ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 415-571
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__415_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 415-571.

RECHERCHES AXIOMATIQUES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES ET DU POTENTIEL

par M^me^ R.-M. HERVÉ (Nancy).

INTRODUCTION

Les premières études axiomatiques généralisant l'idée des fonctions harmoniques et surharmoniques, sans notion préalable de potentiel, dans des espaces topologiques plus ou moins généraux, sont dues à G. Tautz (1949) ([50], [51]) et J. L. Doob (1955) [35] : G. Tautz recherche aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de fonctions données soit l'ensemble des solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique; J. L. Doob introduit des fonctions harmoniques généralisées, contenant à la fois les solutions d'équations de types elliptique et parabolique, et se préoccupe surtout des interprétations probabilistes possibles.

En 1957, M. Brelot, en modifiant les axiomes de Doob, fonde une nouvelle théorie axiomatique, adoptée ici, qui ne s'applique plus aux équations de type parabolique, mais permet un développement beaucoup plus avancé, en théorie pure du potentiel [1], voisin de la théorie classique. Après des Notes aux Comptes rendus [2], un exposé d'allure définitive a été publié dans [16] et [18].

[1] On définit alors un *potentiel* dans un domaine ω comme une fonction surharmonique dont la plus grande minorante harmonique est 0 (c'est identique dans le cas classique au potentiel d'une mesure $\geqslant 0$ pour le noyau de Green de ω).

[2] Dont l'une en collaboration [23].

Dans un espace localement compact, connexe et localement connexe, cette théorie n'utilise que trois axiomes locaux, portant sur les seules fonctions harmoniques : le 1^er^ est un axiome de faisceau; le 2^e^ pose l'existence d'une base de la topologie formée de domaines réguliers, c'est-à-dire pour lesquels le problème de Dirichlet admet une solution unique, croissant avec la donnée; le 3^e^ est une propriété de convergence par croissance, qui, pour certaines questions, est renforcée selon une propriété du type de Harnack (axiome 3′).

La théorie, outre l'extension du problème de Dirichlet global, a deux autres buts principaux. L'un est d'établir un théorème de convergence des fonctions surharmoniques ([3]), clef de la théorie fine du potentiel : il faut, pour cela, un axiome supplémentaire (principe de domination). Le second but est l'extension de la représentation intégrale des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, de Martin-Riesz, à l'aide du théorème récent de G. Choquet sur les éléments extrémaux ([27] et [28]) : cela exigeait, outre 3′, un axiome supplémentaire, inspiré de la propriété classique qu'une fonction surharmonique, harmonique dans une boule ouverte, est déterminée par ses valeurs hors de la boule.

Le présent travail se propose d'approfondir et développer la théorie précédente; il apporte d'abord divers compléments et surtout permet d'effectuer cette représentation intégrale à l'aide des seuls axiomes 1, 2, 3′. La difficulté était de trouver, sans hypothèse supplémentaire, une topologie, sur l'espace des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, permettant d'appliquer les théorèmes de G. Choquet, et plus spécialement d'assurer la condition de compacité. Il a fallu pour cela de nouveaux instruments, en particulier un théorème de partition des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, remplaçant l'usage de la mesure associée de F. Riesz dans le cas classique.

Une autre partie de ces recherches définit et étudie, sous des hypothèses un peu plus restreintes, les fonctions harmoniques adjointes à un système donné de fonctions harmoniques, généralisant les solutions de l'équation adjointe à une équation aux dérivées partielles du second ordre de type

([3]) Définies comme dans le cas classique, en remplaçant les sphères et l'intégrale de Poisson par les domaines réguliers et la solution du problème de Dirichlet correspondant.

elliptique. Cette étude utilise d'ailleurs la représentation intégrale précédente.

Après un rappel de l'axiomatique de base, le chapitre I complète ces préliminaires en groupant des résultats, qui étendent des propriétés connues dans le cas classique :

— un théorème d'approximation des fonctions continues par des différences de deux potentiels continus (théorème 6. 1);

— des constructions, reposant essentiellement sur le critère de régularité de Bouligand, d'ouverts réguliers satisfaisant à certaines conditions (cf. par exemple, propositions 7. 1 et 7. 2) et de points réguliers pour un ouvert (n° 8);

— l'existence d'un potentiel permettant de caractériser l'effilement d'un ensemble quelconque (théorème 9. 1);

— la définition de la balayée μ^E d'une mesure μ sur un ensemble E (théorème 10. 1).

La généralisation des $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ fonctions (qui jouent le rôle des fonctions surmédianes classiques), faite au n° 11, est surtout destinée au chapitre sur les fonctions harmoniques adjointes.

Le chapitre II est consacré au théorème de partition, étape importante vers la représentation intégrale cherchée. L'idée est la suivante : le support d'une fonction surharmonique étant le plus petit ensemble fermé hors duquel la fonction est harmonique (c'est, dans le cas classique, le support fermé de la mesure associée), on montre que toute fonction $\in S^+$ (i. e. surharmonique $\geqslant 0$) est la somme de deux fonctions $\in S^+$ dont les supports sont plus petits (d'intérieurs disjoints et l'un d'eux arbitrairement petit).

Les conséquences du théorème de partition sont nombreuses :

— tout potentiel extrémal a un support ponctuel (théorème 16. 2);

— toute fonction surharmonique dans un ouvert partiel et de support compact peut être représentée, à une fonction harmonique près, par un potentiel dans l'espace entier (théorème 13. 2);

— l'existence, pour tout ensemble E effilé au point $x_0 \in \overline{E} - E$, d'une fonction $\in S^+$, finie en x_0 et dont la restriction à E a pour limite $+\infty$ au point x_0 (théorème 14. 1);

— et surtout l'existence de mesures associées à chaque fonction $V \in S^+$, de même support que V, définies, relativement à l'une d'elles, par des densités (n° 15).

Ces mesures sont utilisées, au chapitre III, pour effectuer une première représentation intégrale de V, à l'aide d'un noyau dépendant de V (théorème 17. 1). Dans le cas où les potentiels de support ponctuel donné sont tous proportionnels (hypothèse dite d'unicité), le noyau relatif à un potentiel P peut être défini indépendamment de P, et les résultats du n° 17 donnent alors la représentation intégrale des potentiels à l'aide des potentiels extrémaux (théorème 18. 2).

Une question importante, et non résolue, est la suivante : peut-il exister deux potentiels, de même support ponctuel, non proportionnels? Le théorème 16. 5 est une tentative pour répondre à cette question : il indique une condition, vérifiée dans le cas classique, et qui entraîne l'unicité.

Le chapitre IV résout le problème de la représentation intégrale des fonctions $\in S^+$ à l'aide des éléments extrémaux (théorème 22. 1).

Afin d'appliquer la théorie de G. Choquet, je définis sur le cône S^+ une topologie T rendant métrisable et compacte une base de ce cône : c'est l'objet des n° 19 à 21. Plusieurs résultats simples concernant cette topologie sont à noter :

— la T-convergence dans l'espace des potentiels à support ponctuel se traduit par la convergence des supports et la convergence simple hors du support de la limite (scolie 21. 1);

— sous l'hypothèse de l'unicité, la topologie T, restreinte aux potentiels ayant leurs supports dans un compact donné, équivaut à la topologie vague sur les mesures qui les engendrent (proposition 19. 3);

— si une suite $V_n \in S^+$ est T-convergente, sa T-limite est la régularisée s. c. i. de $\liminf_n V_n$ (corollaire 1 de la proposition 21. 2);

— toute suite monotone de fonctions $\in S^+$ est T-convergente (théorème 23. 1);

— la topologie T coïncide avec celle utilisée par M. Brelot pour la représentation intégrale, lorsqu'est satisfait l'axiome supplémentaire introduit dans ce but, et déjà mentionné au début de cette introduction (proposition 24. 7).

Le chapitre V établit, dans l'axiomatique de M. Brelot, des relations entre des principes classiques en théorie du potentiel, tels que le principe de domination pour les potentiels localement bornés (axiome D) et le théorème de convergence (cf. n° 25 à 27). En supposant l'axiome D, je démontre des propriétés « fines » de la balayée μ^E d'une mesure μ, en particulier : l'ensemble des points où E est effilé est μ^E-négligeable (proposition 28. 2), ainsi que l'ensemble des points où $\complement E$ est effilé et n'appartenant pas au support de μ (proposition 28. 5).

Au chapitre VI, je définis les fonctions harmoniques adjointes (ou*), moyennant certaines hypothèses, dont celle dite d'unicité; la représentation intégrale des fonctions $\in S^+$ sert à déterminer la mesure harmonique*, sans laquelle il semble difficile de vérifier les axiomes d'un système de fonctions harmoniques. Puis je démontre (proposition 30. 1) que, si $x \to p_y(x)$ est un potentiel convenable de support y, $y \to p_y(x)$ est un potentiel* de support x [4], noté p^*_x; j'en déduis une relation importante entre la balayée de p_y et la balayée* de p^*_x (théorème 31. 1), dont voici quelques conséquences :

— il y a identité entre ensembles polaires et polaires* (théorème 32. 1);

— le potentiel* engendré par μ^E, à l'aide du noyau p^*_x, est la balayée* sur E du potentiel* engendré par μ (corollaire 2* du théorème 31. 1);

— l'effilement d'un ensemble E en un point x_0 polaire est caractérisé par le fait que $p^*_{x_0}$ n'est pas conservé par balayage* sur E (théorème 32. 5).

Ces deux dernières propriétés diffèrent des résultats classiques par l'introduction des potentiels*; en effet, la symétrie du noyau, utilisée dans le cas classique, n'existe pas ici.

Enfin, je réponds partiellement à la question de l'unicité pour les potentiels* de support ponctuel donné x, en montrant qu'elle est réalisée quand x est polaire, ou bien non polaire et isolé (théorème 33. 1 et lemme 33. 2).

Au dernier chapitre, je reprends et précise un exemple déjà indiqué par M. Brelot et illustrant cette théorie axiomatique : les solutions d'une équation aux dérivées partielles, $Lu = 0$, du second ordre, de type elliptique, dont les coefficients sont localement lipschitziens, forment un système de fonctions harmoniques, dites L-harmoniques (théorème 34. 1 où l'on a pu

(4) Généralisation du fait que les fonctions de Green relatives à une équation et à son adjointe se déduisent l'une de l'autre par échange des variables.

supprimer l'hypothèse sur le signe du cœfficient c de u). En outre, s'il existe une solution > 0 de $\mathrm{L}u \leqslant 0$, $\mathrm{L}u \not\equiv 0$, en particulier si $c \leqslant 0$, $c \not\equiv 0$, on peut leur associer un système de fonctions L-harmoniques adjointes, qui coïncident avec les solutions de l'équation adjointe si les coefficients sont assez réguliers (théorème 35. 1).

J'achève le chapitre en montrant l'identité entre :

— les ensembles L-polaires, L-polaires adjoints, et polaires au sens classique (théorème 36. 1);

— les ensembles L-effilés, L-effilés adjoints, et effilés au sens classique (théorème 36. 3);

— enfin, les ouverts L-réguliers, L-réguliers adjoints, et réguliers au sens classique (corollaire du théorème 36. 3).

Ces recherches sont loin d'épuiser le sujet : outre la question essentielle, et déjà signalée, de la proportionnalité des potentiels de même support ponctuel, il y aurait lieu d'étendre la théorie de la frontière de Martin et de l'effilement à cette frontière, ce qui est actuellement étudié par M. Gowrisankaran; il faudrait aussi comparer les fonctions surharmoniques considérées ici aux potentiels définis à l'aide d'un noyau général donné, et obtenir ainsi d'autres exemples d'applications de la théorie. On peut encore songer à modifier, au moins au début, les bases de cette axiomatique, de façons diverses, en vue d'applications nouvelles : on pourrait par exemple, en s'inspirant des travaux de Doob ou Bauer [0], chercher à éviter les hypothèses de connexion et à inclure les solutions des équations de type parabolique. Mais, après les premiers pas, cela semble conduire à des changements profonds, donc à une théorie fort différente de la théorie classique qui nous a servi de modèle. Enfin et surtout, il y aurait lieu de comparer avec la synthèse de Hunt ([4 bis]) qui, dans le cadre des probabilités, couvre une grande partie des théories actuelles du potentiel, mais non l'axiomatique précédente.

([4 bis]) G. A. Hunt, Markoff processes and potentials. Illinois J. Math., **1**, 1957, pp. 44-93 et 316-369; **2**, 1958, pp. 151-213.

Je tiens à souligner tout ce que cette thèse doit à Monsieur le Professeur Brelot : non seulement elle n'existerait pas sans la fécondité de la théorie axiomatique qu'il a développée, mais bien des résultats sont l'aboutissement de ses suggestions, et la rédaction, enfin, lui est redevable de nombreuses améliorations.

Je le prie d'accepter l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie également MM. les Professeurs Cartan, Choquet et Lions, qui ont bien voulu former, avec M. le Professeur Brelot, le jury pour la soutenance.

TABLE DES MATIÈRES

NOTA. — Les lemmes, propositions, théorèmes sont affectés d'un double numéro dont le premier indique le paragraphe auxquels ils appartiennent.

RAPPEL DES BASES DE L'AXIOMATIQUE DES FONCTIONS HARMONIQUES (THÉORIE DE M. BRELOT)

1. A) L'espace Ω.

Ω est un espace localement compact, non compact, connexe et localement connexe. On obtient $\overline{\Omega}$ compact en adjoignant à Ω le point d'Alexandroff $\mathcal{A}$. Les notions topologiques qui interviennent dans toute la suite sont, en général, relatives à $\overline{\Omega}$; toutefois, on appellera « ensembles fermés dans Ω » les parties de Ω fermées pour la topologie de Ω.

On supposera le plus souvent (comme d'ailleurs dans la théorie que l'on rappelle), et on le mentionnera explicitement, qu'il existe une base dénombrable des ouverts de Ω; alors $\overline{\Omega}$ est métrisable et séparable.

1. B) Les fonctions harmoniques.

On se donne, dans chaque ouvert $\omega \subset \Omega$, une famille de fonctions, dites harmoniques dans ω, qui sont réelles finies continues dans ω, forment espace vectoriel sur le corps réel et satisfont aux axiomes suivants [5] :

Axiome 1. — Si h est harmonique dans l'ouvert ω, h est harmonique dans tout ouvert partiel; si h est définie dans un ouvert ω et harmonique dans un voisinage ouvert de chaque point $\in \omega$, h est harmonique dans ω.

[5] On appellera « système de fonctions harmoniques dans Ω » la donnée, dans chaque ouvert $\omega \subset \Omega$, d'une telle famille de fonctions.

Axiome 2. — On appelle régulier un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ tel que toute fonction f, finie continue sur $\partial\omega$, admette un prolongement unique harmonique dans ω, continu dans $\bar{\omega}$, et $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$. En tout point $x \in \omega$, la valeur de ce prolongement, notée $H_f^\omega(x)$, s'exprime donc à l'aide d'une mesure $\geqslant 0$ de Radon ρ_x^ω, appelée mesure harmonique de ω au point x: $H_f^\omega(x) = \int f \, d\rho_x^\omega$.

L'axiome 2 affirme l'existence d'une base des ouverts de Ω formée de domaines réguliers. Si Ω est à base dénombrable, il revient au même de supposer l'existence d'une base dénombrable des ouverts de Ω formée de domaines réguliers.

Axiome 3. — L'enveloppe supérieure d'un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans un domaine est $+\infty$ ou une fonction harmonique dans ce domaine.

L'axiome 3 est souvent remplacé par un axiome plus fort, 3′, qui, moyennant les axiomes 1 et 2, entraîne l'axiome 3.

Axiome 3′. — Une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans un domaine δ est soit > 0, soit $\equiv 0$ dans δ; et les fonctions harmoniques > 0 dans δ, s'il en existe, égales à 1 en un point x_0 de δ, sont également continues en x_0.

Les fonctions f-harmoniques :

Soit f une fonction finie continue > 0 dans Ω. Étant donné un système de fonctions harmoniques dans Ω, leurs quotients par f forment un nouveau système de fonctions satisfaisant aux mêmes axiomes, et appelées f-harmoniques.

Exemples de fonctions harmoniques :

— les fonctions harmoniques classiques dans un domaine euclidien;

— les solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, de type elliptique, définie dans un domaine euclidien, et dont les coefficients sont localement lipschitziens. Cet exemple sera traité en détail au chapitre VII.

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3, et on fera plus loin une autre hypothèse (n° 3).

2. Les fonctions hyperharmoniques et surharmoniques.

A. Définitions.

Une fonction réelle v, définie dans un ouvert $\omega_0 \subset \Omega$, est dite hyperharmonique dans ω_0, si elle est s. c. i., $> -\infty$, et si, pour tout ouvert régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$: $v(x) \geqslant \int v \, d\rho_x^\omega$ dans ω.

Une fonction est surharmonique dans un ouvert ω_0, si elle est hyperharmonique dans ω_0, et non identique à $+\infty$ dans aucune composante connexe de ω_0.

Le support d'une fonction surharmonique v dans ω_0 est le plus petit ensemble S fermé dans ω_0 tel que v soit harmonique dans $\omega_0 \cap \complement S$.

Un potentiel dans l'ouvert ω_0 est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans ω_0, dont toute minorante harmonique dans ω_0 est $\leqslant 0$.

Notations :

H^+ désigne l'ensemble des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans Ω,
S^+ l'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω,
P^+ l'ensemble des potentiels dans Ω.

Les fonctions f-hyperharmoniques sont les quotients par f des fonctions hyperharmoniques.

B. L'espace vectoriel ordonné S.

Définition de S :

On établit entre les couples (V, V') de fonctions $\in S^+$ la relation d'équivalence :

$$(V, V') \text{ équivalent à } (W, W') \text{ si } V + W' = W + V' \text{ dans } \Omega.$$

S est l'espace des classes d'équivalence des couples de fonctions $\in S^+$. C'est un espace vectoriel sur R, en posant par définition :

$$(V, V') + (W, W') = (V + W, V' + W');$$

il contient S^+ si l'on identifie tout élément $V \in S^+$ à la classe (V, O).

L'ordre spécifique :

Le cône S^+ définit sur S une relation d'ordre, appelé ordre spécifique :

$$(V, V') \prec (W, W') \quad \text{si} \quad (W, W') = (V, V') + U, \quad \text{où} \quad U \in S^+.$$

THÉORÈME. — S, *muni de l'ordre spécifique, est un espace de Riesz complètement réticulé.*

C. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HYPERHARMONIQUES.

1. Une condition suffisante pour que v soit hyperharmonique dans l'ouvert ω_0 est que v soit s. c. i., $> -\infty$, et que, pour tout $x \in \omega_0$ et tout voisinage de x, il existe dans ce voisinage un domaine régulier $\omega \ni x$, $\bar{\omega} \subset \omega_0$, tel que : $v(x) \geqslant \int v \, d\rho_x^\omega$.

2. Une fonction hyperharmonique $\geqslant 0$ dans un domaine ω_0 est, soit > 0, soit $\equiv 0$ dans ω_0.

3. L'enveloppe supérieure d'un ordonné filtrant croissant de fonctions hyperharmoniques dans ω_0, est hyperharmonique dans ω_0.

4. Étant donné v hyperharmonique dans l'ouvert ω_0 et un ouvert régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$, la fonction obtenue en remplaçant, dans ω, $v(x)$ par $\int v \, d\rho_x^\omega$, est hyperharmonique dans ω_0.

5. Un ensemble E de fonctions hyperharmoniques dans l'ouvert ω_0 est dit « saturé » dans ω_0 si :
   1) v_1 et $v_2 \in E$ entraîne inf $(v_1, v_2) \in E$;
   2) quel que soit l'ouvert régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$ et $v \in E$, la fonction obtenue en remplaçant, dans ω, $v(x)$ par $\int v \, d\rho_x^\omega$, appartient à E.

THÉORÈME. — *L'enveloppe inférieure d'un ensemble saturé de fonctions hyperharmoniques dans un domaine vaut* $-\infty$, $+\infty$ *ou est harmonique dans ce domaine.*

6. Toute fonction surharmonique $v \geqslant 0$ dans un ouvert ω_0 est, d'une manière unique, la somme d'un potentiel dans ω_0 et d'une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans ω_0, qui est la plus grande minorante harmonique de v dans ω_0.

7. En remplaçant l'axiome 3 par l'axiome 3' : Étant donné deux ouverts ω_0 et ω_1, d'adhérences $\subset \Omega$, et deux points

$x_0 \in \omega_0$ et $x_1 \in \omega_1$, il existe un nombre $k > 0$, tel que, pour toute fonction $V > 0$, $V \in S^+$:

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{\int V\, d\rho_{x_1}^{\omega_1}}{\int V\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}} \leqslant k.$$

3. Supposons dorénavant, outre les axiomes 1, 2, 3, l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω (6).

Les conséquences essentielles sont les suivantes :

1. Étant donné une famille dénombrable de domaines $\omega_i \subset \Omega$, il existe un potentiel > 0, fini continu dans Ω, et qui n'est harmonique dans aucun ω_i.

2. Lorsqu'il existe une base dénombrable des ouverts de Ω, toute fonction $\in S^+$ est limite d'une suite croissante de potentiels finis continus dans Ω.

3. *Diverses formes du principe du minimum dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$:

Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Si v est hyperharmonique dans ω, et satisfait à $\liminf\limits_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \partial\omega$, alors v est $\geqslant 0$ dans ω.

Soit un ouvert quelconque $\omega \subset \Omega$. Si v est hyperharmonique dans ω, satisfait à $\liminf\limits_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \partial\omega \cap \Omega$, et s'il existe un potentiel P dans Ω tel que $v \geqslant -P$ dans ω, alors v est $\geqslant 0$ dans ω.

4. *Conséquences du principe du minimum.*

Lemme 3. 1 — *Soit* P *un potentiel dans* Ω, *harmonique dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *et borné supérieurement dans* ω *au voisinage de tout point* $\in \partial\omega \cap \Omega$; *alors, pour toute* $V \in S^+$: *l'hypothèse* $\forall y \in \partial\omega \cap \Omega$, $V(y) \geqslant \limsup\limits_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} P(x)$ *entraîne* $V \geqslant P$ *dans* ω.

(6) Dans les applications, cette dernière hypothèse peut avoir lieu localement, mais non globalement; les résultats donnés dans la suite s'appliquent alors dans tout domaine $\subset \Omega$, où il existe un potentiel > 0.

Il suffit d'appliquer le principe du minimum dans un ouvert quelconque, à la fonction $V - P$, surharmonique dans ω: $V - P \geqslant - P$ dans Ω, et

$$\liminf_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} [V(x) - P(x)] \geqslant V(y) - \limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} P(x) \geqslant 0$$

pour tout $y \in \partial\omega \cap \Omega$.

Lemme 3. 2. — *Soit* P_n *une suite de potentiels dans* Ω, *dont les supports sont contenus dans un compact* $K \subset \Omega$, *et* V *une fonction* $\in S^+$, *limite uniforme de la suite* P_n *sur tout compact* $\subset \Omega \cap \complement K$. *Alors,* V *est un potentiel dans* Ω.

$V \in P^+$ si, hors d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, V est majoré par un potentiel dans Ω. Choisissons $\omega \supset K$; d'après l'hypothèse, les fonctions P_n sont bornées dans leur ensemble sur $\partial\omega$. Donc, si P est un potentiel > 0 dans Ω, il existe un nombre $\lambda > 0$, tel que: $P_n \leqslant \lambda . P$ sur $\partial\omega$. On en déduit (lemme 3. 1): $P_n \leqslant \lambda . P$ dans $\Omega \cap \complement \omega$, et à la limite: $V \leqslant \lambda . P$ dans $\Omega \cap \complement \omega$.

4. A) Le problème de Dirichlet dans un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

Soit une fonction f définie sur $\partial\omega$. On désigne par $\overline{H}^{\omega}_f$ l'enveloppe inférieure des fonctions v hyperharmoniques dans ω, telles que: $\liminf_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} v(x)$ soit $\geqslant f(y)$ et $> -\infty$ pour tout $y \in \partial\omega$.

Dans chaque composante connexe ω_i de ω: $\overline{H}^{\omega}_f$ vaut $\overline{H}^{\omega_i}_f$ (où f est définie sur $\partial\omega_i$) et elle est harmonique ou égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Soit $\underline{H}^{\omega}_f = -\overline{H}^{\omega}_{(-f)}$; quelle que soit f: $\underline{H}^{\omega}_f \leqslant \overline{H}^{\omega}_f$, et f est dite résolutive si $\underline{H}^{\omega}_f = \overline{H}^{\omega}_f =$ une fonction finie, notée H^{ω}_f.

1. *Théorème de résolutivité* [6 bis]*:*

Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Alors:

— toute fonction θ finie continue sur $\partial\omega$ est résolutive, et $H^{\omega}_{\theta}(x) = \int \theta \, d\rho^{\omega}_x$ définit une mesure $\geqslant 0$ de Radon, ρ^{ω}_x, appelée mesure harmonique de ω au point x;

[6 bis] Ce théorème avec les hypothèses générales précisées ici, utilise le lemme 6-1, démontré au chapitre I.

— si Ω est à base dénombrable, ou si ω est régulier, pour toute fonction f sur $\partial\omega$: $\overline{\mathrm{H}}_f^\omega(x) = \overline{\int} f\, d\rho_x^\omega$, et la résolutivité de f équivaut à sa sommabilité pour la mesure ρ_x^ω, pour tout $x \in \omega$.

2. *Théorème de comparaison :*
Soit ω et ω' deux ouverts, $\omega' \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, f une fonction définie sur $\partial\omega$ et f' la fonction définie sur $\partial\omega'$, égale à f sur $\partial\omega' \cap \partial\omega$ et à $\overline{\mathrm{H}}_f^\omega$ sur $\partial\omega' \cap \omega$. Alors $\overline{\mathrm{H}}_f^\omega = \overline{\mathrm{H}}_{f'}^{\omega'}$ dans ω'.

4. B) Les points réguliers de la frontière.

DÉFINITION. — $x_0 \in \partial\omega$ *est régulier pour* ω *si, pour toute fonction finie continue* θ *sur* $\partial\omega$: $\mathrm{H}_\theta^\omega(x) \to \theta(x_0)$ *quand* $x \to x_0$, $x \in \omega$.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POINTS RÉGULIERS :
1) Si $x_0 \in \partial\omega$ est régulier pour le domaine ω, tout voisinage ouvert de x_0 dans $\partial\omega$ est de mesure harmonique > 0 pour ω.
2) Si $x_0 \in \partial\omega$ est régulier pour l'ouvert ω, pour toute donnée f bornée supérieurement sur $\partial\omega$: $\limsup_{x \in \omega,\, x \to x_0} \overline{\mathrm{H}}_f^\omega(x) \leqslant \limsup_{y \in \partial\omega,\, y \to x_0} f(y)$.

3. *Le critère de régularité de Bouligand :*
Appelons fonction de Bouligand pour un ouvert quelconque $\omega \subset \Omega$, associée à un point $x_0 \in \partial\omega$, toute fonction v, surharmonique > 0 dans l'intersection de ω et d'un voisinage ouvert de x_0, telle que $v(x) \to 0$ quand $x \to x_0$, $x \in \omega$.
Pour que $x_0 \in \partial\omega$ soit régulier pour l'ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, il faut (si Ω admet une base dénombrable) et il suffit qu'il existe une fonction de Bouligand pour ω, associée au point x_0.
4. Pour que $x_0 \in \partial\omega$ soit régulier pour l'ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, il faut et, si Ω admet une base dénombrable, il suffit, qu'il soit régulier pour chaque composante connexe ω_ι de ω, ou bien extérieur à ω_ι.

4. C) Les ensembles négligeables.

Un ensemble $e \subset \partial\omega$ est négligeable pour ω si $\overline{\mathrm{H}}_{\chi_e}^\omega = 0$ (χ_e fonction caractéristique de e).
Plus généralement, soit $\mathcal{B}$ une base des ouverts de Ω formée

d'ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Un ensemble $e \subset \Omega$ est $\mathcal{B}$-négligeable si son intersection avec chaque $\partial\omega$, $\omega \in \mathcal{B}$, est négligeable pour ω. $\mathcal{B}p$-p signifie : sauf sur un ensemble $\mathcal{B}$-négligeable.

Deux fonctions surharmoniques égales $\mathcal{B}p$-p sont identiques.

5. A) Les $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions.

Soit $\mathcal{B}$ une base formée d'ouverts réguliers $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

Définition. — *Une fonction réelle v, définie dans un ouvert $\omega_0 \subset \Omega$, est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction dans ω_0 si v est bornée inférieurement localement dans ω_0 et si, pour tout ouvert $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \omega_0$:*

$$v(x) \geqslant \overline{\int} v \, d\rho_x^\omega$$

dans ω.

Propriétés :

1) La régularisée s. c. i. $\hat{v}$ d'une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction v dans ω_0 est hyperharmonique dans ω_0 et, pour tout $x \in \omega_0$:

$$\hat{v}(x) = \sup_{\substack{\omega \in \mathcal{B} \\ x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0}} \overline{\int} v \, d\rho_x^\omega.$$

2) Si u, v, w sont des $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions liées par la relation $u = v + w$ dans ω_0, on a aussi $\hat{u} = \hat{v} + \hat{w}$ dans ω_0.

En effet, $\hat{u} \leqslant \hat{v} + \hat{w}$ grâce à la propriété précédente, et $\hat{u} \geqslant \hat{v} + \hat{w}$ d'après la définition de la régularisée s. c. i.

3) La limite d'une suite croissante de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions v_n est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction v, et $\hat{v} = \lim_n \hat{v}_n$.

Démonstration de la seconde assertion :

$$\hat{v}(x) = \sup_{\substack{\omega \in \mathcal{B} \\ x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0}} \overline{\int} v \, d\rho_x^\omega = \sup_\omega \left[\sup_n \overline{\int} v_n \, d\rho_x^\omega \right]$$
$$= \sup_n \left[\sup_\omega \overline{\int} v_n \, d\rho_x^\omega \right] = \sup_n \hat{v}_n(x).$$

4) L'enveloppe inférieure d'une famille de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions, localement bornées inférieurement dans leur ensemble, est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction.

5) Étant donné une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction v dans l'ouvert ω_0 et un ouvert $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \omega_0$, la fonction obtenue en remplaçant, dans ω, $v(x)$ par $\overline{\int} v \, d\rho_x^{\omega}$ est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction dans ω_0.

6) Une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction dans un domaine ω_0, valant $+\infty$ au voisinage d'un point $\in \omega_0$, est identique à $+\infty$ dans ω_0.

5. B) Réduite et balayée d'une fonction $v \in S^+$ sur un ensemble $E \subset \Omega$ (7).

La réduite, R_v^E, est, par définition, l'enveloppe inférieure des fonctions $\in S^+$, $\geqslant v$ sur E. C'est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction, pour toute base $\mathcal{B}$ formée d'ouverts réguliers, et sa régularisée s. c. i., $\hat{R}_v^E$, est appelée la balayée de v sur E.

On peut de même définir la réduite et la balayée d'une fonction v, surharmonique $\geqslant 0$ dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, sur un ensemble $E \subset \omega$; on les note $(R_v^E)_\omega$ et $(\hat{R}_v^E)_\omega$.

Quelques propriétés :

1) Sur $\Omega \cap \complement \overline{E}$: $R_v^E = \hat{R}_v^E$ est harmonique; et si E est le complémentaire, relativement à Ω, d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$: $R_v^E = \overline{H}_v^{\omega}$ dans ω.

2) Si ω est un ouvert $\subset \Omega$: $R_v^{\omega} = \hat{R}_v^{\omega}$ dans Ω, et $R_v^{\omega} = \sup \hat{R}_v^K$ pour les compacts $K \subset \omega$. De plus, si ω est réunion d'une suite croissante de compacts K_n : $R_v^{\omega} = \lim\limits_n R_v^{K_n}$.

3) Si $\overline{E} \subset \Omega$, $\hat{R}_v^E$ est un potentiel dans Ω.

4) La plus grande minorante harmonique de v dans Ω vaut $\inf\limits_{\overline{E} \subset \Omega} R_v^{\complement E}$.

5) Soit ω un ouvert $\subset \Omega$:

$$R_v^{E \cap \omega} \leqslant R_v^E \leqslant R_v^{E \cup \complement \omega} \leqslant R_v^{E \cap \omega} + R_v^{\complement \omega}.$$

6) R_v^E et $\hat{R}_v^E$ sont des fonctionnelles sous-additives de v et de E.

7) Un critère de régularité à l'aide de la balayée :

Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, et v une fonction $\in S^+$, > 0,

(7) Si E est une partie de $\overline{\Omega}$ contenant $\mathcal{A}$, on écrira, pour simplifier : R_v^E ou $\hat{R}_v^E$ au lieu de $R_v^{E \cap \Omega}$ ou $\hat{R}_v^{E \cap \Omega}$.

finie continue au point $x_0 \in \partial\omega$. Pour que x_0 soit régulier pour ω, il faut et il suffit que, pour tout voisinage σ de x_0 : $\hat{R}_v^{\sigma \cap \complement\omega}(x_0) = v(x_0)$; si, de plus, v n'est harmonique dans aucune composante connexe de ω, il suffit que $\hat{R}_v^{\complement\omega}(x_0) = v(x_0)$.

8) THÉORÈME. — *Soit v une fonction finie continue* $\in S^+$, *et x_0 un point* $\in \Omega$.

1. $R_v^E(x_0) = \inf R_v^\omega(x_0)$, *pour les ω ouverts* $\supset E$.
2. $R_v^E(x_0)$ *définit, pour* E *compact variable, une capacité forte de Choquet (c'est-à-dire est croissante, continue à droite et fortement sous-additive) et, pour* E *quelconque, est la capacité extérieure correspondante.*

5. C) Les ensembles polaires.

Un ensemble $E \subset \Omega$ est polaire, s'il existe une fonction $\in S^+$, valant $+\infty$ en tout point $\in E$.

q-p. signifie sauf sur un ensemble polaire.

Remarquons qu'un point peut constituer un ensemble non polaire : par exemple le point à l'infini de R^n pour $n \geqslant 3$.

Critère de polarité :

Pour qu'un ensemble $E \subset \Omega$ soit polaire, il faut et il suffit que, pour une (ou toute) fonction v surharmonique > 0 dans Ω, il existe un point où R_v^E soit nul, ou encore, que $\hat{R}_v^E \equiv 0$.

Conséquences :

— un ensemble K-analytique (au sens de Choquet) intérieurement polaire (c'est-à-dire, dont toute partie compacte est polaire) est polaire;

— Si E est polaire, $\hat{R}_v^{E \cup E_0} \equiv \hat{R}_v^{E_0}$, quels que soient l'ensemble E_0 et la fonction $v \in S^+$.

