F}$ de A_1 sur $L_\infty(\hat{G}_1)$.

On notera $\chi \to a\chi$ l'action de G_0 dans $\hat{G}_1$ avec

$$\langle a\chi, b\rangle = \langle \chi, a^{-1}b\rangle;$$

on notera d'autre part $\varphi \to a\varphi$ l'action de G_0 dans $L_\infty(\hat{G}_1)$ avec

$$(a\varphi)(\chi) = \varphi(a^{-1}\chi);$$

pour tout $x \in A_1$ on a alors $\mathcal{F}(a.x) = a.(\mathcal{F}x)$. Enfin si $d\chi$ est la mesure de Haar sur $\hat{G}_1$ on a $d(a\chi) = \delta_a d\chi$.

1. Propriétés générales des représentations de G.

Soient π une représentation de G dans un espace hilbertien H et I le noyau de la représentation correspondante de A; $\mathcal{F}(\Pi(I))$ est l'ensemble des éléments de $L_\infty(\hat{G}_1)$ nuls sur une partie fermée de $\hat{G}_1$ invariante par G_0; et F s'identifie au spectre de $\pi(A^{e_0})$. Soit C la classe de mesures sur $\hat{G}_1$ associée à $\pi|G_1$ grâce au théorème de Ambrose-Godement-Naïmark. Tout élément de G_0, transformant $\pi|G_1$ en une représentation équivalente, conserve C; autrement dit les éléments de C sont des mesures quasi-invariantes par G_0; leur support est F; enfin si π est factorielle, C est ergodique (cf. par exemple [25], p. 542).

Lemme 1. — *Supposons que pour tout* $a \in G_0$ *différent de* e_0 *et tout ensemble* $E \in \hat{G}_1$ *mesurable et non négligeable pour* C *il existe un ensemble* $E' \subset E$ *mesurable et non négligeable pour* C *tel que* $aE' \cap E' = \emptyset$. *Alors si* $x \in A$ *et si* $\pi(x) = 0$, *on a* $\pi((x_a)^{e_0}) = 0$ *pour tout a. On a en outre* $I = \Pi'\Pi(I)$.

En vertu des hypothèses de dénombrabilité il existe une mesure $\mu \in C$ telle que $\|\mu\| = 1$ et une décomposition $H = \int^{\oplus} H(\chi)\, d\mu(\chi)$ telle que, en notant $\varphi \to T_\varphi$ le prolongement à $L^\infty(\hat{G}_1, \varphi)$ de l'isomorphisme de Gelfand, T_φ soit l'opérateur de multiplication par φ.

Soit $a \in G_0$; il existe une fonction localement μ-intégrable $r_a(\chi)$ telle que

$$d\mu\,(a\chi) = r_a(\chi)\, d\mu\,(\chi)\,;$$

d'autre part, comme $\pi(a, e_1)$ conserve l'algèbre des opérateurs diagonalisables, on sait (cf. [15], § 4) qu'il existe pour tout $\chi \in \hat{G}_1$ un isomorphisme $U_{a,\chi}$ de $H(a^{-1}\chi)$ sur $H(\chi)$ tel que pour tout $h = (h(\chi)) \in H$ on ait presque partout

$$(\pi(a,\ e_1)h)\,(\chi) = r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}}\, U_{a,\chi} h(a^{-1}\chi).$$

Soient $x \in A$ tel que $\pi(x) = 0$, $a_0 \in G_0$ et $\varepsilon > 0$; il existe un élément y de A tel que $y_a = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments distincts $a_1, \ldots, a_n$ et éventuellement a_0 et que l'on ait $\|y - x\| \leqslant \varepsilon$. Comme

$$\pi(y) = \sum_a T_{\mathcal{F}y_a} \pi(a,\ e_1)$$

on a, pour tout $h = (h(\chi)) \in H$ et pour presque tout χ :

$$(\pi(y)h)\,(\chi) = \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}}\, \mathcal{F}y_a(\chi) U_{a,\chi} h(a^{-1}\chi).$$

D'après l'hypothèse et le lemme de Zorn il existe une suite (E_j) de parties mesurables de $\hat{G}_1$, deux à deux disjointes, telles que $\cup E_j$ soit de complémentaire négligeable et que l'on ait, pour tout $i = 1, 2, \ldots n$ et pour tout j :

$$a_i a_0^{-1} E_j \cap E_j = \emptyset;$$

choisissons j arbitrairement et $h \in H$ tel que

$$\|h(\chi)\| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \chi \in a_0^{-1} E_j \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$

on a alors

$$\|\pi(y)h\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|h\|^2 = \varepsilon^2 \mu(a_0^{-1} E_j)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\|\pi(y)h\|^2 &= \int \left\| \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}y_a(\chi) \mathrm{U}_{a,\chi} h(a^{-1}\chi) \right\|^2 d\mu(\chi) \\
&\geqslant \int_{\mathrm{E}_j} \left\| \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}y_a(\chi) \mathrm{U}_{a,\chi} h(a^{-1}\chi) \right\|^2 d\mu(\chi) \\
&= \int_{\mathrm{E}_j} r_{a_0^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}y_{a_0}(\chi)|^2 d\mu(\chi) \\
&= \int_{a_0^{-1}\mathrm{E}_j} |\mathcal{F}y_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi)
\end{aligned}$$

et comme ceci est vrai pour tout j :

$$\int |\mathcal{F}y_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi) \leqslant \varepsilon^2.$$

D'autre part on a $\|x_a - y_a\|_{\mathrm{A}_1} \leqslant \varepsilon$ pour tout a, et en particulier

$$|\mathcal{F}x_{a_0}(a_0\chi) - \mathcal{F}y_{a_0}(a_0\chi)| \leqslant \varepsilon$$

pour tout χ; donc

$$\left(\int |\mathcal{F}x_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\varepsilon$$

et, vu l'arbitraire de ε

$$\int |\mathcal{F}x_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi) = 0;$$

par suite

$$\int |\mathcal{F}x_{a_0}(\chi)|^2 d\mu(\chi) = 0$$

et enfin

$$\pi((x_{a_0})^{e_0}) = 0.$$

Enfin l'égalité $\mathrm{I} = \Pi'\Pi(\mathrm{I})$ résulte de ce qui précède et du lemme 2 du § 1.

2. Représentations factorielles normales relativement à A'.

On désigne par A' la sous-algèbre de A formée des éléments x tels que x_a soit nul sauf pour un nombre fini d'éléments a; une représentation factorielle π de G sera dite *normale relativement à* A' si, $\mathfrak{m}$ étant l'idéal de définition de la trace canonique du facteur engendré par $\pi(\mathrm{A})$, on a $\pi(\mathrm{A}') \cap \mathfrak{m} \neq \{0\}$.

On n'est malheureusement pas parvenu à déterminer si toute représentation factorielle normale relativement à A l'est aussi relativement à A'.

LEMME 2. — *Soient* π *une représentation de* G, $\mathfrak{A}$ *l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi(A)$, Tr *une trace normale sur* $\mathfrak{A}$; *on suppose que la classe de mesures sur* $\hat{G}_1$ *associée à* $\pi|G_1$ *vérifie la condition du lemme* 1. *Alors pour* $x \in A'^{+}$ *on a*

$$\mathrm{Tr}\,\pi(x) = \mathrm{Tr}\,\pi((x_{e_0})^{e_0}).$$

Soit $x \in A'^{+}$ tel que $x_a = 0$ sauf pour $a = a_1, \ldots a_n$; on a

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi((x_{a_i})^{e_0})\,\pi(a_i,\ e_1).$$

D'autre part il existe en vertu du théorème de Zorn une suite (E_j) de projecteurs de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A^{e_0})$, deux à deux orthogonaux, de somme 1 et tels que E_j soit orthogonal à $\pi(a_i, e_1)\,E_j\pi(a_i, e_1)^{-1}$ pour tout j et tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $a_i \neq e_0$. On a alors

$$\begin{aligned} E_j\pi(x)E_j &= \sum_{i=1} \pi((x_{a_i})^{e_0}E_j\pi(a_i, e_1)\,E_j \\ &= E_j\pi((x_{e_0})^{e_0})\,E_j \\ \mathrm{Tr}\,\pi(x) &= \sum_j \mathrm{Tr}\,(E_j\pi(x)\,E_j) \\ &= \sum_j \mathrm{Tr}\,(E_j\pi((x_{e_0})^{e_0})\,E_j) \\ &= \mathrm{Tr}\,\pi((x_{e_0})^{e_0}). \end{aligned}$$

Définition. — Une mesure positive μ définie sur une partie ouverte invariante Ω de $\hat{G}_1$ sera dite vérifier la *condition* $(*)$ si pour tout élément a de G_0 différent de e_0 et toute partie μ-mesurable non négligeable E de Ω il existe une partie μ-mesurable non négligeable E' de E telle que $aE' \cap E' = \emptyset$.

PROPOSITION 1. — (i) *Soit* μ *une mesure positive, invariante, ergodique et vérifiant la condition* $(*)$, *définie sur un ouvert invariant* Ω *de* $\hat{G}_1$; *la formule*

$$(\pi(a,\ b)\varphi)(a',\ \chi) = \langle \chi,\ b\rangle \varphi(a^{-1}a',\ a^{-1}\chi)$$

définit une représentation π *de* G *dans* $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega,\ \mu)$; *cette représentation est factorielle et normale relativement à* A'; *son caractère* λ *dans* A *est donné par*

$$\lambda(x) = \mu(\mathcal{F}x_{e_0}|\Omega) \qquad \text{pour} \qquad x \in A^{+};$$

elle est de type I (*resp.* II) *si et seulement si* μ *est atomique* (*resp. diffuse*), *et de type fini si et seulement si* μ *est bornée* (*et par conséquent prolongeable à* $\hat{G}_1$).

(ii) *Si l'on définit de la même façon* Ω', μ', π', π' *est quasi-équivalente à* π *si et seulement si* μ *et* μ' *induisent sur* $\Omega \cap \Omega'$ *des mesures proportionnelles et non nulles.*

(iii) *Toute classe de quasi-équivalence de représentations factorielles normales relativement à* A', *telle que la classe de mesures correspondante sur* $\hat{G}_1$ *vérifie la condition* (*), *s'obtient de cette façon.*

Démonstration. — (i) Soit μ une mesure positive invariante (non nécessairement ergodique) définie sur un ouvert invariant Ω; l'espace $H = L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$ est somme hilbertienne d'espaces $H_a (a \in G_0)$, images de $L^2(\Omega, \mu)$ par des isomorphismes évidents; pour $a \in G_0$ soient U_a l'opérateur unitaire dans $L^2(\Omega, \mu)$ défini par

$$(U_a \varphi)(\chi) = \varphi(a^{-1}\chi)$$

et $\tilde{U}_a$ l'opérateur unitaire dans H représenté par la matrice

$$(U_a)_{a_1, a_2} = \begin{cases} U_a & \text{si} \quad a_1 a_2^{-1} = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ soient T_f l'opérateur de multiplication par f dans $L^2(\Omega, \mu)$ et $\tilde{T}_f$ l'opérateur analogue dans H. L'opérateur $\pi(a, b)$ de l'énoncé n'est autre que $\tilde{T}_{\langle\chi, b\rangle}\tilde{U}_a$ et on vérifie immédiatement que π est une représentation de G dans H. L'ensemble $\pi(G)$ engendre la même algèbre de von Neumann, soit $\mathcal{A}$, que les $\tilde{U}_a$ $(a \in G_0)$ et les T_f $(f \in L^\infty(\Omega, \mu))$. D'après [4], ch. I, § 9, prop. 1 (ou encore [29], lemme 12-4-3) il existe une trace Tr, normale, fidèle et semi-finie sur $\mathcal{A}$ telle que, si $T \in \mathcal{A}^+$ est représenté par une matrice $T_{a_1, a_2} = T_{a_1 a^{-1}}$ et si T_{e_0} est l'opérateur de multiplication par $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ $(f \geqslant 0)$, on ait

$$\mathrm{Tr}\, T = \mu(f);$$

pour $x \in A'$, $\pi(x)$ est représenté par la matrice

$$(\pi(x))_{a_1, a_2} = T_{\mathcal{F}x_{a_1 a_2^{-1}}} U_{a_1 a_2^{-1}}$$

et cette propriété s'étend par continuité à tout $x \in A$; on a donc, pour $x \in A^+$:

$$\mathrm{Tr}\, \pi(x) = \mu(Fx_{e_0}|\Omega).$$

Supposons maintenant que μ soit ergodique et vérifie la condition $(*)$; d'après [4], p. 134, $\mathfrak{A}$ est un facteur, et π est factorielle et normale relativement à A′ (et même relativement à A^{e_0}). L'assertion relative au type de π résulte de [4], ch. I, § 9, prop. 3 (ou encore de [29], lemme 13-1-2) dans le cas où μ est diffuse, et de [29], lemme 13-1-1 dans le cas où μ est atomique.

(ii) Définissons de même Ω', μ', π'; si μ et μ' induisent sur $\Omega \cap \Omega'$ des mesures proportionnelles et non nulles, $\Omega \cap \Omega'$ est de complémentaire négligeable pour μ et μ' et π' est équivalente à π.

