

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LINDA LUMER-NAÏM

## Sur le théorème de Fatou généralisé

*Annales de l'institut Fourier*, tome 12 (1962), p. 623-626

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1962\\_\\_12\\_623\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12_623_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LE THÉORÈME DE FATOU GÉNÉRALISÉ

par Linda LUMER-NAÏM (Grenoble).

1. L'objet de la présente note est de donner une nouvelle démonstration du théorème de Fatou généralisé, obtenu initialement par J. L. Doob [3] par des méthodes probabilistes, puis redémontré ultérieurement par cet auteur [4] avec l'usage seul de la théorie du potentiel et des fonctions surharmoniques. La démonstration donnée ici est plus ou moins basée sur la même idée que celle de Doob [4], mais présente sur cette dernière une simplification considérable, car elle évite l'intermédiaire compliqué de certaines notions auxiliaires introduites par Doob, et s'obtient au contraire directement à partir des principes fondamentaux, pour lesquels nous renvoyons essentiellement à [6].

2. Rappelons seulement ici que tout espace de Green  $\Omega$  peut être muni d'une frontière de Martin  $\Delta$  qui le compactifie selon  $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Delta$ , de telle sorte que toute fonction  $h$  harmonique  $> 0$  dans  $\Omega$  admet une représentation intégrale unique à l'aide d'une mesure  $\geq 0$  sur  $\Delta$  — la mesure canonique associée à  $h$  — et d'un noyau généralisant le noyau de Poisson ([5], [1]). Un ensemble de  $\Delta$  est dit  $h$ -négligeable s'il est de mesure nulle pour la mesure associée à  $h$ .

Pour une fonction dans  $\Omega$ , la pseudo-limite en un point-frontière minimal  $x$  est par définition la limite selon le filtré formé par les ensembles de complémentaire effilé en  $x$ , qui est la trace sur  $\Omega$  du filtre des voisinages de  $x$  dans une topologie  $\mathcal{C}$  sur  $\hat{\Omega}$ , plus fine que la topologie de Martin, et appelée topologie fine.

Dans toute la suite, les limites selon  $\mathcal{C}$  seront affectées de cet indice;  $\Omega$  sera un espace de Green,  $\Delta$  sa frontière de Martin, et  $h$  une fonction harmonique  $> 0$  fixée dans  $\Omega$ .

### 3. Le théorème de Fatou généralisé.

LEMME. — Soit  $\nu$  une fonction surharmonique  $> 0$  dans  $\Omega$ . Les points minimaux où  $\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} = +\infty$  forment un ensemble  $h$ -négligeable.

Dire que  $\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} = +\infty$  en  $x$  minimal équivaut à dire que, pour tout entier  $n > 0$ , l'ensemble  $E_n$  des points de  $\Omega$  où  $\frac{\nu}{h} > n$  est non effilé en  $x$ . Donc, si  $e_n$  désigne l'ensemble des points de non effilement de  $E_n$ , et  $e$  l'ensemble des points minimaux où  $\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} = +\infty$ , on a  $e = \bigcap_n e_n$ , et, quel que soit  $n$ , l'inégalité  $h_e \leq h_{e_n}$  entre les  $h$ -mesures harmoniques de ces ensembles (mesurables).

Mais, d'après [6], coroll. du th. 20,  $h_{e_n}$  est égale à la plus grande minorante harmonique de  $\mathfrak{E}_h^{\Omega - E_n}$  (extrémale de  $h$  sur  $\Omega - E_n$ ), et comme  $\nu > nh$  dans  $E_n$ , on a  $\nu \geq n \mathfrak{E}_h^{\Omega - E_n}$  partout dans  $\Omega$ , d'où  $h_{e_n} \leq \frac{1}{n} \nu$ , donc  $h_{e_n} \rightarrow 0$ , et  $h_e = 0$ .

THÉORÈME 1. — Soit  $f$  une fonction réelle sur  $\Delta$ ,  $h$ -résolutive et de solution  $\mathfrak{D}_{f,h}$ . Le quotient  $\frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h}$  admet à la frontière une pseudo-limite finie égale à  $f$ , sauf sur un ensemble  $h$ -négligeable.

Considérons une fonction  $g$  sur  $\Delta$ , égale à  $\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h}$  aux points minimaux. Toute fonction  $\nu$  surharmonique dans  $\Omega$ , telle que  $\frac{\nu}{h}$  soit bornée inférieurement et que  $\liminf_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} \geq f$  à la frontière, majore  $\mathfrak{D}_{f,h}$ , de sorte que, aux points minimaux de  $\Delta$ ,

$$\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} \geq \limsup_{\mathfrak{C}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h} = g,$$

et en particulier

$$\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} > g(x) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ donné,}$$

en tout point minimal  $x$  où  $g(x)$  est fini.