Propriété de prolongement des fonctions surharmoniques à un ensemble polaire :

Si E est polaire et fermé dans Ω, Ω-E est connexe, et toute fonction surharmonique dans Ω-E et bornée inférieurement au voisinage de tout point de E, admet un prolongement surharmonique unique dans Ω.

5. D) Effilement d'un ensemble $E \subset \Omega$ [8] en un point $x_0 \in \Omega$.

DÉFINITION :

E est effilé au point $x_0 \notin E$ s'il existe une fonction $v \in S^+$ telle que $\liminf\limits_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} v(x) > v(x_0)$ (ce qui a lieu si $x_0 \notin \overline{E}$).

E est effilé au point $x_0 \in E$ si x_0 est polaire et $E\text{-}\{x_0\}$ effilé au point x_0.

QUELQUES PROPRIÉTÉS :

1) Un ensemble polaire est effilé en chaque point $\in \Omega$ (en supposant Ω à base dénombrable).

2) Un critère d'effilement :

Soit une fonction $v \in S^+$, > 0 et finie continue au point x_0. Pour que $E \not\ni x_0$ soit effilé au point x_0, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage σ de x_0, tel que $R_v^{E \cap \sigma}(x_0) < v(x_0)$.

Conséquence :

Si $x_0 \in \partial\omega$ est régulier pour l'ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, $\complement\omega$ n'est pas effilé au point x_0.

On ne peut affirmer la réciproque sans axiome supplémentaire; on a toutefois le résultat suivant :

Si les composantes connexes de ω sont au plus en infinité dénombrable, et si $\complement\overline{\omega}$ n'est pas effilé au point x_0, alors x_0 est régulier pour ω.

En effet, si v est une fonction $\in S^+$, > 0, finie continue dans Ω, et qui n'est harmonique dans aucune composante connexe de ω, $v - R_v^{\complement\overline{\omega}}$ est une fonction de Bouligand pour ω, associée au point x_0.

3) Une condition nécessaire d'effilement :

Si E est effilé au point x_0, $\int \chi_E \, d\rho_{x_0}^{\omega} \to 0$ selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts $\omega \ni x_0$ (χ_E désigne la fonction caractéristique de E).

En effet, si $v \in S^+$ et si $\delta = \{x \in \Omega \mid v(x) > v(x_0) + \alpha\}$, $\alpha > 0$, $\int \chi_\delta \, d\rho_{x_0}^{\omega} \to 0$ selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts $\omega \ni x_0$ $\left(\text{on utilise le fait que } \int d\rho_{x_0}^{\omega} \to 1\right)$.

[8] Si E est une partie de $\overline{\Omega}$ contenant $\mathfrak{A}$, on dira pour simplifier « effilement de E » pour « effilement de E-$\{\mathfrak{A}\}$ ».

TOPOLOGIE FINE :

On appelle topologie fine, la topologie sur Ω pour laquelle les voisinages de $x_0 \in \Omega$ sont les ensembles contenant x_0 et de complémentaire effilé au point x_0.

La topologie fine est, parmi les topologies plus fines que la topologie donnée dans Ω, la moins fine rendant continues les fonctions $\in S^+$.

Quelques indications sur le développement ultérieur de la théorie.

Des axiomes complémentaires, portant sur les fonctions $\in S^+$, permettent d'établir les théorèmes essentiels dont il a été question dans l'Introduction (alinéa 4) :

1) *Axiome D.* — Si P est un potentiel localement borné dans Ω, harmonique dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, toute fonction $\in S^+$, majorant P sur $\Omega \cap \complement\omega$, le majore dans Ω; autrement dit : $R_P^{\complement\omega} = P$ dans Ω.

Cet axiome, avec Ω à base dénombrable, entraîne le théorème de convergence :

Pour toute famille $\mathcal{F}$ de fonctions $V \in S^+$: $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V}$ q.p. dans Ω.

Sans l'axiome D, je n'ai pu obtenir que des résultats partiels, fort éloignés de ce théorème (théorème 23. 2).

2) *Axiome* 4. — Il existe une base des ouverts de Ω formée d'ouverts réguliers $\delta \subset \bar{\delta} \subset \Omega$ possédant la propriété suivante : Pour toute $V \in S^+$, harmonique dans δ, $R_V^{\complement\delta} = V$ dans Ω.

L'axiome 4, avec 3′ et Ω à base dénombrable, permet d'obtenir la représentation intégrale, de Martin-Riesz, des fonctions $\in S^+$.

Cette question sera reprise au chapitre IV, par d'autres méthodes, n'utilisant pas l'axiome 4.

CHAPITRE I

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

Hypothèses de ce chapitre :
les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3;
il existe un potentiel > 0 dans Ω.

6. Un théorème d'approximation.

LEMME 6. 1. — *Toute fonction finie continue sur un compact* K $\subset \Omega$, *peut être approchée uniformément sur* K, *par des différences de deux potentiels finis continus dans* Ω.

Soit C(K) l'ensemble des fonctions finies continues sur K, et $\mathcal{H}_0$ le sous-espace vectoriel de C(K), formé des restrictions à K des quotients $\frac{p - p'}{p_0}$, où p et p' décrivent l'ensemble des potentiels finis continus dans Ω, et p_0 est un potentiel fixé, > 0 et fini continu dans Ω. D'après le théorème de Stone, toute fonction $\in$ C(K) peut être approchée uniformément sur K, par des fonctions $\in \mathcal{H}_0$, si :

1) $\mathcal{H}_0$ contient les constantes,
2) la relation $u \in \mathcal{H}_0$ entraîne $|u| \in \mathcal{H}_0$,
3) $\mathcal{H}_0$ sépare les points de K.

La condition 2 résulte de : $(p - p')^+ = p - \inf(p, p')$. Pour vérifier la condition 3, considérons deux points distincts x_0 et $x_1 \in$ K, un domaine régulier ω, $x_0 \in \omega$, $x_1 \notin \omega$; il suffit alors de prendre pour p, un potentiel fini continu dans Ω, > 0, et non harmonique dans ω, et pour p' le potentiel obtenu en remplaçant, dans ω, $p(x)$ par $\int p \, d\rho_x^\omega$.

Remarque. — Ce lemme a été utilisé dans l'étude du problème de Dirichlet, pour montrer la résolutivité des fonctions continues [18].

THÉORÈME 6. 1. — *Étant donné une fonction* $f \geqslant 0$, *finie continue dans* Ω, *à support compact* $S_f \subset \Omega$, *un voisinage* ω *de* S_f, *et* $\varepsilon > 0$, *il existe une différence* $\geqslant 0$ *de deux potentiels finis continus dans* Ω, *nulle sur* $\Omega \cap \complement\omega$, *et différant de* f *de moins de* ε *dans* Ω.

On peut supposer $\bar{\omega} \subset \Omega$.

1) Effectuons un recouvrement fini du compact S_f à l'aide de domaines réguliers $\omega_i \subset \omega$, $i = 1, \dots, N$. Soit : p_i un potentiel > 0, fini continu dans Ω, non harmonique dans ω_i; p'_i le potentiel obtenu en remplaçant, dans ω_i, p_i par $H_{p_i}^{\omega_i}$;

$$p_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i \qquad \text{et} \qquad p'_0 = \sum_{i=1}^{N} p'_i.$$

Alors : $p_0 - p'_0$ est $\geqslant 0$, > 0 sur S_f, et $= 0$ hors de ω.

2) Le lemme 6. 1, appliqué à la restriction de f au compact $\bar{\omega}$, permet de déterminer une différence $p_1 - p'_1$, de deux potentiels finis continus dans Ω, tels que : $|f - (p_1 - p'_1)| < \varepsilon$ sur $\bar{\omega}$; donc *a fortiori :* $|f - |p_1 - p'_1|| < \varepsilon$ sur $\bar{\omega}$.

Soit λ un nombre > 0 tel que sur S_f : $|p_1 - p'_1| \leqslant \lambda . (p_0 - p'_0)$.

On voit immédiatement que

$$p - p' = \inf\,[|p_1 - p'_1|,\ \lambda(p_0 - p'_0)],$$

répond à la question.

COROLLAIRE. — *L'ensemble des différences de deux potentiels finis continus dans* Ω, *égaux hors d'un compact* $\subset \Omega$, *forme un sous-espace positivement riche de l'ensemble des fonctions continues à support compact dans* Ω.

LEMME 6. 2. — *Si* Ω *est à base dénombrable, il existe une famille dénombrable* $\mathfrak{L}$ *de potentiels finis continus dans* Ω, *telle que toute fonction finie continue sur un compact* $K \subset \Omega$ *puisse être approchée, uniformément sur* K, *par des différences de deux potentiels* $\in \mathfrak{L}$.

Il existe une famille dénombrable de fonctions $f_i \in C(\bar{\Omega})$, partout dense dans $C(\bar{\Omega})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

D'autre part, il existe une suite croissante de compacts $K_j \subset \Omega$, telle que Ω soit réunion des intérieurs des K_j.

Alors, si à chaque triplet d'entiers i, j, n on associe une différence de deux potentiels finis continus dans Ω, approchant f_i sur K_j à $\frac{1}{n}$ près (lemme 6. 1), on obtient une famille dénombrable de potentiels répondant à la question.

Remarque. — On peut compléter le théorème 6. 1 par une propriété de dénombrabilité analogue.

7. A) Construction d'ouverts réguliers.

LEMME 7. 1. — *Étant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$ et $x_0 \in \omega$, on peut trouver un compact k, $x_0 \in \underline{k}$ (intérieur de k) $\subset k \subset \omega$, tel qu'il existe une fonction de Bouligand pour $\Omega \cap \complement k$, associée à chaque point de ∂k.*

On peut supposer que ω est un domaine régulier $\ni x_0$. Soit h une fonction harmonique dans ω, de borne inférieure > 0 dans ω. Si p_0 est un potentiel > 0 dans Ω, et X_0 un voisinage compact de x_0, contenu dans ω, soit $p = \hat{R}_{p_0}^{X_0}$. Alors, $\varphi(x) = \dfrac{p(x) - H_p^{\omega}(x)}{h(x)}$, s. c. i. et > 0 dans ω, a une borne inférieure > 0 sur le compact X_0. Soit α un nombre tel que : $0 < \alpha < \inf\limits_{x \in X_0} \varphi(x)$ (1). L'ensemble k, des points $x \in \omega$ où $\varphi(x) \geqslant \alpha$, répond à la question : k est fermé dans ω et $\bar{k}$ ne peut contenir de points $\in \partial\omega$ grâce à la condition $h \geqslant m > 0$ dans ω; la fonction de Bouligand pour $\Omega \cap \complement k$ est :

$$\alpha h - p + H_p^{\omega}.$$

LEMME 7. 2. — *Étant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$ et $x_0 \in \omega$, il existe une famille non dénombrable d'ouverts réguliers ω_α, $x_0 \in \omega_\alpha \subset \bar{\omega}_\alpha \subset \omega$, tels que $\partial\omega_\alpha$ et $\partial\omega_\beta$ soient disjoints pour $\alpha \neq \beta$.*

On reprend la démonstration du lemme précédent. A tout nombre α satisfaisant à (1), on fait correspondre l'ensemble ω_α des points $x \in \omega$ où $\varphi(x) > \alpha$. ω_α est un ouvert $\subset \omega$ et $\bar{\omega}_\alpha$ ne peut contenir de points $\in \partial\omega$. La régularité de ω_α résulte de l'existence d'une fonction de Bouligand, $p - H_p^{\omega} - \alpha h$, pour ω_α; enfin, $\varphi = \alpha$ sur $\partial\omega_\alpha$.

Indiquons encore une variante du lemme 7. 1 :

LEMME 7. 3. — *Étant donné un domaine régulier* ω, *et un compact* $X_0 \subset \omega$, *on peut trouver un compact* k, $X_0 \subset \underline{k} \subset k \subset \omega$, *tel qu'il existe une fonction de Bouligand pour* $\Omega \cap \complement k$, *associée à chaque point de* ∂k.

PROPOSITION 7. 1. — *Étant donné, dans* Ω, *un compact* K *et un ouvert* $\omega \supset K$, *il existe un ouvert régulier contenant* K *et contenu dans* ω.

Soit un ouvert ω_1, $K \subset \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$. Appliquons le lemme 7. 1 à l'ouvert ω-K et à chaque point $x_0 \in \partial\omega_1$; le théorème de Borel-Lebesgue permet de couvrir $\partial\omega_1$ à l'aide d'un nombre fini de compacts k_i, $\subset \omega$-K, tels qu'en chaque point de ∂k_i, il existe une fonction de Bouligand pour $\Omega \cap \complement k_i$. L'ouvert cherché est $\omega_1 \cap \left\{ \complement \cup k_i \right\}$.

PROPOSITION 7. 2. — *Étant donné une mesure de Radon* $\mu > 0$ *sur* Ω, *il existe une base des ouverts de* Ω, *formée de domaines réguliers, dont les frontières sont de* μ*-mesure nulle.*

En particulier, étant donné un ensemble dénombrable de points $x_n \in \Omega$, *il existe une base formée de domaines réguliers, dont les frontières ne contiennent aucun des points* x_n.

Il suffit de montrer qu'étant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$ et $x_0 \in \omega$, il existe un domaine régulier δ, $x_0 \in \delta \subset \omega$, tel que $\partial\delta$ soit de μ-mesure nulle. Pour cela, on considère les ouverts réguliers ω_α du lemme 7. 2. Ils forment une famille non dénombrable d'ouverts dont les frontières sont disjointes. Il existe donc au moins un ω_α dont la frontière est de μ-mesure nulle ; sa composante connexe contenant x_0 est le domaine cherché.

PROPOSITION 7. 3. — *Si* Ω *est à base dénombrable, il existe une famille dénombrable de compacts* $k_n \subset \Omega$, *contenant un système fondamental de voisinages de tout point* $\in \Omega$, *et tels que, à chaque point* $\in \partial k_n$, *soit associée une fonction de Bouligand pour* $\Omega \cap \complement k_n$.

Si $\mathfrak{B}$ est une base dénombrable des ouverts de Ω, formée de domaines réguliers ω_i, on considère tous les couples (i, j) pour lesquels $\bar{\omega}_i \subset \omega_j$, puis on applique le lemme 7. 3 au domaine ω_j et au compact $\bar{\omega}_i$.

7. B) Construction d'ouverts non effilés en un point.

On suppose Ω à base dénombrable.

LEMME 7. 4. — *Étant donné un point $x_0 \in \Omega$, il existe deux ouverts disjoints, non effilés au point x_0.*

Soit ω_n un système fondamental de voisinages ouverts de x_0, $\omega_n \supset \bar{\omega}_{n+1}$.

Pour chaque n, on définit :
une application continue, f_n, de $\partial\omega_n$ sur l'intervalle fermé $\left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right]$;
une valeur $a_n \in \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right]$, telle que l'ensemble des points $\in \partial\omega_n$ où $f_n = a_n$ soit de $\rho_{x_0}^{\omega_n}$-mesure nulle; ceci est possible, car l'ensemble des valeurs $\in \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right]$, telles que chacune d'elles soit prise par f_n sur un ensemble de $\rho_{x_0}^{\omega_n}$-mesure > 0, est dénombrable.

Ce choix étant fait, soit :

$$\beta_n = \{x \in \partial\omega_n | f_n(x) < a_n\} \quad \text{et} \quad \beta'_n = \{x \in \partial\omega_n | f_n(x) > a_n\}.$$

L'un de ces ensembles est de $\rho_{x_0}^{\omega_n}$-mesure $\geqslant \frac{1}{2}\int d\rho_{x_0}^{\omega_n}$. Pour n pair (resp. n impair), on peut supposer que c'est β_n (resp. β'_n) : en effet, les ensembles β_n et β'_n s'échangent, quand on remplace f_n par $(-f_n)$ et a_n par $(-a_n)$, ce qui est loisible.

Appliquons le théorème d'Urysohn au compact

$$K = \{x_0\} \cup \left(\bigcup_n \partial\omega_n\right)$$

et aux fonctions

$$\varphi = \begin{cases} a_n \text{ sur chaque } \partial\omega_n \\ 0 \text{ au point } x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f = \begin{cases} f_n \text{ sur chaque } \partial\omega_n \\ 0 \text{ au point } x_0 \end{cases},$$

continues sur K : il existe deux fonctions Φ et F, définies et continues dans Ω, et prolongeant respectivement φ et f.

Les ouverts

$$\delta = \{x \in \Omega | F(x) < \Phi(x)\} \quad \text{et} \quad \delta' = \{x \in \Omega | F(x) > \Phi(x)\}$$

répondent à la question; on sait, en effet, que si $\int \chi_\delta \, d\rho_{x_0}^{\omega}$ ne tend pas vers 0 selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts $\omega \ni x_0$, δ ne peut être effilé au point x_0 (cf. n° 5, D; propriété 3).

Remarque. — Les deux ouverts construits ainsi admettent x_0 comme point frontière régulier.

8. Existence de points réguliers sur la frontière d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

Théorème 8. 1. — *Il existe au moins un point régulier sur la frontière de tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, ayant au plus une infinité dénombrable de composantes connexes.*

Soit p_0 un potentiel fini continu dans Ω, non harmonique dans aucune composante connexe de ω, h une fonction harmonique > 0 dans un ouvert $\supset \bar{\omega}$. $\frac{p_0}{h}$ est une fonction continue > 0 sur $\bar{\omega}$; sa borne inférieure sur $\bar{\omega}$, soit $\alpha > 0$, est donc atteinte en un point $x_0 \in \bar{\omega}$. Si x_0 était un point $\in \omega$, la fonction $h_1 = p_0 - \alpha h$, surharmonique et $\geqslant 0$ dans ω, nulle au point $x_0 \in \omega$, serait identique à 0 sur la composante connexe de ω contenant x_0, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur p_0. Donc $x_0 \in \partial\omega$ et h_1 est une fonction de Bouligand pour ω associée au point x_0.

Afin d'obtenir un résultat plus précis, démontrons le lemme topologique suivant :

Lemme 8. 1. — *Soit ω et δ deux domaines $\subset \Omega$, tels que $\delta \cap \omega \neq \emptyset$ et $\delta \not\supset \omega$. Alors toute composante connexe de $\omega \cap \delta$ a au moins un point frontière sur $\partial\delta$.*

Supposons qu'une composante connexe γ de $\omega \cap \delta$ n'ait pas de point frontière situé sur $\partial\delta$; on a donc $\partial\gamma \subset \delta$.

Montrons alors que $\partial\gamma$ est disjoint à ω. En effet, si $x_0 \in \partial\gamma$ appartenait à ω, x_0 serait un point d'une composante connexe γ' de $\omega \cap \delta$, distincte de γ, et $\gamma' \cap \gamma$ ne serait pas vide, ce qui est impossible.

Conclusion : $\omega = \gamma \cup \{\omega \cap \complement \bar{\gamma}\}$ où γ et $\omega \cap \complement \bar{\gamma}$ sont deux ouverts disjoints non vides, d'où la contradiction.

THÉORÈME 8. 2. — *Étant donné un domaine* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ *et un point* $x_1 \in \partial\bar{\omega}$, *tout voisinage de* x_1 *contient au moins un point* $\in \partial\omega$, *régulier pour* ω [9].

Soit un domaine régulier $\delta \ni x_1$, assez petit pour que δ ne contienne pas ω. L'ouvert $\complement\bar{\omega} \cap \delta$ n'étant pas vide, soit X un compact non polaire $\subset \complement\bar{\omega} \cap \delta$, et $p = \hat{R}^X_{p_0}$ où p_0 est un potentiel fini continu dans Ω. Soit enfin h une fonction harmonique dans δ, de borne inférieure > 0 dans δ. Alors $\dfrac{p - H^\delta_p}{h}$ est une fonction continue > 0 sur $\bar{\omega} \cap \delta$; comme sa limite est 0 en tout point $\in \bar{\omega} \cap \partial\delta$, elle atteint sa borne supérieure sur $\bar{\omega} \cap \delta$, soit $\alpha > 0$, en un point $x_0 \in \bar{\omega} \cap \delta$.

Supposons que $x_0 \in \omega \cap \delta$. La fonction $h_1 = \alpha h - p + H^\delta_p$, harmonique et $\geqslant 0$ dans $\omega \cap \delta$, nulle au point $x_0 \in \omega \cap \delta$, est donc identique à 0 dans la composante connexe γ de $\omega \cap \delta$ contenant x_0. En vertu du lemme 8. 1, il existe au moins un point $\in \partial\gamma$, situé sur la frontière de δ, ce qui est incompatible avec $p - H^\delta_p = \alpha h$ dans γ.

Donc $x_0 \in \partial\omega \cap \delta$ et h_1 est une fonction de Bouligand pour ω, associée au point x_0.

9. Construction d'un potentiel permettant de caractériser l'effilement de tout ensemble $\subset \Omega$.

On suppose Ω à base dénombrable.

LEMME 9. 1. — *Soit* v_0 *un potentiel* > 0, *fini continu dans* Ω. *Il existe une famille dénombrable de potentiels* p_n, *finis continus dans* Ω, *majorés par* v_0, *et tels que, étant donné un ensemble* $E \subset \Omega$ *effilé au point* $x_0 \notin E$, *on puisse trouver un rang* n *pour lequel :*

$$R^E_{p_n}(x_0) < p_n(x_0).$$

Il existe une famille dénombrable de compacts $k_n \subset \Omega$, contenant un système fondamental de voisinages de tout point $\in \Omega$, et tels que, à chaque point $\in \partial k_n$ soit associée une fonction de Bouligand pour $\Omega \cap \complement k_n$ (proposition 7. 3). Par suite, les

[9] En théorie classique, cette propriété résulte immédiatement du fait que l'ensemble des points $\in \partial\omega$, irréguliers pour ω, est polaire.

fonctions $p_n = \hat{R}_{v_0}^{k_n}$ forment une famille dénombrable de potentiels finis continus dans Ω (voir le critère de régularité, n° 5, B; propriété 7).

Soit d'abord $x_0 \notin \overline{E}$, et ω un voisinage ouvert connexe de x_0, disjoint à E. Il existe un potentiel p_n non harmonique dans ω, donc tel que $R_{p_n}^E(x_0) < p_n(x_0)$.

Soit maintenant $x_0 \in \overline{E} - E$, et v une fonction $\in S^+$, telle que

$$\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} v(x) > v(x_0);$$

on peut supposer que $v(x_0) = v_0(x_0)$, et, si x_0 est non polaire, que v n'est harmonique dans aucune composante connexe de $\Omega\text{-}\{x_0\}$. On a donc, pour un nombre $\lambda_1 > 1$ convenable et un voisinage ouvert δ de x_0, $\overline{\delta} \subset \Omega$:

$$v \geqslant \lambda_1 . v_0 \text{ sur } E \cap \delta,$$

et *a fortiori:* $v \geqslant \lambda_1 . p_n$ sur $E \cap \delta$, quel que soit n.

D'autre part, on peut choisir un compact k_n, voisinage de x_0, $\subset \delta$ et assez petit pour que $v > \hat{R}_{v_0}^{k_n}$ sur $\partial\delta$:

en effet, si ω_p désigne un système fondamental de voisinages ouverts décroissants de x_0, $\bar{\omega}_1 \subset \delta$, $\lim\limits_p R_{v_0}^{\omega_p} = R_{v_0}^{\{x_0\}}$ (n° 5, B; propriété 8), et la convergence est uniforme sur $\partial\delta$ d'après le théorème de Dini. Si x_0 est polaire, on a, sur $\partial\delta$: $R_{v_0}^{\{x_0\}} = 0$, donc $R_{v_0}^{\omega_p} < v$ pour un p convenable. Cette conclusion subsiste si x_0 est non polaire, parce qu'alors $v \geqslant R_{v_0}^{\{x_0\}}$ dans Ω, et, grâce à l'hypothèse faite sur v, $v > R_{v_0}^{\{x_0\}}$ dans $\Omega\text{-}\{x_0\}$.

n étant ainsi choisi, de l'inégalité $v > p_n$ sur $\partial\delta$, on déduit, pour un nombre $\lambda_2 > 1$ convenable, $v \geqslant \lambda_2 . p_n$ sur $\partial\delta$, donc aussi $v \geqslant \lambda_2 . p_n$ sur $\Omega \cap \complement\delta$ (lemme 3. 1).

Conclusion : il existe un rang n et un nombre $\lambda > 1$ tels que :

$$x_0 \in \underline{k}_n \qquad \text{et} \qquad v \geqslant \lambda . p_n \text{ sur } E.$$

Alors $v \geqslant \lambda . R_{p_n}^E$ dans Ω entraîne : $p_n(x_0) > R_{p_n}^E(x_0)$.

Théorème 9. 1. — *Il existe un potentiel* U, *fini continu dans* Ω, *tel que, étant donné un ensemble* $E \subset \Omega$ *et un point* $x_0 \notin E$, *la condition :*

$$R_U^E(x_0) < U(x_0)$$

est nécessaire et suffisante pour que E *soit effilé au point* x_0.

Soit α_n une suite de nombres > 0, formant une série convergente, et p_n la suite des potentiels déterminés par le lemme 9. 1. La fonction $U = \sum\limits_n \alpha_n p_n$ répond à la question, grâce à la sous-additivité de R_v^E par rapport à v.

10. Balayage d'une mesure.

On suppose Ω à base dénombrable.

A. Étude de l'additivité de R_v^E et de $\hat{R}_v^E$ par rapport a v.

Proposition 10. 1. — *Soit* E *un ensemble fermé dans* Ω. 1) *Si* v_n *est une suite croissante* $\in S^+$ *et* $v = \lim\limits_n v_n \in S^+$:

$$R_v^E = \lim_n R_{v_n}^E \ (1) \quad \text{et} \quad \hat{R}_v^E = \lim_n \hat{R}_{v_n}^E \ (1').$$

2) *Si* v_1 *et* $v_2 \in S^+$:

$$R_{v_1+v_2}^E = R_{v_1}^E + R_{v_2}^E \ (2) \quad \text{et} \quad \hat{R}_{v_1+v_2}^E = \hat{R}_{v_1}^E + \hat{R}_{v_2}^E \ (2').$$

Les égalités (1′) et (2′) se déduisent de (1) et (2) (n° 5, A; propriétés 2 et 3).

Les égalités (1) et (2) étant vérifiées sur E, démontrons-les sur $\omega = \Omega \cap \complement E$.

1) L'inégalité $R_v^E \geqslant \lim\limits_n R_{v_n}^E$ est immédiate.

Soit x_1 un point $\in \omega$ et ε un nombre > 0; pour chaque n, il existe une fonction $w_n \in S^+$, $w_n \geqslant v_n$ sur E, et telle que $w_n(x_1) - R_{v_n}^E(x_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Alors, dans ω :

$$w = \lim_n R_{v_n}^E + \sum_n (w_n - R_{v_n}^E)$$

est hyperharmonique, et $\geqslant w_n$ pour chaque n. Si $y \in \Omega \cap \partial\omega$: $\liminf\limits_{\substack{x \to y \\ x \in \omega}} w(x) \geqslant v_n(y)$ pour chaque n, donc aussi $\liminf\limits_{\substack{x \to y \\ x \in \omega}} w(x) \geqslant v(y)$. On en déduit que la fonction

$$u = \begin{cases} v \text{ dans E} \\ \inf(v, w) \text{ dans } \omega \end{cases}$$

appartient à S^+. Par suite $u \geqslant R_v^E$, et dans ω :

$$w \geqslant R_v^E; \qquad \text{d'où} \qquad \lim_n R_{v_n}^E(x_1) + \varepsilon \geqslant R_v^E(x_1).$$

2) Supposons d'abord $\bar{\omega} \subset \Omega$:
L'égalité (2) est alors vérifiée, car, dans $\omega : R_v^E = H_v^\omega$.
Soit E fermé quelconque :
On introduit une suite croissante d'ouverts

$$\omega_q \subset \bar{\omega}_q \subset \Omega, \qquad \Omega = \bigcup_q \omega_q.$$

Pour tout potentiel p dans $\Omega : R_p^E = \lim_q R_p^{E \cup \complement \omega_q}$ (n° 5, B; propriétés 4 et 5), d'où l'additivité de R_p^E par rapport au potentiel p.

Si v est une fonction $\in S^+$, v est limite d'une suite croissante de potentiels p_n; de $R_v^E = \lim_n R_{p_n}^E$ résulte l'additivité de R_v^E par rapport à v.

Proposition 10. 2. — *Soit ω un ouvert $\subset \Omega$.*
1) *Si v_n est une suite croissante $\in S^+$ et $v = \lim_n v_n \in S^+$:*

$$R_v^\omega = \lim_n R_{v_n}^\omega \tag{1}$$

2) *Si v_1 et $v_2 \in S^+$:*

$$R_{v_1+v_2}^\omega = R_{v_1}^\omega + R_{v_2}^\omega \tag{2}$$

1. D'une part : $\lim_n R_{v_n}^\omega \leqslant R_v^\omega$.
D'autre part, $\lim_n R_{v_n}^\omega$ est une fonction $\in S^+$, égale à v sur ω; d'où $\lim_n R_{v_n}^\omega \geqslant R_v^\omega$.

2. L'additivité de R_v^ω par rapport à v résulte de celle de R_v^k, pour k compact, car $R_v^\omega = \lim_n R_v^{k_n}$, pour toute suite croissante de compacts k_n dont la réunion est ω (cf. n° 5, B; propriété 2).

Proposition 10. 3 [10]. — *Soit* E *un ensemble quelconque $\subset \Omega$. Si v_1 et v_2 sont deux fonctions $\in S^+$, finies continues dans Ω :*

$$R_{v_1+v_2}^E = R_{v_1}^E + R_{v_2}^E \quad (1) \qquad \textit{et} \qquad \hat{R}_{v_1+v_2}^E = \hat{R}_{v_1}^E + \hat{R}_{v_2}^E \quad (1').$$

Démontrons l'égalité (1). On sait que $R_{v_1+v_2}^E \leqslant R_{v_1}^E + R_{v_2}^E$.

D'autre part, pour toute $v \in S^+$, finie continue dans Ω: $R_v^E = \inf R_v^\omega$ pour les ouverts $\omega \supset E$; l'additivité de R_v^ω par rapport à v entraîne alors: $R_{v_1+v_2}^E \geqslant R_{v_1}^E + R_{v_2}^E$.

B. Définition de la balayée d'une mesure.

Théorème 10. 1 [10]. — *Étant donné une mesure de Radon > 0, μ, sur Ω, portée par un compact $\subset \Omega$, et un ensemble $E \subset \Omega$* [11], *il existe une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Ω et une seule, soit μ^E, telle que, pour tout potentiel p fini continu dans Ω:*

$$\int \hat{R}_p^E \, d\mu = \int p \, d\mu^E \tag{1}$$

Si E *est ouvert ou fermé dans Ω, pour toute $v \in S^+$:*

$$\int \hat{R}_v^E \, d\mu = \int v \, d\mu^E \tag{2}$$

Existence de la mesure μ^E.

On a vu (corollaire du théorème 6. 1), que l'ensemble $\mathcal{H}$ formé des différences de deux potentiels finis continus dans Ω, égaux hors d'un compact $\subset \Omega$, est un sous-espace positivement riche de $\mathcal{K}(\Omega)$. Toute fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{H}$, $\geqslant 0$ sur $\mathcal{H}^+$, peut donc être prolongée, de façon unique, suivant une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Ω.

A chaque différence $u = p - p' \in \mathcal{H}$, on fait correspondre le nombre $\int \hat{R}_p^E \, d\mu - \int \hat{R}_{p'}^E \, d\mu$. Grâce à l'additivité de $\hat{R}_p^E$ relativement aux potentiels p finis continus dans Ω, on définit ainsi une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{H}$; elle est $\geqslant 0$ sur $\mathcal{H}^+$, d'où l'existence d'une mesure de Radon $\geqslant 0$, unique, μ^E, telle que, pour toute différence $p - p' \in \mathcal{H}$:

$$\int (\hat{R}_p^E - \hat{R}_{p'}^E) \, d\mu = \int (p - p') \, d\mu^E.$$

Démonstration de la formule (1).

La proposition 7. 1 prouve l'existence d'une suite croissante d'ouverts réguliers ω_n, tels que $\Omega = \bigcup_n \omega_n$. Alors, $p_n = \hat{R}_p^{\complement\omega_n}$ est un potentiel fini continu dans Ω et égal à p hors de ω_n. On a donc:

$$\int (\hat{R}_p^E - \hat{R}_{p_n}^E) \, d\mu = \int (p - p_n) \, d\mu^E.$$

[10] Ces résultats seront complétés quand on supposera l'axiome D.

[11] Si E est un ensemble $\subset \overline{\Omega}$, contenant $\mathcal{A}$, on notera encore μ^E la balayée de μ sur E-$\{\mathcal{A}\}$.

Quand $n \to +\infty$, p_n décroît et $\to 0$, ainsi que $\hat{R}^E_{p_n}$; d'où

$$\int \hat{R}^E_p \, d\mu = \int p \, d\mu^E.$$

Démonstration de la formule (2).

v est limite d'une suite croissante de potentiels finis continus p_n, et $\hat{R}^E_v = \lim_n \hat{R}^E_{p_n}$. (2) se déduit alors de (1), valable pour les p_n.

Cas particulier : x étant un point $\in \Omega$, prenons pour μ la mesure ε_x; sa balayée sur E, ε^E_x, est telle que, pour tout potentiel p fini continu : $\hat{R}^E_p(x) = \int p \, d\varepsilon^E_x$, et, si E est ouvert ou fermé dans Ω : $\hat{R}^E_v(x) = \int v \, d\varepsilon^E_x$, pour toute $v \in S^+$. Remarquons que si $\omega = \Omega \cap \complement E$ est un ouvert d'adhérence $\subset \Omega$, ε^E_x coincide avec ρ^ω_x.

C. 1

1) $\mu^E = 0$ si et seulement si E est polaire.

2) si $\mu = \mu_1 + \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures de Radon > 0 sur Ω, chacune portée par un compact $\subset \Omega$, alors $\mu^E = \mu^E_1 + \mu^E_2$.

3) si μ_n est une suite croissante de mesures > 0, portées par un même compact $K \subset \Omega$, et vaguement convergente vers une mesure μ portée par K, alors μ^E_n est une suite croissante, vaguement convergente vers μ^E.

En effet, pour chaque différence $p - p' \in \mathcal{H}$,

$$\int (p - p')(d\mu^E - d\mu^E_n) = \int (\hat{R}^E_p - \hat{R}^E_{p'}) \, d(\mu - \mu_n)$$

tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

4) μ^E est portée par $(\underline{E} \cap S_\mu) \cup \partial E$:

Partageons μ en deux mesures, μ_1 portée par $E \cap S_\mu$ et μ_2 portée par $\complement \underline{E} \cap S_\mu$.

a) $\mu^E_1 = \mu_1$, car $\hat{R}^E_p = p$ dans $\underline{E}$.

b) μ^E_2 est portée par ∂E :

*b*₁) μ^E_2 ne charge pas $\complement \overline{E}$ (12); en effet, pour toute différence $p - p' \in \mathcal{H}$, telle que $S_{p-p'} \subset \complement \overline{E}$, $p = p'$ sur E et $\hat{R}^E_p = \hat{R}^E_{p'}$ dans Ω, en particulier sur S_{μ_2}.