Réciproquement supposons π et π' quasi-équivalentent $\Omega \cap \Omega'$ est de complémentaire négligeable pour μ et μ', car si par exemple $\Omega \cap \Omega'$ était μ-négligeable Ω' ne rencontrerais pas le support de μ; de plus les mesures induites sur $\Omega \cap \Omega$; sont proportionnelles puisque $\mathrm{Tr}'\,\pi'(x)$ est proportionnel à $\mathrm{Tr}\,\pi(x)$ pour tout $x \in A$.

(iii) Soient π' une représentation possédant les propriétés de l'énoncé, H′ son espace $\mathfrak{A}'$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi'(A)$, Tr′ la trace canonique sur $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{m}'$ son idéal de définition, C′ la classe de mesures sur $\hat{G}_1$ associée à $\pi'|G_1$, F′ son support.

D'après le lemme 2, si $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}' \cap \pi'(A^{e_0})$, on a $\mathfrak{m}_0 \neq 0$; soit E′ le sous-ensemble fermé de F′, invariant par G_0, correspondant à $\overline{\mathfrak{m}}_0$; E′ est C′-négligeable puisque C′ est ergodique; d'après [24], 25 D, $\mathfrak{m}_0$ contient les T_f tels que $f \in \mathcal{K}\ (F' - E')$ et il existe une mesure positive invariante non nulle μ_0 sur $F' - E'$ telle que

$$\mathrm{Tr}'\,T_f = \mu_0(f) \qquad \text{pour toute} \qquad f \in \mathcal{K}(F' - E').$$

Montrons que $\mu_0 \in C'|F' - E'$ (classe des mesures induites sur $F' - E'$); $C'|F'$ étant la classe des mesures basiques pour $\pi'(A^{e_0})$ (cf. [4], ch. I, § 7), cela revient à démontrer que, g étant un élément fixé de $\mathcal{K}^+(F' - E')$, pour $h \in \mathcal{K}^+(F' - E')$ et $h \leqslant g$
on a

$$\mathrm{Tr}'T_h \to 0 \iff (T_h\xi|\xi) \to 0 \qquad \text{pour tout} \ \ \xi \in H'.$$

Implication $\Longrightarrow$: considérons $\mathfrak{m}'^{\frac{1}{2}}$ comme une algèbre hilbertienne partout dense dans un espace hilbertien L; $T_h^{\frac{1}{2}}$ est de la forme U_η avec $\eta \in L$ et on a $\mathrm{Tr}'T_h = (\eta|\eta)$; donc $\eta \to 0$ et, pour tout $\eta' \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, on a

$$U_\eta \eta' = \eta\eta' \to 0;$$

comme $||U_\eta||$ est bornée, U_η tend fortement vers 0 et T_h tend faiblement vers 0.

Implication $\Longleftarrow$: il existe une suite (ξ_i) d'éléments de H' telle que pour tout $T \in \mathfrak{A}'^+$ on ait

$$\mathrm{Tr}'T = \sum_i (T\xi_i|\xi_i)$$

et l'assertion résulte du fait que l'on a

$$(T_h\xi_i|\xi_i) \leqslant (T_g\xi_i|\xi_i)$$

et

$$\sum_i (T_g\xi_i|\xi_i) = \mathrm{Tr}'T_g < +\infty.$$

Par conséquent μ_0 est ergodique et vérifie la condition $(*)$ et en la prolongeant par 0 dans $\hat{G}_1 - F'$ on obtient une mesure μ sur $\Omega = \hat{G}_1 - E'$ satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé (i).

Remarquons que l'on a

$$\mathrm{Tr}'\pi'(y) = \mu(\mathcal{F}y_{e_0}|\Omega)$$

pour tout élément y positif de A^{e_0}; en effet soit M l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{K}(F' - E')$ tels que $0 \leqslant \varphi \leqslant \mathcal{F}y_{e_0}$; on a

$$\mathrm{Tr}'\pi'(y) = \mathrm{Tr}'T_{\mathcal{F}y_{e_0}} = \sup_{\varphi \in M} \mathrm{Tr}'T_\varphi$$

$$\mu(\mathcal{F}y_{e_0}|\Omega) = \sup_{\varphi \in M} \mu_0(\varphi)$$

et

$$\mathrm{Tr}'T_\varphi = \mu_0(\varphi)$$

d'après la définition de μ_0.

On a alors, en vertu du lemme 2 :

$$\mathrm{Tr}'\,\pi'(x) = \mu(\mathcal{F}x_{e_0}|\Omega)$$

pour tout $x \in A'^+$.

Soit maintenant π la représentation obtenue à partir de

μ et Tr la trace canonique sur le facteur engendré par $\pi(A)$; on a, pour tout $x \in A'^{+}$:

$$\operatorname{Tr} \pi(x) = \mu(\mathcal{F} x_{e_0} | \Omega) = \operatorname{Tr}' \pi'(x)$$

et π' est quasi-équivalente à π d'après la prop. 5 (ch. 1, § 1).

Remarque 1. — Soit ρ la représentation de G_1 dans $L^2(\Omega, \mu)$ définie par

$$(\rho(b)\psi)(\chi) = \langle \chi, b \rangle \psi(\chi);$$

la représentation π de la prop. 1 est équivalente à la représentation $\tilde{\rho}$ induite par ρ. En effet $\tilde{\rho}$ agit dans l'espace des applications F de G dans $L^2(\Omega, \mu)$ vérifiant

$$F(a, b'b)(\chi) = \langle \chi, b' \rangle F(a, b)(\chi)$$

et

$$\sum_a \|F(a, b)\|^2 < +\infty$$

(ce nombre est indépendant de b); $\tilde{\rho}$ est définie par

$$(\tilde{\rho}(a, b) F)(a', b') = F(a'a, b'.a'b)$$

et on obtient un opérateur d'entrelacement en associant à toute F l'élément φ de $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$ défini par

$$\varphi(a, \chi) = F(a^{-1}, e_1)(a^{-1}\chi).$$

Remarque 2. — La représentation π de la prop. 1 est *normale relativement à* $L^1(G)$. Soient en effet χ un point du support de μ et U un voisinage ouvert relativement compact de χ dans Ω; il existe ([24], 36 D) un élément x de $L^1(G_1)$ tel que $\mathcal{F}x$ soit égale à 1 en χ et en 0 en dehors de U; alors $(xx^*)^{e_0} \in L^1(G)$ et on a

$$0 < \operatorname{Tr} \pi((xx^*)^{e_0}) = \mu(|\mathcal{F}x|^2) < +\infty.$$

Théorème 1. — *Supposons que toute mesure positive, quasi-invariante, ergodique et à support infini sur* $\hat{G}_1$ *vérifie la condition* $(*)$; *alors la formule*

$$(\pi(a, b)\varphi)(a', \chi) = \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}a', a^{-1}\chi)$$

établit une correspondance biunivoque entre

a) *l'ensemble des mesures positives, invariantes, ergodiques, diffuses et normées sur* $\hat{G}_1$;

b) *l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de type* II_1 *de* G.

Résulte immédiatement de la prop. 1.

3. Représentations irréductibles telles que $\pi(A^{e_0})$ soit de rang fini.

Proposition 2. — (i) *Soient* $\mathfrak{T}$ *une trajectoire finie dans* $\hat{G}_1$, χ_0 *un élément de* $\mathfrak{T}$, S *le stabilisateur de* χ_0 *dans* G_0, ρ *une représentation irréductible de* S, $\tilde{\rho}$ *la représentation de* $S.G_1$ *définie par*

$$\tilde{\rho}(a, b) = \langle \chi_0, b \rangle \rho(a);$$

la représentation π *de* G *induite par* $\tilde{\rho}$ *est irréductible et* $\pi(A^{e_0})$ *est de rang fini.*

(ii) *Supposons* $\mathfrak{T}'$, χ_0', S', ρ', π' *définis de la même façon; pour que* π' *soit équivalente à* π *il faut et il suffit que* $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}$ *et que,* a_0 *étant un élément de* G_0 *transformant* χ_0 *en* χ_0', *les représentations* $a \to \rho'(a)$ *et* $a \to \rho(a_0^{-1}aa_0)$ *de* S' *soient équivalentes.*

(iii) *Toute classe de représentations irréductibles de* G *telle que* $\pi(A^{e_0})$ *soit de rang fini s'obtient de cette façon.*

Démonstration. — (i) et (ii) résultent facilement de [27], p. 131-132.

(iii) : soit π une représentation irréductible de G telle que $\pi(A^{e_0})$ soit de rang fini; l'ensemble F (cf. début du n° 1) est une partie finie de $\hat{G}_1$, invariante par G_0, qui est le support d'une mesure ergodique et par suite se réduit à une trajectoire finie; l'assertion résulte alors de [27], p. 131-132.

Corollaire. — Si G_0 est abélien, toute représentation irréductible π telle que $\pi(A^{e_0})$ soit de rang fini est de dimension finie.

Remarque 1. — *Calcul du caractère de* π, G_0 étant supposé *abélien.*

La représentation ρ est alors un caractère θ de S; π agit dans $L^2(\mathfrak{T})$ et si $a \notin S$, $\pi(a, b)$ permute effectivement les éléments de la base canonique de $L^2(\mathfrak{T})$, donc est de trace nulle; reste à calculer $\mathrm{Tr}\,\pi(a, b)$ pour $a \in S$; en vertu de [27] th. 7.1, la restriction de π à $S.G_1$ est somme directe des représentations

$$(a, b) \to \langle \theta, a \rangle \langle a_0\chi_0, b \rangle$$

où a_0 parcourt l'ensemble des classes à gauche modulo S; on a donc, en notant p le nombre d'éléments de $\mathfrak{T}$:

$$\operatorname{Tr}\pi(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{p}\langle\theta, a\rangle \sum_{\chi\in\mathfrak{T}} \langle\chi, b\rangle & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2. — Supposons toujours G_0 abélien; soit $\mathfrak{T}$ une trajectoire finie fixée dans $\hat{G}_1$; pour tout $\theta \in \hat{S}$ soit π_θ la représentation de G obtenue à partir de $\mathfrak{T}$ et de θ, et soit I_θ son noyau dans A; $\Pi(I_\theta)$ — ensemble des x de A_1 tels que $\mathcal{F}x$ soit nulle sur $\mathfrak{T}$ — est indépendant de θ, notons-le J; on a

$$\Pi'(J) \subset I_\theta$$

pour tout θ (mais pas l'égalité, puisque, les π_θ étant deux à deux non équivalentes, les I_θ sont deux à deux distincts).

On va montrer que $\Pi'(J) = \bigcap_{\theta\in\hat{S}} I_\theta$.

Soit ψ_θ le caractère de π_θ dans G; on a

$$\psi_\theta(a, b) \begin{cases} \frac{1}{p}\langle\theta, a\rangle \sum_{\chi\in\mathfrak{T}} \langle\chi, b\rangle & \text{si } \ a \in S \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

soit λ_θ la forme linéaire positive correspondante sur A; posons

$$\varphi(b) = \frac{1}{p} \sum_{\chi\in\mathfrak{T}} \langle\chi, b\rangle \qquad \text{pour} \qquad b \in G_1;$$

soit α la forme linéaire positive correspondante sur A_1 :

$$\alpha(y) = \frac{1}{p} \sum_{\chi\in\mathfrak{T}} \mathcal{F}y(\chi) \qquad \text{pour} \qquad y \in A_1;$$

posons

$$\psi(a, b) = \begin{cases} \varphi(b) & \text{si} \quad a = e_0 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

soit λ la forme linéaire positive correspondante sur A; on a

$$\lambda(x) = \alpha(x_{e_0})$$

pour $x \in L^1(G)$, puisqu'alors

$$\lambda(x) = \sum_{a,b} \psi(a, b)x(a, b) = \sum_b \varphi(b)x(e_0, b)$$

et, par continuité, pour tout x de A.

D'autre part pour $(a, b) \in G$

$$\psi(a, b) = \int \psi_\theta(a, b)\, d\theta$$

d'où, pour $x \in L^1(G)$:

$$\lambda(x) = \sum_{a,b} \psi(a, b) x(a, b) = \int \sum_{a,b} \psi_\theta(a, b) x(a, b)\, d\theta = \int \lambda_\theta(x)\, d\theta;$$

soit maintenant $x \in A$ et soit $x_n \to x$ où $x_n \in L^1(G)$; on a $\lambda_\theta(x_n) \to \lambda_\theta(\chi)$ pour tout $\theta \in \hat{S}$ et $|\lambda_\theta(x_n)| \leqslant \|x_n\|$, donc

$$\lambda(x) = \lim \lambda(x_n) = \lim \int \lambda_\theta(x_n) d\theta = \int \lambda_\theta(x) d\theta.$$

Soit alors $x \in \bigcap_{\theta \in \hat{S}} I_\theta$; on a $\lambda_\theta(xx^*) = 0$ pour tout θ, d'où $\lambda(xx^*) = 0$ et $\alpha((xx^*)_{e_0}) = 0$; mais on a pour tout a (§ 1, nº 1) :

$$x_a x_a^* \leqslant (xx^*)_{e_0};$$

par conséquent pour tout a

$$\alpha(x_a x_a^*) = 0$$
$$\sum_{\chi \in \mathcal{C}} |\mathcal{F} x_a(\chi)|^2 = 0$$

autrement dit $x \in II'(J)$.