Cette dernière inégalité entraîne que l'ensemble  $E_x^\varepsilon$  des points de  $\Omega$  où  $\frac{\nu}{h} > g(x) - \varepsilon$  est non effilé en  $x$ , et l'on a

$$\liminf_{y \rightarrow x, y \in E_x} \frac{\nu(y)}{h(y)} \geq g(x) - \varepsilon.$$

Aux points minimaux où  $g = -\infty$ , on a certainement  $\liminf_{\mathfrak{C}} \frac{\nu}{h} \geq g - \varepsilon$ , puisque  $\frac{\nu}{h}$  est bornée inférieurement, et le lemme ci-dessus montre que les points minimaux où  $g = +\infty$  forment un ensemble  $h$ -négligeable ( $\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f^+, h} y$  vaut  $+\infty$ ).

D'après [6], th. 23, on a donc

$$\nu \geq \overline{\mathfrak{D}}_{(g-\varepsilon), h} = \overline{\mathfrak{D}}_{g, h} - \varepsilon h,$$

puis,  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire,

$$\nu \geq \overline{\mathfrak{D}}_{g, h},$$

et finalement

$$\mathfrak{D}_{f, h} \geq \overline{\mathfrak{D}}_{g, h}.$$

En introduisant  $g'$  sur  $\Delta$ , égale à  $\liminf_{\mathfrak{C}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f, h}$  aux points minimaux, on montre de façon analogue que

$$\mathfrak{D}_{f, h} \leq \underline{\mathfrak{D}}_{g', h}$$

d'où il résulte que  $g$  et  $g'$  sont toutes deux  $h$ -résolutives, avec solutions  $\mathfrak{D}_{g, h} = \mathfrak{D}_{g', h} = \mathfrak{D}_{f, h}$ , de sorte que  $g = g' = f$  fini, presque partout au sens de la mesure canonique associée à  $h$ .

**THÉORÈME 2.** — (*Théorème de Fatou généralisé*). Pour toute fonction  $\nu$  surharmonique  $> 0$  dans  $\Omega$ ,  $\frac{\nu}{h}$  admet à la frontière une pseudo-limite finie, sauf sur un ensemble  $h$ -négligeable.

Car  $\nu$  est dans  $\Omega$  la somme d'un potentiel de Green d'une mesure  $\geq 0$ , d'une fonction harmonique  $\geq 0$  dont le quotient par  $h$  admet presque partout à la frontière une pseudo-limite nulle, de même que pour le potentiel ([6], th. 24 et 21), et d'une solution  $\mathfrak{D}_{f, h}$  de problème de Dirichlet.

**COROLLAIRE.** — Etant donnée  $f$  réelle sur  $\Delta$ ,  $\underline{\mathfrak{D}}_{f, h}$  est aussi l'enveloppe supérieure des fonctions  $u$  dans  $\Omega$  qui, sont soushar-

moniques ou  $-\infty$ , et satisfont chacune aux conditions:  $\frac{u}{h}$  bornée supérieurement, et  $\liminf \frac{u}{h} \leq f$  en chaque point minimal.

Car  $\liminf \frac{u}{h} = \limsup \frac{u}{h}$  presque partout, et ce corollaire reste aussi valable si l'on suppose seulement que, pour chaque  $x$  minimal, il existe un ensemble non effilé en  $x$  sur lequel  $\liminf \frac{u}{h} \leq f(x)$ , (ou même un filtre non effilé en  $x$ , [2], selon lequel  $\liminf \frac{u}{h} \leq f(x)$ ).

#### 4. Extension.

Le théorème 2 reste valable si l'on suppose seulement  $\nu$  surharmonique  $> 0$  dans un ouvert partiel de  $\Omega$  (en particulier au voisinage d'un point-frontière). De façon précise :

THÉORÈME 3. — Soit  $\omega$  un ouvert de  $\Omega$ , de frontière  $\overset{*}{\omega}$  dans  $\hat{\Omega}$ . Aux points minimaux de  $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$  où  $\Omega - \omega$  est effilé,  $\frac{\nu}{h}$  admet une pseudo-limite finie, sauf sur un ensemble  $h$ -négligeable.

On peut d'abord supposer  $\omega$  domaine, et lui appliquer le th. 2 pour sa frontière de Martin  $\Delta^\omega$ , puis utiliser la correspondance existant entre les points minimaux de  $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$  où  $\Omega - \omega$  est effilé et certains points minimaux de  $\Delta^\omega$  ([6], th. 15), d'après laquelle les points exceptionnels forment aussi un ensemble  $h$ -négligeable sur  $\Delta$  ([6], lemme 6).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BRELOT, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin. *J. Math.*, 35, 1956, pp. 297-335.
- [2] M. BRELOT, Sur l'allure à la frontière des fonctions sousharmoniques ou holomorphes. *Ann. Acad. Sc. Fennicae*, 1958, série A.
- [3] J. L. DOOB, Conditionnal Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, pp. 431-458.
- [4] J. L. DOOB, A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem. *Ann. Institut Fourier*, 9, 1959, pp. 293-300.
- [5] R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49, 1941, pp. 137-172.
- [6] L. NAÏM, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel. *Ann. Institut Fourier*, 7, 1957, pp. 183-281.