*b*₂) μ^E_2 ne charge pas $\underline{E}$ (12); soit $p - p' \in \mathcal{H}$, tel que $S_{p-p'} \subset \underline{E}$, et

(12) On utilise ici le théorème 6. 1.

soit $\omega = \{x \in \Omega | p(x) - p'(x) \neq 0\}$. Si $\mathcal{V} = \{v \in S^+ | v = p \text{ sur } E\}$ et $\mathcal{V}' = \{v' \in S^+ | v' = p' \text{ sur } E\}$, à chaque fonction $v \in \mathcal{V}$ on peut associer une fonction $v' \in \mathcal{V}'$, ne différant de v que sur ω; en effet,

$$v' = \begin{cases} p' \text{ dans } \omega \\ v \text{ dans } \Omega \cap \complement \omega \end{cases}, \quad \text{encore égal à} \quad \begin{cases} p' \text{ dans } E \\ v \text{ dans } \Omega \cap \complement E \end{cases}$$

répond à la question. De même, à chaque $v' \in \mathcal{V}'$ correspond $v \in \mathcal{V}$, tel que $v = v'$ sur $\Omega \cap \complement \omega$. Donc, $\hat{R}_p^E = \hat{R}_{p'}^E$ sur $\Omega \cap \complement \omega$, en particulier sur S_{μ_2}.

11. Étude des $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions, où $\mathcal{B}$ est une base des ouverts de Ω, formée d'ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Les ouverts déterminants et complètement déterminants.

On reprend des notions dues à M. Brelot, sans supposer la régularité des ouverts envisagés.

A. Les $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions.

Définition. — *Si $\mathcal{B}$ est une base des ouverts de Ω, formée d'ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, on appelle $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction dans un ouvert $\omega_0 \subset \Omega$ toute fonction réelle v, localement bornée inférieurement dans ω_0, et telle que, pour tout ouvert $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \omega_0$:*

$$v(x) \geqslant \overline{\int} v \, d\rho_x^\omega$$

dans ω.

Cas particulier. — On appelle $\mathcal{S}$ fonction une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction relative à la base $\mathcal{B}$ formée de tous les ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

Lemme 11. 1. — *Si v est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction, s. c. i. et $\geqslant 0$ dans un domaine $\omega_0 \subset \Omega$, alors: ou bien $v > 0$ dans ω_0, ou bien $v = 0$ dans ω_0.*

Supposons que l'ensemble des points de ω_0 où $v > 0$ ne soit ni vide, ni ω_0, et désignons par β une de ses composantes connexes.

Il existe un point $y_0 \in \partial\beta$, et situé dans ω_0, puis un domaine ω, composante connexe d'un ouvert $\in \mathcal{B}$, tel que $y_0 \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$

et $\bar{\omega} \not\supset \beta$. Alors, $\beta \cap \complement \bar{\omega}$, ouvert non vide strictement contenu dans β, a au moins un point frontière $x_1 \in \beta$. x_1 appartient aussi à $\partial\bar{\omega}$, donc, d'après le théorème 8. 2, il existe dans β au moins un point $x_0 \in \partial\omega$ régulier pour ω; et $\beta \cap \partial\omega$, qui est un voisinage ouvert de x_0 dans $\partial\omega$, est de mesure harmonique > 0 pour ω (n° 4, B; propriété 1). En conséquence, $\int v \, d\rho_x^\omega$ est > 0 dans ω, alors que: $v(y_0) = 0$ entraîne $\int v \, d\rho_x^\omega = 0$ dans ω.

Lemme 11. 2. — *Si v est une $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ fonction s. c. i. dans un ouvert $\omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \Omega$, telle que pour tout $y \in \partial\omega_0$: $\liminf_{\substack{x \in \omega_0 \\ x \to y}} v(x) \geqslant 0$, alors $v \geqslant 0$ dans ω_0.*

Le raisonnement est classique. Soit h une fonction harmonique dans ω_0, de borne inférieure > 0 dans ω_0.

Supposons qu'en un point $\in \omega_0$, v soit < 0, donc aussi $\frac{v}{h} = \alpha < 0$. Comme $\liminf_{\substack{x \in \omega_0 \\ x \to y}} \frac{v(x)}{h(x)} \geqslant 0$ en chaque point $y \in \partial\omega_0$, il existe un voisinage ouvert δ de $\partial\omega_0$ tel que: $x \in \omega_0 \cap \delta$ implique $\frac{v(x)}{h(x)} > \alpha$.

Soit $\alpha_0 \leqslant \alpha$ la borne inférieure de $\frac{v}{h}$ sur ω_0; elle est atteinte en un point $x_0 \in \omega_0 \cap \complement \delta$. Alors, d'après le lemme 11. 1, $v - \alpha_0 h$ est identique à 0 sur la composante connexe de ω_0 contenant x_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème 11. 1. — *Toute $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ fonction v s. c. i. dans un ouvert $\omega_0 \subset \Omega$, est hyperharmonique dans ω_0.*

En effet, pour tout ouvert régulier ω, $\bar{\omega} \subset \omega_0$, et toute donnée θ continue sur $\partial\omega$ et $\leqslant v$, $v - H_\theta^\omega$ est une $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$-fonction s. c. i. dans ω, dont la limite inférieure est $\geqslant 0$ en tout point $\in \partial\omega$. D'où: $v \geqslant H_\theta^\omega$ (lemme 11. 2) puis $v \geqslant H_v^\omega$ dans ω.

Corollaire. — *La régularisée s. c. i. d'une $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ fonction dans un ouvert ω_0 est hyperharmonique dans ω_0.*

Les autres propriétés des $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ fonctions, données dans le cas d'une base $\mathfrak{B}$ formée de domaines réguliers (n° 5, A), s'étendent sans modification; toutefois, l'extension de la propriété 5 utilise $\overline{\mathrm{H}}_v^\omega(x) = \int v \, d\rho_x^\omega$, donc suppose Ω à base dénombrable.

Remarque. — Les lemmes 11. 1 et 11. 2, ainsi que le théorème 11. 1, sont encore valables si l'on remplace l'hypothèse « $v\,\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ fonction dans ω_0 », par l'existence d'une base $\mathcal{B}$ des ouverts de Ω, formée de domaines $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, v et $\mathcal{B}$ satisfaisant à la condition (a) :

(a) pour tout $x \in \omega_0$, et tout voisinage de x, il existe dans ce voisinage un domaine $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$, tel que $v(x) \geqslant \int v \, d\rho_x^\omega$.

On obtient ainsi un critère local d'hyperharmonicité, qui renforce celui qui a été donné au n° 2, C (propriété 1) :

Une condition suffisante pour que v soit hyperharmonique dans l'ouvert ω_0 est que v soit s. c. i., $> -\infty$, et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ des ouverts de Ω, formée de domaines $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, v et $\mathcal{B}$ satisfaisant à la condition (a).

B. Les ouverts déterminants et complètement déterminants (notés d. et c. d.).

On suppose Ω à base dénombrable [13].

Définition. — *Un ouvert ω est c. d. (resp. d.) si $\bar{\omega} \subset \Omega$, et si, pour tout potentiel p dans Ω (resp. pour tout potentiel p localement borné dans Ω), harmonique dans ω, les fonctions $\in \mathrm{S}^+$ majorant p dans $\Omega \cap \complement \omega$, le majorent dans Ω; autrement dit $\mathrm{R}_p^{\complement\omega} = p$ dans Ω* [14].

En utilisant l'additivité de $\mathrm{R}_v^{\complement\omega}$ par rapport à v (proposition 10. 1), on voit que, si ω est un ouvert c. d. (resp. d.), pour toute $v \in \mathrm{S}^+$ (resp. toute $v \in \mathrm{S}^+$ localement bornée), harmonique dans ω : $\mathrm{R}_v^{\complement\omega} = v$ dans Ω.

Théorème 11. 2. — *Soit $\mathcal{B}$ une base des ouverts de Ω formée d'ouverts d'adhérence $\subset \Omega$, ω un ouvert déterminant $\in \mathcal{B}$, et v*

[13] C'est essentiellement pour que la propriété 5 des $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ fonctions (n° 5, A) soit valable avec une base $\mathcal{B}$ quelconque.

[14] En théorie classique du potentiel, tout ouvert régulier est c.d. et tout ouvert relativement compact est *d.* Dans la présente axiomatique, rien ne prouve l'existence d'ouverts *d.*

une $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ *fonction* $\geqslant 0$ *dans* Ω. *Alors:* $v = \hat{v}\ \rho_x^\omega$-p. p. *sur* $\partial\omega$ (15).

1er cas : v est localement bornée dans Ω.

$$w = \begin{cases} v \text{ dans } \Omega \cap \complement\omega \\ \overline{\int} v\, d\rho_x^\omega \text{ dans } \omega \end{cases},$$

est une $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ fonction dans Ω. $\hat{w} \in S^+$, est localement borné dans Ω et harmonique dans ω; d'où $\int \hat{w}\, d\rho_x^\omega = \overline{\int} v\, d\rho_x^\omega$ dans ω.

Pour chaque $x \in \omega$, il existe une fonction φ définie sur $\partial\omega$ et borélienne, telle que $v \leqslant \varphi$ et $\overline{\int} v\, d\rho_x^\omega = \int \varphi\, d\rho_x^\omega$. On a donc : $\hat{w} \leqslant \hat{v} \leqslant v \leqslant \varphi$ sur $\partial\omega$ et $\int \hat{w}\, d\rho_x^\omega = \int \varphi\, d\rho_x^\omega$; par suite : $\hat{v} = v$ ρ_x^ω-p. p. sur $\partial\omega$.

2e cas : v est quelconque.

Le résultat est encore valable, car v est limite d'une suite croissante de $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ fonctions v_n localement bornées, et $\hat{v} = \lim_n \hat{v}_n$.

Corollaire 1. — *Soit* $\mathfrak{B}$ *une base des ouverts de* Ω *formée d'ouverts d'adhérence* $\subset \Omega$, ω *un ouvert c. d.* (*resp. d.*) $\in \mathfrak{B}$, *et* v *une* $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ *fonction* $\geqslant 0$ *dans* Ω (*resp. une* $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ *fonction* $\geqslant 0$ *dans* Ω *telle que* $\hat{v}$ *soit localement borné*) *harmonique dans* ω. *Alors* $v(x) = \int v\, d\rho_x^\omega$ *pour tout* $x \in \omega$.

En effet, si $x \in \omega : \hat{v}(x) = \int \hat{v}\, d\rho_x^\omega = \int v\, d\rho_x^\omega$.

Corollaire 2. — *Étant donné une base* $\mathfrak{B}$ *des ouverts de* Ω *formée d'ouverts d'adhérence* $\subset \Omega$, *et un ouvert* $\omega \in \mathfrak{B}$, *pour que* ω *soit c. d.* (*resp. d.*), *il faut et il suffit que, pour tout couple* v_1, v_2 *de* $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ *fonctions* $\geqslant 0$ *dans* Ω (*resp. de* $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ *fonctions localement bornées* $\geqslant 0$ *dans* Ω), *harmoniques dans* ω *et égales hors de* ω, *on ait* $v_1 = v_2$ *dans* Ω (16).

(15) Le théorème 11. 2 et le corollaire 1 sont directement inspirés du théorème 8 et de son corollaire (M. Brelot [16]).

(16) Cette caractérisation des ouverts *d.* et c.d. justifie le qualificatif qui leur est donné. On peut montrer aussi la caractérisation suivante :

Un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ est c.d. (resp. *d.*) si et seulement si, pour tout potentiel p dans Ω (resp. tout potentiel p localement borné dans Ω), la plus grande minorante harmonique de p dans ω est $\int p\, d\rho_x^\omega$. (Même raisonnement que dans [18], no 34). Il en résulte qu'il est équivalent de dire qu'un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ est c.d. (resp. *d.*), ou que chacune de ses composantes connexes est c.d. (resp. *d.*).

La condition est suffisante car, pour toute $v \in S^+$ (resp. toute $v \in S^+$ localement bornée), harmonique dans ω, $R_v^{\complement\omega}$ coïncide avec v dans $\Omega \cap \complement\omega$, donc dans Ω.

Corollaire 3. — *Soit ω un ouvert déterminant. Les points $\in \partial\omega$ irréguliers pour ω forment un ensemble de ρ_x^ω-mesure nulle.*

En effet, si V est une fonction $\in S^+$, finie continue dans Ω et non harmonique dans aucune composante connexe de ω, les points irréguliers pour ω sont caractérisés par $\hat{R}_V^{\complement\omega} < R_V^{\complement\omega}$ (propriété 7; n° 5, B).

Corollaire 4. — *Supposons qu'il existe une base des ouverts de Ω, soit $\mathcal{B}$, formée d'ouverts déterminants.*

1) *Pour toute $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction $v \geqslant 0$ dans Ω : $\hat{v} = v$ $\mathcal{B}$ p. p.*

2) *Réciproquement, soit, dans Ω, deux fonctions v et v' telles que : $v' \in S^+$, $v' \leqslant v$, et $v' = v$ $\mathcal{B}$ p. p.; alors v est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction, et $v' = \hat{v}$ dans Ω.*

Démonstration de 2). — Pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ et $x \in \omega$,

$$v(x) \geqslant v'(x) \geqslant \int v \, d\rho_x^\omega.$$

Donc v est une $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonction, et v', égale à $\hat{v}$ $\mathcal{B}$ p. p., coïncide avec $\hat{v}$.

Théorème 11. 3. — *Soit $\mathcal{B}$ une base des ouverts de Ω formée d'ouverts d'adhérence $\subset \Omega$, ω un ouvert c. d. (resp. d.) $\in \mathcal{B}$, et v_n une suite de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions $\geqslant 0$ dans Ω (resp. une suite de $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ fonctions $\geqslant 0$ dans Ω, telles que $\widehat{\liminf_n v_n}$ soit localement borné dans Ω). Alors, si $\int v_n \, d\rho_x^\omega$ converge quel que soit $x \in \omega$, et si elle est localement bornée dans ω indépendamment de n, la limite vaut $\int \liminf_n v_n \, d\rho_x^\omega$* (17).

(17) Ce théorème est analogue au théorème 10 de M. Brelot [16]; la démonstration est inchangée.

CHAPITRE II

LE THÉORÈME DE PARTITION ET QUELQUES CONSÉQUENCES

Hypothèses de ce chapitre :
les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3;
il existe un potentiel > 0 dans Ω.

12. Démonstration du théorème de partition.

DÉFINITION. — *Étant donné une fonction* $V \in S^+$ *et un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *on appelle* ω*-majorant de* V *toute fonction* $U \in S^+$, *telle que, dans* ω : $U = V +$ *une fonction surharmonique dans* ω, *non nécessairement* $\geqslant 0$.

On définit ainsi une relation de préordre dans S^+, liée à chaque ouvert $\omega \subset \Omega$.

PROPOSITION 12. 1. — *Etant donné un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *et une fonction* $V \in S^+$ *dont la partie potentielle dans* ω *est* p, *alors, la famille des* ω*-majorants de* V *ne dépend que de* p, *et chaque* ω*-majorant de* V *est* $\geqslant p$ *dans* ω.

Dans ω : $V = p +$ une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans ω; donc la famille des ω-majorants de V est la famille des fonctions $U \in S^+$, telles que, dans ω : $U = p +$ une fonction u' surharmonique dans ω. En outre, u', $\geqslant -p$, est $\geqslant 0$ dans ω; donc, dans ω :

$U = p +$ une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans ω.

COROLLAIRE. — *Les* Ω*-majorants d'une fonction* $V \in S^+$ *sont les majorants spécifiques* [18] *de la partie potentielle de* V *dans* Ω.

[18] Pour la définition de l'ordre spécifique, voir le n° 2, B.

THÉORÈME 12. 1. — *Soit un ouvert* $\omega \subset \Omega$, $\mathcal{V}$ *une famille* ω-*majorée de fonctions* $V \in S^+$, *et* U_0 *l'enveloppe inférieure, pour l'ordre naturel, des* ω-*majorants de* $\mathcal{V}$. *Alors :*

1) $U_0 \in S^+$, *est un* ω-*majorant de* $\mathcal{V}$, *est harmonique dans* $\Omega \cap \complement \bar{\omega}$.

2) U_0 *est spécifiquement le plus petit* ω-*majorant de* $\mathcal{V}$.

1) Soit $\mathcal{U}$ la famille des ω-majorants U de $\mathcal{V}$.

Pour V donné $\in \mathcal{V}$:

$$U = V + u \text{ dans } \omega, \text{ où } u \text{ est surharmonique dans } \omega;$$

donc $U_0 = V + u_0$ dans ω, avec $u_0 = \inf\limits_{U \in \mathcal{U}} u$.

U_0 est une $\mathcal{S}$ fonction [19] dans Ω ; u_0 est une $\mathcal{S}$ fonction dans ω car, si h est la partie harmonique de V dans ω, on a $u \geqslant -h$ dans ω.

Par suite : $\hat{U}_0 = V + \hat{u}_0$ dans ω (propriété 2, nº 5, A); $\hat{U}_0$ est donc un ω-majorant de $\mathcal{V}$, et coïncide avec U_0 dans Ω.

Enfin $\mathcal{U}$ est, dans $\Omega \cap \complement \bar{\omega}$, un ensemble saturé de fonctions surharmoniques ; U_0 est donc harmonique dans $\Omega \cap \complement \bar{\omega}$.

2) Soit $U \in \mathcal{U}$,

$$\text{et } U' = \begin{cases} U - U_0 & \text{en tout point où cette différence est définie} \\ +\infty & \text{en tout point où } U = U_0 = +\infty. \end{cases}$$

U' est une $\mathcal{S}$ fonction dans Ω, si, en tout point x où $U - U_0$ est défini, et pour tout ouvert δ, tel que $x \in \delta \subset \bar{\delta} \subset \Omega$, on a :

$$U(x) - U_0(x) \geqslant H_U^\delta(x) - H_{U_0}^\delta(x),$$

c'est-à-dire :

$$U - H_U^\delta + H_{U_0}^\delta \geqslant U_0 \text{ dans } \delta.$$

Soit S une fonction surharmonique dans δ, dont la limite inférieure, en tout point $\in \partial\delta$, est $> -\infty$ et $\geqslant U_0$, et s une fonction sousharmonique dans δ, dont la limite supérieure, en tout point $\in \partial\delta$, est $< +\infty$ et $\leqslant U$; il suffit de prouver que, dans δ : $U - s + S \geqslant U_0$.

Posons

$$U_1 = \begin{cases} \inf(U - s + S, U_0) & \text{dans } \delta \\ U_0 & \text{dans } \Omega \cap \complement \delta \end{cases}; \quad U_1 \leqslant U_0, \text{ et } U_1 \in S^+,$$

[19] Définie au début du nº 11.

car $U - s + S$ est une fonction surharmonique dans δ, dont la limite inférieure, en tout point $\in \partial\delta$, est $> -\infty$ et $\geqslant U_0$.

Pour que U_1 soit un ω-majorant de $\mathcal{V}$, il suffit alors de montrer que

$$u_1 = \begin{cases} \inf(u - s + S, u_0) \text{ dans } \delta \cap \omega \\ u_0 \qquad\qquad \text{ dans } \complement \delta \cap \omega' \end{cases}$$

est surharmonique dans ω, ce qui, grâce au critère local de surharmonicité (propriété 1, n° 2, C), se ramène à la s. c. i. de u_1 en tout point $y \in \partial\delta \cap \omega$. Or, si $u(y) = +\infty$, ou si $U_0(y) = +\infty$, on a :

$$\lim_{\substack{x \in \delta \cap \omega \\ x \to y}} [u(x) - s(x) + S(x)] = +\infty,$$

donc $\geqslant u_0(y)$, et, dans les autres cas :

$$\liminf_{\substack{x \in \delta \cap \omega \\ x \to y}} [u(x) - s(x) + S(x)] \geqslant u(y) - U(y) + U_0(y) = u_0(y).$$

Conclusion : $U_1 \in \mathcal{U}$, donc $U_1 = U_0$ dans Ω, $U - s + S \geqslant U_0$ dans δ, et U' est une $\mathcal{S}$ fonction dans Ω.

Alors, $U = U_0 + U'$ dans Ω entraîne $U = U_0 + \hat{U}'$ dans Ω, avec $\hat{U}' \in S^+$.

Corollaire 1. — P^+, *muni de l'ordre spécifique, est réticulé.*

On applique le théorème 12. 1 en prenant $\omega = \Omega$.

Sachant que H^+ est réticulé pour l'ordre spécifique, qui est aussi l'ordre naturel, on en déduit que S^+ est réticulé.

Corollaire 2. — *Étant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$, et une fonction $V \in S^+$, il existe une fonction $V_\omega \in S^+$, harmonique dans $\Omega \cap \complement \bar{\omega}$, qui est spécifiquement le plus petit ω-majorant de* V.

On applique le théorème 12. 1 à la famille $\mathcal{V} = \{V\}$.

Énoncé équivalent au corollaire 2 :

Théorème 12. 2 (ou théorème de partition). — *Étant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$ et une fonction $V \in S^+$, il existe deux fonctions V_ω et $V'_\omega \in S^+$, caractérisées par les conditions :*

1) $V = V_\omega + V'_\omega$ *dans* Ω ;

2) V'_ω *est, pour l'ordre spécifique restreint à* S^+, *la plus grande minorante de* V *harmonique dans* ω [20].

[20] Cette caractérisation de la fonction V'_ω est due à M. Brelot.

En outre, V_ω *minore spécifiquement tout* ω*-majorant de* V, *et est harmonique dans* $\Omega \cap \complement \bar{\omega}$.

Le corollaire 2 fournit en effet la décomposition :

$$V = V_\omega + V'_\omega \quad \text{dans } \Omega,$$

où V_ω est spécifiquement le plus petit ω-majorant de V, et $V'_\omega \in S^+$. On a bien V'_ω harmonique dans ω; et, si $W \in S^+$, est harmonique dans ω et tel que $V = W + U$, où $U \in S^+$, alors U est un ω-majorant de V, donc : dans Ω, $U = V_\omega +$ une fonction $\in S^+$, ou $V'_\omega = W +$ une fonction $\in S^+$.

Définition. — *La fonction* V_ω *définie par le théorème de partition sera appelée dans toute la suite* « restriction spécifique de V à l'ouvert ω ».

On notera que $V_\emptyset \equiv 0$, et que $V_\omega \equiv 0$ équivaut à V harmonique dans ω.

PREMIÈRES CONSÉQUENCES DU THÉORÈME DE PARTITION

13. Propriétés de prolongement d'une fonction surharmonique dans un ouvert partiel.

Lemme 13. 1. — *Étant donné* v *surharmonique dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *et un ouvert* $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$, *il existe deux potentiels* P *et* P' *dans* Ω, P' *fini continu dans* Ω, *tels que :* $P = v + P'$ *dans* ω'. *Si* v *est fini continu dans* ω, *on peut choisir* P *fini continu dans* Ω.

1) Supposons $v \geqslant 0$ dans ω.

On se ramène au cas où v est fini continu dans $\omega - \bar{\omega}'$, par exemple en formant $(R_v^{\omega'})_\omega$, ce qui ne change pas v dans ω'.

Soit δ et δ' deux ouverts tels que $\bar{\omega}' \subset \delta' \subset \bar{\delta}' \subset \delta \subset \bar{\delta} \subset \omega$; m et M deux nombres tels que $v < M$ sur $\partial\delta'$, et $v > m$ sur $\partial\delta$. On peut appliquer le théorème d'approximation (cf. n° 6) à la fonction $f = \left| \begin{array}{l} M + \varepsilon \text{ sur } \partial\delta' \\ m - \varepsilon \text{ sur } \partial\delta \end{array} \right.$. Il existe une différence de deux potentiels finis continus dans Ω, $P'' - P'$, approchant f à moins de ε sur $\partial\delta' \cup \partial\delta$; donc :

(1) $\quad P'' - P' \geqslant M > v$ sur $\partial\delta'$ $\quad$ et $\quad P'' - P' \leqslant m < v$ sur $\partial\delta$.

Alors

$$P = \begin{cases} v + P' & \text{dans } \delta' \\ \inf(v + P', P'') & \text{dans } \delta - \bar{\delta}' \\ P'' & \text{dans } \Omega \cap \complement \delta \end{cases}$$

est un potentiel dans Ω, grâce aux inégalités (1) et au caractère local de la surharmonicité; de plus, si v est fini continu dans ω, P est fini continu dans Ω.

2) Cas d'une fonction v surharmonique quelconque dans ω. Soit un ouvert ω'', $\bar{\omega}' \subset \omega'' \subset \bar{\omega}'' \subset \omega$, h une fonction harmonique dans ω'', de borne inférieure > 0 dans ω'', λ un nombre > 0 tel que, dans ω'' : $v = -\lambda h + v'$, où v' est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans ω''. De : $h = P - P'$ et $v' = Q - Q'$ dans ω', P, P', Q, $Q' \in \mathcal{P}^+$, P, P' et Q' finis continus dans Ω, on déduit la représentation cherchée.

Théorème 13. 1. [21]. — *Étant donné v surharmonique dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, et un ouvert $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$, il existe deux potentiels* P *et* P' *dans* Ω, P' *fini continu dans* Ω *et harmonique dans* ω', *tels que*

$$P = v + P' \textit{ dans } \omega'.$$

Si v est fini continu dans ω, P *peut être choisi fini continu dans* Ω.

D'après le lemme 13. 1, il existe deux potentiels P_1 et P_2 dans Ω, P_2 fini continu dans Ω, P_1 fini continu dans Ω si v est fini continu dans ω, tels que :

$$(1) \qquad P_1 = v + P_2 \text{ dans } \omega'.$$

Appliquons les résultats du n° 12 : P_1 est un ω'-majorant de P_2; donc (théorème 12. 2) : $P_1 = (P_2)_{\omega'} + P$, où $P \in \mathcal{P}^+$, et est fini continu dans Ω, si v est fini continu dans ω. (1) devient alors : $P = v + (P_2)'_{\omega'}$ dans ω', ce qui est la décomposition cherchée car $P' = (P_2)'_{\omega'}$ est harmonique dans ω', et fini continu dans Ω.

Théorème 13. 2. — *Soit v une fonction surharmonique dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, de support compact* K. *Il existe un potentiel* P

[21] M. Brelot a donné une démonstration toute différente d'un résultat analogue (théorème 14 dans [18]).

unique dans Ω, *de support* K, *tel que* $P - \varphi$ *soit harmonique dans* ω.

1) Existence d'un potentiel P :

Soit un ouvert ω', $K \subset \omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$. Le théorème 13. 1 prouve l'existence de deux potentiels P_1 et P_2 dans Ω, P_2 harmonique dans ω', tels que :

$$P_1 = P_2 + \varphi \text{ dans } \omega'.$$

P_1 est donc harmonique dans $\omega' - K$. Si l'on prend sa restriction « spécifique » à un ouvert ω_1, $K \subset \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega'$, on obtient un potentiel $P = (P_1)_{\omega_1}$, harmonique dans $\Omega \cap \complement K$; et $P - \varphi$, égal à $P_2 - (P_1)'_{\omega_1}$ dans ω', est harmonique dans ω', donc aussi dans ω. Le support de P, *a priori* $\subset K$, est exactement K.

2) Unicité de P.

Supposons que deux potentiels P et P' répondent à la question. La différence $P - P'$ est une fonction h, harmonique dans Ω ; et les inégalités $h \leqslant P$, et $-h \leqslant P'$ dans Ω, entraînent $h \equiv 0$.

Application.

Proposition 13. 1. — *Pour qu'un compact* $K \subset \Omega$ *soit polaire, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert* $\omega \supset K$, $\bar{\omega} \subset \Omega$, *tel que* ∂K *soit de mesure harmonique nulle pour* $\omega - K$.

Démonstration de la condition suffisante :

K est contenu dans la réunion d'un nombre fini de composantes connexes de ω, soit ω_i.

Par hypothèse, ∂K est de mesure harmonique nulle pour $\omega - K$, donc il existe une fonction hyperharmonique $\varphi \geqslant 0$ dans $\omega - K$, finie en un point de chaque $\omega_i \cap \complement K$, et telle que $\lim\limits_{\substack{x \in \omega - K \\ x \to y}} \varphi(x) = +\infty$, pour tout $y \in \partial K$.

La fonction $\varphi' = \begin{cases} \varphi \text{ dans } \left(\bigcup\limits_i \omega_i\right)\text{-}K \\ +\infty \text{ sur } K \end{cases}$, est surharmonique dans $\bigcup\limits_i \omega_i$ (propriété 1; n° 2, C), et, si ω' est un ouvert tel que $K \subset \omega' \subset \bar{\omega}' \subset \bigcup\limits_i \omega_i$, il existe un potentiel P dans Ω, valant $+\infty$ sur K (théorème 13. 1); par suite, K est polaire.

14. Une propriété des ensembles effilés.

THÉORÈME 14. 1. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$, *effilé au point* $x_0 \in \overline{E} - E$. *Si* x_0 *est polaire, il existe une fonction* $V \in S^+$, *finie au point* x_0, *et telle que* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} V(x) = +\infty$.

Si x_0 *est non polaire, la propriété subsiste à condition de supposer que tous les potentiels localement bornés dans* Ω, *de support* x_0, *sont continus au point* x_0 [22].

Par hypothèse, il existe une fonction $v \in S^+$, telle que

$$\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} v(x) > v(x_0). \tag{1}$$

On peut imposer à une telle fonction v les deux conditions suivantes :

a) v est un potentiel localement borné dans Ω : on remplace au besoin v par $\inf(v, v_0)$, où v_0 est un potentiel > 0, fini continu dans Ω, et $> v$ au point x_0.

b) Les minorantes spécifiques de v ne comprennent pas de potentiel de support x_0 : si x_0 est polaire, cela résulte de la condition *a*). Si x_0 est non polaire, le théorème de partition, appliqué à v et à l'ouvert $\Omega - \{x_0\}$, donne $v = v_1 + p$, où p est la plus grande minorante spécifique de v de support x_0; d'après l'hypothèse, p est continu au point x_0, et l'on peut remplacer v par v_1 sans modifier l'inégalité (1).

Soit $\mathcal{O}$ l'ordonné filtrant décroissant des ouverts ω tels que $x_0 \in \omega \subset \Omega$, et $v = v_\omega + v'_\omega$ la décomposition du théorème de partition. Les v'_ω forment un ordonné filtrant croissant, donc $w' = \sup\limits_{\omega \in \mathcal{O}} v'_\omega \in S^+$, et $w = \inf\limits_{\omega \in \mathcal{O}} v_\omega$ est une $\mathcal{S}$ fonction, harmonique dans $\Omega - \{x_0\}$.

On a, dans Ω : $v = w + w'$, donc $v = \hat{w} + w'$ (propriété 2, nº 5, A). Alors $\hat{w}$, potentiel de support x_0 minorant spécifiquement v, est nul; or $w \equiv \hat{w}$, donc $\inf\limits_{\omega \in \mathcal{O}} v_\omega = 0$.

Ainsi, on peut trouver une suite d'ouverts $\omega_n \in \mathcal{O}$ tels que

[22] Cette hypothèse est satisfaite si l'on suppose l'axiome D. M. BRELOT a obtenu aussi ce résultat à l'occasion d'une étude axiomatique de l'effilement [20].

$v_{\omega_n}(x_0) \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$ La fonction $V = \sum_n v_{\omega_n}$ répond à la question, car, pour chaque n :

$$\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} v_{\omega_n}(x) - v_{\omega_n}(x_0) = \liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} v(x) - v(x_0).$$

15. Les mesures associées à une fonction $V \in S^+$.

Supposons Ω à base dénombrable; ce sera nécessaire aux théorèmes 15. 1, 2 et 3.

DÉFINITION DE LA RESTRICTION SPÉCIFIQUE DE $V \in S^+$ A UN OUVERT $\omega \subset \overline{\Omega}$.

Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, on a défini la restriction spécifique V_ω de V à l'ouvert ω (théorème de partition, 12. 2) : V_ω est spécifiquement le plus petit ω-majorant de V. Par suite :

LEMME 15. 1. — *Soit* $V \in S^+$, $V = P + h$ *où* $P \in P^+$ *et* $h \in H^+$. *Pour tout ouvert* $\omega \subset \Omega$:

$$V_\omega = P_\omega \qquad \textit{et} \qquad V'_\omega = P'_\omega + h.$$

Conséquence du lemme 15. 1 : $V_\Omega = P$ et $V'_\Omega = h$.

Il est alors naturel de considérer h comme la « restriction spécifique de V au point $\mathfrak{A}$ », et de donner la définition suivante de la restriction spécifique de V à un ouvert $\omega \subset \overline{\Omega}$, $\omega \ni \mathfrak{A}$:

Soit $V = P + h$ où $P \in P^+$ et $h \in H^+$; on appelle restriction spécifique de V à l'ouvert $\omega \subset \overline{\Omega}$, $\omega \ni \mathfrak{A}$, la fonction

$$V_\omega = V_{\omega - \mathfrak{A}} + h = P_{\omega - \mathfrak{A}} + h.$$

Si l'on pose $V'_\omega = P'_{\omega - \mathfrak{A}}$, on a encore la décomposition $V = V_\omega + V'_\omega$.

ÉTUDE DE LA RELATION ENTRE L'OUVERT $\omega \subset \overline{\Omega}$ ET LA RESTRICTION SPÉCIFIQUE V_ω CORRESPONDANTE.

LEMME 15. 2. — *Soit* $V \in S^+$, ω_1 *et* ω_2 *deux ouverts*, $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \overline{\Omega}$. *Alors :* $V_{\omega_2} - V_{\omega_1} = V'_{\omega_1} - V'_{\omega_2}$ *est une fonction* $\in S^+$, *harmonique dans* $\Omega \cap \complement\,(\overline{\omega_2 - \omega_1})$.

On se ramène aisément au cas où ω_1 et ω_2 sont deux ouverts $\subset \Omega$.

Appliquons le théorème de partition à V et aux ouverts ω_1 et ω_2 : V'_{ω_2} est harmonique dans ω_1, donc

$$V'_{\omega_1} - V'_{\omega_2} = U \in S^+;$$

U est harmonique dans ω_1 et, égal à $V_{\omega_2} - V_{\omega_1}$, est harmonique dans $\Omega \cap \complement \bar{\omega}_2$.