4. Représentations irréductibles normales de A.

Soient μ une mesure positive quasi-invariante sur $\hat{G}_1$ et r_a (pour tout $a \in G_0$) une fonction localement intégrable telle que

$$d\mu(a\chi) = r_a(\chi)\, d\mu(\chi);$$

la formule

$$(\pi(a, b)\varphi)(\chi) = r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}\chi)$$

définit une représentation π de G dans $L^2(\hat{G}_1, \mu)$; le spectre de $\pi(A^{e_0})$ s'identifie au support de μ qui appartient à la classe C associée à π; π est irréductible si et seulement si μ est ergodique (cf. [36], th. 4.1).

Dans tout ce numéro on supposera μ concentrée sur une trajectoire $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ étant dénombrable, chacun de ses points a une masse > 0; π est irréductible et sa classe d'équivalence, qui ne dépend que de $\mathcal{C}$, sera désignée par $\pi_{\mathcal{C}}$.

Si le stabilisateur dans G_0 de tout élément de $\mathcal{C}$ se réduit à $\{e_0\}$, $\pi_{\mathcal{C}}$ est induite par la représentation $b \to \langle \chi, b \rangle$ de G_1 où χ est un élément quelconque de $\mathcal{C}$.

Lemme 3. — *Si $\mathcal{C}$ est discrète (en tant que sous-espace topologique de $\hat{G}_1$), $\pi_{\mathcal{C}}$ est normale; la réciproque est vraie si les stabilisateurs des éléments de $\mathcal{C}$ dans G_0 sont des sous-groupes distingués (et par conséquent identiques).*

Supposons d'abord $\mathcal{C}$ discrète; $\pi(A^{e_0})$ contient l'opérateur (de rang 1) de multiplication par une fonction $\varphi \in L_\infty(\hat{G}_1)$ différente de 0 en un seul point de $\mathcal{C}$, et par suite π est normale.

Supposons maintenant π normale; soit χ_0 un point de $\mathcal{C}$; pour tout point χ de $\mathcal{C}$ notons φ_χ l'élément de $L^2(\hat{G}_1, \mu)$ égal à 1 en χ et à 0 ailleurs; l'algèbre $\pi(A)$ contient tous les opérateurs compacts dans $L^2(\hat{G}_1, \mu)$ (cf. ch. I, § 1, n° 2) et en particulier l'opérateur P de projection sur la droite contenant φ_{χ_0}; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un élément x de A tel que $x_a = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de a et que l'on ait

$$\|\pi(x) - P\| \leqslant \varepsilon;$$

pour tout $\psi \in L^2(\hat{G}_1, \mu)$ on a

$$(\pi(x)\psi)(\chi) = \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi)\psi(a^{-1}\chi)$$

$$((\pi(x) - P)\varphi_{\chi_0})(\chi) = \begin{cases} \Sigma r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi) & \text{si } \chi \neq \chi_0 \\ \Sigma r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi) - 1 & \text{si } \chi = \chi_0 \end{cases}$$

(la somme est prise pour $a\chi_0 = \chi$) et, pour $\chi_1 \neq \chi_0$:

$$((\pi(x) - P)\varphi_{\chi_1})(\chi) = \Sigma r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi)$$

(la somme étant prise pour $a\chi_1 = \chi$).

On obtient donc, en tenant compte du fait que $r_{a^{-1}}(\chi) = \mu(a^{-1}\chi)/\mu(\chi)$:

$$(1) \quad \varepsilon^2\mu(\chi_0) \geqslant \|(\pi(x) - P)\varphi_{\chi_0}\|^2 \geqslant \mu(\chi_0)|\Sigma\mathcal{F}x_a(\chi_0) - 1|^2$$

(la somme étant prise pour $a\chi_0 = \chi_0$) et

$$(2) \quad \varepsilon^2\mu(\chi_1) \geqslant \|(\pi(x) - P)\varphi_{\chi_1}\|^2 \geqslant \mu(\chi_1)|\Sigma\mathcal{F}x_a(\chi_1)|^2$$

(la somme étant prise pour $a\chi_1 = \chi_1$).

Si on suppose identiques les stabilisateurs dans G_0 des éléments de $\mathcal{T}$ on a

$$\sum_{a\chi_0=\chi_0} \mathcal{F}x_a = \sum_{a\chi_1=\chi_1} \mathcal{F}x_a;$$

cette fonction étant continue, les inégalités (1) et (2) entraînent que χ_0 est un point isolé de $\mathcal{T}$, donc que $\mathcal{T}$ est discrète.

LEMME 4. — *Supposons $\mathcal{T}$ discrète; alors $\pi_{\mathcal{T}}(A)$ est identique à l'algèbre des opérateurs compacts si et seulement si $\mathcal{T}$ est fermée.*

Si $\mathcal{T}$ n'est pas fermée, il existe une suite $\chi_1, \chi_2, \ldots$ de points distincts de $\mathcal{T}$ convergeant vers un point χ' de $\hat{G}_1$ et un élément x de A_1 tel que $x(\chi) = 1$ pour $\chi = \chi_1, \chi_2, \ldots$ et χ'; alors $\pi(x^{e_0})$ n'est pas compact.

Supposons maintenant $\mathcal{T}$ fermée; pour montrer que $\pi(x)$ est compact pour tout x de A il suffit de le vérifier pour les éléments $\pi(y^a)$ où $y \in A_1$ et, en vertu de la formule (4′) du § 1, n° 2, pour les éléments $\pi(y^{e_0})$ où $y \in A_1$; mais alors $\pi(y^{e_0}) = T_{\mathcal{F}y}$ et $\mathcal{F}y$ est limite uniforme de fonctions φ de $\mathcal{K}(\hat{G})$; et pour une telle φ, T_φ est compact puisque le support de φ ne contient qu'un nombre fini de points de $\mathcal{T}$.

PROPOSITION 3. — *On suppose que le stabilisateur dans G_0 de tout élément de $\hat{G}_1$ dont la trajectoire est infinie se réduit à $\{e_0\}$. Alors la construction du début du numéro met en correspondance biunivoque.*

a) *les trajectoires infinies discrètes $\mathcal{T}$ dans $\hat{G}_1$.*

b) *les classes d'équivalence de représentations irréductibles normales π telles que $\pi(A^{e_0})$ soit de rang infini et dont le noyau I vérifie $\Pi'\Pi(I) = I$; l'algèbre $\pi(A)$ est identique à l'algèbre des opérateurs compacts si et seulement si $\mathcal{T}$ est fermée.*

La dernière assertion a déjà été démontrée (lemme 4).

Si $\mathcal{T}$ est une trajectoire infinie discrète, π est irréductible (cf. début du numéro) et $\pi(A^{e_0})$ a pour spectre l'adhérence de $\mathcal{T}$, donc est de rang infini; si I est le noyau de π dans A on a $\Pi'\Pi(I) = I$ en vertu du lemme 1 et de l'hypothèse faite sur les stabilisateurs; enfin la classe d'équivalence de π ne dépend que de $\mathcal{T}$ et la détermine entièrement.

Soit maintenant ρ une représentation irréductible normale telle que $\rho(A^{e_0})$ soit de rang infini et dont le noyau J vérifie

$\Pi'\Pi(J) = J$; le sous-ensemble fermé invariant F de $\hat{G}_1$ qui s'identifie au spectre de $\rho(A^{e_0})$ est infini et est le support d'une mesure ergodique; F est donc (cf. [21], p. 29) l'adhérence d'une trajectoire $\mathcal{C}$; si I est le noyau de $\pi_{\mathcal{C}}$ on a $I = \Pi'\Pi(I)$ et de plus $\Pi(I) = \Pi(J)$ (= ensemble des $x \in A_1$ tels que $\mathcal{F}x$ soit nulle sur F); par conséquent $I = J$ et comme ρ est normale, ρ est équivalente à $\pi_{\mathcal{C}}$ (cf. [12], dém. du th. 1, à $5 \Longrightarrow a\,6$); enfin $\mathcal{C}$ est discrète en vertu du lemme 3.

Remarque. — Si G_1 est discret, $\hat{G}_1$ est compact et $\pi_{\mathcal{C}}(A)$ contient toujours *strictement* l'algèbre des opérateurs compacts.

THÉORÈME 2. — *Supposons que toute mesure positive sur* $\hat{G}_1$, *quasi-invariante, ergodique et à support infini vérifie la condition* (*); *alors l'application* $\mathcal{C} \to \pi_{\mathcal{C}}$ *est une bijection de l'ensemble des trajectoires infinies discrètes de* G_0 *dans* $\hat{G}_1$ *sur l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles normales* π *telles que* $\pi(A^{e_0})$ *soit de rang infini; le caractère* λ *de* $\pi_{\mathcal{C}}$ *dans* A *est donné par*

$$\lambda(x) = \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \mathcal{F}x_{e_0}(\chi) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in A^+;$$

enfin l'algèbre $\pi_{\mathcal{C}}(A)$ *est identique à l'algèbre des opérateurs compacts si et seulement si* $\mathcal{C}$ *est fermée.*

L'hypothèse de la prop. 3 est vérifiée puisque toute trajectoire infinie porte une mesure positive, quasi-invariante, ergodique et à support infini; mise à part l'assertion relative au caractère, le théorème résulte donc de la prop. 3 et du lemme 1. Calculons maintenant le caractère de $\pi_{\mathcal{C}}$. Celle-ci est factorielle et normale relativement a A^{e_0} (cf. dém. du lemme 3) et *a fortiori* relativement à A'; elle est donc quasi-équivalente à une représentation π construire par la méthode de la prop. 1 à partir d'une mesure μ sur un ouvert Ω; π étant de type I, μ est concentrée sur une trajectoire infinie $\mathcal{C}_1$; π et $\pi_{\mathcal{C}}$ ayant même noyau, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ ont même adhérence; supposons $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1$; soit χ un point de $\mathcal{C}$; il existe une suite χ_n de points de $\mathcal{C}_1$ convergeant vers χ; comme chaque χ_n est limite d'une suite de points de $\mathcal{C}$ différents de χ, il en est de même de χ, ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}$ est discrète; on a donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$. La formule résulte alors de la prop. 1.

PROPOSITION 4. — *Supposons, en plus de l'hypothèse du th.* 2, *que* G_0 *soit abélien; soit* V *l'adhérence de la réunion des trajectoires non discrètes dans* $\hat{G}_1$ *et soit* N *l'idéal bilatère fermé des* $x \in A$ *pour lesquels* $\mathcal{F}x_a$ *est nulle sur* V *pour tout a;* N *est le plus grand idéal* GCR *de* A.

Il s'agit de démontrer que

a) N est GCR, ou encore que si π est une représentation irréductible de A non nulle sur N, $\pi(N)$ contient un opérateur compact non nul; ce fait étant trivial si π est de dimension finie, nous supposerons π de dimension infinie; soient I le noyau de π et E le sous-ensemble fermé invariant de $\hat{G}_1$ qui s'identifie au spectre de $\pi(A^{e_0})$; on a $E \not\subset V$ car dans le cas contraire an aurait $\Pi(N) \subset \Pi(I)$ et

$$N = \Pi'\Pi(N) \subset \Pi'\Pi(I) \subset I.$$

D'après le corollaire de la proposition 2, E est infini; E est l'adhérence d'une trajectoire $\mathcal{C}$ infinie contenue dans $\hat{G}_1 - V$, donc discrète; d'après le lemme 1 on a $I = \Pi'\Pi(I)$; π et $\pi_{\mathcal{C}}$ ont même noyau et, $\pi_{\mathcal{C}}$ étant normale, sont équivalentes; il reste à voir que $\pi_{\mathcal{C}}(N)$ contient un opérateur compact non nul; soit χ un point de $\mathcal{C}$; il existe $x \in A_1$ tel que $\mathcal{F}x$ soit égale à 1 en χ et nulle sur $\mathcal{C} - \{\chi\}$ et sur V; on a alors $x^{e_0} \in N$ et $\pi_{\mathcal{C}}(x^{e_0})$ est un projecteur de rang 1.

b) A/N est NGCR, ou encore ([12], th. 1) : pour tout $x \in A - N$ il existe une représentation irréductible non normale de A telle que

$$\pi(N) = \{0\}, \quad \pi(x) \neq 0;$$

or il existe un $a \in G_0$ tel que $\mathcal{F}x_a$ soit non identiquement nulle sur V, donc sur une trajectoire non discrète $\mathcal{C}$; $\pi_{\mathcal{C}}$ est non normale (lemme 3), nulle sur N et non nulle en x.

COROLLAIRE. — *Les hypothèses étant celles de la prop.* 4.

(i) A *est* GCR *si et seulement si toutes les trajectoires de* G_0 *sont discrètes;*

(ii) A *est* CCR *si et seulement si toutes les trajectoires sont discrètes et fermées;*

(iii) A *est* NGCR *si et seulement si la réunion des trajectoires non discrètes est partout dense dans* $\hat{G}_1$.

5. Idéaux primitifs de A.

La prop. 2 ramène l'étude des idéaux primitifs I pour lesquels $\Pi(I)$ est de codimension finie à l'étude des trajectoires finies dans $\hat{G}$ et des représentations irréductibles de certains sous-groupes de G_0. Nous étudions ici les autres idéaux primitifs de A.

THÉORÈME 3. — *Supposons que toute mesure positive, quasi-invariante, ergodique et à support infini sur* $\hat{G}_1$ *vérifie la condition* $(*)$; *soit* F *l'adhérence d'une trajectoire infinie* $\mathcal{T}$ *dans* $\hat{G}_1$; *le noyau de* $\pi_{\mathcal{T}}$ *ne dépend que de* F *et est l'ensemble des* $x \in A$ *tels que* $\mathcal{F}x_a$ *soit nulle sur* F *pour tout* a; *nous le noterons* I_F; *l'application* $F \to I_F$ *est une bijection de l'ensemble des adhérences des trajectoires infinies dans* $\hat{G}_1$ *sur l'ensemble des idéaux primitifs* I *de* A *tels que* $\Pi(I)$ *soit de codimension infinie. Elle est décroissante;* I_F *est un idéal bilatère fermé maximal si et seulement si toute trajectoire contenue dans* F *est partout dense dans* F.

Si F est l'adhérence d'une trajectoire infinie $\mathcal{T}$, le noyau de $\pi_{\mathcal{T}}$ est (lemme 1) l'ensemble des $x \in A$ tels que $\mathcal{F}x_a$ soit nulle sur $\mathcal{T}$, ou, ce qui est équivalent, sur F, pour tout a; et $\Pi(I_F)$ est de codimension infinie.

Réciproquement soit I un idéal primitif de A tel que $\Pi(I)$ soit de codimension infinie; I est de la forme I_F d'après la démonstration de la prop. 3. L'application $F \to I_F$ est évidemment décroissante; elle est injective, car si $I_{F_1} = I_{F_2}$ on a en particulier $\Pi(I_{F_1}) = \Pi(I_{F_2})$, c'est-à-dire que pour $y \in A_1$

$$\mathcal{F}y = 0 \quad \text{sur} \quad F_1 \Longleftrightarrow \mathcal{F}y = 0 \quad \text{sur} \quad F_2.$$

Supposons que I_F soit un idéal bilatère fermé maximal et montrons que toute trajectoire $\mathcal{T}'$ contenue dans F est partout dense dans F; supposons $\mathcal{T}'$ non partout dense; $\mathcal{T}'$ est nécessairement finie d'après ce qui précède; soit I' le noyau d'une représentation construite à partir de $\mathcal{T}'$ (prop. 2); on a

$$\Pi(I') \underset{\neq}{\supset} \Pi(I_F)$$
$$I' \supset \Pi'\Pi(I') \underset{\neq}{\supset} \Pi'\Pi(I_F) = I_F$$

d'où contradiction.

Supposons maintenant que toute trajectoire contenue dans

F soit partout dense dans F et montrons que I_F est maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A; supposons le contraire : I_F est strictement contenu dans un idéal primitif I' et $\Pi(I')$ est nécessairement de codimension finie d'après ce qui précède; I' est le noyau d'une représentation irréductible construite à partir d'une trajectoire finie $\mathcal{T}'$ et on a $\Pi(I') \supset \Pi(I_F)$ d'où $\mathcal{T}' \subset F$ ce qui est contradictoire.

Remarque 1. — On peut donner à propos de A/I_F des renseignements analogues à ceux, relatifs à A, qui sont énoncés dans la prop. 4 et son corollaire.

Remarque 2. — Considérons sur $\hat{G}_1$ la relation d'équivalence R suivante : R (χ, χ') si et seulement si les trajectoires $\mathcal{T}_\chi$ et $\mathcal{T}_{\chi'}$ de χ et χ' ont même adhérence; soit Q la réunion des trajectoires infinies; l'application $\chi \to I_{\overline{\mathcal{T}_\chi}}$ définit une bijection Λ de Q/R sur l'ensemble W des idéaux primitifs I tels que $\Pi(I)$ soit de codimension infinie.

L'application Λ *est un homéomorphisme* si on munit Q/R de la topologie quotient de la topologie sur Q induite par celle de $\hat{G}$ et W de la topologie de Jacobson.

Démonstration. — Pour tout $\gamma \in Q/R$ on notera F_γ l'adhérence de la trajectoire d'un élément quelconque de γ; on a alors $\Lambda(\gamma) = I_{F_\gamma}$; on a aussi $\overline{\gamma} = F_\gamma$ car d'une part γ, et par suite $\overline{\gamma}$, est contenu dans F_γ; mais par ailleurs tout point de F_γ est limite de transformés de points de γ, donc limite de points de γ; en définitive on a

$$\Lambda(\gamma) = I_{F_\gamma} = I_{\overline{\gamma}}.$$

Soit maintenant Γ une partie quelconque de Q/R; posons

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$$
$$\mathcal{E} = \Lambda(\Gamma) = \text{ensemble des } I_{\overline{\gamma}} \text{ pour } \gamma \in \Gamma$$
$$J = \text{intersection des éléments de } \mathcal{E}.$$

On a $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma}}$ et J est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\mathcal{F}x_a$ soit nulle sur $\overline{\mathcal{G}}$ pour tout a.

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

Γ est fermé dans Q/R
$\mathcal{G}$ est fermé dans Q
$\mathcal{G} = Q \cap \overline{\mathcal{G}}$
pour tout $\chi \in Q$: $\quad \chi \in \overline{\mathcal{G}} \Longrightarrow \chi \in \mathcal{G}$
— $\gamma \in Q/R$: $\quad \gamma \subset \overline{\mathcal{G}} \Longrightarrow \gamma \in \Gamma$
— — $\quad \overline{\gamma} \subset \overline{\mathcal{G}} \Longrightarrow \gamma \in \Gamma$
— — $\quad I_{\overline{\gamma}} \supset J \Longrightarrow \gamma \in \Gamma$
— — $\quad \Lambda(\gamma) \in \overline{\mathcal{E}} \Longrightarrow \Lambda(\gamma) \in \mathcal{E}$
$\mathcal{E}$ est fermé dans W.

Remarque 3. — Toute mesure positive ergodique définie sur un ouvert invariant de $\hat{G}_1$ est concentrée sur une classe d'équivalence selon R.

Tout d'abord, pour toute partie fermée F de $\hat{G}_1$, l'ensemble A_F des χ tels que $\overline{\mathcal{T}}_\chi \subset F$ est fermé car

$$\chi \in A_F \Longleftrightarrow a\chi \in F \qquad \text{pour tout} \qquad a \Longleftrightarrow \chi \in \bigcap_a a^{-1}F;$$

par suite pour tout ouvert U l'ensemble B_U des χ tels que $\overline{\mathcal{T}}_\chi$ rencontre U est ouvert; soit (U_n) une base d'ouverts de $\hat{G}_1$; posons $B_n = B_{U_n}$; les B_n sont ouverts et saturés pour R; ils séparent les classes d'équivalence selon R, car si $\overline{\mathcal{T}}_{\chi_1} \neq \overline{\mathcal{T}}_{\chi_2}$ il existe un indice n_0 tel que

$$\overline{\mathcal{T}}_{\chi_1} \subset U_{n_0} \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{T}}_{\chi_2} \cap U_{n_0} = \emptyset,$$

donc

$$\chi_1 \in B_{n_0} \qquad \text{et} \qquad \chi_2 \notin B_{n_0}.$$

Soit maintenant μ ergodique définie sur Ω; pour tout n, $B_n \cap \Omega$ est négligeable ou de complémentaire négligeable; posons

$$D_n = \begin{cases} \Omega - B_n \cap \Omega & \text{dans le premier cas;} \\ B_n \cap \Omega & \text{dans le second;} \end{cases}$$

$D = \bigcap_n D_n$ est de complémentaire négligeable et ne peut rencontrer plus d'une classe d'équivalence selon R, puisque les B_n séparent ces classes.

§ 3. Étude d'un exemple.

Prenons pour G_0 le groupe Z (discret) des entiers, pour G_1 le groupe discret des nombres rationnels dyadiques et comme opération $a.b$ le produit ordinaire de 2^a par b; les hypothèses générales du § 2 sont satisfaites.

Toutes les classes d'éléments conjugués distinctes de $\{e\}$ étant infinies, la représentation régulière gauche de G est factorielle et de type II_1 (cf. [30], § 8, n° 5) et A est NGCR cor. du lemme 12 de [11]).

1. Étude de $\hat{G}_1$.

Le groupe G_1 étant limite inductive de sous-groupes isomorphes à Z, $\hat{G}_1$ est limite projective de groupes isomorphes au tore T; plus précisément, pour tout $n \in Z$ soit Z_n le sous-groupe de G_1 formé des éléments de la forme $l/2^n$ ($l \in Z$) et soit Λ_n l'homomorphisme de $\hat{G}_1$ sur $\hat{Z} = T$ défini par

$$\langle \Lambda_n(\chi), l \rangle = \langle \chi, \langle l/2^n \rangle;$$

Λ_n a pour noyau le sous-groupe orthogonal de Z_n et on a

$$\Lambda_{n-1}(\chi) = \Lambda_n\left(\frac{1}{2}\chi\right) = 2\Lambda_n(\chi).$$

Représentant les éléments de T par leurs développements binaires normalisés on peut écrire, pour tout $\chi \in \hat{G}_1$

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\chi) &= 0,\ a_1 a_2 \ldots \\ \Lambda_n(\chi) &= 0,\ a_{-n+1} a_{-n+2} \ldots; \end{aligned}$$

tout élément χ de $\hat{G}_1$ est ainsi représenté par un développement $(a_n)_{n \in Z}$ avec $a_n = 0$ ou 1 et $a_n = 0$ pour une infinité d'indices positifs; chaque a_n est fonction borélienne de χ.

On obtient un système fondamental de voisinages d'un élément $\chi = (a_n)$ de la façon suivante :

a) si $a_n = 1$ pour une infinité d'indices positifs, on prend $q \in Z$, $p \in Z^+$ et l'ensemble des $\chi' = (a'_n)$ vérifiant $a'_i = a_i$ pour $i = q, q+1, \ldots q+p$;

b) si $a_{m-1} = 1$ et $a_j = 0$ pour $j \geqslant m$, on prend $q \leqslant m - 2$, $p \geqslant m - q$ et l'ensemble des $\chi' = (a'_n)$ vérifiant

ou bien $a'_i = a_i$ pour $i = q, q + 1, \ldots q + p$
ou bien $a'_i = a_i$ pour $i = q, q + 1, \ldots m - 2$, $a'_{m-1} = 0$
et $a'_j = 1$ pour $j = m, m + 1, \ldots q + p$.

Pour toute suite finie de 0 et de 1, soit $S = (b_1, \ldots b_u)$, on notera K_S l'ensemble des $\chi = (a_n)$ vérifiant

$$a_1 = b_1, \ldots a_u = b_u;$$

tout ensemble ouvert dans $\hat{G}_1$ est réunion d'ensembles K_S ou de transformés de tels ensembles par des éléments de G_0.

Si $\chi = (a_n)$, on a $2^r\chi = (b_n)$ avec $b_n = a_{-r+n}$; le stabilisateur de χ dans G_0 est non nul si et seulement si la suite (a_n) est périodique; si p est sa période, ce stabilisateur est $p.Z$ et la trajectoire de χ contient p éléments; si la suite (a_n) est non périodique, la trajectoire de χ est infinie.

Lemme 1. — *Toute mesure positive μ sur $\hat{G}_1$ n'ayant de masse en aucun point à développement périodique vérifie la condition* (*) *du* § 2, *n*° 2.

Soient r un entier non nul et E une partie μ-mesurable non négligeable de $\hat{G}_1$; pour tout entier i notons B_i (resp. B'_i) l'ensemble μ-mesurable des $\chi = (a_n)$ vérifiant

$$a_i = 0 \quad \text{et} \quad a_{i-r} = 1 \text{ (resp. } a_i = 1 \text{ et } a_{i-r} = 0);$$

si χ appartient au complémentaire de la réunion des B_i et des B'_i, son développement admet la période r; ce complémentaire est donc μ-négligeable et il existe un indice i tel que $E \cap B_i$ ou $E \cap B'$ soit non négligeable; or

$$2^rB_i \cap B_i = 2^rB'_i \cap B'_i = \emptyset.$$

2. Représentations factorielles de type II normales relativement à A′.

Proposition 1. — *Soit μ une mesure positive, invariante, ergodique et diffuse définie sur une partie ouverte invariante Ω de $\hat{G}_1$; la formule*

$$(\pi(a, b)\varphi)\ (a', \chi) = \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}a', a^{-1}\chi)$$

définit une représentation de G dans $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$, facto-

rielle, de type II *et normale relativement à* A′ ; *elle est de type* II_1 *si et seulement si* μ *est bornée, i.e. prolongeable à* $\hat{G}_1$; *son noyau est l'ensemble des* $x \in A$ *tels que* $\mathcal{F}x_a$ *soit nulle sur le support de* μ *pour tout a; son caractère est donné par*

$$\lambda(x) = \mu(\mathcal{F}x_{e_0}|\Omega) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in A^+ ;$$

si on définit de la même façon Ω', μ', π', π *et* π' *sont quasi-équivalentes si et seulement si* μ *et* μ' *induisent sur* $\Omega \cap \Omega'$ *des mesures proportionnelles et non nulles; enfin toute classe de quasi-équivalence de représentations factorielles de type* II *normale relativement à* A′ *s'obtient par ce procédé.*

Résulte de la prop. 1 du § 2 et du lemme 1.