Si $\bar{\omega}_1 \subset \omega_2$, le lemme est démontré. Sinon, il suffit de montrer que chaque point $\in \Omega \cap \partial\omega_2$, non adhérent à $\omega_2 - \omega_1$, possède un voisinage $\omega \subset \Omega$ où U est harmonique. Prenons $\bar{\omega}$ disjoint à $\omega_2 - \omega_1$, et appliquons le théorème de partition à U et à ω : $U = U_\omega + U'_\omega$ (1) dans Ω. U_ω est harmonique dans ω_2; d'autre part, $V'_{\omega_2} + U_\omega$ est une minorante spécifique de V, car, dans Ω : $V = (V'_{\omega_2} + U_\omega) + (V_{\omega_2} - U_\omega)$ et, d'après (1) :

$$V_{\omega_2} - U_\omega = V_{\omega_1} + U'_\omega \quad \in S^+.$$

Donc $U_\omega \equiv 0$, et U est harmonique dans ω.

LEMME 15. 3. — *Soit* $V \in S^+$, ω_1 *et* ω_2 *deux ouverts quelconques* $\subset \overline{\Omega}$. *Alors :* $V_{\omega_1 \cup \omega_2} + V_{\omega_1 \cap \omega_2} = V_{\omega_1} + V_{\omega_2}$, *ou*

$$V'_{\omega_1 \cup \omega_2} + V'_{\omega_1 \cap \omega_2} = V'_{\omega_1} + V'_{\omega_2}.$$

Il suffit de considérer le cas où ω_1 et ω_2 sont deux ouverts $\subset \Omega$.

1) Posons $U = V'_{\omega_1 \cup \omega_2} + V'_{\omega_1 \cap \omega_2} - V'_{\omega_1}$.

Grâce au lemme 15. 2 :

$$U = V'_{\omega_1 \cup \omega_2} + (V'_{\omega_1 \cap \omega_2} - V'_{\omega_1}) \in S^+; \quad V'_{\omega_1 \cap \omega_2} - V'_{\omega_1}$$

est harmonique dans ω_2, donc U est aussi harmonique dans ω_2; et U minore spécifiquement V, car :

$$V - U = (V_{\omega_1 \cup \omega_2} - V_{\omega_1}) + V_{\omega_1 \cap \omega_2} \in S^+.$$

D'où : $U \leqslant V'_{\omega_2}$, et même $V'_{\omega_2} - U \in S^+$.

2) D'autre part,

$$U' = V'_{\omega_1} + V'_{\omega_2} - V'_{\omega_1 \cap \omega_2} = (V'_{\omega_2} - U) + V'_{\omega_1 \cup \omega_2} \in S^+,$$

est harmonique dans ω_2, donc aussi dans ω_1, et

$$V - U' = V_{\omega_1} + V_{\omega_2} - V_{\omega_1 \cap \omega_2} \in S^+.$$

D'où : $U' \leqslant V'_{\omega_1 \cup \omega_2}$, et l'égalité cherchée.

Lemme 15. 4. — *Soit* $V \in S^+$, *et* ω *un ouvert* $\subset \overline{\Omega}$, *réunion d'une suite croissante d'ouverts* $\omega_n \subset \overline{\Omega}$. *Alors:* $V_\omega = \lim\limits_n V_{\omega_n}$.

Comme dans les deux lemmes précédents, il suffit d'envisager le cas où $\omega \subset \Omega$.

La suite V_{ω_n} est croissante et majorée par V_ω; donc

$$U = \lim_n V_{\omega_n} \in S^+, \qquad \text{et} \qquad U \leqslant V_\omega.$$

D'autre part, la suite V'_{ω_n} est décroissante, et les V'_{ω_n} sont harmoniques dans tout ouvert d'adhérence $\subset \omega$, pour n assez grand; donc, dans ω, $\lim\limits_n V'_{\omega_n}$ est harmonique. Alors, U, égal à V + une fonction harmonique dans ω, est un ω-majorant de V, et, d'après le théorème de partition : $U \geqslant V_\omega$.

Définition de mesures associées a une fonction $V \in S^+$.

Sur un espace localement compact E, on peut définir une mesure de Radon de la façon suivante (Bourbaki, Intégration, chapitre IV, § 4, n° 10) :

Soit $\alpha(\varpi)$ une fonction, à valeur $\in [0, +\infty[$, définie sur la famille π des ouverts $\varpi \subset \overline{\varpi} \subset E$; pour qu'il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur E, caractérisée par $\mu(\varpi) = \alpha(\varpi)$ pour tous les ouverts $\varpi \in \pi$, il faut et il suffit que la fonction α vérifie les trois conditions :

1) si ϖ_1 et $\varpi_2 \in \pi$ et $\varpi_1 \subset \varpi_2$, alors : $\alpha(\varpi_1) \leqslant \alpha(\varpi_2)$;

2) si ϖ_1 et $\varpi_2 \in \pi$: $\alpha(\varpi_1 \cup \varpi_2) \leqslant \alpha(\varpi_1) + \alpha(\varpi_2)$,
et, si $\varpi_1 \cap \varpi_2 = \emptyset$: $\alpha(\varpi_1 \cup \varpi_2) = \alpha(\varpi_1) + \alpha(\varpi_2)$;

3) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varpi_1 \in \pi$, il existe un compact $K \subset \varpi_1$, tel que : $\varpi \in \pi$ et $K \subset \varpi \subset \varpi_1$ entraînent

$$\alpha(\varpi_1) - \alpha(\varpi) \leqslant \varepsilon.$$

1° *Définition de la mesure* $\mu^{\omega, x}$ *sur* $\overline{\Omega}$, associée à V à l'aide d'un couple (ω, x).

Dans la suite, on désigne par « couple (ω, x) », l'ensemble d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et d'un point $x \in \omega$.

Théorème 15. 1. — *Soit* $V \in S^+$. *Pour tout couple* (ω, x), *on peut associer à* V *une mesure de Radon* $\mu^{\omega, x} \geqslant 0$ *sur* $\overline{\Omega}$, *caractérisée par la condition* $\mu^{\omega, x}(\varpi) = \int V_\varpi \, d\rho_x^\omega$ *pour tout ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$.

On applique le critère ci-dessus à l'espace $\overline{\Omega}$ et à la fonction

$\alpha(\varpi) = \int V_\varpi \, d\rho_x^\omega$, définie sur la famille de tous les ouverts $\varpi \subset \overline{\Omega}$: les conditions 1, 2, 3 sont vérifiées, pour tous les ouverts $\varpi \subset \overline{\Omega}$, grâce aux lemmes 15. 2, 15. 3 et 15. 4.

2° *Définition de la mesure* μ^x *sur* $\overline{\Omega}$, associée à V à l'aide d'un point $x \in \Omega$ tel que $V(x) < +\infty$.

Théorème 15. 2. — *Soit* $V \in S^+$. *Pour tout point* $x \in \Omega$ *tel que* $V(x) < +\infty$, *on peut associer à* V *une mesure de Radon* $\mu^x \geqslant 0$ *sur* $\overline{\Omega}$, *caractérisée par la condition* $\mu^x(\varpi) = V_\varpi(x)$ *pour tout ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$.

La démonstration est identique à celle du théorème 15. 1.

3° *Définition de la mesure* μ'^x *sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$, associée à V à l'aide d'un point *quelconque* $x \in \Omega$.

Théorème 15. 3. — *Soit* $V \in S^+$. *Pour tout point* $x \in \Omega$, *on peut associer à* V *une mesure de Radon* $\mu'^x \geqslant 0$ *sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$, *caractérisée par la condition* $\mu'^x(\varpi) = V_\varpi(x)$ *pour tout ouvert* $\varpi \subset \overline{\varpi} \subset \overline{\Omega} - \{x\}$. *Si* $V(x) < +\infty$, μ'^x *est la restriction de* μ^x *à* $\overline{\Omega} - \{x\}$.

Même démonstration que pour les deux théorèmes précédents; la condition $\alpha(\varpi) = V_\varpi(x) \in [0, +\infty[$ est réalisée pour les ouverts $\varpi \subset \overline{\varpi} \subset \overline{\Omega} - \{x\}$, les lemmes 15. 2, 15. 3, 15. 4 sont appliqués à ces ouverts, et le critère ci-dessus à l'espace $\overline{\Omega} - \{x\}$.

Propriétés immédiates des mesures $\mu^{\omega, x}$, μ^x et μ'^x [22].

1) $\int d\mu^{\omega, x} = \int V \, d\rho_x^\omega$ [23]; $\int d\mu^x = V(x)$ et $\int d\mu'^x = V_{\overline{\Omega} - \{x\}}(x)$ si ces quantités sont finies.

$\mu^{\omega, x}(\mathfrak{a}) = \int h \, d\rho_x^\omega$ et $\mu^x(\mathfrak{a}) = \mu'^x(\mathfrak{a}) = h(x)$, où h désigne la partie harmonique de V.

2) Pour que $V \in P^+$, il faut (resp. : il suffit) que toutes ses mesures associées sur $\overline{\Omega}$ (resp. : l'une d'elles) soient des mesures de masse finie sur Ω; il faut (resp. : il suffit) que, pour tout (resp. : un) point $x \in \Omega$, μ'^x soit une mesure sur Ω-$\{x\}$.

3) Pour que V soit harmonique dans l'ouvert $\varpi \subset \Omega$, il faut

[22] Ces notations abrégées seront employées lorsqu'il s'agira d'une seule fonction $V \in S^+$; sinon, on précisera $\mu_V^{\omega, x}$, μ_V^x, $\mu_V'^x$.

[23] Par suite, la fonction V est parfaitement déterminée par la famille des mesures $\mu_V^{\omega, x}$.

(resp. : il suffit) que toutes ses mesures associées sur $\overline{\Omega}$ (resp. : l'une d'elles) ne chargent pas ϖ.

4) Pour tout couple (ω, x) et tout ouvert ω' tel que

$$x \in \omega' \subset \omega :$$

$\mu^{\omega', x} \geqslant \mu^{\omega, x}$ (théorème de comparaison, n° 4, A).

5) $\mu^{\omega, x}$ et μ'^{x} ont la même restriction à $\overline{\Omega} - \overline{\omega}$.

AUTRES PROPRIÉTÉS DES MESURES $\mu^{\omega, x}$, μ^{x} ET μ'^{x}.

LEMME 15. 5. — *Soit une famille $\mathcal{F}$ de fonctions* $V \in S^+$ *formant un ordonné filtrant décroissant pour l'ordre naturel. Si, pour un couple* (ω_0, x_0), $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} \int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$, *alors, pour tout couple* (ω, x), $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} \int V \, d\rho_x^{\omega} = 0$.

On peut extraire de la famille $\mathcal{F}$ une suite décroissante V_n telle que $\lim\limits_n \int V_n \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$; d'où $\int \left(\lim\limits_n V_n\right) d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ et $\widehat{\lim\limits_n V_n} = 0$ dans Ω. Alors $\int \left(\lim\limits_n V_n\right) d\rho_x^{\omega}$, $\leqslant \widehat{\lim\limits_n V_n}(x)$, est nul, et $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} \int V \, d\rho_x^{\omega} = 0$.

COROLLAIRE. — *Etant donné* $V \in S^+$, *les ensembles* $\mu^{\omega, x}$-*négligeables sont indépendants du couple* (ω, x); *par suite,* $\mu^{\omega, x}$ *s'exprime par une densité relativement à* μ^{ω_0, x_0} [24].

PROPOSITION 15. 1. — *Etant donné une fonction* $V \in S^+$ *et un couple* (ω_0, x_0) :

1) *pour tout point* $x \in \Omega$, *la mesure* μ'^{x} *s'exprime par une densité relativement à la restriction de* μ^{ω_0, x_0} *à* $\overline{\Omega} - \{x\}$;

2) *pour tout point* $x \in \Omega$ *tel que* $V(x) < +\infty$, *la mesure* μ^{x} *s'exprime par une densité relativement à* μ^{ω_0, x_0}.

1) Il suffit de montrer que tout ensemble $E \subset \overline{E} \subset \overline{\Omega} - \{x\}$, μ^{ω_0, x_0}-négligeable, est aussi μ'^{x}-négligeable.

Soit ϖ_0 un ouvert tel que $E \subset \varpi_0 \subset \overline{\varpi}_0 \subset \overline{\Omega} - \{x\}$; $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un ouvert $\omega \ni x$ pour lequel

$$V_{\varpi_0}(x) \leqslant \varepsilon + \int V_{\varpi_0} \, d\rho_x^{\omega}.$$

[24] En outre, si l'on suppose l'axiome 3′ au lieu de 3, cette densité est comprise entre deux nombres > 0 (cf. n° 2, C, propriété 7).

Comme, pour chaque ouvert $\varpi \subset \varpi_0$, on a (lemme 15. 2) $V_{\varpi_0} = V_\varpi +$ une fonction $\in S^+$, on en déduit :

$$V_\varpi(x) \leqslant \varepsilon + \int V_\varpi \, d\rho_x^\omega, \qquad \text{soit} \qquad \mu'^x(\varpi) \leqslant \varepsilon + \int V_\varpi \, d\rho_x^\omega;$$

d'où $\inf\limits_{E \subset \varpi \subset \overline{\varpi} \subset \overline{\Omega} - \{x\}} \mu'^x(\varpi) \leqslant \varepsilon$ (cf. corollaire ci-dessus).

2) Démonstration analogue; l'introduction de ϖ_0 est inutile, et V_{ϖ_0} est remplacé par V.

Proposition 15. 2. — *Soit* U *et* V *deux fonctions* $\in S^+$, *a et b deux nombres* > 0, *et* $W = aU + bV$. *Alors, pour chaque ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$:

$$(1) \qquad W_\varpi = aU_\varpi + bV_\varpi;$$

par suite :

$$\mu_W^{\omega, x} = a\mu_U^{\omega, x} + b\mu_V^{\omega, x},$$
$$\mu_W^x = a\mu_U^x + b\mu_V^x \qquad si \qquad W(x) < +\infty,$$
$$\mu_W'^x = a\mu_U'^x + b\mu_V'^x.$$

Il suffit de démontrer (1) pour un ouvert $\varpi \subset \Omega$.

$aU_\varpi + bV_\varpi$ est un ϖ-majorant de W. D'autre part, si W′, $\in S^+$, est un ϖ-majorant de W, c'est d'abord un ϖ-majorant de aU, donc $W' = aU_\varpi + V'$, $V' \in S^+$; puis W′ est un ϖ-majorant de $aU_\varpi + bV$, donc V′ est un ϖ-majorant de bV; d'où $V' \geqslant bV_\varpi$, et $W' \geqslant aU_\varpi + bV_\varpi$.

Corollaire. — *Soit, dans* S^+, *une suite* V_n *spécifiquement croissante et de limite* $V \in S^+$. *Alors, pour chaque ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$:

$$(1) \qquad V_\varpi = \lim_n (V_n)_\varpi;$$

par suite :

$$\mu_V^{\omega, x} = \lim_n \mu_{V_n}^{\omega, x},$$
$$\mu_V^x = \lim_n \mu_{V_n}^x \qquad si \qquad V(x) < +\infty,$$
$$\mu_V'^x = \lim_n \mu_{V_n}'^x.$$

D'après la proposition 15. 2, la suite $(V_n)_\varpi$ est croissante; d'autre part, $V = V_n + W_n$, où $W_n \in S^+$, donc

$$V_\varpi = (V_n)_\varpi + (W_n)_\varpi \qquad \text{et} \qquad \lim_n (W_n)_\varpi, \quad \leqslant \lim_n W_n,$$

est nul quasi-partout.

Les relations entre mesures résultent de (1), du fait que ces mesures forment des suites croissantes.

PROPOSITION 15. 3. — *Soit* $V \in S^+$. *Quels que soient les ouverts* ϖ *et* $\varpi' \subset \overline{\Omega}$:

$$(1) \qquad (V_\varpi)_{\varpi'} = V_{\varpi \cap \varpi'} = (V_{\varpi'})_\varpi;$$

par suite, les mesures, sur $\overline{\Omega}$ *et* $\overline{\Omega} - \{x\}$, *associées à* V_ϖ, *sont les restrictions à* ϖ *des mesures correspondantes associées à* V.

Il suffit de démontrer (1) pour deux ouverts ϖ et $\varpi' \subset \Omega$.

$(V_\varpi)_{\varpi'}$, égal à $V - V'_\varpi - (V_\varpi)'_{\varpi'}$, diffère de V d'une fonction harmonique dans $\varpi \cap \varpi'$; donc $(V_\varpi)_{\varpi'} \geqslant V_{\varpi \cap \varpi'}$.

D'autre part (lemme 15. 2), $V_{\varpi \cap \varpi'}$ diffère de V_ϖ d'une fonction harmonique dans $\Omega \cap \complement\, (\overline{\varpi - \varpi \cap \varpi'})$, en particulier dans ϖ'; donc $V_{\varpi \cap \varpi'} \geqslant (V_\varpi)_{\varpi'}$.

COROLLAIRE. — *Si* V *est localement borné, ses mesures associées ne chargent pas les ensembles polaires.*

Soit K un compact polaire $\subset \Omega$, et $\varpi = \overline{\Omega} - K$. Les mesures associées à V_ϖ ne chargent pas K. D'autre part, V'_ϖ, potentiel localement borné et harmonique dans $\Omega - K$, est $\equiv 0$.

CHAPITRE III

LES POTENTIELS A SUPPORT PONCTUEL 1re REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS $\in S^+$ A L'AIDE DE CES POTENTIELS

Hypothèses de ce chapitre :
les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3′ ;
il existe un potentiel > 0 dans Ω;
Ω admet une base dénombrable des ouverts.

16. Les potentiels à support ponctuel.

Construction de potentiels dans Ω, de support ponctuel donné, et d'une fonction harmonique > 0 dans Ω.

Théorème 16. 1. — 1) *Étant donné un point $y \in \Omega$, il existe au moins un potentiel dans Ω, de support $\{y\}$.*

2) *Il existe au moins une fonction harmonique > 0 dans Ω.*

La construction étant la même dans les deux cas, désignons par Y un point quelconque de $\overline{\Omega}$. Soit $\mathfrak{V}_n$ un système fondamental de voisinages décroissants de Y; x_0 un point $\in \Omega$, n'appartenant pas à $\overline{\mathfrak{V}}_1$; et P un potentiel > 0 dans Ω.

Pour chaque n, $P_n(x) = \dfrac{\hat{R}_P^{\mathfrak{V}_n}(x)}{\hat{R}_P^{\mathfrak{V}_n}(x_0)}$ est un potentiel dans Ω, harmonique dans $\Omega \cap \complement \overline{\mathfrak{V}}_n$, égal à 1 au point x_0.

Grâce à l'axiome 3′ : les fonctions P_n, pour $n \geqslant n_0$, sont comprises entre deux nombres > 0 indépendants de n, en tout point de chaque composante connexe de $\Omega \cap \complement \overline{\mathfrak{V}}_{n_0}$ (nº 2, C; propriété 7); elles sont donc également continues dans chacune de ces composantes connexes, et on peut en extraire une suite partielle, uniformément convergente sur tout compact $\subset \Omega \cap \complement \overline{\mathcal{V}}_{n_0}$.

Par suite, à l'aide du procédé diagonal, on peut extraire de la suite des entiers n, une suite partielle n', telle que $P_{n'}$ converge uniformément sur tout compact $\subset \Omega \cap \complement \{Y\}$, vers une fonction h, harmonique > 0 dans $\Omega \cap \complement \{Y\}$.

Si $Y = \alpha$, h est harmonique > 0 dans Ω.

Si $Y \in \Omega$, $\widehat{\liminf_{n' \to +\infty} P_{n'}}$ est un potentiel dans Ω, de support $\{Y\}$, car $\liminf_{n'} P_{n'}$ est une $\mathcal{S}$ fonction et la régularisée un potentiel (lemme 3. 2).

Remarquons que, si $Y \in \Omega$ est non polaire, on obtient plus simplement, et sans recourir à l'axiome 3', un potentiel de support $\{Y\}$ en formant $\hat{R}_V^{\{Y\}}$, pour $V \in S^+$.

Les potentiels extrémaux.

Les génératrices extrémales du cône convexe S^+ ne peuvent contenir que des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans Ω, et des potentiels dans Ω, appelés potentiels extrémaux dans Ω.

THÉORÈME 16. 2 (avec les seuls axiomes 1, 2, 3). — *Tout potentiel extrémal > 0 dans Ω a un support ponctuel.*

En effet, si le support d'un potentiel extrémal P dans Ω contenait deux points distincts y_1 et y_2, le théorème de partition, appliqué à P et à un ouvert $\omega \subset \Omega$, tel que $y_1 \in \omega$ et $y_2 \notin \bar{\omega}$, donnerait

$$P = P_\omega + P'_\omega \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

où P_ω et P'_ω seraient deux potentiels > 0 dans Ω, non proportionnels; d'où la contradiction.

THÉORÈME 16. 3. — *Tout point $y \in \Omega$ est support d'au moins un potentiel extrémal dans Ω.*

En effet, les potentiels de support $\{y\}$, normalisés (i. e. égaux à 1) en un point $x_0 \neq y$, forment un ensemble convexe, et compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact $\subset \Omega\text{-}\{y\}$ (car, si P_n est une suite de tels potentiels, une suite extraite $P_{n'}$ converge dans $\Omega\text{-}\{y\}$ vers $\widehat{\liminf_{n'} P_{n'}}$).

Comparaison des potentiels extrémaux dans Ω et dans un ouvert partiel $\omega \subset \Omega$.

Les théorèmes 16. 1, 16. 2, 16. 3 sont valables dans un ouvert $\omega \subset \Omega$. Pour tout $x \in \omega$, comparons les potentiels extrémaux dans Ω et dans ω, de support $\{x\}$.

THÉORÈME 16. 4. — *Soit un ouvert $\omega \subset \Omega$, et un point $x_0 \in \omega$.*

1) *A tout potentiel* P *dans Ω, de support $\{x_0\}$, correspond un potentiel unique, p, dans ω, de support $\{x_0\}$, tel que $P = p +$ une fonction harmonique dans ω, et c'est $p = P - R_P^{\complement\omega}$ dans ω.*

2) *Réciproquement, à tout potentiel p dans ω, de support $\{x_0\}$, correspond un potentiel unique,* P, *dans Ω, de support $\{x_0\}$, tel que $p = P +$ une fonction harmonique dans ω.*

Par suite, si l'un des potentiels est extrémal, l'autre l'est aussi.

1) Le potentiel p s'obtient en formant $P - h$, où h est la plus grande minorante harmonique de P dans ω.

$h = R_P^{\complement\omega}$ dans ω : en effet, pour toute $V \in S^+$, $\geqslant P$ sur $\Omega \cap \complement\omega$, on a $\liminf\limits_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} [V(x) - h(x)] \geqslant 0$ quel que soit $y \in \partial\omega \cap \Omega$, et $V - h \geqslant -P$ dans ω; donc, d'après le principe du minimum (n° 3, propriété 3) $V \geqslant h$ dans ω, et $R_P^{\complement\omega} \geqslant h$ dans ω.

2) La réciproque résulte du théorème 13. 2.

Enfin, si deux potentiels P_1 et P_2, de support $\{x_0\}$, sont proportionnels dans Ω, les potentiels correspondants p_1 et p_2 le sont aussi dans ω, et réciproquement.

L'unicité, ou la muliplicité, des potentiels normalisés de support ponctuel donné, a donc un caractère local.

Une condition suffisante d'unicité des potentiels normalisés de support ponctuel donné.

LEMME 16. 1. — *Supposant qu'il existe deux potentiels* P *et* Q *dans Ω, de support $\{y\}$, non proportionnels, soit*

$$A_\lambda = \{x \in \Omega - \{y\} \mid P(x) < \lambda Q(x)\},$$
$$B_\lambda = \{x \in \Omega - \{y\} \mid P(x) > \lambda Q(x)\}.$$

On peut trouver un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que ni A_{λ_0} ni B_{λ_0} ne soit vide; alors, pour λ assez voisin de λ_0, ni A_λ ni B_λ n'est vide.

Si y est polaire, $\Omega - \{y\}$ est connexe, donc il suffit de choisir λ_0 tel que $P(x_0) - \lambda_0 Q(x_0) = 0$ pour un point $x_0 \neq y$.

Si y est non polaire, on choisit un point x_n dans chaque composante connexe de $\Omega - \{y\}$, une suite de nombres $\alpha_n > 0$ tels que les séries $\sum_n \alpha_n P(x_n)$ et $\sum_n \alpha_n Q(x_n)$ convergent, et λ_0 satisfaisant à $\sum_n \alpha_n P(x_n) - \lambda_0 \sum_n \alpha_n Q(x_n) = 0$.

THÉORÈME 16. 5. — *Supposons l'axiome supplémentaire suivant (vérifié en théorie classique du potentiel) :*

Quel que soit l'ouvert régulier ω, *pour tout potentiel* P *dans* Ω, *harmonique dans* ω, $R_P^{\complement\omega} = P$.

ou, ce qui est équivalent :

Tout ouvert régulier est c. d.

Alors, quel que soit $y \in \Omega$, *les potentiels dans* Ω, *de support* $\{y\}$, *sont proportionnels.*

Supposons qu'il existe deux potentiels P et Q dans Ω, de support $\{y\}$, non proportionnels.

Appliquons le lemme 16. 1 : il existe deux nombres distincts, λ et λ', tels qu'aucun des ensembles

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \Omega - \{y\} \mid P(x) < \lambda Q(x)\}, \\ B &= \{x \in \Omega - \{y\} \mid P(x) > \lambda Q(x)\}, \\ A' &= \{x \in \Omega - \{y\} \mid P(x) < \lambda' Q(x)\}, \\ B' &= \{x \in \Omega - \{y\} \mid P(x) > \lambda' Q(x)\} \end{aligned}$$

ne soit vide.

$\Omega - \{y\}$ est la réunion de ces quatre ensembles; donc l'un au moins, A par exemple, n'est pas effilé au point y. Alors, pour tout ouvert régulier $\omega \ni y$, $\omega' = \omega \cap B$ est un ouvert régulier, ou l'ensemble vide; en effet, à tout point $\in \partial\omega'$, distinct de y, est associée une fonction de Bouligand pour ω', et le point y est régulier, car $\complement\,\bar{\omega}'$ contient A non effilé au point y (cf. n° 5, D; propriété 2).

D'après l'hypothèse : $R_P^{\complement\omega \cup \complement B} = P$ dans Ω (1).

En vertu de la proposition 7. 1, les ouverts réguliers $\omega \ni y$ forment un ordonné filtrant croissant, dont la réunion est Ω. Si x est un point $\in \Omega$, distinct de y, et ε un nombre > 0, on peut choisir ω régulier, contenant x et y, tel que : $R_P^{\complement\omega}(x) \leqslant \varepsilon$;

alors : $R_P^{\complement\omega \cup \complement B}(x) - R_P^{\complement B}(x) \leqslant \varepsilon$ (propriété 5; n° 5, B). On en déduit, grâce à (1) : $R_P^{\complement B} = P$ dans Ω (2).

Sur $\Omega \cap \complement B$, sauf peut-être au point y : $P \leqslant \lambda Q$; et au point y, la relation : $P(x) < \lambda Q(x)$ pour $x \in A$, non effilé au point y, entraîne : $P(y) \leqslant \lambda Q(y)$. D'où : $P \leqslant \lambda Q$ sur $\Omega \cap \complement B$, et $R_P^{\complement B} \leqslant \lambda Q$ dans Ω, ce qui est en contradiction avec (2) et le choix de λ.

17. Représentation intégrale d'une fonction $V \in S^+$, à l'aide d'une mesure sur $\overline{\Omega}$ et d'un noyau dépendant de V.

Nous avons vu au n° 15 que, étant donné une fonction $V \in S^+$ et un couple (ω_0, x_0), chacune des mesures $\mu^{\omega, x}$, μ^x (si $V(x) < +\infty$), μ'^x (sur $\overline{\Omega} - \{x\}$) associées à V, s'exprime par une densité relativement à la mesure μ^{ω_0, x_0} ou à sa restriction à $\overline{\Omega}$-$\{x\}$.

Dans ce n°, nous allons construire ces densités, et du même coup obtenir une représentation intégrale de V.

Résultats préliminaires.

Lemme 17. 1. — *Étant donné, sur $\overline{\Omega}$, une famille dénombrable de mesures $\mu_p > 0$, chacune définie par une densité relativement à une même mesure $\mu > 0$, il existe un ensemble μ-négligeable $E \subset \overline{\Omega}$ et, pour tout point $Y \in \overline{\Omega} - E$, une suite décroissante de compacts $\beta_q^Y \ni Y$ et convergeant vers Y* [25]*, tels que : $\mu(\beta_q^Y) > 0$ et, quel que soit p, $\lim\limits_{q} \dfrac{\mu_p(\beta_q^Y)}{\mu(\beta_q^Y)}$ existe et définit une fonction-densité de μ_p relativement à μ* [26].

Soit δ_p une fonction-densité de μ_p relativement à μ. δ_p étant μ-sommable, on peut, pour chaque entier $n > 0$, déter-

[25] C'est-à-dire contenus dans un voisinage arbitraire de Y pour q assez grand.

[26] On peut aussi utiliser un théorème de différentiation des mesures sur un espace métrisable et séparable [45 et 46]; on obtient alors des ensembles β_q^Y boréliens, définis pour tout $Y \in \overline{\Omega}$, et tels que, pour tout couple de mesures μ, $\nu > 0$, ν définie relativement à μ par une densité, $\lim\limits_{q} \nu(\beta_q^Y)/\mu(\beta_q^Y)$ existe et définit une densité de ν relativement à μ.

miner un compact $K'_n \subset \overline{\Omega}$, tel que $\mu(\overline{\Omega} - K'_n) \leqslant \frac{1}{n}$ et que la restriction de chaque δ_p à K'_n soit définie et continue.

Si K_n est le support de la restriction de μ à K'_n, l'ensemble $E = \overline{\Omega} - \bigcup_n K_n$ est μ-négligeable.

Soit alors $Y \notin E$: $Y \in$ un ensemble K_{n_0}; partant d'une suite décroissante de compacts α_q^Y qui forment un système fondamental de voisinages de Y, on définit une suite décroissante de compacts $\beta_q^Y = \alpha_q^Y \cap K_{n_0}$ convergeant vers Y. β_q^Y est de mesure > 0 pour la restriction de μ à K'_{n_0}, donc, *a fortiori*, de μ-mesure > 0, et

$$\frac{\mu_p(\beta_q^Y)}{\mu(\beta_q^Y)} = \frac{\int_{\beta_q^Y} \delta_p \, d\mu}{\int_{\beta_q^Y} d\mu} \to \delta_p(Y) \quad \text{quand} \quad q \to +\infty.$$

LEMME 17. 2. — *Étant donné une mesure $\mu > 0$ sur Ω et une fonction $G(x, Y)$ possédant les propriétés suivantes :*

(*i*) $G(x, Y)$ *est définie dans $\Omega \times (\overline{\Omega} - E)$, où E est un ensemble μ-négligeable indépendant de x;*

(*ii*) *pour un ensemble dénombrable de points x_p, dense dans Ω, $Y \to G(x_p, Y)$ est μ-sommable;*

(*iii*) *pour chaque $Y \in \overline{\Omega} - E$: $x \to G(x, Y)$ est un potentiel de support $\{Y\}$ si $Y \in \Omega$, une fonction harmonique > 0 si $Y = \mathfrak{A}$;*

— alors, il existe une suite croissante de compacts $K_n \subset \overline{\Omega}$, tels que : d'une part, $\lim_n \mu(K_n) = \mu(\overline{\Omega})$; d'autre part, pour chaque n, $G(x, Y)$ est fonction s. c. i. de (x, Y) dans $\Omega \times K_n$, et même continue pour $x \neq Y$.

D'après (*ii*), on peut, pour chaque entier $n > 0$, déterminer un compact $K_n \subset \overline{\Omega}$, $K_n \supset K_{n-1}$, tel que $\mu(\overline{\Omega} - K_n) \leqslant \frac{1}{n}$ et que la restriction de chaque fonction $Y \to G(x_p, Y)$ à K_n soit définie et continue.

a) Pour chaque n, $G(x, Y)$ est fonction continue de (x, Y) dans $\Omega \times K_n$, si $x \neq Y$.

Soit (x_1, Y_1) un point $\in \Omega \times K_n$, $x_1 \neq Y_1$; δ un voisinage ouvert de x_1, $\delta \subset \Omega$, Δ un voisinage de Y, δ et Δ étant disjoints.

Grâce à l'axiome 3', $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage δ_1 de x_1, $\delta_1 \subset \delta$, tel que :

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ harmonique} > 0 \text{ dans } \delta \\ x \text{ et } x' \in \delta_1 \end{array}\right\} \quad \text{entraînent} \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{u(x)}{u(x')} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Dans δ_1, il y a au moins un point x_p; la restriction de $G(x_p, Y)$ à K_n étant continue, pour un voisinage Δ_1 de Y_1, $\Delta_1 \subset \Delta$:

$$Y \in \Delta_1 \cap K_n \qquad \text{entraîne} \qquad 1-\varepsilon \leqslant \frac{G(x_p, Y)}{G(x_p, Y_1)} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Alors, si $x \in \delta_1$ et $Y \in \Delta_1 \cap K_n$: $\dfrac{G(x, Y)}{G(x_1, Y_1)}$ est compris entre $(1 \pm \varepsilon)^3$.

b) Pour chaque n, $G(x, Y)$ est fonction s. c. i. de (x, Y) dans $\Omega \times K_n$.

Il suffit de montrer qu'étant donné un couple (x_1, x_1), $x_1 \in \Omega \cap K_n$, et un nombre $\lambda < G(x_1, x_1)$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_1, $\mathcal{V} \subset \Omega$, tel que $x \in \mathcal{V}$ et $Y \in \mathcal{V} \cap K_n$ entraînent $G(x, Y) > \lambda$.

Soit un ouvert ω, $x_1 \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, assez petit pour que $\lambda < \int G(., x_1)\, d\rho_{x_1}^{\omega}$. Posons $2\varepsilon = \int G(., x_1)\, d\rho_{x_1}^{\omega} - \lambda$.

La continuité de $G(x, Y)$, établie dans l'alinéa *a*), permet de déterminer un voisinage Δ de x_1, $\bar{\Delta} \subset \omega$, tel que :

$$\xi \in \partial\omega \text{ et } Y \in \Delta \cap K_n \quad \text{entraînent} \quad |G(\xi, Y) - G(\xi, x_1)| < \frac{\varepsilon}{\int d\rho_{x_1}^{\omega}}.$$

Donc, pour $Y \in \Delta \cap K_n$: $\int G(., Y)\, d\rho_{x_1}^{\omega} > \lambda + \varepsilon$.