Notations. — Pour toute partie finie de Z : $\delta = \{i_1, i_2, \ldots, i_u\}$ avec $i_1 < i_2 \ldots < i_u$ et toute suite $S = (b_1, \ldots b_u)$ d'éléments égaux à 0 ou à 1, on désignera par $K_{\delta, S}$ l'ensemble des $\chi = (a_n)$ vérifiant

$$a_{i_1} = b_1, \ \ldots, \ a_{i_u} = b_u.$$

Lemme 2. — *Soit* E *la réunion d'une suite finie d'ensembles de la forme* $K_{\delta, S}$; *alors* E *est la réunion d'une suite finie d'ensembles de cette forme deux à deux disjoints.*

Soit $E = \bigcup_{i=1}^{n} K_{\delta_i, S_i}$; posons $\delta = \cup\, \delta_i$; soit p le nombre d'éléments de δ; quand S parcourt l'ensemble des suites de p éléments égaux à 0 ou à 1, les ensembles $K_{\delta, S}$ forment une partition de $\hat{G}_1$; chaque ensemble K_{δ_i, S_i} étant réunion de certains ensembles $K_{\delta, S}$, il en est de même de E ; d'où le lemme.

Lemme 3. — *Soient* μ *une mesure positive sur* $\hat{G}_1$, U *un ouvert dans* $\hat{G}_1$ *et* $\varepsilon > 0$; *il existe des ensembles* K_{δ_i, S_i} $(i = 1, \ldots n)$ *deux à deux disjoints, contenus dans* U *et tels que leur réunion* E *vérifie* $\mu(U - E) \leqslant \varepsilon$.

D'après le n° 1, U est réunion d'ensembles de la forme $a.K_S$, donc d'une suite K_{δ_j, S_j} $(j = 1, 2, \ldots)$ et il existe une sous-suite finie dont la réunion B vérifie $\mu(U - B) \leqslant \varepsilon$; le lemme résulte alors du précédent.

Proposition 2. — *L'algèbre* A *admet une famille non dénombrable de représentations factorielles de type* II_1, *fidèles et deux à deux non quasi-équivalentes.*

Il suffit (prop. 1) de construire des mesures invariantes ergodiques sur $\hat{G}_1$, de support $\hat{G}_1$ et deux à deux non proportionnelles.

Pour tout entier n soient X_n l'ensemble $\{0, 1\}$ et ν_n la mesure sur X_n définie par les masses α en 0 et $1 - \alpha$ en 1 $(0 < \alpha < 1)$; posons

$$X = \prod_{n \in Z} X_n \qquad \text{et} \qquad \nu = \bigotimes_{n \in Z} \nu_n;$$

le sous-ensemble X' de X formé des suites (x_n) telles que x_n soit nul pour une infinité d'indices positifs est de complémentaire ν-négligeable; d'autre part on a une bijection continue évidente Φ de X' sur $\hat{G}_1$; prolongée arbitrairement sur $X - X'$, Φ devient une application ν-mesurable de X sur $\hat{G}_1$ et on peut considérer la mesure μ sur $\hat{G}_1$, image de ν par Φ ([1], ch. 5, § 6, nº 1).

Pour tout ensemble $K_{\delta, S}$ où S contient s fois 0 et t fois 1 on a

$$(K_{\delta, S}) = \alpha^s(1 - \alpha)^t > 0$$

et par suite μ a pour support $\hat{G}_1$; d'autre part μ est évidemment invariante par G_0; reste à voir que μ est ergodique; cela résulte d'un théorème de Théorie des Probabilités ([23], 30.4), mais nous allons en donner une démonstration directe, d'ailleurs inspirée de celle de [20], p. 29.

Soit E une partie μ-mesurable presque invariante par tout $a \in G_0$ et soit $\varepsilon > 0$; il existe un ouvert U tel que

$$E \subset U \qquad \text{et} \qquad \mu(U - E) \leqslant \varepsilon;$$

puis il existe (lemme 3) des ensembles K_{δ_i, S_i} $(i = 1, 2, \ldots n)$ deux à deux disjoints, contenus dans U et dont la réunion B vérifie $\mu(U - B) \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\mu(|E - B|) \leqslant 2\varepsilon \tag{1}$$

($|E - B|$ désigne la différence symétrique), d'où

$$\mu(|E - a.B|) \leqslant 2\varepsilon$$

et

$$\mu(|E - B \cap aB|) \leqslant 4\varepsilon \tag{2}$$

pour tout $a \in G_0$. Mais $a.B$ est réunion d'ensembles de la forme

K_{σ_i, s_i} où σ_i se déduit de δ_i par une certaine translation, et on a

$$(B \cap aB) = \sum_{i,j} (K_{\delta_i, s_i} \cap K_{\sigma_j, s_j}).$$

Mais si a est suffisamment grand on a

$$\begin{aligned}\mu(K_{\delta_i, s_i} \cap K_{\sigma_j, s_j}) &= \mu(K_{\delta_i, s_i})\mu(K_{\sigma_j, s_j}) \\ &= \mu(K_{\delta_i, s_i})\mu(K_{\delta_j, s_j})\end{aligned}$$

pour tout i et tout j égaux à 1, 2, ... n et par suite

$$\mu(B \cap a.B) = \sum_{i,j} \mu(K_{\delta_i, s_i})\mu(K_{\delta_j, s_j}) = (\mu(B))^2.$$

Étant donné l'arbitraire de ε et de a, et en vertu de (1) et (2), on en déduit que $\mu(E) = (\mu(E))^2$ d'où $\mu(E) = 0$ ou 1.

Remarque. — On voit sur cet exemple que la propriété « toute représentation irréductible normale est déterminée à une équivalence près par la donnée de son noyau » ne se généralise pas aux représentations factorielles, même en remplaçant l'équivalence par la quasi-équivalence.

3. Représentations irréductibles de dimensions finies.

PROPOSITION 3. — *Soient $\mathcal{C}$ une trajectoire finie dans $\hat{G}_1$, p le nombre de ses éléments, χ_0 un de ses éléments, θ un élément du tore* T, *ρ la représentation de $pZ.G_1$ définie par*

$$\rho(kp, b) = \exp(2\pi ik\theta)\langle\chi_0, b\rangle;$$

la représentation π de G *induite par ρ est irréductible et de dimension p; son caractère sur* G *est donné par*

$$\psi(a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\exp\left(2\pi i\dfrac{a}{p}\theta\right)\displaystyle\sum_{\chi\in\mathcal{C}}\langle\chi, b\rangle & \textit{si } p \textit{ divise } a, \\ 0 & \textit{sinon}\,; \end{cases}$$

la classe d'équivalence de π ne dépend que du couple $(\mathcal{C}, \theta)$ et le détermine entièrement; enfin toute classe de représentations irréductibles de dimension finie s'obtient de cette façon.

Résulte du § 2, n° 3 (prop. 2, cor. de la prop. 2 et rem. 1).

COROLLAIRE. — *L'algèbre* A *admet un système complet de représentations irréductibles de dimensions finies.*

En vertu de la rem. 2 du § 2, n° 3, il suffit de remarquer que la réunion des trajectoires finies, i.e. l'ensembles des éléments à développements périodiques, est partout dense dans $\hat{G}_1$.

Remarque. — Ceci résoud par la négative une conjecture de G. W. Mackey ([28], p. 154); en effet A admet un système complet de représentations irréductibles normales au sens de [14], mais $\hat{A}$ n'est pas « lisse » puisque A n'est pas GCR (cf. [6], th. 1).

4. Représentations irréductibles normales de dimension infinie.

PROPOSITION 4. — *Soit $\mathcal{C}$ une trajectoire infinie discrète dans $\hat{G}_1$; la formule*

$$(\pi(a,\ b)\varphi)(\chi) = \langle x,\ b\rangle \varphi(a^{-1}\chi)$$

définit une représentation irréductible normale de G *dans* $L^2(\mathcal{C})$; *son caractère dans* A *est donné par*

$$\lambda(x) = \sum_{\chi\in\mathcal{C}} \mathcal{F}x_{e_0}(\chi) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in A^+;$$

le noyau de π dans A *est l'ensemble des x tels que $\mathcal{F}x_a$ soit nulle sur $\mathcal{C}$ pour tout a; la classe d'équivalence de π est déterminée de façon biunivoque par la donnée de $\mathcal{C}$; toute classe d'équivalence de représentations irréductibles normales de dimension infinie s'obtient ainsi; enfin $\pi(A)$ contient toujours strictement l'algèbre des opérateurs compacts dans* $L^2(\mathcal{C})$.

Résulte du th. 2 du § 2 et du lemme 1.

COROLLAIRE 1. — L'intersection des idéaux de définition des caractères de type I de A est nulle.

Il suffit pour le voir de prouver que, pour tout ouvert $U \subset \hat{G}_1$, il existe une trajectoire infinie discrète $\mathcal{C}$ telle que $U \cap \mathcal{C}$ soit infini; or U contient un χ ayant un développement périodique de la forme

$$\ldots 0\ c_1c_2 \ldots c_u\ 0\ c_1c_2 \ldots c_u \ldots$$

et un tel χ est adhérent à la trajectoire infinie discrète définie par le développement

$$\ldots 0\ 0\ 0\ 0\ \underbrace{1 \ldots 1}_{u+1}\ 0\ c_1 \ldots c_u\ 0\ c_1 \ldots c_u \ldots$$

COROLLAIRE. 2. — *L'algèbre* A *admet un système complet de représentations irréductibles normales de dimension infinie.*

Remarque 1. — Un raisonnement analogue à celui du lemme 4 du § 2 montre que $\pi(x)$ n'est pas compact pour tous les $x \in L^1(G)$; il en résulte, en vertu de [14], p. 77 que π n'est pas normale au sens de [14]; les seules représentations irréductibles de G normales au sens de [14] sont celles dont la dimension est finie.

Remarque 2. — Il est facile de donner des exemples de représentations irréductibles *non normales* de A : toute représentation construite, comme il est indiqué au début du n° 4 du § 2, à partir d'une trajectoire non discrète dans $\hat{G}_1$; or on a vu que la représentation régulière gauche ρ de G est factorielle; comme la classe de mesures qui lui correspond sur $\hat{G}_1$ est celle de la mesure de Haar, celle-ci est ergodique; il résulte alors de [21], p. 29 que pour presque tout $\chi \in \hat{G}_1$ (pour la mesure de Haar) la trajectoire de χ est partout dense dans $\hat{G}_1$, et par suite non discrète; on montre en outre que ρ est l'intégrale sur $\hat{G}_1$ de représentations irréductibles qui sont presque toutes fidèles et non normales sur A.

Il existe encore des représentations irréductibles non normales d'un type tout à fait différent (voir par exemple [26], th. 11).

Remarque 3. — Exemple de représentation irréductible normale relativement à A, mais *non relativement à* $\mathcal{K}(G)$.

Soit $\mathfrak{T}$ la trajectoire infinie discrète définie par le développement

$$\ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ldots;$$

les points de $\overline{\mathfrak{T}} - \mathfrak{T}$ sont l'élément neutre et tous les points de la trajectoire $\mathfrak{T}'$ définie par le développement

$$\ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots;$$

nous noterons $\ldots\ \chi_{-1},\ \chi_0,\ \chi_1\ \ldots$ les points de $\mathfrak{T}'$, χ_r étant représenté par un développement (a_n) où $a_n = 0$ sauf pour $n = r$.

Soit y un élément de $\mathcal{K}(G)$ tel que, en posant $x = yy^*$, on ait

$$\sum_{\chi \in \mathcal{C}} \mathcal{F}x_{e_0}(\chi) < + \infty;$$

soient $l_i/2^m$ $(i = 1, 2, \dots p)$ les points du support de x_{e_0} et α_i les valeurs correspondantes de x_{e_0}; on a alors

$$\mathcal{F}x_{e_0}(\chi) = \sum_j \alpha_j \langle \chi, \; l_j/2^m \rangle \geqslant 0;$$

pour tout $\theta \in T$ posons

$$\psi(\theta) = \sum_j \alpha_j \exp{(2\pi i l_j \theta)};$$

on a

$$\mathcal{F}x_{e_0}(\chi) = \sum_j \alpha_j \langle \Lambda_m(\chi), \; l_j \rangle = \psi(\Lambda_m(\chi)).$$

Mais $\mathcal{F}x_{e_0}$ doit être nulle en tout point de $\overline{\mathcal{C}} - \mathcal{C}$, donc

$$0 = \mathcal{F}x_{e_0}(\chi_r) = \psi(\Lambda_m(\chi_r)) = \psi(2^{-r-m})$$

pour tout entier r; étant donnée la forme de ψ il en résulte $\psi = 0$, $\mathcal{F}x_{e_0} = 0$ $x_{e_0} = 0$ et enfin $x = 0$ d'après le lemme 1 du § 1.

On voit donc que la représentation irréductible, normale relativement à A, associée à $\mathcal{C}$, n'est pas normale relativement à $\mathcal{K}(G)$; son caractère ne peut pas être défini par une fonction sur G, ce qui redémontre en particulier que la notion de caractère utilisée ici est plus générale que celle de [14].

5. Idéaux primitifs de A.

Définition. — *Etant donnés un développement* $(a_n)_{n \in Z}$ *et une suite finie de* 0 *et de* 1 : $S = (b_1, \dots b_u)$, *on dira que* S *est* contenue dans (a_n) *s'il existe un entier i tel que*

$$b_1 = a_i, \quad \dots \quad b_u = a_{i+u-1}.$$

Lemme 4. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une trajectoire dans* $\hat{G}_1$ *non partout dense; il existe une trajectoire* $\mathcal{C}'$ *telle que*

$$\overline{\mathcal{C}} \underset{\neq}{\subset} \overline{\mathcal{C}'} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{C}'} \neq \hat{G}_1.$$

Soit $\chi = (a_n)$ un élément de $\mathcal{C}$; on peut évidemment supposer χ différent de l'élément neutre; comme $\mathcal{C}$ n'est pas partout dense dans $\hat{G}_1$ il existe une suite finie $S = (b_1, \dots b_u)$ non contenue dans (a_n); définissons $\chi' = (a'_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a'_n = a_n \quad \text{pour tout} \quad n \leqslant 0 \\ \Lambda_0(\chi') = 0,\ b_1 \dots b_u a_{-u} a_{-u+1} \dots a_u a_{-u-1} a_{-u} \dots a_{u+1} \dots \end{cases}$$

On va montrer que la trajectoire $\mathcal{C}'$ de χ' répond à la question; d'abord toute suite finie contenue dans (a_n) étant aussi contenue dans (a'_n), χ est adhérent à $\mathcal{C}'$ et on a $\overline{\mathcal{C}} \subset \overline{\mathcal{C}'}$; ensuite χ' n'est pas adhérent à $\mathcal{C}$ puisqu'on a $a'_n = 1$ pour une infinité de $n > 0$ et que $(b_1, \dots b_u)$ n'est pas contenue dans (a_n); on a donc $\overline{\mathcal{C}'} \neq \overline{\mathcal{C}}$.

Montrons enfin que $\mathcal{C}'$ n'est pas partout dense; posons

$$S' = (b_1, \dots b_u, b_1, \dots b_u, b_1, \dots b_u);$$

S' n'est pas contenue dans (a'_n) car dans le cas contraire l'une des trois suites $(b_1, \dots b_u)$ qui constituent S' serait contenue soit dans $(\dots a_{-2}a_{-1}a_0)$, soit dans $(a_{-u}, a_{-u+1}, \dots a_u)$, soit dans $(a_{-u-1}, a_{-u}, \dots a_{u+1})$, etc., ce qui contredirait le choix de S. Définissons $\chi'' = (a''_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a''_n = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \leqslant 0 \\ \Lambda_0(\chi'') = 0,\ b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \dots; \end{cases}$$

χ'' n'est pas adhérent à $\mathcal{C}'$ puisqu'on a $a''_n = 1$ pour une infinité de $n > 0$ et que $(b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u)$ n'est pas contenue dans (a'_n).

Lemme 5. — *Soit* $S = (b_1, \dots b_u)$ *une suite finie contenant* 0; *soit* L_S *l'ensemble des* $\chi_n = (a_n)$ *pour lesquels il existe un entier* j $(0 \leqslant j \leqslant u)$ *tel que pour tout entier* k *et tout entier* $l = 1, 2, \dots u$ *on ait*

$$a_{j+k(u+1)+l} = b_l.$$

L'ensemble L_S *est invariant et fermé.*

Il est évidemment invariant; démontrons qu'il est fermé; soit $\chi' = (a'_n)$ un point adhérent à L_S; comme, pour tout $\chi = (a_n)$ de L_S, (a_n) ne contient pas plus de u chiffres 1 consécutifs, pour tout entier $m > 0$ il existe un élément $\chi^m = (a^m_n)$ de L_S tel que

$$a'_{-m} = a^m_{-m}, \dots a'_m = a^m_m;$$

par suite pour tout m il existe un entier $j^m = 0, \ldots u$ tel que l'on ait

$$a'_{j^m+k(u+1)+l} = b_l$$

pour tout entier k et tout $l = 1, 2, \ldots u$ vérifiant

$$-m \leqslant j^m + k(u+1) + l \leqslant m;$$

quand m parcourt Z^+, j^m prend pour une infinité d'indices m, une certaine valeur j_0 $(0 \leqslant j_0 \leqslant u)$; on a donc

$$a'_{j_0+k(u+1)+l} = b_l$$

pour tout entier k et tout $l = 1, 2, \ldots u$ vérifiant

$$-m_i \leqslant j_0 + k(u+1) + l \leqslant m_i$$

donc finalement pour tout entier k et tout $l = 1, 2, \ldots u$; autrement dit on a $\chi' \in L_S$.

LEMME 6. — *Soient* $S = (b_1, \ldots b_u)$ *une suite finie de* 0 *et de* 1 *et* (c_n) *un développement périodique de période* $p \leqslant u$; *il existe* d *égal à* 0 *ou à* 1 *tel que la suite* $(b_1, \ldots b_u, d)$ *ne soit pas contenue dans* (c_n).

Si S n'est pas contenue dans (c_n) on peut choisir d arbitrairement; supposons maintenant S contenue dans (c_n) et numérotons les c_n de façon que

$$b_1 = c_1, \ldots b_u = c_u;$$

posons $d = 1 - c_{u+1}$; $(b_1, \ldots b_u, d)$ n'est pas contenue dans (c_n) : en effet supposons qu'au contraire il existe un entier i tel que

$$b_1 = c_i, \ldots b_u = c_{i+u-1}, d = c_{i+u};$$

on aurait en particulier

$$c_1 = c_i, \ldots c_p = c_{p+i-1}$$

d'où

$$i - 1 = 0 \qquad \text{modulo } p$$

et

$$d = c_{i+u} = c_{u+1} = 1 - c_{u+1}$$

ce qui est absurde.

LEMME 7. — *Il existe une partie fermée invariante non vide de* $\hat{G}_1$ *qui ne contient aucune trajectoire finie.*

Numérotons les trajectoires finies de telle façon que leurs nombres d'éléments aillent en croissant : $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ... ; on va construire par récurrence des suites S_r ($r = 1, 2, \ldots$) contenant 0, telles que L_{S_r} ne contienne pas $\mathcal{T}_r$ et que l'on ait $L_{S_{r+1}} \subset L_{S_r}$; alors les L_{S_r} seront des ensembles fermés invariants (lemme 5) décroissants et non vides; leur intersection sera un ensemble fermé, invariant, non vide (puisque $\hat{G}_1$ est compact) et ne contenant aucune trajectoire finie.

Posons $S_1 = (1, 0)$; supposons S_r construite : $S_r = (b_1, \ldots b_u)$; soient p le nombre des éléments de $\mathcal{T}_{r+1}$ et $\chi = (c_n)$ un de ces éléments; soit q un entier positif tel que $q(u+1) \geqslant p$; choisissons arbitrairement des nombres $a_1, \ldots a_q$ et posons

$$S'_{r+1} = (b_1, \ldots b_u, a_1, b_1, \ldots b_u, a_2, b_1, \ldots b_u, a_q, b_1, \ldots b_u)$$

il existe (lemme 6) un d tel que la suite (S'_{r+1}, d) ne soit pas contenue dans (c_n) ; posons

$$S_{r+1} = (S'_{r+1}, d, b_1, \ldots b_u);$$

alors $L_{S_{r+1}} \subset L_{S_r}$ et $L_{S_{r+1}}$ ne contient pas $\mathcal{T}_{r+1}$.

Proposition 5. — (i) *Les idéaux primitifs de codimension finie de* A *sont les noyaux* $I_{\mathcal{T},\theta}$ *des représentations* $\pi_{\mathcal{T},\theta}$ *de la prop.* 3; *ce sont des idéaux bilatères fermés maximaux; leur intersection est nulle.*

(ii) *Pour toute partie* F *de* $\hat{G}_1$, *adhérence d'une trajectoire infinie, soit* I_F *l'ensemble des* $x \in A$ *tels que* $\mathcal{F}x_a$ *soit nulle sur* F *pour tout* a; *l'application* $F \to I_F$ *est une bijection de l'ensemble des adhérences des trajectoires infinies dans* $\hat{G}_1$ *sur l'ensemble des idéaux primitifs de codimension infinie de* A; *le quotient* A/I_F *n'est jamais* CCR.

(iii) *Il existe un idéal bilatère fermé maximal de* A *à quotient* NGCR.

(iv) *L'idéal nul est primitif; tout idéal primitif non nul contient strictement un idéal primitif non nul.*

Démonstration. — (i) est une conséquence immédiate de la prop. 3 et de son corollaire.

(ii) résulte du th. 3 du § 2 et du lemme 1.

(iii) : soit F un ensemble fermé invariant non vide dans $\hat{G}_1$ ne contenant aucune trajectoire finie (lemme 7); l'idéal I des

$x \in A$ pour lesquels $\mathcal{F}x_a$ est nulle sur F pour tout a est contenu (puisque A admet une unité) dans un idéal bilatère formé maximal J; J ne peut être de codimension finie car il serait alors de la forme $I_{\mathcal{C},\theta}$, $\mathcal{C}$ étant une trajectoire finie et on aurait

$$\Pi(I) \subset \Pi(I_{\mathcal{C},\theta}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} \subset F$$

ce qui est contradictoire; J est donc de codimension infinie et A/J est simple et non CCR, donc NGCR.

(iv) : l'idéal nul est primitif puisque la représentation régulière gauche de G est factorielle et fidèle sur A. La dernière assertion résulte du lemme 4.

Remarque. — Il résulte des précédentes assertions (i) et (iv) et du lemme 4 de [5] que l'espace des idéaux primitifs de A (pour la topologie de Jacobson) ne contient aucune partie ouverte séparée non vide.

6. Topologie de l'espace des caractères partout définis sur A.

Pour toute suite finie de 0 et de 1 : $S = (b_1, \dots b_u)$, tout entier $p > 0$ et tout $\chi = (a_n) \in \hat{G}_1$ on désigne par $\varphi_{S,p}(\chi)$ le quotient par p du nombre d'indices i tels que

$$1 \leqslant i \leqslant p \qquad \text{et} \qquad a_i = b_1, \dots a_{i+u-1} = b_u;$$

LEMME 8. — *Soit μ une mesure positive sur $\hat{G}_1$, invariante, ergodique et normée; pour presque tout χ (pour μ) on a pour toute* S

$$\mu(K_S) = \lim \varphi_{S,p}(\chi) \qquad \text{pour} \qquad p \to +\infty.$$

L'ensemble des S étant dénombrable, il suffit de démontrer cette égalité pour une S fixée; soit f la fonction caractéristique de K_S; on a, pour tout χ et tout p

$$\varphi_{S,p}(\chi) = \frac{1}{p}(f(\chi) + f(2^{-1}\chi) + \cdots f(2^{-p+1}\chi))$$

et ceci tend vers $\mu(f) = \mu(I_S)$ pour presque tout χ d'après un théorème ergodique (cf. par exemple [20], p. 31).

LEMME 9. — *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives sur $\hat{G}_1$, invariantes, ergodiques et normées et s_1 et s_2 deux entiers > 0; la mesure*

$$\mu = \frac{s_1\mu_1 + s_2\mu_2}{s_1 + s_2}$$

est limite vague de mesures positives, invariantes, ergodiques et normées.

Pour $i = 1, 2$ soit $\chi_i = (a_{i,n})$ tel que pour toute S, $\varphi_{S,p}(\chi_i)$ tende vers $\mu_i(K_S)$ quand $p \to +\infty$ (lemme 8). Pour tout entier $r > 0$ soit $\mathcal{C}_r$ la trajectoire finie représentée par un développement périodique ayant pour période

$$(1)\quad \underbrace{\underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,r}} \dots \underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,r}}}_{s_1 \text{ fois}} \underbrace{\underbrace{a_{2,1} \dots a_{2,r}} \dots \underbrace{a_{2,1} \dots a_{2,r}}}_{s_2 \text{ fois}}$$

soit ν_r la mesure positive invariante ergodique normée portée par $\mathcal{C}_r$; on va montrer que pour toute S : $\nu_r(K_S) \to \mu(K_S)$ quand $r \to +\infty$.