D'autre part, d'après l'axiome 3', il existe un voisinage δ de x_1, $\delta \subset \omega$, tel que :

$$u \text{ harmonique} > 0 \text{ dans } \omega, \text{ et } x \in \delta \quad \text{entraînent} \quad \frac{u(x)}{u(x_1)} > \frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon}.$$

En particulier, pour $Y \in \Delta \cap K_n$ et $x \in \delta$: $\int G(., Y)\, d\rho_x^{\omega} > \lambda$; et le voisinage cherché est $\mathcal{V} = \Delta \cap \delta$.

Proposition 17. 1. — *Soit une mesure* $\mu > 0$ *sur* $\bar{\Omega}$ *et une fonction* $G(x, Y)$ *possédant les propriétés* (*i*), (*ii*), (*iii*) *du lemme* 17. 2. *Alors :*

1) $V(x) = \int G(x, Y)\, d\mu(Y)$ *est une fonction* $\in S^+$ *et, pour tout couple* (ω, x), $\int V\, d\rho_x^{\omega} = \int \left[\int G(., Y)\, d\rho_x^{\omega}\right] d\mu(Y)$;

2) *pour tout ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$, $V_{\varpi}(x) = \int_{\varpi} G(x, Y)\, d\mu(Y)$.

1) D'après le lemme 17. 2, $Y \to G(x, Y)$ est μ-mesurable, ainsi que $Y \to \int G(., Y)\, d\rho_x^{\omega}$.

Posons $I_{K_n}(x) = \int_{K_n} G(x, Y)\, d\mu(Y)$, où K_n désigne la suite de compacts déterminée par le lemme 17. 2.

I_{K_n} est s. c. i. et, d'après le théorème de Lebesgue-Fubini, pour tout couple (ω, x) :

$$\int I_{K_n}\, d\rho_x^{\omega} = \int_{K_n} \left[\int G(., Y)\, d\rho_x^{\omega}\right] d\mu(Y) \leqslant I_{K_n}(x).$$

On en déduit :

I_{K_n} est hyperharmonique dans Ω, donc aussi $V = \lim\limits_{n} I_{K_n}$; comme $V(x_p) < +\infty$, $V \in S^+$;

I_{K_n}, donc aussi V, est harmonique dans $\Omega \cap \complement S_{\mu}$, où S_{μ} désigne le support compact de μ;

$$\text{quand } n \to +\infty, \int V\, d\rho_x^{\omega} = \int \left[\int G(., Y)\, d\rho_x^{\omega}\right] d\mu(Y).$$

2) Pour tout ensemble borélien $B \subset \overline{\Omega}$, $I_B(x) = \int_B G(x, Y)\, d\mu(Y)$ est une fonction $\in S^+$, harmonique dans $\Omega \cap \complement \overline{B}$, et

$$V = I_B + I_{\overline{\Omega}-B}.$$

Montrons maintenant que, si $\overline{B} \subset \Omega$, $I_B \in P^+$. Soit ω un ouvert tel que $\overline{B} \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, et x_0 un point $\in \partial\omega$. $\dfrac{G(x, Y)}{G(x_0, Y)}$ est compris entre deux nombres > 0 fixes pour $Y \in \overline{B}$ et x donné $\in \partial\omega$ (propriété 7, n° 2, C), donc aussi pour $Y \in \overline{B}$ et x voisin d'un point donné $\in \partial\omega$ (axiome 3′), finalement pour $Y \in \overline{B}$ et $x \in \partial\omega$.

Alors, Y_0 étant fixé $\in \overline{B}$, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que :

$$\frac{G(x, Y)}{G(x_0, Y)} \leqslant \lambda . \frac{G(x, Y_0)}{G(x_0, Y_0)} \quad \text{pour} \quad Y \in \overline{B} \quad \text{et} \quad x \in \partial\omega,$$

donc aussi (lemme 3. 1) pour $Y \in \overline{B}$ et $x \in \Omega \cap \complement \omega$. Par suite :

$$V(x) \leqslant \lambda . \frac{V(x_0)}{G(x_0, Y_0)} G(x, Y_0) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega \cap \complement \omega.$$

Soit un ouvert $\varpi \subset \Omega$; I_ϖ diffère de V d'une fonction harmonique dans ϖ, donc est un ϖ-majorant de V, $I_\varpi \geqslant V_\varpi$.

Pour obtenir $I_\varpi = V_\varpi$, il suffit de prouver qu'un ϖ-majorant quelconque de V, soit V', est $\geqslant I_K$ pour tout compact $K \subset \varpi$. Or, $V' - I_K$ est surharmonique dans $\Omega - K$, et aussi dans ϖ, puisque $V' - V$ est surharmonique dans ϖ. Par suite, $V' - I_K$ est surharmonique dans Ω (propriété 1, n° 2, C), et $\geqslant 0$ puisque $\geqslant - I_K$, où I_K est un potentiel dans Ω (principe du minimum, n° 3).

Ainsi, $V_\varpi = I_\varpi$ pour tout ouvert $\varpi \subset \Omega$; en particulier, la partie potentielle de V, qui vaut V_Ω, est I_Ω, donc la partie harmonique de V est $I_{\mathfrak{A}}$, et la relation $V_\varpi = I_\varpi$ s'étend aux ouverts $\varpi \subset \overline{\Omega}$.

Corollaire. — *Étant donné une mesure* $\mu > 0$ sur $\overline{\Omega}$ *et une fonction* $G(x, Y)$ *possédant les propriétés* (*i*), (*ii*), (*iii*) *du lemme* 17. 2, *soit*

$$V(x) = \int G(x, Y)\, d\mu(Y).$$

1) *Les mesures associées à* V *sont données par :*

$$\begin{aligned} d\mu^{\omega, x}(Y) &= \left[\int G(., Y)\, d\rho_x^\omega\right] d\mu(Y), \\ d\mu^x(Y) &= G(x, Y)\, d\mu(Y) \quad \textit{si} \quad V(x) < +\infty, \\ d\mu'^x(Y) &= G(x, Y)\, d\mu(Y) \quad \textit{pour} \quad Y \in \overline{\Omega} - \{x\}. \end{aligned}$$

2) *Si* μ *est portée par* Ω, $V \in P^+$.

Théorème 17. 1. — *Étant donné une fonction* $V \in S^+$ *et un couple* (ω_0, x_0), V *admet une représentation intégrale unique* (*dans la mesure précisée à la fin de l'énoncé*)

$$V(x) = \int G(x, Y)\, d\mu(Y),$$

où μ *est une mesure* $\geqslant 0$ *sur* $\overline{\Omega}$ *et* $G(x, Y)$ *possède les propriétés suivantes :*

a) $G(x, Y)$ *est défini sur* $\Omega \times (\overline{\Omega} - E)$, *où* E *est un ensemble* μ-*négligeable indépendant de* x;

b) *pour tout point* $x \in \Omega$, $Y \to G(x, Y)$ *est* μ-*mesurable*;

c) *pour tout point* $Y \in \overline{\Omega} - E$, $x \to G(x, Y)$ *est un potentiel de support* Y *si* $Y \in \Omega$, *une fonction harmonique* > 0 *si* $Y = \mathfrak{A}$, *et, dans les deux cas :* $\int G(., Y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$.

μ *est déterminée de façon unique: c'est la mesure associée à* V *à l'aide du couple* (ω_0, x_0). $x \to G(x, Y)$ *est déterminé pour* μ*-presque tout* Y *par la condition: pour tout couple* (ω, x), $\int G(.,Y)\, d\rho_x^\omega$ *est une fonction-densité de* $\mu^{\omega, x}$ *relativement à* μ.

La détermination de μ et de G résulte du corollaire précédent.

Pour montrer l'existence de la représentation intégrale ci-dessus, on prend $\mu = \mu^{\omega_0, x_0}$.

Construction de l'ensemble E*:* Soit $\mathscr{X}$ un ensemble dénombrable de points x_j, denses dans Ω, non chargés par μ, et tels que $V(x_j) < +\infty$. Soit, d'autre part, $\mathscr{B}$ une base dénombrable des ouverts de Ω, formée d'ouverts $\omega_i \subset \bar{\omega}_i \subset \Omega$, dont les frontières sont μ-négligeables (proposition 7. 2).

On applique le lemme 17. 1 aux mesures μ et $\mu_p = \mu^{\omega_i, x_j}$, où $\omega_i \in \mathscr{B}$ et $x_j \in \mathscr{X} \cap \omega_i$: il existe un ensemble μ-négligeable $E \subset \overline{\Omega}$ et, pour tout point $Y \in \overline{\Omega} - E$, une suite décroissante de compacts $\beta_q^Y \ni Y$ et convergeant vers Y, tels que $\mu(\beta_q^Y) > 0$ et

$$\text{(1)} \qquad \lim_q \frac{\mu^{\omega_i, x_j}(\beta_q^Y)}{\mu(\beta_q^Y)}$$

existe et définit une fonction-densité de μ^{ω_i, x_j} relativement à μ, et cela pour chaque couple (ω_i, x_j).

Construction de la fonction G *sur* $\Omega \times (\overline{\Omega} - E)$: Pour $Y \in \overline{\Omega} - E$, posons $\varpi_q^Y = \overline{\Omega} - \beta_q^Y$ et $G_q(x, Y) = \dfrac{1}{\mu(\beta_q^Y)} V'_{\varpi_q^Y}(x)$.

$G_q(., Y)$ est harmonique > 0 dans $\Omega \cap \varpi_q^Y$. Pour tout couple (ω_i, x_j) :

$$\text{(2)} \qquad \int G_q(., Y)\, d\rho_{x_j}^{\omega_i} = \frac{\mu^{\omega_i, x_j}(\beta_q^Y)}{\mu(\beta_q^Y)} ;$$

or, si $\bar{\omega}_i \not\ni Y$, le premier membre vaut $G_q(x_j, Y)$. Alors, d'après (1), la suite $G_q(., Y)$ converge aux points $x_j \neq Y$, donc aussi uniformément sur tout compact $\subset \Omega \cap \complement \{Y\}$, vers une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega \cap \complement \{Y\}$.

On pose, toujours pour $Y \in \overline{\Omega} - E$:

$G(x, Y) = \widehat{\liminf_q G_q}(x, Y)$ (régularisée s. c. i. par rapport à x).

Propriétés de G *:*

1) $x \to G(x, Y)$ est harmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega \cap \complement \{Y\}$, est un potentiel dans Ω si $Y \in \Omega$.

La première assertion résulte de ce qui précède.

Soit $Y \in \Omega$: pour q assez grand, $\varpi_q^Y \ni \mathfrak{a}$; alors $G_q(., Y) \in P^+$, donc aussi $G(., Y)$(lemme 3. 2).

2) $G(x, Y) > 0$.

Étant donné un couple (ω, x), il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que (propriété 7, n° 2, C) :

$$\int V\, d\rho_x^\omega \geqslant \alpha \int V\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \qquad \text{pour toute} \qquad V \in S^+.$$

D'après (2) : $\int G_q(., Y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$, donc $G_q(x, Y) \geqslant \alpha$ et, pour $x \neq Y$, $G(x, Y) \geqslant \alpha$.

3) Pour chaque point $x_j \in \mathcal{X}$, $Y \to G(x_j, Y)$ est μ-sommable.

Tout d'abord, $\int G(., Y)\, d\rho_{xj}^{\omega_i}$ est une fonction-densité de μ^{ω_i, x_j} relativement à μ : en effet, pour $Y \notin \partial\omega_i$, c'est-à-dire pour μ-presque tout Y, $\int G(., Y)\, d\rho_{xj}^{\omega_i} = \lim\limits_q \int G_q(., Y)\, d\rho_{xj}^{\omega_i}$, et cette limite est, d'après (1) et (2), une fonction-densité de μ^{ω_i, x_j} relativement à μ.

Par suite :

$$\int V\, d\rho_{xj}^{\omega_i} = \int \Big[\int G(., Y)\, d\rho_{xj}^{\omega_i}\Big]\, d\mu(Y), \tag{3}$$

donc

$$\int_{\overline{\Omega} - \bar{\omega}_i} G(x_j, Y)\, d\mu(Y) \leqslant \int V\, d\rho_{xj}^{\omega_i} \leqslant V(x_j),$$

et $Y \to G(x_j, Y)$, limite de ses restrictions à $\overline{\Omega} - \bar{\omega}_i$, pour $\omega_i \ni x_j$, est μ-sommable.

4) La formule intégrale.

Les conditions (*i*), (*ii*), (*iii*) du lemme 17. 2 étant réalisées, $Y \to G(x, Y)$ est μ-mesurable quel que soit $x \in \Omega$; d'après la proposition 17. 1, $I(x) = \int G(x, Y)\, d\mu(Y)$ est une fonction $\in S^+$ et, pour tout couple (ω_i, x_j) :

$$\int I\, d\rho_{xj}^{\omega_i} = \int \Big[\int G(., Y)\, d\rho_{xj}^{\omega_i}\Big]\, d\mu(Y).$$

Alors, I et V sont $\mathcal{B}$-équivalentes en vertu de (3), donc identiques.

5) $\int G(., Y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$.

On a déjà vu que $\int G_q(., Y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$, donc $\int G(., Y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant 1$. D'autre part, (proposition 17. 1)

$$\int \left[\int G(., \quad Y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}\right] d\mu(Y) = \int V\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int d\mu,$$

d'où la propriété, en augmentant au besoin l'ensemble E.

18. Étude du cas où, pour tout $y \in \Omega$, les potentiels dans Ω, de support y, sont proportionnels.

Pour simplifier le langage, ce cas sera appelé *cas de l'unicité*.

CONSTRUCTION D'UN POTENTIEL p_y DANS Ω, DE SUPPORT y, TEL QUE $p_y(x)$ SOIT FONCTION CONTINUE DE y POUR $x \neq y$.

LEMME 18. 1. — *Dans le cas de l'unicité, soit q_y le potentiel de support y, tel que, pour un couple (ω_0, x_0) : $\int q_y\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$. Alors, pour chaque $x \in \Omega$, $q_y(x)$ est fonction continue de y dans $\Omega - (\bar{\omega}_0 \cup \{x\})$.*

Soit, dans l'ouvert $\Omega \dot{-} \bar{\omega}_0$, un point y_0 limite d'une suite de points y_n. Supposons que, pour un point $x \in \Omega$, distinct de y_0, il existe une suite partielle n' et un nombre $\alpha > 0$ tels que :

$$|q_{y_0}(x) - q_{y_{n'}}(x)| > \alpha \quad (1).$$

Pour n' assez grand, les potentiels $q_{y_{n'}}$ sont harmoniques dans Ω, hors d'un voisinage fermé arbitraire de y_0, et sont égaux à 1 au point x_0. A l'aide du procédé diagonal, on peut extraire de la suite n' une suite partielle n'', telle que $q_{y_{n''}}$ converge uniformément sur tout compact $\subset \Omega - \{y_0\}$, vers une fonction harmonique dans $\Omega - \{y_0\}$, égale à 1 au point x_0. En vertu du lemme 3. 2, $\widehat{\liminf_{n''} q_{y_{n''}}}$ est un potentiel dans Ω, de support y_0, égal à 1 au point x_0; d'où $q_{y_0} = \widehat{\liminf_{n''} q_{y_{n''}}}$, et $q_{y_0}(x) = \lim_{n''} q_{y_{n''}}(x)$, ce qui est incompatible avec (1).

THÉORÈME 18. 1. — *Dans le cas de l'unicité, on peut choisir, pour chaque point $y \in \Omega$, un potentiel p_y de support y, de manière que, pour x donné $\in \Omega$, $p_y(x)$ soit fonction continue de y dans $\Omega - \{x\}$.*

Soit deux couples (ω_0, x_0) et (ω'_0, x'_0), $\bar\omega_0$ et $\bar\omega'_0$ disjoints; q_y et q'_y les potentiels dans Ω, de support y, tels que

$$\int q_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \int q'_y \, d\rho_{x'_0}^{\omega'_0} = 1.$$

On a $q'_y(x) = q_y(x) . \int q'_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$.

Ayant choisi un ouvert ω_1 tel que $\bar\omega_0 \subset \omega_1 \subset \bar\omega_1 \subset \Omega - \bar\omega'_0$, prenons par exemple

$$p_y(x) = \begin{cases} q'_y(x) & \text{si} \quad y \in \bar\omega_1 \\ q_y(x) . c(y) & \text{si} \quad y \in \Omega - \bar\omega_0, \end{cases}$$

où $c(y)$ est une fonction continue > 0 de y dans $\Omega - \bar\omega_0$, coïncidant avec $\int q'_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ dans $\bar\omega_1 - \bar\omega_0$.

Pour chaque $x \in \Omega$, $p_y(x)$ est, d'après le lemme 18. 1, fonction continue de y dans $\Omega - \{x\}$.

Remarque. — Tous les potentiels satisfaisant à l'énoncé du théorème 18. 1 se déduisent de l'un d'eux par multiplication par une fonction $c_1(y)$ continue et > 0 dans Ω.

PROPOSITION 18. 1. — *Supposons que, pour chaque point $y \in \Omega$, il existe un potentiel p_y de support y, tel que l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue, pour chaque $x \in \Omega$. (Cette hypothèse est réalisée en particulier dans le cas de l'unicité, d'après le théorème* 18. 1.)

Alors l'application $(x, y) \to p_y(x)$, de $\Omega \times \Omega$ dans $\overline{\mathrm{R}}^+$, est s. c. i., et même continue si $x \neq y$; et, pour tout couple (ω, x), la fonction $y \to \int p_y \, d\rho_x^\omega$ est s. c. i. et localement bornée.

1) $p_y(x)$ est fonction continue de (x, y) dans $\Omega \times \Omega$, pour $x \neq y$:

Soit (x_1, y_1) un point $\in \Omega \times \Omega$, $x_1 \neq y_1$, X et Y deux voisinages disjoints, $\subset \Omega$, de x_1 et y_1 respectivement.

Grâce à l'axiome 3', $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage X_1 de x_1, $\mathrm{X}_1 \subset \mathrm{X}$, tel que: $y \in \mathrm{Y}$ et $x \in \mathrm{X}_1$ entraînent

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{p_y(x)}{p_y(x_1)} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

D'autre part, pour un voisinage Y_1 de y_1, $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}$:

$$y \in \mathrm{Y}_1 \text{ entraîne } 1 - \varepsilon \leqslant \frac{p_y(x_1)}{p_{y_1}(x_1)} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Alors, si $x \in X_1$ et $y \in Y_1$:

$$(1-\varepsilon)^2 \leqslant \frac{p_y(x)}{p_{y_1}(x_1)} \leqslant (1+\varepsilon)^2.$$

2) $p_y(x)$ est fonction s. c. i. de (x, y) dans $\Omega \times \Omega$:

La démonstration est identique à celle du lemme 17. 2, alinéa *b*).

3) Pour tout couple (ω, x), $\int p_y \, d\rho_x^\omega$ est fonction s. c. i. de y : c'est une conséquence de 2).

4) $y \to \int p_y \, d\rho_x^\omega$ est une fonction localement bornée dans Ω :

C'est immédiat dans $\Omega - \partial\omega$; et la propriété s'étend à Ω car, si (ω_1, x_1) est un couple tel que $\partial\omega_1 \cap \partial\omega = \emptyset$, il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $y \in \Omega$:

$$\int p_y \, d\rho_x^\omega \leqslant k . \int p_y \, d\rho_{x_1}^{\omega_1} \quad \text{(propriété 7; n}^\text{o}\text{ 2, C).}$$

Corollaire. — *Dans le cas de l'unicité, si q_y est le potentiel de support y, tel que $\int q_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$ pour un couple (ω_0, x_0), alors, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \to q_y(x)$ est borélienne dans Ω.*

En effet, $q_y(x) = \dfrac{p_y(x)}{\int p_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}$.

La représentation intégrale des potentiels dans Ω, dans le cas de l'unicité.

Théorème 18. 2. — *Dans le cas de l'unicité, soit q_y le potentiel de support y tel que, pour un couple (ω_0, x_0), $\int q_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$, et soit p_y un potentiel de support y tel que, pour chaque $x \in \Omega$, l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue. Alors :*

1) *Tout potentiel P dans Ω admet une représentation intégrale unique de la forme*

$$(1) \qquad P(x) = \int q_y(x) \, d\mu(y),$$

où μ est une mesure $\geqslant 0$ sur Ω; cette mesure μ est la mesure $\mu^{\omega_0, x}$ associée à P, à l'aide, du couple (ω_0, x_0).

2) *Par suite,* P *admet aussi une représentation intégrale unique de la forme*

$$(2) \qquad P(x) = \int p_y(x)\, d\lambda(y),$$

où λ *est une mesure* $\geqslant 0$ *sur* Ω; *cette mesure* λ *est définie par*

$$d\lambda(y) = \frac{d\mu^{\omega_0, x_0}(y)}{\int p_y\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}.$$

1) L'existence de la représentation intégrale (1) résulte du théorème 17. 1, car le noyau $G(x, y)$ associé à P coïncide avec $q_y(x)$, pour tout point $y \in \Omega$ où il est défini.

Unicité de la représentation intégrale (1) : Le noyau

$$G(x, y) = q_y(x)$$

satisfait aux conditions *a*), *b*), *c*) du théorème 17. 1; il suffit donc de montrer que toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω, satisfaisant à (1), est de masse finie : en effet, la restriction de μ à un compact quelconque $\subset \Omega$ est de masse $\leqslant \int P\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ (proposition 17. 1).

2) L'existence et l'unicité de la représentation intégrale (2) résultent de celles de (1).

Remarque. — Pour tout potentiel P dans Ω, il y a identité entre ensembles μ-négligeables et ensembles λ-négligeables; par suite, si P est localement borné, la mesure λ qui lui est associée ne charge pas les ensembles polaires (corollaire de la proposition 15. 3).

THÉORÈME 18. 3. — *Supposons que, pour chaque point* $y \in \Omega$, *il existe un potentiel* p_y *de support* y, *tel que l'application* $y \to p_y(x)$, *restreinte à* $\Omega - \{x\}$, *soit continue, quel que soit* $x \in \Omega$. (*Cette hypothèse est réalisée en particulier dans le cas de l'unicité, d'après le théorème* 18. 1).

Alors, étant donné une mesure $\lambda \geqslant 0$ *sur* Ω, *la fonction*

$$P(x) = \int p_y(x)\, d\lambda(y)$$

est hyperharmonique dans Ω. *Si* $P \in S^+$ (*en particulier, si* λ *est portée par un compact* $\subset \Omega$), *pour tout ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$:

$$(1) \qquad P_\varpi(x) = \int_\varpi p_y(x)\, d\lambda\,(y),$$

et par suite, $P \in P^+$.

L'hyperharmonicité de P résulte de la proposition 18. 1 et du théorème de Lebesgue-Fubini.

Soit $P \in S^+$. Si λ est portée par un compact $\subset \Omega$, λ est une mesure sur $\overline{\Omega}$; cette mesure et le noyau $p_y(x)$ satisfont aux hypothèses de la proposition 17. 1, d'où (1).

Dans le cas général, soit K_n une suite croissante de compacts dont la réunion est Ω, et $P_n(x) = \int_{K_n} p_y(x)\, d\lambda\,(y)$. Alors, la suite $P_n \in S^+$ est spécifiquement croissante et de limite P, donc (corollaire de la proposition 15. 2) :

$$P_\varpi(x) = \lim_n\,(P_n)_\varpi(x) = \lim_n \int_{\varpi \cap K_n} p_y(x)\, d\lambda\,(y) = \int_\varpi p_y(x)\, d\lambda\,(y).$$

Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème* 18. 3, *soit* λ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* Ω, *telle que* $P(x) = \int p_y(x)\, d\lambda\,(y)$ *soit un potentiel dans* Ω. *Alors, les mesures associées à* P *sont données par :*

$$\begin{aligned} d\mu^{\omega, x}(y) &= \left(\int p_y\, d\rho_x^\omega\right) d\lambda\,(y), \\ d\mu^x(y) &= p_y(x)\, d\lambda\,(y) \qquad si \qquad P(x) < +\infty, \\ d\mu'^x(y) &= p_y(x)\, d\lambda\,(y) \qquad pour \qquad y \in \Omega - \{x\}. \end{aligned}$$

Remarque 1. — Pour que $P \in S^+$, il faut et il suffit que, pour un couple (ω, x) :

$$\int P\, d\rho^\omega = \int \left(\int p_y\, d\rho_x^\omega\right) d\lambda\,(y) < +\infty.$$

Remarque 2. — Dans le cas de l'unicité, q_y désignant toujours le potentiel de support y tel que $\int q_y\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$, à toute mesure de Radon μ sur Ω, $\geqslant 0$ et de masse finie, correspond un potentiel P dans Ω défini par

$$P(x) = \int q_y(x)\, d\mu(y),$$

et dont la mesure associée, à l'aide du couple (ω_0, x_0), est μ.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème 18. 3 à la mesure $d\lambda(y) = \dfrac{d\mu(y)}{\int p_y\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}$.

Par suite, le lemme 17. 2 s'applique à la mesure μ et au noyau $G(x, y) = q_y(x)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$, tel que $\mu(\Omega - K) < \varepsilon$, et que l'application

$$(x, y) \to q_y(x),$$

restreinte à $\Omega \times K$, soit s. c. i., et même continue si $x \neq y$.

Ces propriétés de l'application $(x, y) \to q_y(x)$ ne s'étendent pas en général à $\Omega \times \Omega$: en effet, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est la continuité de la fonction $y \to \int p_y\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ dans Ω. On montrera, au chapitre suivant, que, si l'ouvert ω_0 est c. d., cette continuité est réalisée.

CHAPITRE IV

DÉFINITION ET ÉTUDE D'UNE TOPOLOGIE SUR L'ESPACE S^+. REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS $\in S^+$ A L'AIDE DES ÉLÉMENTS EXTRÉMAUX D'UNE BASE DU CÔNE S^+.

Hypothèses de ce chapitre :
les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3′ ;
il existe un potentiel > 0 dans Ω ;
Ω admet une base dénombrable.

19. A) Définition d'une topologie sur l'espace S.

Définition, pour chaque point $x \in \Omega$, *de la mesure* $\mu'^{x}_{(V, V')}$, *sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$, *associée à un élément* $(V, V') \in S$.

Étant donné une fonction $V \in S^+$, on lui a associé (théorème 15. 3), pour chaque point $x \in \Omega$, une mesure de Radon $\mu'^{x}_{V} \geqslant 0$ sur $\overline{\Omega} - \{x\}$.

Soit (V, V') un élément $\in S$, c'est-à-dire une classe d'équivalence de couples de fonctions $V, V' \in S^+$ (n° 2, B) : $\mu'^{x}_{V} - \mu'^{x}_{V'}$ est une mesure quelconque sur $\overline{\Omega} - \{x\}$; d'après la proposition 15. 2, elle ne dépend que de la classe considérée, donc peut être notée $\mu'^{x}_{(V, V')}$, et l'application $(V, V') \to \mu'^{x}_{(V, V')}$ est linéaire.

Définition de la topologie T *sur l'espace vectoriel* S.

T est la moins fine des topologies sur S, rendant continue, pour chaque $x \in \Omega$, l'application linéaire $(V, V') \to \mu'^{x}_{(V, V')}$ de S dans l'espace des mesures sur $\overline{\Omega} - \{x\}$, muni de la topologie vague.

T est donc une topologie d'espace localement convexe, définie par la famille des semi-normes $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \to \left|\int f\, d\mu'^{x}_{(\mathrm{V},\mathrm{V}')}\right|$, où x décrit Ω et f décrit $\mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$.

THÉORÈME 19. 1. — *L'espace vectoriel* S, *muni de la topologie* T, *est séparé.*

Soit (V, V′) un élément de S, dont toutes les semi-normes sont nulles, c'est-à-dire, pour tout $x \in \Omega$: $\mu'^{x}_{\mathrm{V}} = \mu'^{x}_{\mathrm{V}'}$.

Si x est un point $\in \Omega$, négligeable pour la mesure $\mu^{\omega_0, x_0}_{\mathrm{V}+\mathrm{V}'}$ et tel que $\mathrm{V}(x) + \mathrm{V}'(x) < +\infty$, les mesures μ^{x}_{V} et $\mu^{x}_{\mathrm{V}'}$ existent et ne chargent pas le point x (proposition 15. 1); comme μ'^{x}_{V} et $\mu'^{x}_{\mathrm{V}'}$ sont leurs restrictions à $\overline{\Omega} - \{x\}$, $\mu^{x}_{\mathrm{V}} = \mu^{x}_{\mathrm{V}'}$, $\mathrm{V}(x) = \mathrm{V}'(x)$.

Ainsi V et V′ coïncident hors d'un ensemble polaire et d'un ensemble dénombrable, donc aussi dans Ω, grâce à l'existence d'une base des ouverts de Ω formée de domaines réguliers dont les frontières ne passent par aucun point de l'ensemble dénombrable (proposition 7. 2).

19. B) Deux cas particuliers où la topologie T se traduit simplement.

1er CAS PARTICULIER : *La topologie induite par* T *sur l'espace* E^+ *des potentiels à support ponctuel et des fonctions harmoniques* > 0 *dans* Ω.

Pour $p \in \mathrm{E}^+$, nous noterons $\varphi(p)$: le support de p si p est un potentiel à support ponctuel, le point $\mathfrak{a}$ si p est une fonction harmonique > 0 dans Ω.

Soit $p \in \mathrm{E}^+$: pour chaque ouvert $\varpi \subset \overline{\Omega}$:

$$p_{\varpi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varpi \not\ni \varphi(p), \\ p(x) & \text{si} \quad \varpi \ni \varphi(p). \end{cases}$$

Par suite :

(1)
$$\mu'^{x}_{p} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = \varphi(p), \\ \text{la restriction de } p(x).\ \varepsilon_{\varphi(p)} \text{ à } \overline{\Omega} - \{x\}, & \text{si} \quad x \neq \varphi(p). \end{cases}$$

Autrement dit, pour $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$:

$$\int f\, d\mu'^{x}_{p} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = \varphi(p), \\ p(x).f\circ\varphi(p) & \text{si} \quad x \neq \varphi(p). \end{cases} \tag{2}$$

PROPOSITION 19. 1. — *La topologie induite par* T *sur* E^+ *possède les deux propriétés suivantes :*

a) *l'application* $p \to \varphi(p)$, *de* E^+ *sur* $\overline{\Omega}$, *est continue ;*

b) *l'application* $(p, x) \to p(x)$, *de* $E^+ \times \Omega$ *dans* $\overline{R}^+$, *est s. c. i., et même continue pour* $x \neq \varphi(p)$.

a) Continuité de φ : Étant donné un voisinage compact δ, $\not\supset \Omega$, du point $\varphi(p_0)$, choisissons un point $x \in \Omega \cap \complement\delta$, et une fonction $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, nulle sur $\complement\delta$ et > 0 au point $\varphi(p_0)$: d'après (2), $\int f \, d\mu'^x_{p_0} > 0$, donc $\int f \, d\mu'^x_p > 0$ définit un voisinage Δ de p_0 dans E^+, et $p \in \Delta$ entraîne $\varphi(p) \in \delta$.

b_1) Continuité de $p \to p(x)$ pour $\varphi(p) \neq x$:

Étant donné $x \neq \varphi(p_0)$, et un voisinage δ de $\varphi(p_0)$ dans $\overline{\Omega}$, tel que $x \notin \overline{\delta}$, choisissons $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, telle que $f = 1$ sur δ : si $\varphi(p) \in \delta$, $\int f \, d\mu'^x_p = p(x)$; les conditions $\varphi(p) \in \delta$ et $\left|\int f \, d\mu'^x_p - \int f \, d\mu'^x_{p_0}\right| < \varepsilon$ définissent un voisinage Δ de p_0 dans E^+, et $p \in \Delta$ entraîne $|p(x) - p_0(x)| < \varepsilon$.

b_2) Continuité de $(p, x) \to p(x)$ pour $x \neq \varphi(p)$:

Étant donné $p_0 \in E^+$, $x_0 \in \Omega$ distinct de $\varphi(p_0)$ et un domaine $\delta \ni x_0$, $\overline{\delta} \not\ni \varphi(p_0)$, il existe un voisinage Δ de p_0 dans E^+, tel que $p \in \Delta$ entraîne $\varphi(p) \in \complement\delta$; puis, grâce à l'axiome 3', $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage δ_0 de x_0, $\delta_0 \subset \delta$, tel que $p \in \Delta$ et $x \in \delta_0$ entraînent $1 - \varepsilon \leqslant \dfrac{p(x)}{p(x_0)} \leqslant 1 + \varepsilon$; enfin, pour un voisinage Δ_0 de p_0 dans E^+, $\Delta_0 \subset \Delta$, $p \in \Delta_0$ entraîne $1 - \varepsilon \leqslant \dfrac{p(x_0)}{p_0(x_0)} \leqslant 1 + \varepsilon$. Alors, si $p \in \Delta_0$ et $x \in \delta_0$:

$$(1 - \varepsilon)^2 \leqslant \frac{p(x)}{p_0(x_0)} \leqslant (1 + \varepsilon)^2.$$

b_3) S. c. i. de $(p, x) \to p(x)$ dans $E^+ \times \Omega$:

Il suffit de montrer que, étant donné $p_0 \in E^+$ et $x_0 \in \Omega$, tels que $x_0 = \varphi(p_0)$, et un nombre $\lambda < p_0(x_0)$, il existe un voisinage Δ de p_0 dans E^+ et un voisinage δ de x_0 dans Ω, tels que $p \in \Delta$ et $x \in \delta$ entraînent $p(x) > \lambda$.

Soit un domaine ω, $x_0 \in \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, assez petit pour que $\lambda < \int p_0 \, d\rho^\omega_{x_0}$, et posons $2\varepsilon = \int p_0 \, d\rho^\omega_{x_0} - \lambda$.

D'après b_2), étant donné $\xi_0 \in \partial\omega$, on a $|p(\xi) - p_0(\xi)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\int d\rho^\omega_{x_0}}$

pour p dans un voisinage convenable de p_0 et ξ dans un voisinage convenable de ξ_0; il existe donc un voisinage Δ de p_0 dans E^+, tel que $p \in \Delta$ entraîne $\int p \, d\rho_{x_0}^{\omega} \geqslant \lambda + \varepsilon$.

D'autre part, d'après l'axiome 3', il existe un voisinage δ de x_0, $\delta \subset \omega$, tel que : u harmonique > 0 dans ω et $x \in \delta$ entraînent $\dfrac{u(x)}{u(x_0)} > \dfrac{\lambda}{\lambda + \varepsilon}$; en particulier, pour $p \in \Delta$ et $x \in \delta$, $p(x) \geqslant \int p \, d\rho_x^{\omega} > \lambda$.

Proposition 19. 2. — *La topologie induite par* T *sur* E^+ *est la moins fine des topologies sur* E^+ *rendant continues : d'une part l'application* $p \rightarrow \varphi(p)$, *de* E^+ *sur* $\overline{\Omega}$, *d'autre part, pour chaque* $x \in \Omega$, *l'application* $p \rightarrow p(x)$, *de* $\varphi^{-1}(\overline{\Omega} - \{x\})$ *dans* R^+.

D'après la proposition 19. 1 (a et b_1), la topologie induite par T sur E^+ rend ces applications continues.

Inversement, toute topologie sur E^+, rendant continues ces applications, rend aussi continue l'application $p \rightarrow \mu_p'^x$, de E^+ dans l'espace des mesures sur $\overline{\Omega} - \{x\}$, pour chaque $x \in \Omega$ (cf. relation (1)).

2e cas particulier.

Proposition 19. 3. — *Supposons qu'il existe, pour chaque* $y \in \Omega$, *un potentiel* p_y *de support* y *tel que l'application* $y \rightarrow p_y(x)$, *restreinte à* $\Omega - \{x\}$, *soit continue, quel que soit* $x \in \Omega$. (*Cette hypothèse est réalisée en particulier dans le cas de l'unicité, d'après le théorème* 18. 1.)

Soit $P^+_{(p_y, K)}$ *l'ensemble des potentiels* P_λ *dans* Ω *associés biunivoquement aux mesures de Radon* $\lambda \geqslant 0$, *portées par un compact* $K \subset \Omega$, *par la formule*

$$P_\lambda(x) = \int p_y(x) \, d\lambda \, (y).$$

Alors, la topologie induite par T *sur l'espace* $P^+_{(p_y, K)}$ *est l'image réciproque, par l'application* $P_\lambda \rightarrow \lambda$, *de la topologie vague sur l'espace des mesures portées par* K.

On a vu (théorème 18. 3 et corollaire) qu'à toute mesure $\lambda \geqslant 0$ portée par K correspond un potentiel

$$P(x) = \int p_y(x) \, d\lambda \, (y),$$

dont la mesure associée à l'aide d'un couple (ω_0, x_0) est donnée par $d\mu_P^{\omega_0, x_0}(y) = \left(\int p_y \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}\right) d\lambda\,(y)$; il y a donc bien correspondance biunivoque entre λ et P, qu'on peut noter P_λ. En outre, pour chaque $x \in \Omega$: $d\mu_{P_\lambda}^{\prime x}(y) = p_y(x)\, d\lambda\,(y)$.

L'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, étant continue, la topologie vague des mesures sur K rend continue l'application $\lambda \to \mu_{P_\lambda}^{\prime x}$, pour chaque $x \in \Omega$. Par suite, son image réciproque dans l'espace $P^+_{(p_y, K)}$ rend continue l'application $P_\lambda \to \mu_{P_\lambda}^{\prime x}$, pour chaque $x \in \Omega$; elle est donc plus fine que T.

Inversement, choisissons $x \in \Omega \cap \complement K$. Quand f décrit $\mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, la restriction à K de la fonction $y \to p_y(x) f(y)$ décrit $C^+(K)$. Comme la topologie T rend continue l'application $P_\lambda \to \mu_{P_\lambda}^{\prime x}$, elle est plus fine que l'image réciproque de la topologie vague sur les mesures portées par K.

Corollaire. — *Si p_y est un potentiel de support y tel que, pour chaque $x \in \Omega$, l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue, alors l'application $y \to p_y$, de Ω dans E^+, est continue.*

Puisque la topologie vague rend continue l'application $y \to \varepsilon_y$, la topologie T rend continue l'application $y \to p_y$.

20. Les fonctions V_f associées à une fonction $V \in S^+$, f décrivant $C^+(\overline{\Omega})$.

Étant donné une fonction $V \in S^+$, on lui a associé (théorème 15. 2), pour chaque point $x \in \Omega$ tel que $V(x) < +\infty$, une mesure de Radon $\mu_V^x \geqslant 0$ sur $\overline{\Omega}$. f étant fixé $\in C^+(\overline{\Omega})$, $\int f\, d\mu_V^x$ est donc défini pour quasi-tout $x \in \Omega$; une propriété remarquable de la famille des mesures μ_V^x est que cette fonction $x \to \int f\, d\mu_V^x$ peut être prolongée à Ω en une fonction $\in S^+$, harmonique dans $\Omega \cap \complement S_f$ [27], et notée V_f.

En outre, la fonction $x \to \int f\, d\mu_V^{\prime x}$, définie dans l'ouvert $\Omega \cap \complement S_f$, coïncide avec V_f dans cet ouvert, donc y est harmonique.

[27] S_f désigne le support compact de f.

Ce résultat permet de donner une nouvelle forme à la définition de la topologie T, et il est utilisé, de façon essentielle, dans la démonstration des propriétés de T.

THÉORÈME 20. 1. — *Étant donné une fonction* $V \in S^+$, *il existe, pour chaque* $f \in C^+(\overline{\Omega})$, *une fonction* $\in S^+$ *et une seule, notée* V_f, *dont les mesures associées sont:* $f\mu_V^{\omega, x}$, $f\mu_V^x$ (*si* $V(x) < +\infty$) *et* $f\mu_V'^x$ (*sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$). *Par suite:*

$$\int V_f \, d\rho_x^\omega = \int f \, d\mu_V^{\omega, x}, \tag{1}$$

$$V_f(x) = \int f \, d\mu_V^x \quad si \quad V(x) < +\infty. \tag{2}$$

En outre:

$$V_f(x) = \int f \, d\mu_V'^x \quad si \quad x \in \Omega \cap \complement S_f. \tag{3}$$

Unicité de V_f: La formule (1), ou la formule (2), détermine V_f.

Existence de V_f: Toute fonction $f \in C^+(\overline{\Omega})$ est limite d'au moins une suite croissante de fonctions φ_q qui sont des sommes finies de la forme

$\varphi_q = \sum_i \alpha_{i,q} \chi_{\omega_{i,q}}$, où les $\alpha_{i,q}$ sont des nombres > 0 et les $\omega_{i,q}$ des ouverts $\subset \overline{\Omega}$.

Posons $V_{\varphi_q} = \sum_i \alpha_{i,q} V_{\omega_{i,q}}$; pour tout couple (ω, x):

$$\int V_{\varphi_q} \, d\rho_x^\omega = \int \varphi_q \, d\mu_V^{\omega, x}.$$

Donc, V_{φ_q} ne dépend que de φ_q (ce qui justifie la notation V_{φ_q}), $\int V_{\varphi_q} \, d\rho_x^\omega$ est une suite croissante, et $\lim_q \int V_{\varphi_q} \, d\rho_x^\omega = \int f \, d\mu_V^{\omega, x}$. Comme $V_{\varphi_q} \in S^+$, la suite V_{φ_q} est croissante, et sa limite est une fonction $\in S^+$, notée V_f; V_f ne dépend pas de la suite φ_q considérée, puisque

$$\int V_f \, d\rho_x^\omega = \int f \, d\mu^{\omega, x}; \tag{1}$$

ou encore, si $V(x) < +\infty$:

$$V_f(x) = \int f \, d\mu_V^x. \tag{2}$$

Pour démontrer (3), notons d'abord que les V_{φ_q} sont harmoniques dans $\Omega \cap \complement S_f$, donc aussi V_f. Alors, étant donné

$x \in \Omega \cap \complement S_f$, on peut trouver un ouvert $\omega \ni x$ tel que $\bar{\omega} \subset \Omega \cap \complement S_f$; comme $\mu_V^{\omega, x}$ et $\mu_V^{\prime x}$ ont la même restriction à $\overline{\Omega} - \bar{\omega}$ (cf. nº 15, propriété 5 des mesures associées à une fonction V), (3) résulte de (1).

Montrons que la suite V_{φ_q} est même spécifiquement croissante : soit

$$U_q(x) = \begin{cases} V_{\varphi_{q+1}}(x) - V_{\varphi_q}(x) \text{ en tout point } x \text{ où cette différence est définie,} \\ +\infty \text{ si } V_{\varphi_q}(x) = +\infty. \end{cases}$$

Pour tout couple (ω, x) et tout ouvert $\omega' \ni x$ tel que $\bar{\omega}' \subset \omega$:

$$\int U_q \, d\rho_x^{\omega'} = \int (\varphi_{q+1} - \varphi_q) \, d\mu^{\omega', x} \geqslant \int (\varphi_{q+1} - \varphi_q) \, d\mu^{\omega, x} = \int U_q \, d\rho_x^{\omega}$$

(propriété 4 des mesures $\mu^{\omega, x}$, nº 15); donc $U_q(x) \geqslant \int U_q \, d\rho_x^{\omega}$, ce qui signifie que U_q est une $\mathcal{S}$ fonction dans Ω. Alors :

$V_{\varphi_{q+1}} = V_{\varphi_q} + U_q$ entraîne $V_{\varphi_{q+1}} = V_{\varphi_q} +$ une fonction $\in S^+$ (propriété 2; nº 5, A).

La suite V_{φ_q} étant spécifiquement croissante, on a, quel que soit l'ouvert $\varpi \subset \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}(V_f)_\varpi &= \lim_q (V_{\varphi_q})_\varpi \text{ (corollaire de la proposition 15. 2)} \\ &= \lim_q \sum_i \alpha_{i,q} (V_{\omega_{i,q}})_\varpi \text{ (proposition 15. 2)} \\ &= \lim_q \sum_i \alpha_{i,q} (V_\varpi)_{\omega_{i,q}} \text{ (corollaire 1 de la proposition 15. 3)} \\ &= (V_\varpi)_f;\end{aligned}$$

donc :

$$\mu_{V_f}^{\omega, x}(\varpi) = \int (V_\varpi)_f \, d\rho_x^{\omega} = \int_\varpi f \, d\mu_V^{\omega, x}$$

(relation (1) et proposition 15. 3), et $\mu_{V_f}^{\omega, x} = f \mu_V^{\omega, x}$.

Même démonstration pour la mesure $\mu_{V_f}^x$.

Pour la mesure $\mu_{V_f}^{\prime x}$, on raisonne comme on a fait pour établir (3).

Remarque importante. — On peut démontrer immédiatement le théorème 20. 1 et donner une construction plus explicite des fonctions V_f en utilisant la représentation intégrale du nº 17.

Fixons le couple (ω, x), soit (ω_0, x_0) ; alors (théorème 17. 1) :

$$V(x) = \int G(x, Y)\, d\mu(Y), \qquad \text{où} \qquad \mu = \mu_V^{\omega_0, x_0}.$$

Posons

$$V_f(x) = \int G(x, Y)\, f(Y)\, d\mu(Y);$$

d'après la proposition 17. 1 et son corollaire, $V_f \in S^+$ et ses mesures associées sont données par :

$$d\mu_{V_f}^{\omega, x}(Y) = \left[\int G(., Y)\, d\rho_x^\omega\right] f(Y)\, d\mu(Y) = f(Y)\, d\mu_V^{\omega, x}(Y),$$
$$d\mu_{V_f}^{x}(Y) = G(x, Y) f(Y)\, d\mu(Y) = f(Y)\, d\mu_V^x(Y) \quad \text{si} \quad V(x) < +\infty,$$
$$d\mu_{V_f}^{\prime x}(Y) = G(x, Y) f(Y)\, d\mu(Y) = f(Y)\, d\mu_V^{\prime x}(Y) \quad \text{pour} \quad Y \in \overline{\Omega} - \{x\}.$$

Propriétés des fonctions V_f.

1) V_f est harmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega \cap \complement S_f$.

Si $f(\mathfrak{A}) = 0$, $V_f \in P^+$ (cf. nº 15, propriété 2 des mesures associées à une fonction $\in S^+$).

2) Pour que $V_f = 0$, il faut et il suffit que $f = 0$ sur le support compact commun des mesures $\mu_V^{\omega, x}$.

3) Si $f = 1$ sur le support compact commun des mesures $\mu_V^{\omega, x}$, alors $V_f = V$: en effet, $\mu_{V_f}^{\omega, x} = f\mu_V^{\omega, x} = \mu_V^{\omega, x}$ pour tout couple (ω, x).

4) Pour a et $b > 0$, f et $g \in C^+(\overline{\Omega})$: $V_{af+bg} = aV_f + bV_g$.

5) Pour a et $b > 0$, U et $V \in S^+$ et $W = aU + bV$:

$$W_f = aU_f + bV_f$$

(cf. proposition 15. 2).

6) Pour $f \in C^+(\overline{\Omega})$ et tout ouvert $\varpi \subset \overline{\Omega}$: $(V_f)_\varpi = (V_\varpi)_f$.
Pour f et $g \in C^+(\overline{\Omega})$: $(V_f)_g = V_{fg}$.

Théorème 20. 2. — *Étant donné une application $f \to U_f$ de $C^+(\overline{\Omega})$ dans S^+, pour que les U_f soient les V_f associées à une fonction $V \in S^+$, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient remplies : U_f est harmonique dans $\Omega \cap \complement S_f$; $\mathfrak{A} \notin S_f$ entraîne $U_f \in P^+$; pour a et $b > 0$, f et $g \in C^+(\overline{\Omega})$, $U_{af+bg} = aU_f + bU_g$.*

Ces conditions sont nécessaires d'après les propriétés 1 et 4 des fonctions V_f.

Les conditions étant supposées remplies, posons $V = U_1$: $V \in S^+$, donc on peut lui associer une famille de fonctions

$V_f \in S^+$, f décrivant $C^+(\overline{\Omega})$. Étant donné un couple (ω, x), l'application $f \to \int U_f \, d\rho_x^\omega$, de $C^+(\overline{\Omega})$ dans R^+, définit une mesure $\lambda^{\omega,x}$ sur $\overline{\Omega}$; pour montrer que $U_f = V_f$, il suffit de vérifier (cf. théorème 20. 1) que $\lambda^{\omega,x} = \mu_V^{\omega,x}$, ou encore que $\lambda^{\omega,x}(\varpi) \geqslant \mu_V^{\omega,x}(\varpi)$ pour tout ouvert $\varpi \subset \overline{\Omega}$, puisque

$$\int d\lambda^{\omega,x} = \int U_1 \, d\rho_x^\omega = \int V \, d\rho_x^\omega = \int d\mu_V^{\omega,x}.$$

Étant donné $\varpi \subset \overline{\Omega}$, soit ϖ_n une suite croissante d'ouverts tels que $\overline{\varpi}_n \subset \varpi$, $\varpi = \bigcup_n \varpi_n$, puis, pour chaque n, $f_n \in C^+(\overline{\Omega})$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, $f_n = 1$ sur $\overline{\varpi}_n$, $f_n = 0$ sur $\complement \varpi$: on a

$$\lambda^{\omega,x}(\varpi) \geqslant \int U_{f_n} \, d\rho_x^\omega \qquad \text{et} \qquad V = U_1 = U_{f_n} + U_{1-f_n}.$$

Si $\varpi \subset \Omega$: U_{1-f_n} est harmonique dans ϖ_n et, d'après le théorème de partition, $U_{f_n} \geqslant V_{\varpi_n}$, d'où $\lambda^{\omega,x}(\varpi) \geqslant \mu_V^{\omega,x}(\varpi_n)$ et, à la limite, $\lambda^{\omega,x}(\varpi) \geqslant \mu_V^{\omega,x}(\varpi)$.

Si $\varpi \supset \mathfrak{A}$: pour n assez grand, $\varpi_n \supset \mathfrak{A}$, donc $U_{1-f_n} \in P^+$ et $U_{f_n} \geqslant h$, partie harmonique de V dans Ω; d'où $\lambda^{\omega,x}(\varpi) \geqslant \mu_V^{\omega,x}(\mathfrak{A})$ et, comme cette inégalité vaut pour tout ouvert $\varpi \supset \mathfrak{A}$, $\lambda^{\omega,x}(\mathfrak{A}) \geqslant \mu_V^{\omega,x}(\mathfrak{A})$.

AUTRE FORME DE LA DÉFINITION DE LA TOPOLOGIE T. On appelle « couple (f, x) » tout couple formé d'une fonction $f \in C^+(\overline{\Omega})$ et d'un point $x \in \Omega \cap \complement S_f$ ou. ce qui revient au même, d'un point $x \in \Omega$ et d'une fonction $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$.

Étant donné un couple (f, x), pour $(V, V') \in S$:

$$(V, V')_f(x) = V_f(x) - V'_f(x)$$

est défini, ne dépend que de la classe (V, V'), et $(V, V') \to (V, V')_f(x)$ est une forme linéaire sur S (propriété 5 des fonctions V_f). En outre :

$$(V, V')_f(x) = \int f \, d\mu'^{x}_{(V, V')}$$

d'après la définition de $\mu'^{x}_{(V, V')}$ (n° 19) et la relation (3) du théorème 20. 1.

T est donc la moins fine des topologies sur S rendant continue la forme linéaire $(V, V') \to (V, V')_f(x)$, pour chaque couple (f, x).

Remarque. — Étant donné $(V, V') \in S$ et $\in C^+(\overline{\Omega})$, la fonction $x \to (V, V')_f(x)$ est harmonique, de signe quelconque, dans l'ouvert $\Omega \cap \complement S_f$. Pour de telles fonctions, on ne dispose pas de l'axiome de Harnack, qui va être utilisé, au n° 21, dans la démonstration des propriétés de T: c'est pourquoi nous les obtiendrons seulement dans S^+.

21. Propriétés de la topologie T sur l'espace S^+.

A) Métrisabilité de la topologie T sur l'espace S^+.

Lemme 21. 1. — *Il existe une famille dénombrable $\mathcal{F}$ de fonctions $f_n \in C^+(\overline{\Omega})$, possédant la propriété suivante: Étant donné $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, un voisinage compact* X *de x, disjoint à S_f, et $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions f_i et $f_j \in \mathcal{F}$, nulles sur* X, *telles que*

$$f_j \leqslant f \leqslant f_i \quad \textit{et} \quad |f - f_k| \leqslant \varepsilon \quad \textit{dans } \overline{\Omega}, \quad k = i, j.$$

Il existe une famille dénombrable $\mathcal{G}$ de fonctions $g_n \in C(\overline{\Omega})$, partout dense dans $C(\overline{\Omega})$ pour la topologie de la convergence uniforme; montrons que la famille $\mathcal{F}$ des fonctions

$$f_n = \sup(0, g_n)$$

répond à la question.

1) Détermination de f_j.

On choisit $g_j \in \mathcal{G}$, approchant $f - \frac{\varepsilon}{2}$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près dans $\overline{\Omega}$: on a $f - \varepsilon \leqslant g_j \leqslant f$ dans $\overline{\Omega}$, $f_j = \sup(0, g_j)$ satisfait aux mêmes inégalités, et $f = 0$ entraîne $f_j = 0$.

2) Détermination de f_i.

On construit $f' \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$ telle que:

$$f' = 0 \quad \text{sur} \quad X; \qquad 0 \leqslant f' \leqslant \varepsilon \quad \text{sur} \quad \complement X - S_f;$$
$$f' = f + \varepsilon \quad \text{sur} \quad S_f;$$

le procédé employé dans 1), appliqué à f' au lieu de f, donne f_i au lieu de f_j.

Théorème 21. 1. — *Sur l'espace* S^+, *la topologie* T *est métrisable.*

La topologie T étant séparée, elle est métrisable sur S^+ si elle peut être définie, sur S^+, par une famille dénombrable d'écarts.

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble dénombrable partout dense dans Ω, et $\mathcal{F}$ une famille dénombrable possédant les propriétés du lemme 21. 1; à chaque couple (x_p, f_n), $x_p \in \mathcal{X}$, $f_n \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x_p\})$, faisons correspondre l'écart sur S^+ :

$$(V, V') \to E_{n,p}(V, V') = |V_{f_n}(x_p) - V'_{f_n}(x_p)|.$$

Montrons alors que, étant donné un T-voisinage de $V_0 \in S^+$, défini par

$$\{V \in S^+ | E(V, V_0) \leqslant \alpha\},$$

où $E(V, V_0) = |V_f(x) - (V_0)_f(x)|$, $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, $\alpha > 0$, il contient un T-voisinage de V_0 de la forme :

$$\{V \in S^+ | E_{n_k, p_k}(V, V_0) \leqslant \alpha_k, k = 1, 2, \ldots, N\}.$$

1) Remarquons d'abord :

— Pour tout couple de fonctions f_i, $f_j \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, et telles que $f_j \leqslant f \leqslant f_i$, les inégalités

$$(a_k) \qquad |V_{f_k}(x) - (V_0)_f(x)| \leqslant \alpha, \quad k = i, j,$$

entraînent $|V_f(x) - (V_0)_f(x)| \leqslant \alpha$.

— Pour réaliser les inégalités (a_k), $k = i, j$, il suffit de satisfaire les inégalités

$$(b_k) \quad |(V_0)_f(x) - (V_0)_{f_k}(x)| \leqslant \frac{\alpha}{4},$$

$$(c_k) \quad |(V_0)_{f_k}(x) - (V_0)_{f_k}(x_p)| \leqslant \frac{\alpha}{4}, \quad \text{où} \quad x_p \in \mathcal{X} \cap \complement S_{f_k},$$

$$(d_k) \quad |(V_0)_{f_k}(x_p) - V_{f_k}(x_p)| \leqslant \frac{\alpha}{4},$$

$$(e_k) \quad |V_{f_k}(x_p) - V_{f_k}(x)| \leqslant \frac{\alpha}{4}.$$

2) Détermination des fonctions f_i et f_j :

Soit X un domaine $\ni x$, $\overline{X}$ disjoint à S_f; d'après le lemme 21. 1, il existe deux fonctions f_i et $f_j \in \mathcal{F}$, nulles sur X, telles que $f_j \leqslant f \leqslant f_i$ et $|f - f_k| \leqslant \dfrac{\alpha}{4 \int_{\overline{\Omega} - X} d\mu'^x_{V_0}}$ dans $\overline{\Omega}$, $k = i, j$.

L'inégalité (b_k) est alors réalisée; d'où

$$(b'_k) \qquad (V_0)_{f_k}(x) \leqslant (V_0)_f(x) + \frac{\alpha}{4}.$$

3) Détermination du point x_p:

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage δ de x, $\delta \subset X$, tel que

$$\left.\begin{array}{l} y \text{ et } y' \in \delta \\ u \text{ harmonique} \geqslant 0 \\ \quad \text{dans X} \end{array}\right\} \text{ entraînent } \frac{u(y')}{1+\varepsilon} \leqslant u(y) \leqslant (1+\varepsilon)u(y').$$

Choisissons $\varepsilon = \dfrac{\frac{\alpha}{4}}{(V_0)_f(x) + \alpha}$ et prenons $x_p \in \mathscr{X}$, et situé dans le voisinage δ correspondant.

On en déduit, grâce à (b'_k), l'inégalité (c_k), ainsi que

$$(c'_k) \qquad (V_0)_{f_k}(x_p) \leqslant (V_0)_f(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

On en déduit aussi l'inégalité (e_k) dès que (d_k) est réalisée, car (c'_k) entraîne alors : $V_{f_k}(x_p) \leqslant (V_0)_f(x) + \frac{3\alpha}{4}$.

Le T-voisinage cherché est donc :

$$\left\{ V \in S^+ | E_{k,p}(V, V_0) \leqslant \frac{\alpha}{4}, \ k = i, j \right\}.$$

Conséquences. — Grâce à la métrisabilité de S^+ muni de la topologie T, nous raisonnerons désormais sur des suites de fonctions $\in S^+$. Notons les deux énoncés suivants :

Scolie 21. 1. — *Soit p et p_n des potentiels à support ponctuel ou des fonctions harmoniques > 0 dans Ω. Il y a équivalence entre :*

1) $p_n \xrightarrow{T} p$;

2) *$\varphi(p_n) \to \varphi(p)$ et $p_n(x) \to p(x)$ pour tout $x \neq \varphi(p)$.*

C'est une traduction de la proposition 19. 2.

Scolie 21. 2. — *Si, dans S^+, la suite V_n est T-convergente vers V, alors, pour toute $f \in C^+(\overline{\Omega})$, la suite $(V_n)_f$ est T-convergente vers V_f.*

Cela résulte de la propriété 6 des fonctions V_f (n° 20).

B) Compacité locale du cône S^+.

Un couple (ω_0, x_0) étant choisi, désignons par $S^+_{\alpha,\omega_0,x_0}$ (par abus d'écriture S^+_α) l'ensemble des fonctions $V \in S^+$ telles que $\int V\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$.

Lemme 21. 2 [28]. — *Étant donné une suite* $V_n \in S^+_\alpha$, *on peut en extraire une suite partielle* V_{n_k} *telle que : pour chaque* $x \in \Omega$, *les mesures* $\mu'^x_{V_{n_k}}$ *convergent vaguement, dans l'espace des mesures sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$, *vers une mesure sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$.

Si x_p est un ensemble dénombrable dense dans Ω, considérons, pour chaque p, les mesures $\mu'^{x_p}_{V_n}$ sur $\overline{\Omega} - \{x_p\}$.

Quel que soit le compact $K \subset \overline{\Omega} - \{x_p\}$, les restrictions à K des mesures $\mu'^{x_p}_{V_n}$ ont des masses bornées dans leur ensemble : en effet, soit $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x_p\})$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 1$ sur K; $\int_K d\mu'^{x_p}_{V_n} \leqslant \int f\, d\mu'^{x_p}_{V_n} = (V_n)_f(x_p)$, et $(V_n)_f$, majoré par $V_n \in S^+_\alpha$ et harmonique au voisinage de x_p, est borné au point x_p indépendamment de n (propriété 7; n° 2, C).

Le procédé diagonal permet alors de déterminer une suite partielle n_k, telle que, pour chaque p, $\mu'^{x_p}_{V_{n_k}}$ converge vaguement.

Montrons que, pour tout $x \in \Omega$, $\mu'^x_{V_{n_k}}$ converge vaguement soit $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$; sur $\Omega \cap \complement S_f$, $(V_{n_k})_f$ est harmonique $\geqslant 0$ et converge aux points x_p, denses dans $\Omega \cap \complement S_f$. Donc elle converge en tout point $\in \Omega \cap \complement S_f$, en particulier au point x.

Proposition 21. 1. — *Soit une suite* $V_n \in S^+$, *telle que, pour chaque* $x \in \Omega$, *les mesures* $\mu'^x_{V_n}$ *convergent vaguement, dans l'espace des mesures sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$, *vers une mesure* ν^x *sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$.

Alors, $f \to U_f = \widehat{\liminf_n (V_n)_f}$ *est une application de* $C^+(\overline{\Omega})$ *dans* S^+ *et, pour* a *et* $b \geqslant 0$, f *et* $g \in C^+(\overline{\Omega})$:

$$U_{af+bg} = aU_f + bU_g.$$

L'hypothèse signifie que, si $f \in C^+(\overline{\Omega})$: pour tout $x \in \Omega \cap \complement S_f$, la suite $(V_n)_f(x) = \int f\, d\mu'^x_{V_n}$ converge vers $\int f\, d\nu^x$; comme

[28] Je dois à M. Brelot l'idée de considérer ce lemme, et d'en faire le point de départ d'une démonstration de la compacité locale du cône S^+.

$(V_n)_f$ est harmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega \cap \complement S_f$, la convergence est uniforme sur tout compact $\subset \Omega \cap \complement S_f$, et la limite est harmonique dans $\Omega \cap \complement S_f$. Par suite, pour toute $f \in C^+(\overline{\Omega})$ telle que $S_f \not\supset \Omega$, $U_f \in S^+$.

Si a est un nombre $\geqslant 0$, $U_{af} = aU_f$; il suffit donc de montrer que, si f et $g \in C^+(\overline{\Omega})$, $U_{f+g} = U_f + U_g$: comme toute fonction de $C^+(\overline{\Omega})$ peut se mettre sous la forme $f + g$ avec $S_f \not\supset \Omega$, $S_g \not\supset \Omega$, on aura bien $U_f \in S^+$ quelle que soit $f \in C^+(\overline{\Omega})$.

1) Pour chaque n, $(V_n)_{f+g} = (V_n)_f + (V_n)_g$ (n° 20, propriété 4 des fonctions V_f). On en déduit l'inégalité :

$$\widehat{\liminf_n (V_n)_{f+g}} \geqslant \widehat{\liminf_n (V_n)_f} + \widehat{\liminf_n (V_n)_g}.$$

Je vais montrer d'autre part qu'il existe une base $\mathcal{B}$ des ouverts de Ω ou, ce qui revient au même, pour chaque ouvert Ω_0 strictement contenu dans Ω, une base $\mathcal{B}_0$ des ouverts de Ω_0, telle que :

$$(1) \quad \liminf_n (V_n)_{f+g} \leqslant \widehat{\liminf_n (V_n)_f} + \widehat{\liminf_n (V_n)_g} \ \mathcal{B}_0\text{-p.p.}$$

dans Ω_0.

Il en résultera l'égalité cherchée $\mathcal{B}$-p.p. dans Ω, donc partout.

2) Soit V_0 une fonction $\in S^+$, finie continue et > 0 dans Ω. x_0 un point $\in \Omega - \Omega_0$, et $\mathcal{B}_0$ une base des ouverts de Ω_0 formée de domaines $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_0$, dont les frontières sont de ν^{x_0}-mesure nulle (proposition 7. 2 appliquée à l'espace Ω_0).

Pour établir (1) $\mathcal{B}_0$-p.p., il suffit de montrer que, étant donné un domaine $\omega \in \mathcal{B}_0$ et un entier $p > 0$, tout compact $K \subset \partial\omega$ tel que :

$x \in K$ entraîne

$$(2) \quad \liminf_n (V_n)_{f+g}(x) \geqslant \widehat{\liminf_n (V_n)_f}(x) + \widehat{\liminf_n (V_n)_g}(x) + \frac{V_0(x)}{p}$$

est de mesure harmonique nulle pour ω.

3) Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons :

un ouvert β, $K \subset \beta \subset \bar{\beta} \subset \Omega_0$, tel que

$$(3) \qquad \int_\beta (f + g)\, d\nu^{x_0} \leqslant \varepsilon ;$$

une fonction $c \in C^+(\overline{\Omega})$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, $c = 1$ sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de K, et $c = 0$ sur $\complement \beta$.

Montrons alors :

a) $\lim_n (V_n)_{c(f+g)}(x_0) \leqslant \varepsilon$.

En effet, $x_0 \in \Omega \cap \complement S_{c(f+g)}$; donc

$$\lim_n (V_n)_{c(f+g)}(x_0) = \int c(f+g)\, d\nu^{x_0}, \quad \leqslant \varepsilon \quad \text{d'après (3).}$$

b) $x \in K$ entraîne $\liminf_n (V_n)_{c(f+g)}(x) \geqslant \frac{V_0(x)}{p}$.

En chaque point $x \in \mathfrak{V}$: $(1-c)f$, $(1-c)g$ et $(1-c)(f+g)$ sont nuls; donc

$$\lim_n (V_n)_{(1-c)f}(x), \quad \lim_n (V_n)_{(1-c)g}(x) \quad \text{et} \quad \lim_n (V_n)_{(1-c)(f+g)}(x)$$

existent, sont harmoniques dans $\mathfrak{V}$ et :

$$(4) \quad \lim_n (V_n)_{(1-c)(f+g)}(x) = \lim_n (V_n)_{(1-c)f}(x) + \lim_n (V_n)_{(1-c)g}(x).$$

On peut alors écrire, pour $x \in \mathfrak{V}$:

$$(5) \quad \liminf_n (V_n)_{f+g}(x) = \liminf_n (V_n)_{c(f+g)}(x) + \lim_n (V_n)_{(1-c)(f+g)}(x).$$

De même, pour tout $x \in \mathfrak{V}$:

$$\liminf_n (V_n)_f(x) = \liminf_n (V_n)_{cf}(x) + \lim_n (V_n)_{(1-c)f}(x),$$

d'où

$$(6) \quad \widehat{\liminf_n (V_n)_f}(x) = \widehat{\liminf_n (V_n)_{cf}}(x) + \lim_n (V_n)_{(1-c)f}(x),$$

et une relation identique avec g, soit (7).

Prenons, à présent, $x \in K$.

En tenant compte de (4), (5), (6), (7), l'inégalité (2) devient :

$$\liminf_n (V_n)_{c(f+g)}(x) \geqslant \widehat{\liminf_n (V_n)_{cf}}(x) + \widehat{\liminf_n (V_n)_{cg}}(x) + \frac{V_0(x)}{p},$$

et *a fortiori :*

$$\liminf_n (V_n)_{c(f+g)}(x) \geqslant \frac{V_0(x)}{p}.$$

Conclusion : Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une $\mathcal{S}$ fonction dans Ω, $U = \liminf_n (V_n)_{c(f+g)}$, satisfaisant à

$$U(x_0) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad U(x) \geqslant \frac{V_0(x)}{p} \quad \text{pour} \quad x \in K.$$

Il existe donc une $\mathcal{S}$ fonction dans Ω, finie au point x_0 et valant $+\infty$ en tout point de K; par suite, K est de mesure harmonique nulle pour ω.

Proposition 21. 2. — *Soit une suite* $V_n \in S^+$, *telle que, pour chaque* $x \in \Omega$, *les mesures* $\mu'^{x}_{V_n}$ *convergent vaguement dans l'espace des mesures sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$.

Alors la suite V_n *est* T-*convergente vers* $\widehat{\liminf_n V_n}$.

Le théorème 20. 2 s'applique à la famille des fonctions $U_f = \widehat{\liminf_n (V_n)_f}$, $f \in C^+(\overline{\Omega})$:

En effet $U_f \in S^+$; d'après l'hypothèse, dans $\Omega \cap \complement S_f$, $U_f = \lim_n (V_n)_f$ est harmonique; $\mathfrak{A} \notin S_f$ entraîne $U_f \in P^+$ grâce au lemme 3. 2. Enfin, on a vu (proposition 21. 1) que, si a et b sont $\geqslant 0$, f et $g \in C^+(\overline{\Omega})$: $U_{af+bg} = aU_f + bU_g$.

Les fonctions U_f sont donc associées à une fonction de S^+, soit $V = U_1 = \widehat{\liminf_n V_n}$.

La suite V_n converge, selon T, vers V, car, pour tout couple (f, x) :

$$\lim_n (V_n)_f(x) = U_f(x) = V_f(x).$$

Comme corollaires, indiquons deux propriétés des suites T-convergentes.

Corollaire 1. — *Si une suite* V_n *est* T-*convergente dans* S^+, *sa* T-*limite est égale à* $\widehat{\liminf_n V_n}$.

Corollaire 2. — *Soit une suite* V_n, T-*convergente dans* S^+. *Si les fonctions* V_n *sont harmoniques dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *leur* T-*limite*, $V = \widehat{\liminf_n V_n}$, est *harmonique dans* ω, *et* $V_n \to V$ *uniformément sur tout compact* $\subset \omega$.

Pour tout ouvert $\delta \subset \overline{\delta} \subset \omega$, soit $f \in C^+(\overline{\Omega})$, $f = 1$ sur $\complement \omega$, $f = 0$ sur δ.