Si $S = (b_1, \dots b_u)$ avec $u \leqslant r$, $\nu_r(K_S)$ est égal au quotient par $r(s_1 + s_2)$ du nombre de fois que S est contenue dans la suite (1) augmentée à droite de $a_{1,1}, \dots a_{1,u-1}$; on a donc

$$\nu_r(K_S) = (r(s_1 + s_2))^{-1}((r - u + 1)(s_1\varphi_{S,r-u+1}(\chi_1) + s_2\varphi_{S,r-u+1}(\chi_2)) + k)$$

où k est un entier positif au plus égal à $(u - 1)(s_1 + s_2)$; et quand $r \to +\infty$

$$\nu_r(K_S) \to (s_1 + s_2)^{-1}(s_1\mu_1(K_S) + s_2\mu_2(K_S)) = \mu(K_S).$$

Montrons enfin que ν_r tend vaguement vers μ quand $r \to +\infty$; pour toute suite $S = (c_1, \dots c_{2u})$ de 0 et de 1, $2^{-u}K_S$ est l'ensemble des $\chi = (a_n)$ tels que

$$a_{1-u} = c_1, \dots a_u = c_{2u}.$$

Pour tout entier $u > 0$ notons $S_1, \dots S_{2^{2u}}$ les suites de $2u$ éléments; les ensembles $2^{-u}K_{S_i}$ $(i = 1, \dots 2^{2u})$ forment une partition de $\hat{G}_1$; soit χ_i un élément quelconque de $2^{-u}K_{S_i}$.

Soit f une fonction continue positive sur $\hat{G}_1$ et soit f_u la fonction égale à $f(\chi_i)$ dans $2^{-u}K_{S_i}$ pour tout i; on a $\nu_r(f) \to \mu(f)$ parce que f est limite uniforme de f_u pour $u \to +\infty$, que $\nu_r(f_u) \to \mu(f_u)$ pour tout u quand $r \to +\infty$ et que ν_r est bornée en norme [1].

[1] Le lemme s'étend de façon évidente au cas d'un nombre quelconque (fini) de mesures.

LEMME 10. — *Toute mesure μ sur $\hat{G}_1$, positive, invariante, ergodique et normée est limite vague de mesures positives, invariantes, ergodiques, normées et diffuses.*

Soit $\zeta = (b_n) \in \hat{G}_1$ tel que pour toute S, $\varphi_{S,p}(\zeta)$ tende vers $\mu(K_S)$ quand $p \rightarrow +\infty$ (lemme 8). Soit n un entier >0; pour tout $\chi = (a_m)$ soit $\Phi_{n,0}(\chi)$ l'élément représenté par le développement

$$\ldots a_{-1}b_1 \ldots b_n a_0 b_1 \ldots b_n a_1 b_1 \ldots b_n a_2 b_1 \ldots b_n a_3 \ldots$$

où l'élément a_1 est mis à la place d'indice 1; posons

$$\Phi_{n,1}(\chi) = 2\Phi_{n,0}(\chi) \ldots$$
$$\Phi_{n,n}(\chi) = 2^n\Phi_{n,0}(\chi).$$

Soit λ une des mesures sur $\hat{G}_1$ construites à la prop. 2.

Les applications $\Phi_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ sont continues en tout point $\chi = (a_m)$ tel que $a_m = 1$ pour une infinité de $m > 0$; ces points formant un ensemble de complémentaire λ-négligeable, $\Phi_{n,i}$ est λ-mesurable et on peut considérer les mesures

$$\nu_{n,i} = \Phi_{n,i}(\lambda)$$

et

$$\nu_n = (n+1)^{-1}(\nu_{n,0} + \cdots + \nu_{n,n}).$$

La mesure ν_n est diffuse; montrons qu'elle est invariante : pour toute fonction continue f sur $\hat{G}_1$ on a

$$\begin{aligned}\int f(2\chi)\, d\nu_n(\chi) &= (n+1)^{-1}\sum_i \int f(2\Phi_{n,i}(\chi))\, d\lambda(\chi)\\ &= (n+1)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \int f(\Phi_{n,i}(\chi))\, d\lambda(\chi) + \int f(\Phi_{n,0}(2\chi))\, d\lambda(\chi)\Big)\\ &= \int f(\chi)\, d\nu_n(\chi).\end{aligned}$$

Montrons maintenant que ν_n est ergodique : soit f une fonction ν_n-mesurable, bornée et telle que $f(2\chi) = f(\chi)$; comme les mesures $\nu_{n,i}$ sont deux à deux étrangères, f est $\nu_{n,i}$-mesurable pour tout i; alors $f \circ \Phi_{n,i}$ est λ-mesurable et on a

$$(f \circ \Phi_{n,i})(2\chi) = f(2^{n+1}\Phi_{n,i}(\chi)) = (f \circ \Phi_{n,i})(\chi)$$

donc $f \circ \Phi_{n,i}$ est égale λ-presque partout à une constante k_i; mais on a, pour $i = 0, \ldots n-1$.

$$(f \circ \Phi_{n,i})(\chi) = f(2\Phi_{n,i}(\chi)) = f(\Phi_{n,i+1}(\chi))$$

par suite les k_i sont égaux et f est égale ν_n-presque partout à une constante. Il reste à montrer que ν_n tend vaguement vers μ quand $n \to +\infty$, et il suffit, en vertu d'un raisonnement fait au lemme 9, de montrer que $\nu_n(K_S) \to \mu(K_S)$ pour toute suite $S = (c_1, \ldots c_u)$; soit g la fonction caractéristique de K_S; on a :

$$\nu_n(K_S) = (n+1)^{-1}\int (g(\Phi_{n,0}(\chi)) + \ldots g(\Phi_{n,n}(\chi))d(\chi).$$

Si $u < n$ on a donc

$$\nu_n(K_S) = (n+1)^{-1}\int ((n-u+1)\varphi_{S,n-u+1}(\zeta) + h(\chi))d\lambda(\chi)$$

ou $h(\chi)$ est un entier positif au plus égale à u; d'où l'assertion.

Proposition 6. — *L'espace des caractères partout définis sur* A *et de norme* 1 *n'est pas localement compact pour la topologie de la convergence simple.*

Soient $C_{f,1}$ cet espace et D l'espace des formes linéaires positives centrales de norme $\leqslant 1$; il suffit de construire une suite d'éléments de $D - C_{f,1}$, adhérents à $C_{f,1}$ et convergeant vers un élément de $C_{f,1}$.

Soient ν_1 et ν_2 des mesures positives, invariantes, ergodiques, normées, diffuses et différentes sur $\hat{G}_1$ et α un nombre rationnel vérifiant $0 < \alpha < 1$; d'après les lemmes 9 et 10, la mesure $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$ est limite vague de mesures μ_n invariantes, ergodiques, normées et diffuses; considérons les caractères sur A (cf. prop. 1) :

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_i(x) = \nu_i(\mathcal{F}x_{e_0}) & \text{où} & i = 1, 2 \\ \theta_n(x) = \mu_n(\mathcal{F}x_{e_0}) & \text{où} & n = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} x \in A^+$$

La forme linéaire $\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2$ appartient à D; elle est limite de θ_n donc adhérente à $C_{f,1}$; elle n'est pas dans $C_{f,1}$; enfin elle converge vers λ_1 quand $\alpha \to 1$.

7. Structures boréliennes.

Soit μ une mesure positive, invariante et ergodique définie sur une partie ouverte invariante Ω de $\hat{G}_1$; pour toute fonction continue positive f sur $\hat{G}_1$ nous poserons

$$\tilde{\mu}(f) = \mu(f|\Omega);$$

nous noterons M l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$ dans

$[0, +\infty]$ ainsi obtenues et le munirons de la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes toutes les fonctions

$$\tilde{\mu} \to \tilde{\mu}(f) \qquad \text{pour} \qquad f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1).$$

Nous noterons enfin M_0 l'ensemble des $\tilde{\mu}$ pour lesquelles μ n'a pas de masse en aucun point χ à développement périodique.

LEMME 11. — *Soit Z un espace localement compact à base dénombrable; l'espace $\mathcal{M}_+(Z)$ des mesures positives sur Z est standard pour la structure borélienne sous-jacente à la topologie vague.*

Dans le cas où Z est compact, l'assertion résulte du fait que pour tout entier n la boule de rayon n est borélienne dans $\mathcal{M}_+(Z)$ et standard (cf. [2], ch. III, § 3, prop. 6).

Supposons maintenant Z non compact; Z est réunion d'une suite croissante de compacts K_n ($n = 1, 2, \ldots$); pour $n < m$ soit $\varphi_{m,n}$ l'application de $\mathcal{M}_+(K_m)$ sur $\mathcal{M}_+(K_n)$ qui associe à toute mesure sur K_m la mesure qu'elle induit sur K_n; montrons que $\varphi_{m,n}$ est borélienne; il suffit de prouver que pour toute fonction continue positive g sur K_n, $\varphi_{m,n}(\mu)(g)$ est fonction borélienne de μ; or soit g' la fonction sur K_m prolongée de g par 0 sur $K_m - K_n$; on a

$$\varphi_{m,n}(\mu)(g) = \mu(g')$$

et l'application $\mu \to \mu(g')$ est semi-continue supérieurement et par conséquent borélienne.

Considérons l'espace borélien standard $Y = \prod_n \mathcal{M}_+(K_n)$ et son sous-ensemble borélien Y' formé des suites (μ_n) telles que

$$\mu_n = \varphi_{m,n}(\mu_m) \qquad \text{pour} \qquad n < m;$$

soit Λ l'application de Y' dans $\mathcal{M}_+(Z)$ définie de la façon suivante :

soit $\alpha = (\mu_n) \in Y'$ et soit $f \in \mathcal{K}(Z)$; le support de f est contenu dans un K_n et on pose

$$\Lambda(\alpha)(f) = \mu_n(f | K_n)$$

ce qui ne dépend pas de l'entier n choisi; alors μ_n est la mesure induite par $\Lambda(\alpha)$ sur K_n, ce qui prouve que Λ est injective; d'autre part on vérifie immédiatement que Λ est surjective et bicontinue pour la topologie produit sur Y' et la topologie vague sur $\mathcal{M}_+(Z)$.

Lemme 12. — *Soit Ω une partie ouverte invariante de $\hat{G}_1$; l'ensemble des mesures positives, invariantes, ergodiques sur Ω, n'ayant de masse en aucun point à développement périodique est borélien dans $\mathcal{M}_+(\Omega)$.*

Tout d'abord l'ensemble N des mesures invariantes est fermé et l'ensemble N′ des mesures invariantes n'ayant de masse en aucun point à développement périodique est borélien, puisque ces points forment un ensemble dénombrable; il reste à montrer que le sous-ensemble N″ de N formé des mesures ergodiques est borélien dans N′.

Soit μ un élément de N′; la construction de la prop. 1 du § 2 fournit une représentation π_μ de A dans $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$; pour $x \in A$, $\pi_\mu(x)$ est représenté par la matrice

$$(\pi_\mu(x))_{a_1, a_2} = T_{\mathcal{F}x_{a_1 a_2^{-1}}} U_{a_1 a_2^{-1}};$$

soient $\mathfrak{A}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\mu(A)$, Tr la trace normale fidèle semi-finie sur $\mathfrak{A}$ construite dans [4], ch. I, § 9, prop. 1 et $\mathfrak{m}$ son idéal de définition; $\pi_\mu^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\mathcal{F}(xx^*)_{e_0}$ soit μ-intégrable et par suite contient l'idéal autoadjoint I de A engendré par les x tels que $\mathcal{F}(xx^*)_{e_0}$ ait son support contenu dans Ω.

Montrons que la forme $\sigma_\mu(x, y) = \operatorname{Tr} \pi_\mu(xy^*)$ est une trace sur I; les axiomes (i) ... (iv) des traces sont trivialement vérifiés; démontrons (v′) : la restriction de π_μ à I est non dégénérée puisque $\pi_\mu(I)$ contient tous les opérateurs de multiplication par des éléments de $\mathcal{K}(\Omega)$; si (u_n) est une unité approchée de I on a

$$\sigma_\mu(u_n x, x) = \operatorname{Tr} \pi_\mu(u_n x x^*)$$

et $\pi_\mu(u_n)$ tend fortement vers 1, donc

$$\sigma_\mu(u_n x, x) \to \sigma_\mu(x, x).$$

Définissant X(I) et B(I) comme au lemme 2, ch. I, § 2, nous avons donc une application borélienne $\mu \to \sigma_\mu$ de N′ dans X(I); il en résulte, en vertu du lemme cité, une application borélienne Π de N′ dans A_{rep}.

Si μ est ergodique, π_μ est factorielle (§ 2, prop. 1), σ_μ est la restriction d'un caractère et $\Pi(\mu) \in A_{\text{fac}}$; réciproquement si $\Pi(\mu) \in A_{\text{fac}}$, σ_μ est la restriction d'un caractère, π_μ est factorielle et μ est ergodique; le lemme résulte donc du fait que A_{fac} est borélien dans A_{rep} ([8], th. 1).

LEMME 13. — *Soit μ une mesure invariante définie sur une partie ouverte invariante de $\hat{G}_1$; l'ensemble ouvert invariant*

$$\Omega_{\tilde{\mu}} = \cup f^{-1}(R_+^*) \quad (f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1),\ \tilde{\mu}(f) < +\infty)$$

(R_+^*) = *ensemble des nombres réels strictement positifs) est le plus grand ouvert* U *possédant la propriété suivante: si une fonction continue positive g sur $\hat{G}_1$ a son support contenu dans* U, *alors $\tilde{\mu}(g) < +\infty$.*

Soit d'abord $g \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$ avec $K = \text{support } g \subset \Omega_{\tilde{\mu}}$; K est contenu dans une réunion finie $\bigcup_i f_i^{-}(R_+^*)$ avec $\tilde{\mu}(f_i) < +\infty$; posons

$$f = \sum_i f_i \qquad \text{et} \qquad \alpha = \inf_{\chi \in K} f(\chi);$$

on a $\alpha > 0$; posons $\beta = \sup g(\chi)$; on a $g \leqslant \frac{\beta}{\alpha} f$ et par suite $\tilde{\mu}(g) < +\infty$.

Soit maintenant U possédant la propriété de l'énoncé et soit $\chi \in U$; il existe une fonction continue positive g telle que

$$\text{support } g \subset U \qquad \text{et} \qquad g(\chi) = 1;$$

alors $\tilde{\mu}(g) < +\infty$ et $\chi \in \Omega_{\tilde{\mu}}$.

Remarque. — Dans la suite μ sera considérée comme une mesure sur $\Omega_{\tilde{\mu}}$.

LEMME 14. — *Soit* U *une partie ouverte invariante de $\hat{G}_1$; l'ensemble M_U des $\tilde{\mu} \in M$ tels que*

$$\Omega_{\tilde{\mu}} \supset U \qquad \text{et} \qquad \mu(U) \neq 0$$

est borélien dans M; *l'application* $P : \tilde{\mu} \to \mu|U$ *est un isomorphisme borélien de M_U sur l'ensemble des mesures invariantes ergodiques non nulles sur* U.

Soit (f_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$ telle que

$$\text{support } f_n \subset U \text{ pour tout } n$$
$$f_n(\chi) \to 1 \text{ pour tout } \chi \in U;$$

alors, pour $\tilde{\mu} \in M$, on a $\Omega_{\tilde{\mu}} \supset U$ si et seulement si $\tilde{\mu}(f_n) < +\infty$

pour tout n et $\mu(U) \neq 0$ si et seulement si $\tilde{\mu}(f_n) \neq 0$ pour au moins un n; d'où la première assertion.

Soit $\tilde{\mu} \in M_U$; $\mu|U$ est évidemment invariante, ergodique et non nulle; $\Omega_{\tilde{\mu}} - U$ est μ-négligeable, donc pour $f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$ on a

$$\tilde{\mu}(f) = \mu(f|\Omega_{\tilde{\mu}}) = P(\tilde{\mu})\,(f|U)$$

ce qui prouve que P est injective; P est surjective car si ν est invariante, ergodique et non nulle sur U, on a $P(\tilde{\nu}) = \nu$; P est borélienne car si $g \in \mathcal{K}^+(U)$ et si g' est la prolongée de g par 0 dans $\hat{G}_1 - U$, on a

$$P(\tilde{\mu})\,(g) = \tilde{\mu}(g')$$

qui est fonction borélienne de $\tilde{\mu}$; P^{-1} est borélienne car si $f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$ on a

$$\tilde{\mu}(f) = P(\tilde{\mu})\,(f|U)$$

qui est fonction borélienne de $P(\tilde{\mu})$.

LEMME 15. — *L'espace* M_0 *est standard et admet une section borélienne pour la relation de proportionnalité.*

Soit (0_n) une base d'ouverts de $\hat{G}_1$; pour tout n soit $U_n = G_0.0_n$: c'est un ouvert invariant et tout ouvert invariant est la réunion des U_n qu'il contient; si donc $\tilde{\mu} \in M$ il existe n tel que

$$\Omega_{\tilde{\mu}} \supset U_n \qquad \text{et} \qquad \mu(U_n) \neq 0,$$

i.e. $\tilde{\mu} \in M_{U_n}$; on a donc $M = \bigcup_n M_{U_n}$; puis $M_0 \cap M_{U_n}$ est borélien dans M_0 et isomorphe (lemme 14) à l'espace des mesures invariantes ergodiques non nulles sur U_n n'ayant de masse en aucun point à développement périodique; $M_0 \cap M_{U_n}$ est donc standard (lemme 12) et il en est de même de M_0.

Soit maintenant (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$ contenant pour chaque m une suite partout dense dans $\mathcal{K}^+(U_m)$; pour tout n soit B_n l'ensemble borélien des $\tilde{\mu} \in M_0$ tels que

$$\tilde{\mu}(f_j) = \begin{cases} 0 \quad \text{ou} \quad +\infty & \text{pour} \quad j < n \\ 1 & \text{pour} \quad j = n; \end{cases}$$

l'ensemble $B = \bigcup_n B_n$ est borélien; deux éléments proportionnels de B sont égaux; enfin tout élément de M_{U_n} (et par conséqent de M_0) est proportionnel à un élément de B.

Notations. — L'espace borélien C, ses sous-espaces C_f, $C_{f,1}$, C_I et son quotient C^0 sont définis comme au ch. I, § 2; on désignera en outre par C' l'ensemble des caractères correspondant à des représentations factorielles normales relativement à A'.

Proposition 7. — (i) *L'espace* C' *est standard.*

(ii) *Le sous-ensemble* Σ *de* $\tilde{A}$ *formé des éléments normaux relativement à* A' *est borélien dans* $\tilde{A}$ *et standard.*

(iii) *L'application canonique* Ψ^0 *de* C^0 *dans* $\tilde{A}$ *induit un isomorphisme borélien du quotient de* C' *sur* Σ.

Démontrons (i). On sait (ch. I, § 2, th. 1) que $C_{f,1}$ est boréliennement isomorphe à $\tilde{A}_f$; il résulte alors de [6] que $C_{f,1} \cap C_I$ est borélien dans $C_{f,1}$ et par suite standard. Puis $C_f \cap C_I$ est l'image de l'espace standard $R_+^* \times (C_{f,1} \cap C_I)$ par l'application injective borélienne (et même continue) $(\alpha, \lambda) \rightarrow \alpha\lambda$; par conséquent $C_f \cap C_I$ est borélien dans C_f et standard ([28], th. 3.2). Puis, C_f étant borélien dans C (ch. I, § 2, cor. 1 de la prop. 2) et contenu dans C', $C_f \cap C_I$ est borélien dans C' et standard; on va montrer que l'ensemble $C'_0 = C' - C_f \cap C_I$ est aussi standard, d'où il résultera que C' est standard; d'après la prop. 1 du § 2 C'_0 est mis en correspondance biunivoque avec M_0 par la formule

$$\lambda(x) = \tilde{\mu}(\mathcal{F}x_{e_0}), \qquad \text{où} \qquad \lambda \in C'_0, \quad \tilde{\mu} \in M_0, \quad x \in A^+;$$

cette correspondance est visiblement un isomorphisme borélien et l'assertion résulte du lemme 15; (i) est ainsi démontré.

Puis il existe une section borélienne S dans C' pour la relation de proportionnalité : la réunion d'une section évidente dans $C_f \cap C_I$ et d'une section dans C'_0 dont l'existence est assurée par le lemme 15. Il résulte alors de [28], th. 3.2 que l'application canonique de C' sur son quotient induit un isomorphisme borélien de S sur ce quotient.

Reprenons d'autre part les f_n du lemme 15 et posons

$$y_n = \mathcal{F}^{-1}(f_n) \in A_1,$$
$$x_n = (y_n)^{e_0} \in A,$$
$$I_n = \text{idéal autoadjoint engendré par } x_n;$$

soit E_n le sous-ensemble de C'_0 formé des λ dont l'idéal de définition contient I_n et qui ne sont pas identiquement nuls sur I_n; on voit immédiatement que E_n est borélien dans C'_0 et que C'_0 est la réunion des E_n; un raisonnement calqué sur celui du th. 1, ch. I, § 2 montre que l'application canonique Ψ de C dans $\tilde{A}$ induit un isomorphisme borélien de $S \cap E_n$ pour tout n sur son image et de $C_{f,1} \cap C_I$ sur son image, et par conséquent de S sur son image Σ; enfin Ψ^0 induit un isomorphisme borélien du quotient de C' sur Σ, et Σ est borélien dans $\tilde{A}$, ce qui démontre (ii) et (iii).

PROPOSITION 8. — *Sur* $\hat{A}_{nor}$ *les deux structures boréliennes identiques du th.* 2, *ch.* I, § 2, *sont standard.*

En vertu de [6], $\hat{A}$ est boréliennement isomorphe à $\tilde{A}_I$, lequel est borélien dans $\tilde{A}$; par cet isomorphisme $\hat{A}_{nor}$ correspond à $\tilde{A}_I \cap \Sigma$ qui est donc borélien dans E, et standard d'après la prop. 7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Intégration, *Act. Sc. Ind.*, n° 1175 et 1244, Paris, Hermann, 1952 et 1956.

[2] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, *Act. Sc. Ind.*, n° 1189 et 1229, Paris, Hermann, 1953 et 1955.

[3] P. J. COHEN, Factorization in group algebras, *Duke Math. J.*, t. 26, 1959, pp. 199-205.

[4] J. DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, *Cahiers Scientifiques*, fasc. 25, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[5] J. DIXMIER, Sur les C*-algèbres, *Bull. Soc. Math. France*, t. 88, 1960, pp. 95-112.

[6] J. DIXMIER, Sur les structures boréliennes du spectre d'une C*-algèbre, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, n° 6, 1960.

[7] J. DIXMIER, Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive (à paraître).

[8] J. A. ERNEST, A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups (à paraître).

[9] J. M. G. FELL, The dual spaces of C*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 94, 1960, pp. 365-403.

[10] J. M. G. FELL, C*-algebras with smooth duals, *Illinois J. Math.*, t. 4, 1960, pp. 221-230.

[11] J. GLIMM, A. STONE-Weierstrass theorem for C*-algebras, *Ann. Math.*, t. 72, 1960, pp. 216-244.

[12] J. GLIMM, Type I C*-algebras, *Ann. Math.*, t. 73, 1961, pp. 572-612.

[13] R. GODEMENT, Sur la théorie des représentations unitaires, *Ann. Math.*, t. 53, 1951, pp. 68-124.

[14] R. GODEMENT, Théorie des caractères II, *Ann. Math.*, t. 59, 1954, pp. 63-85.

[15] A. GUICHARDET, Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes, *Bull. Soc. Math. France.*, t. 89, 1961, pp. 77-101.

[16] A. GUICHARDET, Sur les représentations factorielles des C*-algèbres, *C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, pp. 1088-1089.

[17] A. GUICHARDET, Sur les caractères des algèbres de Banach à involution, *C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, pp. 2800-2802.

[18] A. GUICHARDET, Représentations unitaires de certains produits semi-directs, *C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, pp. 48-50.

[19] A. GUICHARDET, Sur les structures boréliennes du dual et du quasi-dual d'une C*-algèbre, *C. R. Acad. Sc.*. t. 253, 1961, pp. 2030-2032.

[20] P. R. HALMOS, Lectures on ergodic theory, *Math. Soc. Japan*, 1956.

[21] E. HOPF, Ergodentheorie, Berlin, J. Springer, 1937.

[22] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 70, 1951, pp. 219-255.

[23] M. LOÉVE, Probability theory, Van Nostrand Company 1955.

[24] L. H. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand Company, 1953).

[25] G. W. MACKEY, Imprimitivity for representations of locally compact groups, I. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 35, 1949, pp. 537-545.

[26] G. W. MACKEY, On induced representations of groups, *Amer. J. Math.*, t. 73, 1951, pp. 576-592.

[27] G. W. MACKEY, Induced representations of locally compact groups, *Ann. Math.*, t. 55, 1952, pp. 101-139.

[28] G. W. MACKEY, Borel structures in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 85, 1957, pp. 134-165.

[29] F. J. MURRAY and J. von NEUMANN, On rings of operators, *Ann. Math.*, t. 37, 1936, pp. 116-229.

[30] N. A. NAIMARK, Normed rings, Groningen, Noordhoff, 1959.

[31] M. A. NAIMARK, Factor representations of a locally compact group, *Soviet Math. Doklady*, 1960, pp. 1064-1066.

[32] N. NAKAMURA, The two-sided representations of an operator algebra, *Proc. Japan. Acad.*, t. 27, 1951, pp. 172-176.

[33] L. PUKANSZKY, Some examples of factors, *Publ. Math.*, t. 4, 1956, pp. 135-156.

[34] C. E. RICKART, General theory of Banach algebras, Van Nostrand Company, 1960.

[35] I. E. SEGAL, An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, *Ann. Math.*, t. 52, 1950, pp. 272-292.

[36] I. E. SEGAL, A class of operator algebras which are determined by groups, *Duke Math. J.*, t. 18, 1951, pp. 221-265.

[37] O. TAKENOUCHI, Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact, *Math. J. Okayama Univ.*, t. 4, 1955, pp. 143-173.

[38] T. TURUMARU, Crossed-product of operator algebras, *Tôhoku Math. J.*, t. 10, 1958, pp. 355-365.

(*Thèse*, *Fac. Sciences*, Paris, 1962.)