Quel que soit n, $(V_n)_f = V_n$ (n° 20, propriété 3 des V_f). D'après l'hypothèse, la suite $(V_n)_f$ converge, uniformément sur tout compact $\subset \Omega \cap \complement S_f$, en particulier sur tout compact

$\subset \delta$, vers une fonction harmonique dans δ; il en est donc de même de la suite V_n.

Ainsi, $V = \widehat{\liminf_n V_n}$ est harmonique dans δ, et $V_n \to V$ uniformément sur tout compact $\subset \delta$.

LEMME 21. 3. — *Soit une suite* V_n, T-*convergente dans* S^+, *et un couple* (ω_0, x_0).

1) $\int V_n \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ *est borné indépendamment de n.*

2) *Si la T-limite de* V_n *est* 0, $\int V_n \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \to 0$.

1) Soit $c \in C^+(\overline{\Omega})$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, $\dot{S}_c$ et S_{1-c} étant tous deux distincts de $\overline{\Omega}$. On peut donc choisir deux couples (ω_1, x_1) et (ω_2, x_2), tels que $\bar{\omega}_1 \subset \Omega \cap \complement S_c$ et $\bar{\omega}_2 \subset \Omega \cap \complement S_{1-c}$. On a :

$$V_n = (V_n)_c + (V_n)_{1-c},$$

$$\int (V_n)_c \, d\rho_{x_1}^{\omega_1} = (V_n)_c(x_1) \qquad \text{et} \qquad \int (V_n)_{1-c} \, d\rho_{x_2}^{\omega_2} = (V_n)_{1-c}(x_2)$$

bornés indépendamment de n, donc aussi

$$\int (V_n)_c \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad \int (V_n)_{1-c} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$$

(propriété 7; n° 2, C).

2) Même raisonnement, en remplaçant « borné indépendamment de n » par « tendant vers 0 ».

COROLLAIRE. — *Étant donné un compact* $A \subset S^+$ *et un couple* (ω_0, x_0), *il existe un nombre* $\alpha > 0$, *tel que:* $V \in A$ *entraîne* $\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \alpha$.

THÉORÈME 21. 2. — 1) *Étant donné un couple* (ω_0, x_0) *et un nombre* $\alpha > 0$, *l'ensemble* S_α^+ *des fonctions* $V \in S^+$ *telles que* $\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \alpha$, *est compact pour la topologie* T; *donc le cône* S^+, *muni de la topologie* T, *est localement compact.*

2) *On peut obtenir une base* [28 bis] *compacte du cône* S^+ *en considérant l'ensemble des fonctions* $V \in S^+$ *telles que* $V_{f_1}(x_1) + V_{f_2}(x_2) = 1$, (f_1, x_1) *et* (f_2, x_2) *étant deux couples convenablement choisis.*

1) S_α^+ est compact pour la topologie T :

En effet, de toute suite $V_n \in S_\alpha^+$, on peut extraire une suite

[28 bis] Une base du cône S^+ est l'intersection de S^+ avec un hyperplan ne passant pas par l'origine et rencontrant toutes les génératrices.

partielle V_{n_k} satisfaisant à l'énoncé du lemme 21. 2, donc telle que V_{n_k} T-converge vers $\widehat{\liminf_k V_{n_k}}$ (proposition 21. 2). Et $\widehat{\liminf_k V_{n_k}} \in S^+_\alpha$, car

$$\int \widehat{\liminf_k V_{n_k}}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \leqslant \liminf_k \int V_{n_k}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \leqslant \alpha.$$

Comme S^+_α est un T-voisinage de l'origine dans le cône S^+ (lemme 21. 3), celui-ci est localement compact.

2) Quels que soient les couples (f_1, x_1) et (f_2, x_2), l'ensemble

$$A = \{V \in S^+ | V_{f_1}(x_1) + V_{f_2}(x_2) = 1\}$$

est fermé, donc compact s'il est contenu dans un S^+_α.

Pour réaliser cette condition, reprenons les éléments utilisés dans la démonstration du lemme 21. 3 : c, ω_1, x_1, ω_2, x_2; et posons $f_1 = c$, $f_2 = 1 - c$. Alors, $V \in A$ entraîne $\int V_c\, d\rho^{\omega_1}_{x_1}$ et $\int V_{1-c}\, d\rho^{\omega_2}_{x_2}$ bornés par des nombres fixes, donc aussi $\int V\, d\rho^{\omega_0}_{x_0}$. D'autre part, $V_{f_1}(x_1) + V_{f_2}(x_2) = 0$ entraîne $V = V_{f_1} + V_{f_2} = 0$, donc A rencontre chaque génératrice du cône S^+.

Remarque. — La compacité locale du cône $E^+ \cup \{0\}$ peut s'établir, indépendamment de celle de S^+, de la façon suivante.

Proposition 21. 3. — *Étant donné un couple* (ω_0, x_0) *et un nombre* $\alpha > 0$, *l'ensemble* E^+_α *des fonctions* $p \in E^+ \cup \{0\}$ *telles que* $\int p\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \leqslant \alpha$ *est compact pour la topologie* T.

Soit une suite $p_n \in E^+_\alpha$, $p_n \neq 0$. Pour une suite partielle n', les points $\varphi(p_{n'})$ tendent vers un point $Y \in \overline{\Omega}$. Si $\mathcal{V}_Y$ est un voisinage fermé de Y, pour n' assez grand, $p_{n'}$ est harmonique > 0 dans $\Omega \cap \complement \mathcal{V}_Y$, et borné indépendamment de n' en tout point $\in \Omega \cap \complement \mathcal{V}_Y$. Le procédé diagonal permet donc d'extraire une nouvelle suite partielle n'', telle que $p_{n''}$ tende, uniformément sur tout compact $\subset \Omega \cap \complement \{Y\}$, vers une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega \cap \complement \{Y\}$.

Si $Y = \mathcal{A}$, $p = \lim_{n''} p_{n''}$ est harmonique $\geqslant 0$ dans Ω.

Si $Y \neq \mathcal{A}$, soit $p = \widehat{\liminf_{n''} p_{n''}}$; $p \in P^+$ par application du lemme 3. 2.

Dans les deux cas : $p_{n''} \xrightarrow{T} p$, d'après la scolie 21. 1 si $p \neq 0$, en utilisant l'expression de $(p_{n'})_f(x)$ si $p = 0$; et

$$\int p \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \liminf_{n''} \int p_{n''} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \alpha.$$

Corollaire. — *Si* A *est une base compacte du cône* S^+, $E^+ \cap A$ *est compact.*

22. Représentation intégrale des fonctions $\in S^+$, à l'aide des éléments extrémaux d'une base du cône S^+.

Rappelons deux théorèmes de G. Choquet sur l'existence et l'unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes.

Dans un espace vectoriel topologique S, séparé et localement convexe, soit un cône S^+, convexe, saillant, pointé, de base compacte A, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de A.

Théorème 1. — *Si* A *est métrisable, tout point* $\in S^+$ *est la résultante d'au moins une mesure de Radon* $\geqslant 0$ *portée par* $\mathcal{E}$; *c'est-à-dire :*

Tout point de S^+ *possède au moins une représentation de la forme* $\int p \, d\nu(p)$, *où* ν *est une mesure de Radon* $\geqslant 0$ *sur* A, *portée par* $\mathcal{E}$.

Théorème 2. — *Si le cône* S^+ *est réticulé pour la relation d'ordre qu'il définit dans* S, *la représentation intégrale précédente est unique.*

Lemme 22. 1. — *Étant donné une base compacte* A *du cône* S^+ *et une mesure* $\nu \geqslant 0$ *sur* $E^+ \cap A$, *soit* $V(x) = \int p(x) \, d\nu(p)$. *Alors :*

1) $V \in S^+$;

2) *pour tout ouvert* $\varpi \subset \overline{\Omega}$, $V_\varpi(x) = \int_{\overset{-1}{\varphi}(\varpi)} p(x) \, d\nu(p)$;

3) *par suite : pour tout couple* (ω, x), $\mu_V^{\omega, x}$ *est la projection* [29] *sur* $\overline{\Omega}$ *de la mesure* $\left(\int p \, d\rho_x^\omega\right) d\nu(p)$; *pour tout* $x \in \Omega$ *tel que*

[29] Étant donné une mesure ν sur $E^+ \cap A$, on appelle projection de ν sur $\overline{\Omega}$, la mesure μ sur $\overline{\Omega}$ définie par $\int c \, d\mu = \int c \circ \varphi(p) \, d\nu(p)$, pour toute $c \in C^+(\overline{\Omega})$.

$V(x) < +\infty$, μ_V^x *est la projection sur* $\overline{\Omega}$ *de la mesure* $p(x)\,d\nu(p)$; *pour tout* $x \in \Omega$, $\mu_V'^x$ *est la projection sur* $\overline{\Omega} - \{x\}$ *de la mesure* $p(x)\,d\nu(p)$ *sur* $E^+ \cap A \cap \overset{-1}{\varphi}(\overline{\Omega} - \{x\})$.

1) D'après la proposition 19. 1 et le théorème de Lebesgue-Fubini, V est hyperharmonique dans Ω.

D'autre part, $E^+ \cap A$ étant compact (corollaire de la proposition 21. 3), pour chaque couple (ω, x), la fonction $p \to \int p\, d\rho_x^\omega$, définie sur $E^+ \cap A$, est bornée (corollaire du lemme 21. 3); alors

$$(1) \qquad \int V\, d\rho_x^\omega = \int \left(\int p\, d\rho_x^\omega\right) d\nu(p) < +\infty,$$

et $V \in S^+$.

2) La démonstration est parallèle à celle de la proposition 17. 1, partie 2.

Pour tout ensemble borélien $B \subset \overline{\Omega}$, $I_B(x) = \int_{\overset{-1}{\varphi}(B)} p(x)\,d\nu(p)$ est une fonction $\in S^+$, harmonique dans $\Omega \cap \complement \overline{B}$, et

$$V = I_B + I_{\overline{\Omega} - B}.$$

En outre, si $\overline{B} \subset \Omega$, $I_B \in P^+$: en effet, soit ω un ouvert tel que $\overline{B} \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, et $p_0 \in E^+ \cap A \cap \overset{-1}{\varphi}(B)$. Quand p décrit le compact $E^+ \cap A \cap \overset{-1}{\varphi}(\overline{B})$ et x le compact $\partial\omega$, $p(x)$ est compris entre deux nombres > 0 fixes. On en déduit $p(x) \leqslant \lambda . p_0(x)$ pour $p \in E^+ \cap A \cap \overset{-1}{\varphi}(B)$ et $x \in \partial\omega$, donc aussi pour $x \in \Omega \cap \complement \omega$ d'après le lemme 3. 1. Alors I_B, majoré par un potentiel dans $\Omega \cap \complement \omega$, $\in P^+$.

Soit un ouvert $\varpi \subset \Omega$: I_ϖ est un ϖ-majorant de V, donc $I_\varpi \geqslant V_\varpi$. Si V' est un ϖ-majorant quelconque de V, on a $V' \geqslant I_K$ pour tout compact $K \subset \varpi$: en effet, $V' - I_K$, surharmonique dans $\Omega - K$ et dans ϖ, est surharmonique dans Ω, et $\geqslant 0$ puisque $\geqslant - I_K$, où $I_K \in P^+$.

Ainsi, $V_\varpi = I_\varpi$ pour tout ouvert $\varpi \subset \Omega$; en particulier, la partie potentielle de V, qui vaut V_Ω, est I_Ω, donc la partie harmonique de V est $I_{\mathfrak{A}}$, et $V_\varpi = I_\varpi$ pour tout ouvert $\varpi \subset \overline{\Omega}$.

THÉORÈME 22. 1. — *Étant donné une base compacte* A *du cône* S^+, *toute fonction* $V \in S^+$ *admet une représentation intégrale unique:*

$$V(x) = \int p(x)\, d\nu(p),$$

à l'aide d'une mesure de Radon $\nu \geqslant 0$ *définie sur* A, *et portée par l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des éléments extrémaux de* A.

Existence de la représentation intégrale :

a) Le théorème 1 de G. Choquet s'applique grâce aux résultats du n° 21 : S^+ est métrisable et possède une base compacte A, déterminée par le théorème 21. 2. Ainsi, pour toute $V \in S^+$:

$$\text{(1)} \qquad V = \int p \, d\nu\,(p),$$

où ν est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur A, portée par $\mathcal{E}$.

On a vu, au n° 16, que les éléments extrémaux d'une base du cône S^+ sont des potentiels à support ponctuel ou des fonctions harmoniques > 0 dans Ω ; donc $\mathcal{E} \subset E^+$ et, quels que soient $p \in \mathcal{E}$ et le couple (f, x) : $p_f(x) = p(x) . f \circ \varphi(p)$, avec la convention $p(x) . f \circ \varphi(p) = 0$ pour $x = \varphi(p)$ (n° 19, 1er cas particulier).

L'intégrale vectorielle (1) signifie que, si $(V, V') \rightarrow L(V, V')$ est une forme linéaire continue sur S, $L(V) = \int L(p) \, d\nu\,(p)$; donc, pour tout couple (f, x) :

$$V_f(x) = \int p_f(x) \, d\nu\,(p) = \int p(x) . f \circ \varphi(p) \, d\nu\,(p).$$

b) Démontrons, pour tout $x \in \Omega$, la formule intégrale

$$\text{(2)} \qquad V(x) = \int p(x) \, d\nu\,(p).$$

Il suffit d'établir (2) pour x n'appartenant pas à la réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble polaire : grâce à une base des ouverts de Ω, formée de domaines $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, dont les frontières ne passent pas aucun point de l'ensemble dénombrable (proposition 7. 2), on en déduira (2) pour tout x, car le 2e membre $\in S^+$ (lemme 22. 1).

Pour chaque $x \in \Omega$, il existe une suite croissante $f_n \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, telle que $f_n \rightarrow \chi_{\overline{\Omega} - \{x\}}$.

Alors :

— si x est négligeable pour la mesure $\mu_V^{\omega_0, x_0}$ associée à V à l'aide d'un couple (ω_0, x_0), et si $V(x) < +\infty$: $V(x) = \lim\limits_n V_{f_n}(x)$.

En effet, $V_{f_n}(x) = \int f_n \, d\mu_V^x$ (théorème 20. 1), d'où

$$\lim_n V_{f_n}(x) = \int_{\overline{\Omega} - \{x\}} d\mu_V^x :$$

le point x n'est pas chargé par la mesure μ_V^x d'après la proposition 15. 1, donc :

$$\lim_n V_{f_n}(x) = \int d\mu_V^x = V(x).$$

— Si l'ensemble borélien $\mathcal{E} \cap \overset{-1}{\varphi}(x)$ est de ν-mesure nulle :

$$\lim_n \int p(x) . f_n \circ \varphi(p) \, d\nu \, (p) = \int p(x) \, d\nu \, (p).$$

D'où la formule (2) pour x tel que : $V(x) < +\infty$, $\mu_V^{\omega_0, x_0}(\{x\}) = 0$, et $\nu\left(\mathcal{E} \cap \overset{-1}{\varphi}(x)\right) = 0$.

Unicité de la représentation intégrale: Supposons que V admette la représentation intégrale

$$V(x) = \int p(x) \, d\nu \, (p).$$

Pour tout couple (f, x) : $V_f(x) = \int f \, d\mu_V^{fx}$ (théorème 20. 1) et, d'après le lemme 22. 1, μ_V^{fx} est la projection, sur $\overline{\Omega} - \{x\}$, de la mesure $p(x) \, d\nu (p)$ sur $E^+ \cap A \cap \overset{-1}{\varphi}(\overline{\Omega} - \{x\})$; on a donc

$$V_f(x) = \int f \circ \varphi(p) \, p(x) \, d\nu \, (p).$$

Ainsi $$V_f(x) = \int p_f(x) \, d\nu \, (p),$$
ou encore

$$L(V) = \int L(p) \, d\nu \, (p)$$

pour toute forme L, linéaire et continue sur S, du type

$$(V, V') \to L(V, V') = (V, V')_f(x).$$

Comme ces formes linéaires L séparent les points de S (théorème 19. 1), on a la formule vectorielle

$$V = \int p \, d\nu \, (p). \tag{1}$$

Or le cône S^+ est réticulé pour l'ordre spécifique, donc la représentation intégrale (1) est unique lorsque ν est portée par $\mathcal{E}$.

Cas de l'unicité.

Dans ce cas, on a déjà construit (théorème 18. 1), pour chaque point $y \in \Omega$, un potentiel p_y dans Ω, de support $\{y\}$, tel que l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue, quel que soit $x \in \Omega$. La connaissance d'une base compacte du cône S^+ permet une nouvelle construction, plus élégante, d'un tel potentiel :

PROPOSITION 22. 1. — *Dans le cas de l'unicité, étant donné une base compacte* A *du cône* S^+, *soit, pour chaque point* $y \in \Omega$, p_y *le potentiel de support* $\{y\}$ *situé dans* A. *Alors, l'application* $y \to p_y$ *de* Ω *dans* $E^+ \cap A$ *est continue. Par suite, l'application* $(x, y) \to p_y(x)$ *de* $\Omega \times \Omega$ *dans* $\overline{R}^+$ *est s. c. i., et même continue pour* $x \neq y$.

Montrons que l'application $y \to p_y$, restreinte à un compact $K \subset \Omega$, est continue : l'application $p_y \to y$, de l'ensemble des potentiels $\in E^+ \cap A$ dans Ω, est continue (proposition 19. 1), et l'image réciproque de K par cette application est un ensemble fermé $\subset E^+ \cap A$, donc compact (corollaire de la proposition 21. 3).

L'application $y \to p_y$ de Ω dans $E^+ \cap A$ est donc continue. On en déduit (proposition 19. 1) que l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, est continue quel que soit $x \in \Omega$, puis (proposition 18. 1) que l'application $(x, y) \to p_y(x)$ de $\Omega \times \Omega$ dans $\overline{R}^+$ est s. c. i., et même continue pour $x \neq y$.

THÉORÈME 22. 2. — *Dans le cas de l'unicité, étant donné une base compacte* A *du cône* S^+, *soit* p_y *le potentiel de support* $\{y\}$ *situé dans* A. *Tout potentiel* P *dans* Ω *admet une représentation intégrale unique* :

$$P(x) = \int p_y(x)\, d\lambda\,(y),$$

à l'aide d'une mesure de Radon $\lambda \geqslant 0$ *dans* Ω.

Cela résulte de la proposition 22. 1 et du théorème 18. 2.

APPLICATIONS DE LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE.

A. THÉORÈME 22. 3. — *Soit* E *un ensemble ouvert ou fermé* [30] *dans* Ω, *et* V *une fonction* $\in S^+$, *admettant la représentation intégrale*

$$V(x) = \int p(x)\, d\nu(p)$$

[30] Avec l'axiome D, les conclusions seront étendues à un ensemble E quelconque (théorème 28. 2).

à l'aide des éléments extrémaux d'une base compacte du cône S^+. *Alors, pour toute mesure de Radon* $\mu > 0$ *dans* Ω, *portée par un compact* $\subset \Omega$:

$$\int \hat{R}_V^E \, d\mu = \int \left(\int \hat{R}_p^E \, d\mu \right) d\nu(p).$$

En particulier, si $\mu = \varepsilon_x$:

$$\hat{R}_V^E(x) = \int \hat{R}_p^E(x) \, d\nu(p).$$

Pour chaque $V \in S^+ : \int \hat{R}_V^E \, d\mu = \int V \, d\mu^E$ (théorème 10. 1). La formule cherchée résulte alors du théorème de Lebesgue-Fubini, appliqué à l'intégrale $\iint p(u) \, d\mu^E(u) \, d\nu(p)$.

THÉORÈME 22. 4. — *Supposons que, pour chaque point* $y \in \Omega$, *il existe un potentiel* p_y *de support* $\{y\}$, *tel que l'application* $y \to p_y(x)$, *restreinte à* $\Omega - \{x\}$, *soit continue (hypothèse réalisée en particulier dans le cas de l'unicité). Alors, étant donné un ensemble* E, *ouvert ou fermé dans* Ω, *et un potentiel* P *dans* Ω, *admettant la représentation intégrale*

$$P(x) = \int p_y(x) \, d\lambda(y),$$

pour toute mesure de Radon $\mu > 0$ *dans* Ω, *portée par un compact* $\subset \Omega$, *on a*

$$\int \hat{R}_P^E \, d\mu = \int \left(\int \hat{R}_{p_y}^E \, d\mu \right) d\lambda(y).$$

En particulier, si $\mu = \varepsilon_x$:

$$\hat{R}_P^E(x) = \int \hat{R}_{p_y}^E(x) \, d\lambda(y).$$

Même démonstration que pour le théorème 22. 3.

B. LEMME 22. 2. — *Tout potentiel* P *dans* Ω, *harmonique dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *est* T-*limite de combinaisons linéaires finies, à coefficients* $\geqslant 0$, *de potentiels extrémaux dont les supports sont contenus dans* $\Omega \cap \complement \omega$.

$P(x) = \int p(x) \, d\nu \, (p)$, où ν est une mesure $\geqslant 0$ définie sur une base compacte du cône S^+, et ne charge que l'ensemble des potentiels extrémaux $\in \overset{-1}{\varphi}(\Omega \cap \complement \omega)$ (lemme 22. 1). ν est limite vague d'une suite de mesures discrètes $\nu_n \geqslant 0$ portées par l'ensemble des potentiels extrémaux $\in S_\nu$ ([31]).

Pour chaque couple (f, x), la fonction $p \rightarrow p_f(x)$ est continue sur E^+, en particulier sur S_ν, donc P est T-limite des potentiels P_n définis par $P_n(x) = \int p(x)\, d\nu_n(p)$.

Théorème 22. 5. — *Pour que deux systèmes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ de fonctions harmoniques dans Ω coïncident, il faut et il suffit que tout $\mathcal{H}$-potentiel extrémal dans Ω de support $\{y\}$ soit aussi $\mathcal{H}'$-potentiel extrémal dans Ω de support $\{y\}$, et réciproquement.*

Condition suffisante : Soit h une fonction $\mathcal{H}$-harmonique dans un ouvert ω; montrons qu'elle est aussi $\mathcal{H}'$-harmonique dans tout ouvert $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$.

Dans ω', h est différence de deux $\mathcal{H}$-potentiels dans Ω harmoniques dans ω' (théorème 13. 1), donc h est limite uniforme, sur tout compact $\subset \omega'$, de combinaisons linéaires finies de $\mathcal{H}$-potentiels extrémaux dans Ω, soit p_i, dont les supports $\in \Omega \cap \complement \omega'$ (lemme 22. 2 et corollaire 2 de la proposition 21. 2). Par hypothèse, chaque p_i est $\mathcal{H}'$-harmonique dans ω'; il en est de même de h.

23. Suites monotones. Enveloppe inférieure d'une famille de fonctions $\in S^+$.

T-convergence des suites monotones.

Théorème 23. 1. — *Soit une suite* $V_n \in S^+$, *décroissante* (*resp. croissante et telle que* $\sup_n V_n \in S^+$). *Alors*, V_n *est* T-*convergente vers* $V = \widehat{\inf_n V_n}$ $\left(\textit{resp. } V = \sup_n V_n\right)$.

Supposons que V_n ne soit pas T-convergente vers $V = \widehat{\inf_n V_n}$ $\left(\text{resp. } V = \sup_n V_n\right)$; il existe alors un couple (f, x), un nombre $a > 0$ et une suite partielle n', tels que :

$$(1) \qquad |(V_{n'})_f(x) - V_f(x)| > a.$$

La suite $V_{n'}$ appartient à un ensemble S^+_α, pour α convenable.

([31]) On rappelle que S_ν désigne le support fermé de la mesure ν.

Donc, on peut extraire de la suite $V_{n'}$, une suite partielle $V_{n''}$ T-convergente vers $\widehat{\liminf_{n''} V_{n''}}$ (théorème 21. 2 et corollaire 1 de la proposition 21. 2). Comme $\widehat{\liminf_{n''} V_{n''}} = \widehat{\inf_n V_n}$ $\left(\text{resp. } \sup_n V_n\right)$, on obtient une contradiction avec (1).

Corollaire 1. — *Supposons qu'il existe, pour chaque $y \in \Omega$, un potentiel p_y de support $\{y\}$ tel que l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue, quel que soit $x \in \Omega$; et soit $P_\lambda(x) = \int p_y(x)\, d\lambda\,(y)$ le potentiel dans Ω associé biunivoquement à une mesure $\lambda \geqslant 0$ portée par un compact $\subset \Omega$.*

Si λ_n est une suite de mesures $\geqslant 0$ portées par un même compact $\subset \Omega$, et telles que la suite des potentiels P_{λ_n} soit décroissante (resp.: croissante et d'enveloppe supérieure $\not\equiv +\infty$), alors les mesures λ_n ont une limite vague λ, et $P_\lambda = \widehat{\inf_n P_{\lambda_n}}$ $\left(\text{resp.: } P_\lambda = \sup_n P_{\lambda_n}\right)$.

P_{λ_n} est T-convergente vers $\widehat{\inf_n P_{\lambda_n}}$ $\left(\text{resp: } \sup_n P_{\lambda_n}\right)$. D'autre part, les masses des mesures λ_n étant bornées dans leur ensemble, on peut extraire de la suite λ_n une suite partielle $\lambda_{n'}$ vaguement convergente vers une mesure λ, et (proposition 19. 3) la suite $P_{\lambda_{n'}}$ est T-convergente vers P_λ. Donc

$$P_\lambda = \widehat{\inf_n P_{\lambda_n}} \left(\text{resp.: } \sup_n P_{\lambda_n}\right),$$

et λ, indépendante de la suite partielle, est limite vague de λ_n.

Corollaire 2. — *Soit $\mathcal{F}$ un ordonné filtrant décroissant* (resp. : *croissant et d'enveloppe supérieure $\not\equiv +\infty$*) *de fonctions* $V \in S^+$. *Alors, cet ordonné* T-*converge vers* $W = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ (*resp.* : $W = \sup_{V \in \mathcal{F}} V$).

Dans les deux cas, on peut supposer $\mathcal{F}$ majoré par une fonction $\in S^+$: alors $\mathcal{F}$ est contenu dans une partie compacte S^+_α de S^+ (théorème 21. 2). Si, pour chaque $V \in \mathcal{F}$, on note $\mathcal{F}_V$ l'ensemble des fonctions $\in \mathcal{F}$ qui sont $\leqslant V$ (resp. : $\geqslant V$), la base de filtre $\{\mathcal{F}_V\}$ dans l'ensemble compact S^+_α a au moins un point adhérent : il suffit de montrer que W adhérent à cette base de filtre entraîne $W = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ (resp. : $W = \sup_{V \in \mathcal{F}} V$).

En effet, si W est adhérent à chaque $\mathcal{F}_V$, pour chaque $V \in \mathcal{F}$ il existe une suite $V_n \in \mathcal{F}_V$ (dépendant de V) telle que $V_n \xrightarrow{T} W$; alors (corollaire 1 de la proposition 21. 2),

$$W = \widehat{\liminf_n V_n},$$

donc $\widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V} \leqslant W \leqslant V$ (resp. : $V \leqslant W \leqslant \sup_{V \in \mathcal{F}} V$). Ces inégalités étant vérifiées pour chaque $V \in \mathcal{F}$, on en déduit

$$\widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V} \leqslant W \leqslant \inf_{V \in \mathcal{F}} V, \qquad \text{donc} \qquad W = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$$

(resp : $W = \sup_{V \in \mathcal{F}} V$).

Étude de l'enveloppe inférieure d'une suite de fonctions $\in S^+$.

Théorème 23. 2. — *Pour toute famille $\mathcal{F}$ de fonctions $V \in S^+$, $\inf_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ q. p. sur tout ensemble borélien $\subset \Omega$, négligeable pour la mesure μ associée à $\widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ à l'aide d'un couple (ω_0, x_0)* [32]. *Donc, si $\mathcal{B}$ est une base des ouverts de Ω, formée d'ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ dont les frontières sont μ-négligeables* [33] :

$$\inf_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V} \ \mathcal{B}\text{-p.p.}$$

1) Il suffit d'étudier le cas d'une suite décroissante :

Le raisonnement est classique. Étant donné une famille quelconque de fonctions V, on peut, grâce à un lemme de MM. Brelot et Choquet [22], en extraire une suite V_n telle que $\widehat{\inf V} = \widehat{\inf_n V_n}$.

Soit E un ensemble borélien $\subset \Omega$, négligeable pour la mesure μ de l'énoncé. Si $\inf_n V_n = \widehat{\inf_n V_n}$ q-p sur E, on en déduit $\inf V \leqslant \widehat{\inf V}$ q-p sur E, donc aussi $\inf V = \widehat{\inf V}$ q-p sur E. On se ramène à une suite décroissante W_n en posant :

$$W_1 = V_1, \ \ldots, \ W_n = \inf(V_1, V_2, \ldots, V_n).$$

2) Soit V_n une suite décroissante $\in S^+$.

[32] Ce qui ne dépend pas du couple (ω_0, x_0) (corollaire du lemme 15. 5).

[33] Il existe de telles bases (proposition 7. 2).

On sait déjà que V_n T-converge vers $V = \widehat{\inf_n V_n}$ (théorème 23. 1). Soit E un ensemble borélien $\subset \Omega$, négligeable pour les mesures $\mu_V^{\omega, x}$, V_0 une fonction finie continue $\in S^+$, et p un entier > 0. Tout revient à montrer que, si K est un compact $\subset$ E tel que :

$$x \in K \text{ entraîne } \inf_n V_n(x) \geqslant V(x) + \frac{V_0(x)}{p},$$

alors K est polaire.

Choisissons un couple (ω_0, x_0) tel que $\bar{\omega}_0$ soit disjoint à K, et posons $\mu = \mu_V^{\omega_0, x_0}$. $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver un ouvert $\beta \supset K$, d'adhérence disjointe à $\bar{\omega}_0$, et de μ-mesure $\leqslant \varepsilon$, puis une fonction $c \in C^+(\overline{\Omega})$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, $c = 1$ sur un voisinage de K et $c = 0$ sur $\complement \beta$.

Montrons alors que :

a) $(V_n)_c(x_0) \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant n_1$.

En effet, $x_0 \in \Omega \cap \complement S_c$, donc $(V_n)_c(x_0) \to V_c(x_0)$, et

$$V_c(x_0) = \int^* V_c \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int^* c d\mu \leqslant \varepsilon.$$

b) $x \in K$ entraîne $(V_n)_c(x) \geqslant \dfrac{V_0(x)}{2p}$ pour $n \geqslant n_2$ (indépendant de x).

K étant un compact $\subset \Omega \cap \complement S_{1-c}$: $(V_n)_{1-c}(x) \to (V)_{1-c}(x)$ uniformément pour $x \in K$.

D'autre part, pour chaque n :

$$x \in K \qquad \text{entraîne} \qquad V_n(x) \geqslant V(x) + \frac{V_0(x)}{p}.$$

Donc, pour n assez grand, indépendant de x :

$$x \in K \quad \text{entraîne} \quad (V_n)_c(x) \geqslant V_c(x) + \frac{V_0(x)}{2p} \geqslant \frac{V_0(x)}{2p}.$$

Conclusion : Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $U \in S^+$ satisfaisant à

$$U(x_0) \leqslant 2\varepsilon \quad \text{et} \quad U(x) \geqslant \frac{V_0(x)}{2p} \quad \text{pour} \quad x \in K.$$

On en déduit l'existence d'une fonction $\in S^+$ valant $+\infty$ en tout point $\in$ K. Par suite K est polaire.

COROLLAIRE. — *Soit* V_n *une suite* $\in S^+$. *Il existe une mesure* μ *sur* $\overline{\Omega}$, *telle que* $\liminf_n V_n = \widehat{\liminf_n V_n}$ *q-p sur tout borélien* $\subset \Omega$, μ*-négligeable. Donc, si* $\mathcal{B}$ *est une base des ouverts de* Ω, *formée d'ouverts* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ *dont les frontières sont de* μ*-mesure nulle :*

$$\liminf_n V_n = \widehat{\liminf_n V_n}\ \mathcal{B}\text{-p.p.}$$

On se borne au cas où $\liminf_n V_n \not\equiv +\infty$.

Soit $W_n = \inf(V_n, V_{n+1}, \ldots)$; on a : $\liminf_n V_n = \lim_n W_n$ et $\widehat{\liminf_n V_n} = \lim_n \hat{W}_n$ (nº 5, A; propriété 3).

Soit $\mu_n = \mu_{\hat{W}_n}^{\omega_0, x_0}$ et $\mu = \sum_n \alpha_n \mu_n$ la somme d'une série convergente, à termes > 0. Pour tout ensemble borélien $E \subset \Omega$, de μ-mesure nulle : $W_n = \hat{W}_n$ *q-p* sur E, donc aussi $\liminf_n V_n = \widehat{\liminf_n V_n}$ *q-p* sur E.

Remarque. — Le résultat du théorème 23. 2 est à comparer à celui que l'on obtient moyennant l'existence d'une base des ouverts de Ω, formée d'ouverts déterminants (corollaire 4 du théorème 11. 2). Il est très éloigné du théorème de convergence [34], démontré par M. Brelot [16 ou 18] en ajoutant l'axiome D aux axiomes 1, 2, 3, et Ω à base dénombrable; néanmoins, il sera utilisé dans la démonstration de la proposition 24. 2.

24. Étude des applications $V \to \int V\, d\rho_x^\omega$ et $V \to \hat{R}_V^{\complement\omega}$. Comparaison des topologies T et $\mathcal{T}(\mathcal{B}, X)$.

LES APPLICATIONS $V \to \int V\, d\rho_x^\omega$ ET $V \to \hat{R}_V^{\complement\omega}$.

PROPOSITION 24. 1. — 1) *Pour tout couple* (ω, x), *l'application* $V \to \int V\, d\rho_x^\omega$ *de* S^+ *dans* R^+ *est s. c. i.*

2) *Pour tout* $x \in \Omega$, *l'application* $V \to V(x)$ *de* S^+ *dans* $\overline{R}^+$ *est s. c. i.*

[34] Selon ce théorème : $\inf V = \widehat{\inf V}$ *q-p* dans Ω.

3) *L'application* $(V, x) \to V(x)$ *de* $S^+ \times \Omega$ *dans* $\overline{R}^+$ *est s. c. i.*

1) Soit, dans S^+, une suite V_n T-convergente vers V. $V = \widehat{\liminf_n V_n}$ (corollaire 1 de la proposition 21. 2); donc

$$\int V \, d\rho_x^\omega \leqslant \liminf_n \int V_n \, d\rho_x^\omega.$$

2) $V(x) = \sup \int V \, d\rho_x^\omega$ pour les ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, $\omega \ni x$; d'où la s. c. i. de l'application $V \to V(x)$.

3) Soit $(V_0, x_0) \in S^+ \times \Omega$, et $\lambda < V_0(x_0)$. Il existe un domaine $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, $\omega \ni x_0$, tel que $\lambda < \int V_0 \, d\rho_{x_0}^\omega$. Posons $2\varepsilon = \int V_0 \, d\rho_{x_0}^\omega - \lambda$.

L'application $V \to \int V \, d\rho_{x_0}^\omega$ étant s. c. i., il existe un T-voisinage de V_0, soit $\mathcal{V}$, tel que :

$V \in \mathcal{V}$ entraîne $\int V \, d\rho_{x_0}^\omega \geqslant \int V_0 \, d\rho_{x_0}^\omega - \varepsilon$, ou $\int V \, d\rho_{x_0}^\omega \geqslant \lambda + \varepsilon$.

D'autre part, il existe un voisinage X de x_0, $X \subset \omega$, tel que :

$$\left.\begin{array}{c} u \text{ harmonique} \geqslant 0 \text{ dans } \omega \\ \text{et } x \in X \end{array}\right\} \text{entraînent } u(x) \geqslant \frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon} u(x_0).$$

Par suite, si $V \in \mathcal{V}$ et $x \in X$: $\int V \, d\rho_x^\omega \geqslant \lambda$, et *a fortiori* $V(x) \geqslant \lambda$.

Désignons par s^+ la partie de S^+ formée des fonctions localement bornées dans Ω.

Proposition 24. 2. — *Soit un ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. *Il y a équivalence entre :*

d'une part, la continuité, pour un point x de chaque composante connexe de ω, *de l'application* $V \to \int V \, d\rho_x^\omega$ *de* S^+ *dans* R^+ (*resp de* s^+ *dans* R^+);

d'autre part, la continuité de l'application $V \to \hat{R}_V^{\complement\omega}$ *de* S^+ *dans* S^+ (*resp. de* s^+ *dans* s^+).

Soit dans S^+ (resp dans s^+), une suite V_n T-convergente vers $V = \widehat{\liminf_n V_n} \in S^+$ (resp. s^+).

1) Si $\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega}$ T-converge vers $\hat{R}_V^{\complement\omega}$, alors, pour tout $x \in \omega$,

$\int V_n \, d\rho_x^\omega \to \int V \, d\rho_x^\omega$: cela résulte du corollaire 2 de la proposition 21. 2.

2) Si $\int V_n \, d\rho_x^\omega \to \int V \, d\rho_x^\omega$ pour un point x de chaque composante connexe de ω, alors :

a) pour chaque $x \in \omega$: $\int V_n \, d\rho_x^\omega \to \int V \, d\rho_x^\omega$.

Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \omega$, tel que $\int V_n \, d\rho_{x_0}^\omega$ ne converge pas vers $\int V \, d\rho_{x_0}^\omega$, donc aussi un nombre $a > 0$ et une suite partielle n' tels que :

$$\left| \int V_{n'} \, d\rho_{x_0}^\omega - \int V \, d\rho_{x_0}^\omega \right| > a. \tag{1}$$

Par hypothèse, $\int V_{n'} \, d\rho_{x_1}^\omega \to \int V \, d\rho_{x_1}^\omega$, où x_1 est un point de la composante connexe ω_0 de ω, contenant x_0; donc on peut extraire de la suite n' une suite partielle n'', telle que $\int V_{n''} \, d\rho_x^\omega$ converge, pour chaque $x \in \omega_0$, vers une fonction $h(x)$ harmonique dans ω_0. On a :

$$\int V \, d\rho_x^\omega \leqslant h(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \omega_0$$

(proposition 24. 1, 1), et

$$\int V \, d\rho_{x_1}^\omega = h(x_1);$$

par suite, $\int V \, d\rho_x^\omega = h(x)$ dans ω_0, ce qui est incompatible avec (1).

b) $\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega}$ T-converge vers $\hat{R}_V^{\complement\omega}$. Pour cela, démontrons successivement :

b$_1$) Si la suite $\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega}$ est T-convergente, sa T-limite est $\hat{R}_V^{\complement\omega}$.

Soit μ_n la mesure associée à $\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega}$, à l'aide d'un couple (ω_0, x_0), $\sum\limits_n \alpha_n \mu_n$ la somme d'une série convergente à termes > 0, et μ une mesure, telle que $\liminf\limits_n V_n = \widehat{\liminf\limits_n V_n}$ q-p sur tout borélien μ-négligeable (corollaire du théorème 23. 2).

Si E est un ensemble borélien $\subset \Omega$, négligeable pour la mesure $\mu + \sum\limits_n \alpha_n \mu_n$ on a :

$$\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega} = R_{V_n}^{\complement\omega} \quad q\text{-}p \text{ sur E (théorème 23. 2),}$$

d'où

$$\liminf_n \hat{R}^{\complement\omega}_{V_n} = \begin{cases} \liminf_n V_n & \text{dans} \quad \Omega \cap \complement\omega, \\ \lim_n \int V_n \, d\rho^\omega_x & \text{dans} \quad \omega, \end{cases} \qquad q\text{-}p \text{ sur } E,$$

donc aussi $\liminf_n \hat{R}^{\complement\omega}_{V_n} = R^{\complement\omega}_V$ q-p sur E.

Donc, pour toute base $\mathcal{B}$ des ouverts de Ω, formée d'ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, dont les frontières sont négligeables pour la mesure $\mu + \sum_n \alpha_n \mu_n$:

$$\liminf_n \hat{R}^{\complement\omega}_{V_n} = R^{\complement\omega}_V \; \mathcal{B} \; p\text{-}p, \quad \text{et} \quad \widehat{\liminf_n \hat{R}^{\complement\omega}_{V_n}} = \hat{R}^{\complement\omega}_V \quad \text{dans } \Omega.$$

b_2) Si la suite $\hat{R}^{\complement\omega}_{V_n}$ n'admettait pas $\hat{R}^{\complement\omega}_V$ pour T-limite, il existerait un couple (f, x), un nombre $a > 0$ et une suite partielle n', tels que :

$$|(\hat{R}^{\complement\omega}_{V_{n'}})_f(x) - (\hat{R}^{\complement\omega}_V)_f(x)| > a.$$

Et ceci est impossible, car la suite $\hat{R}^{\complement\omega}_{V_{n'}} \in S^+_\alpha$, pour α convenable, donc on peut en extraire une suite partielle T-convergente vers $\hat{R}^{\complement\omega}_V$.

Proposition 24. 3. — *Si ω est un ouvert c. d. (resp. d.), l'application* $V \to \int V \, d\rho^\omega_x$, *$x$ quelconque $\in \omega$, de* S^+ *dans* R^+ (*resp. de* s^+ *dans* R^+), *est continue, donc aussi l'application* $V \to \hat{R}^{\complement\omega}_V$ *de* S^+ *dans* S^+ (*resp. de* s^+ *dans* s^+).

Donnons-nous, dans S^+ (resp. dans s^+), une suite V_n T-convergente vers $V = \widehat{\liminf_n V_n}$, et supposons que, pour un point $x_1 \in \omega$, $\int V_n \, d\rho^\omega_{x_1}$ ne converge pas vers $\int V \, d\rho^\omega_{x_1}$. Il existerait alors un nombre $a > 0$ et une suite partielle n', tels que :

$$\left|\int V_{n'} \, d\rho^\omega_{x_1} - \int V \, d\rho^\omega_{x_1}\right| > a. \tag{1}$$

$\int V_{n'} \, d\rho^\omega_x$ est borné indépendamment de n', en tout point $x \in \omega$ (lemme 21. 3); donc, pour une nouvelle suite partielle, n'', $\int V_{n''} \, d\rho^\omega_x$ converge en tout point $x \in \omega$, uniformément sur tout compact $\subset \omega$.

Les théorèmes 11. 3 et 11. 2 s'appliquent :
en tout point $x \in \omega$,

$$\lim_{n''} \int V_{n''}\, d\rho_x^\omega = \int \liminf_{n''} V_{n''}\, d\rho_x^\omega = \int \widehat{\liminf_{n''} V_{n''}}\, d\rho_x^\omega;$$

ce qui est en contradiction avec (1).

Corollaire. — *S'il existe un ouvert c. d.* ω, *la base du cône* S^+ *située dans l'hyperplan d'équation* $\int V\, d\rho_x^\omega = 1$, x *point quelconque* $\in \omega$, *est compacte.*

Étude de la réciproque de la proposition 24. 3, *dans le cas de l'unicité.*

Lemme 24. 1. — *Soit un ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. *Dans le cas de l'unicité :*

1) *l'ensemble* B *des points* $y \in \partial\omega$, *tels que les potentiels de support* y *ne soient pas conservés par balayage sur* $\complement\omega$, *est un* F_σ;

2) ω *complètement déterminant équivaut à* $B = \emptyset$;

3) ω *déterminant équivaut: soit à* B *polaire*;

soit à la condition : (*a*) *Étant donné* $V_0 \in s^+$, *pour tout compact non polaire* $K \subset \partial\omega$, $\hat{R}_{V_0}^K$ *est conservé par balayage sur* $\complement\omega$.

Pour chaque $y \in \Omega$, il existe un potentiel p_y de support y, tel que l'application $y \to p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue (théorème 18. 1 ou proposition 22. 1). Alors, tout potentiel P dans Ω admet une représentation intégrale unique

$$(1) \qquad P(x) = \int p_y(x)\, d\lambda\,(y),$$

à l'aide d'une mesure $\lambda \geqslant 0$ portée par le support de P (théorème 18. 2); et λ ne charge pas les ensembles polaires si $P \in s^+$. Enfin, (théorème 22. 4) :

$$(2) \qquad \hat{R}_P^{\complement\omega}(x) = \int \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x)\, d\lambda\,(y).$$

1) Soit x_i un point de chaque composante connexe ω_i de ω. B est la réunion des ensembles

$$B_i = \{y \in \partial\omega \,|\, p_y(x_i) - \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x_i) > 0\};$$

et chaque B_i est un F_σ, car l'application $y \to p_y(x_i)$, restreinte à $\partial\omega$, est continue, et l'application $y \to \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x_i)$ est s. c. i. (corollaire de la proposition 19. 3 et proposition 24. 1).

2) résulte des formules (1) et (2).

3) ω déterminant entraîne (*a*).

(*a*) entraîne B polaire : en effet, si B n'était pas polaire, il existerait un compact non polaire $K \subset B$, et, d'après les formules (1) et (2) appliquées à $P = \hat{R}_{V_0}^{K}$, P ne serait pas conservé par balayage sur $\complement\omega$.

B polaire entraîne ω déterminant.

Proposition 24. 4. — *Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Dans le cas de l'unicité, si, pour un point x de chaque composante connexe de ω, l'application $V \to \int V\, d\rho_x^{\omega}$, de s^+ dans R^+, est continue, ou bien si l'application $V \to \hat{R}_V^{\complement\omega}$, de s^+ dans s^+, est continue, alors ω est déterminant.*

Il suffit de montrer que, si V_0 est une fonction finie continue $\in S^+$, pour tout compact K non polaire $\subset \partial\omega$, $\hat{R}_{V_0}^{K}$ est conservé par balayage sur $\complement\omega$ (cf. lemme 24. 1).

Soit δ_n une suite décroissante d'ouverts, formant système fondamental de voisinages de K; $R_{V_0}^{K} = \lim_n R_{V_0}^{\delta_n}$, donc la suite $V_n = R_{V_0}^{\delta_n}$ est T-convergente vers $V = \hat{R}_{V_0}^{K}$ (théorème 23. 1), et, d'après l'hypothèse, la suite $\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega}$ est T-convergente vers $\hat{R}_V^{\complement\omega}$.

D'autre part, toute fonction $\in S^+$, $\geqslant V_n$ sur $\Omega \cap \complement\omega$, est $\geqslant V_0$ sur K. Donc : $\hat{R}_{V_n}^{\complement\omega} \geqslant \hat{R}_{V_0}^{K}$, et $\hat{R}_V^{\complement\omega} = \widehat{\liminf_n \hat{R}_{V_n}^{\complement\omega}} \geqslant \hat{R}_{V_0}^{K}$. On a donc bien $\hat{R}_V^{\complement\omega} = V$ dans Ω.

Exemple prouvant que, même dans le cas de l'unicité, la partie de la proposition 24. 3 relative à un ouvert c. d. n'admet pas de réciproque sans condition supplémentaire :

On considère, en théorie classique du potentiel, dans R^n, une boule ω de centre x_0. Soit $\omega_0 = \omega - \{x_0\}$; pour toute $V \in S^+$: $\hat{R}_V^{\complement\omega} = \hat{R}_V^{\complement\omega_0}$ dans Ω. L'application $V \to \hat{R}_V^{\complement\omega_0}$ est continue, puisque ω est c. d. Cependant, ω_0 n'est pas c. d. car, si p_{x_0} est un potentiel de support x_0, $\hat{R}_{p_{x_0}}^{\complement\omega_0} \neq p_{x_0}$.

Proposition 24. 5. — *Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, tel que tout point $\in \partial\omega$ soit adhérent à $\complement\bar{\omega}$. Dans le cas de l'unicité, si,* *pour un point x de chaque composante connexe de ω, l'application* $V \rightarrow \int V\, d\rho_x^\omega$, *de* S^+ *dans* R^+, *est continue, ou bien l'application* $V \rightarrow \hat{R}_V^{\complement\omega}$, *de* S^+ *dans* S^+, *est continue, alors* ω *est c. d.*

On désigne encore par p_y un potentiel de support y tel que l'application $y \rightarrow p_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue; alors $y \rightarrow p_y$ est continue, donc aussi, grâce à l'hypothèse, $y \rightarrow \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}$. Comme $\hat{R}_{p_y}^{\complement\omega} = p_y$ pour tout $y \in \complement\bar{\omega}$, cette identité s'étend à tout $y \in \partial\omega$, et ω est c. d. (lemme 24. 1).

Comparaison de la topologie T et de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$ de Cartan-Brelot.

Étant donné une base $\mathcal{B}$ des ouverts de Ω, formée d'ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, et un ensemble $\mathcal{X}$ dense dans Ω, on désigne [16] par $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{X})$ la moins fine des topologies sur S, rendant continues les applications

$$(V, V') \rightarrow \int (V - V')\, d\rho_x^\omega,$$

de S dans R, pour $\omega \in \mathcal{B}$ et $x \in \omega \cap \mathcal{X}$.

Sur S^+, $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{X})$ est identique à $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$.

Proposition 24. 6. — *Pour toute base* $\mathcal{B}$, *la topologie* $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$ *est plus fine que la topologie* T, *sur l'espace* S^+.

Si $\mathcal{B}_0$ est une base dénombrable extraite de $\mathcal{B}$, la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}_0, \Omega)$ est métrisable et moins fine que $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$.

Il suffit donc de montrer que, étant donné une suite $V_n \in S^+$ convergente, selon la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$, vers $V \in S^+$, alors V_n T-converge vers V.

1) Si la suite V_n est T-convergente vers $V' \in S^+$, alors $V' = V$: On a $V \geqslant V'$ car, pour tout ouvert $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega$:

$$\int V\, d\rho_x^\omega = \lim_n \int V_n\, d\rho_x^\omega \geqslant \int V' d\rho_x^\omega \quad \text{(proposition 24. 1).}$$

D'autre part, $V' \geqslant V$: en effet, pour tout ouvert $\omega \in \mathcal{B}$, $\omega \ni x$:

$$V_n(x) \geqslant \int V_n\, d\rho_x^\omega, \quad \text{d'où} \quad V'(x) = \widehat{\liminf_n V_n}(x) \geqslant \int V\, d\rho_x^\omega.$$

2) La suite V_n est T-convergente vers V :

Sinon, il existerait un couple (f, x), un nombre $a > 0$ et une suite partielle n', tels que $|(V_{n'})_f(x) - (V)_f(x)| > a$; et ceci est incompatible avec l'existence d'une suite partielle T-convergente, extraite de la suite $V_{n'}$ (théorème 21. 2), et dont la T-limite serait V, d'après la partie 1).

COROLLAIRE. — *Si une suite* $V_n \in S^+$ *est convergente, selon la topologie* $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$, *vers* $V \in S^+$, *alors* $V = \widehat{\liminf_n V_n}$.

PROPOSITION 24. 7. — *S'il existe une base* $\mathcal{D}$ *formée d'ouverts c. d.,* [34 bis] *les topologies* $\mathcal{T}(\mathcal{D}, \Omega)$ *et* T *sont identiques sur* S^+.

En effet, la topologie T rend continue chaque application $V \to \int V\, d\rho_x^\omega$ de S^+ dans R^+, pour $\omega \in \mathcal{D}$ et $x \in \omega$ (proposition 24. 3); donc elle est plus fine que $\mathcal{T}(\mathcal{D}, \Omega)$.

Remarque. — L'axiome 4 entraîne donc l'existence d'une base compacte du cône S^+ muni de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \Omega)$, où $\mathcal{B}$ est la base des ouverts de Ω formée d'ouverts réguliers c. d. : c'est ce que montre *directement* [16] M. Brelot pour obtenir la représentation intégrale, d'une façon qui est alors bien plus courte.

[34 bis] En particulier si l'on suppose l'axiome 4 : Il existe une base des ouverts de Ω formée d'ouverts réguliers c. d..

CHAPITRE V

CONSÉQUENCES DE L'AXIOME D ET PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES.

Hypothèses de ce chapitre :
les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3;
il existe un potentiel > 0 dans Ω;
la topologie de Ω admet une base dénombrable.

25. Recherche de propriétés équivalentes à l'axiome D.

Rappelons que M. Brelot a introduit l'axiome suivant :

(D) Si P est un potentiel $\in s^+$, c'est-à-dire localement borné dans Ω, toute fonction $\in S^+$, majorant P sur son support S, le majore dans Ω; autrement dit : $R_P^S = P$ dans Ω.

Énoncé équivalent [34 ter] : Tous les ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ sont déterminants.

Conséquences de D [18 *et* 23] :

(D′) Pour tout potentiel $P \in s^+$, si la restriction de P à son support est finie continue, alors P est fini continu dans Ω.

(D″) L'ensemble des points d'effilement d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, situés sur $\partial\omega$, est de mesure harmonique nulle pour ω.

(C) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de fonctions $V \in S^+$: $\inf_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ q.p. dans Ω (théorème de convergence).

Notons une application fondamentale de C au problème de Dirichlet dans un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$: les points irréguliers pour ω coïncident avec les points d'effilement de $\complement\omega$ situés sur $\partial\omega$, et forment un ensemble polaire.

[34 ter] Il suffit de voir que, étant donné $P \in s^+$, la relation $R_P^{\complement\omega} = P$, pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ où P est harmonique, entraîne $R_P^{\complement\delta} = P$ pour tout ouvert $\delta \subset \Omega$ où P est harmonique; on utilise pour cela la propriété 5 (n° 5, B).

Nous allons montrer que D′ ou D″ est équivalent à D et, dans le cas de l'unicité, que C est équivalent à D.

Équivalence de (D) et de (D′).

Théorème 25. 1. — *Supposons que, pour tout potentiel* $P \in s^+$, *la continuité de la restriction de* P *à son support entraîne la continuité de* P *dans* Ω. *Alors, l'axiome* D *est vérifié.*

Soit P un potentiel $\in s^+$, de support S; montrons que, dans $\Omega : R_P^S = P$ (1).

Si P est continu dans Ω, l'égalité (1) résulte du lemme 3. 1.

Si P est quelconque, il suffit de montrer l'égalité (1) en un point de chaque composante connexe de $\Omega \cap \complement S$. Soit ω_i une composante connexe de $\Omega \cap \complement S$ et (ω_0, x_0) un couple tel que $\bar{\omega}_0 \subset \omega_i$; le théorème de Lusin permet de déterminer un ouvert $\delta \subset \Omega$, de $\mu_P^{\omega_0, x_0}$-mesure $\leqslant \varepsilon$, et tel que la restriction de P à $\Omega \cap \complement \delta$ soit continue. Le théorème de partition fournit la décomposition :

$$P = P_\delta + P'_\delta,$$

où P'_δ est la plus grande minorante spécifique de P, harmonique dans δ. D'après l'hypothèse, P'_δ est continu dans Ω; d'où $R^S_{P'_\delta} = P'_\delta$ dans Ω, et $R_P^S \geqslant P'_\delta$ dans Ω. Comme

$$P_\delta(x_0) = \int P_\delta \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \varepsilon,$$

R_P^S est arbitrairement voisin de P au point x_0, et l'égalité (1) est réalisée au point x_0.

Équivalence de (D) et de (D″).

Théorème 25. 2. — *Supposons que, pour tout ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, *les points d'effilement de* ω, $\in \partial\omega$, *forment un ensemble de mesure harmonique nulle pour* ω. *Alors, l'axiome* D *est vérifié.*

Soit P un potentiel $\in s^+$, de support S, et dont la restriction à S est continue. Démontrons la continuité de P dans Ω, c'est-à-dire, pour tout $x_0 \in \Omega \cap \partial S$:

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \cap \complement S \\ x \to x_0}} P(x) = P(x_0). \tag{1}$$

1) Démonstration de l'égalité (1), en tout point x_0 où $\complement S$ n'est pas effilé.

L'inégalité $\limsup\limits_{\substack{x \in \Omega \cap \complement S \\ x \to x_0}} P(x) \geqslant P(x_0)$ est immédiate.

Supposons qu'il existe un nombre λ tel que

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \cap \complement S \\ x \to x_0}} P(x) > \lambda > P(x_0).$$

Si h est une fonction harmonique > 0 au voisinage de x_0, égale à 1 au point x_0, il existe un voisinage ω de x_0, qu'on peut supposer ouvert et régulier, tel que $P < \lambda . h$ sur $\bar{\omega} \cap S$.

Reprenant une idée de M. Brelot, on considère l'ensemble ouvert δ des points $\in \omega$, où $P > \lambda . h$. La frontière de δ comprend :

des points $\in \partial\omega \cap \complement S$: ils sont réguliers pour δ, puisqu'ils le sont pour ω ;

des points $\in \partial\delta$ et situés dans $\omega \cap \complement S$: en chacun de ces points, $P = \lambda . h$, donc ils sont réguliers pour δ, $P - \lambda . h$ étant une fonction de Bouligand associée à chacun d'eux;

des points $\in \bar{\omega} \cap \partial S$, en particulier x_0 : ce sont des points d'effilement de δ, donc ils forment un ensemble de mesure harmonique nulle pour δ.

Par suite, la fonction $P - H_P^\delta$, harmonique dans δ et bornée au voisinage de chaque point $\in \partial\delta$, tendant vers 0 à la frontière sauf peut-être sur un ensemble de mesure harmonique nulle, est identiquement nulle dans δ.

D'autre part, l'hypothèse faite sur $\complement S$ entraîne la régularité du point x_0 pour δ : en effet, δ est effilé au point x_0, ainsi que l'ensemble des points $\in \omega \cap \complement S$ où $P = \lambda . h$ (car $P(x_0) < \lambda$) ; par suite, $\complement \bar{\delta} \cap \complement S$ n'est pas effilé au point x_0, *a fortiori* $\complement \bar{\delta}$ n'est pas effilé au point x_0, et x_0 est régulier pour δ (propriété 2; n° 5, D).

La contradiction cherchée est obtenue, car :

$$\limsup_{\substack{x \in \delta \\ x \to x_0}} P(x) = \limsup_{\substack{x \in \delta \\ x \to x_0}} H_P^\delta(x) \leqslant \limsup_{\substack{y \in \partial\delta \\ y \to x_0}} P(y) \leqslant \lambda,$$

donc

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \cap \complement S \\ x \to x_0}} P(x) \leqslant \lambda.$$

2) Démonstration de l'égalité (1) en un point x_0 queclonque $\in \Omega \cap \partial S$.

D'après le lemme 7. 4, il existe deux ouverts disjoints ω et ω' non effilés au point x_0. Le théorème de partition appliqué à P, et à l'ouvert ω par exemple, donne : $P = P_\omega + P'_\omega$, où P_ω et P'_ω sont deux potentiels $\in s^+$, dont les supports ont un complémentaire non effilé au point x_0. La partie 1) du raisonnement prouve la continuité de P_ω et de P'_ω au point x_0, donc aussi celle de P.

Équivalence de (D) et de (C), dans le cas de l'unicité.

Théorème 25. 3. — *Dans le cas de l'unicité, le théorème de convergence entraîne l'axiome* D.

Une conséquence du théorème de convergence (sans supposer l'unicité) est, que la balayée d'une fonction $V \in S^+$, sur un ensemble $E \subset \Omega$, est la plus petite fonction $\in S^+$, majorant V q.p sur E; par suite, pour tout compact K non polaire, $\hat{R}_V^K$ est conservé par balayage sur K.

Si l'on se place dans le cas de l'unicité, cette propriété entraîne que tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ est déterminant (lemme 24. 1); donc l'axiome D est vérifié.

26. Une notion de capacité; un autre équivalent de l'axiome D.

Définition d'une capacité.

Théorème 26. 1. — *Soit une fonction finie continue* $V_0 \in S^+$, *et un couple* (ω_0, x_0). $\varphi(K) = \int R_{V_0}^K \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ *définit, pour* K *compact variable* $\subset \Omega$, *une capacité forte de Choquet (c'est-à-dire est une fonction croissante, continue à droite et fortement sous-additive de* K); *la capacité correspondante d'un ouvert* $\omega \subset \Omega$ *est*

$$\varphi(\omega) = \int R_{V_0}^{\omega} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \quad (^{35}).$$

Pour tout ensemble E ouvert ou fermé dans Ω, R_{V_0} est

(35) M. Brelot a montré, avec les axiomes 1, 2, 3, que $R_{V_0}^K(x_0)$ est une capacité forte de Choquet. Pour éviter que le point x_0 ait une capacité > 0, on définit ici une capacité voisine, et même coïncidant avec la précédente pour les compacts K disjoints à $\bar{\omega}_0$.

une fonction borélienne localement bornée, donc $\int R^{E}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0}$ a un sens; en outre, c'est une fonction croissante de E.

Pour K compact, $\varphi(K)$ est continue à droite : en effet, si ω_n est une suite décroissante d'ouverts formant système fondamental de voisinages de K,

$$R^{K}{}_{0} = \lim_n R^{\omega_n}_{0} \qquad \text{et} \qquad \int R^{K}{}_{0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} = \lim_n \int R^{\omega_n}_{0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0};$$

elle est fortement sous-additive, car, pour chaque x, $R^{K}_{V_0}(x)$ est une fonction fortement sous-additive de K (cf. [18]).

Donc, $\varphi(K)$ définit une capacité forte de Choquet.

La capacité correspondance d'un ouvert $\omega \subset \Omega$ est

$$\varphi(\omega) = \sup_{K \subset \omega} \varphi(K).$$

ω est réunion d'une suite croissante de compacts K_n, et $R^{\omega}_{V_0} = \lim_n R^{K_n}_{V_0}$ (propriété 2; n° 5, B); par suite,

$$\int R^{\omega}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} = \lim_n \int R^{K_n}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} = \varphi(\omega).$$

Remarque. — La capacité extérieure correspondante d'un ensemble $E \subset \Omega$ est $\varphi^*(E) = \inf_{\omega \supset E} \varphi(\omega)$; si ω_0 est déterminant, $\int R^{E}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0}$ a un sens quel que soit E (théorème 11. 2), et l'on peut montrer que c'est $\varphi^*(E)$.

Proposition 26. 1. — *Il y a identité entre les ensembles polaires de Ω et les ensembles de capacité extérieure nulle.*

Si $\varphi^*(E) = 0$, on a :

$$\inf_{\omega \supset E} \int R^{\omega}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} = 0, \qquad \text{donc aussi} \qquad \int \hat{R}^{E}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} = 0.$$

Par suite $\hat{R}^{E}_{V_0} = 0$ dans Ω, et E est polaire.

Réciproquement, soit E polaire et V une fonction $\in S^+$ valant $+\infty$ sur E. Si $\omega_n = \{x \in \Omega \mid V(x) > n . V_0(x)\}$, on a

$$V \geqslant n . R^{\omega_n}_{V_0} \qquad \text{dans } \Omega \text{ et} \qquad \varphi(\omega_n) \leqslant \frac{\int V\, d\rho^{\omega_0}_{x_0}}{n};$$

d'où $\inf_{\omega \supset E} \varphi(\omega) = 0$.

Application : un équivalent de l'axiome D.

La capacité dont il est question dans la suite de ce n° est celle qui vient d'être définie par le théorème 26. 1, à l'aide des éléments V_0 et (ω_0, x_0), choisis une fois pour toutes.

Lemme 26. 1. — *Supposons l'axiome* D *vérifié. Étant donné* $V \in s^+$, *et deux nombres* > 0, ε *et* η, *il existe un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *dont la capacité est* $\leqslant \varepsilon$, *et deux fonctions* V_1 *et* $V_1' \in S^+$, *telles que :*

dans Ω : $V = V_1 + V_1'$;

$\int V_1 \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \eta$;

V_1' *est finie continue dans* Ω, *et majorée par* $\dfrac{\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}{\varepsilon} V_0$ *sur* $\Omega \cap \complement \omega$.

Soit $\omega = \left\{ x \in \Omega \mid V(x) > \dfrac{\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}{\varepsilon} V_0(x) \right\}$; dans Ω :

$$V \geqslant \frac{\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}{\varepsilon} R_{V_0}^{\omega},$$

d'où $\varphi(\omega) = \int R_{V_0}^{\omega} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \varepsilon$.

D'autre part, le théorème de Lusin permet de déterminer un ouvert $\delta \subset \Omega$, de μ^{ω_0, x_0}-mesure $\leqslant \eta$, et tel que la restriction de V à $\Omega \cap \complement \delta$ soit continue. Donc, si $V = V_\delta + V_\delta'$ est la décomposition du théorème de partition, on a : $\int V_\delta \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \eta$, et V_δ', fini continu sur son support, est fini continu dans Ω (conséquence de l'axiome D).

Alors $V_1 = V_\delta$ et $V_1' = V_\delta'$ répondent à la question.

Théorème 26. 2. — *Supposons l'axiome* D *vérifié. Étant donné une fonction* $V \in S^+$ *et un nombre* $a > 0$, *il existe un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *de capacité* $\leqslant a$, *et tel que la restriction de* V *à* $\Omega \cap \complement \omega$ *soit continue* [36].

1) *Cas où* V *est localement bornée.*

On applique le lemme 26. 1, à la fonction V :

il existe un ouvert ω_1 et une décomposition $V = V_1 + V_1'$,

[36] Ce théorème est analogue au théorème 1 de G. Choquet [30]; sa démonstration, dans le cas où V est localement bornée, est directement inspirée de celle de M. Choquet

tels que $\varphi(\omega_1) \leqslant \frac{a}{2}$, $\int V_1 \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^2$, V'_1 fini continu dans Ω et majoré par $\dfrac{\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}{\frac{a}{2}} V_0$ sur $\Omega \cap \complement \omega_1$;

puis, successivement, à chaque fonction V_n, $n \geqslant 1$: il existe un ouvert ω_{n+1} et une décomposition

$$V_n = V_{n+1} + V'_{n+1},$$

tels que

$$\varphi(\omega_{n+1}) \leqslant \frac{a}{2^{n+1}}, \qquad \int V_{n+1} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^2,$$

V'_{n+1} fini continu dans Ω et majoré par

$$\frac{\int V_n \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}{\frac{a}{2^{n+1}}} V_0 \leqslant \frac{a}{2^{n-1}} V_0$$

sur $\Omega \cap \complement \omega_{n+1}$.

Soit $W = \lim\limits_n V_n$ et $W' = \sum\limits_n V'_n$; W est une $\mathcal{S}$ fonction, $W' \in S^+$, et, dans Ω : $V = W + W'$, d'où $V = \hat{W} + W'$ (n^o 5, A; propriété 2) et $\hat{W} = W$. Comme $\int V_n \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \to 0$, $W = 0$ dans Ω et $V = \sum\limits_n V'_n$.

Alors, l'ouvert $\omega = \bigcup\limits_n \omega_n$ répond à la question : $\varphi(\omega) \leqslant a$, et, sur $\Omega \cap \complement \omega$, la série des fonctions continues V'_n a une somme continue, car elle est normalement convergente sur tout compact.

2) *Cas général.*

V est limite de la suite $V_n = \inf(V, nV_0)$ et, pour chaque n, il existe un ouvert ω_n, de capacité $\leqslant \frac{a}{2^{n+1}}$, tel que la restriction de V_n à $\Omega \cap \complement \omega_n$ est continue.

Soit, d'autre part,

$$\omega' = \left\{ x \in \Omega \,|\, V(x) > \frac{\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}}{\frac{a}{2}} V_0(x) \right\}; \qquad \varphi(\omega') \leqslant \frac{a}{2},$$

donc, si

$$\omega = \omega' \cup \left(\bigcup_{n \geqslant 1} \omega_n\right), \qquad \varphi(\omega) \leqslant a.$$

Montrons que la restriction de V à $\Omega \cap \complement\omega$ est continue. Soit $x \in \Omega \cap \complement\omega$; il existe un rang N tel que $V(x) < N.V_0(x)$, d'où $V_N(x) < N.V_0(x)$. La restriction de V_N à $\Omega \cap \complement\omega$ est continue; par suite, sur l'intersection de $\Omega \cap \complement\omega$ et d'un voisinage de x: $V_N < N.V_0$ et $V = V_N$.

THÉORÈME 26. 3. — *Si, étant donné* $V \in s^+$ *et un nombre* $a > 0$, *il existe un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *de capacité* $\leqslant a$, *et tel que la restriction de* V *à* $\Omega \cap \complement\omega$ *soit continue, alors l'axiome* D *est vérifié.*

Grâce au théorème 25. 2, il suffit de démontrer la propriété D'' : Étant donné un ouvert $\delta \subset \bar{\delta} \subset \Omega$, les points d'effilement de δ, $\in \partial\delta$, forment un ensemble e de mesure harmonique nulle pour δ; ou encore : $\overline{H}^{\delta}_{\chi_e} = 0$ en chaque point $x_0 \in \delta$.

Choisissons $\omega_0 \ni x_0$, tel que $\bar{\omega}_0 \subset \delta$, ce qui est loisible, car l'hypothèse est indépendante du couple (ω_0, x_0) servant à définir la capacité (cf. lemme 15. 5).

Les points d'effilement de δ sont caractérisés par la condition

$$R^{\delta}_{U}(x) < U(x),$$

où U est le potentiel continu déterminé par le théorème 9. 1. D'après l'hypothèse, étant donné $a > 0$, il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que : $\int R^{\omega}_{V_0}\, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \leqslant a$ et la restriction de R^{δ}_{U} à $\Omega \cap \complement\omega$ est continue.

Donc, à chaque point $x_0 \in \partial\delta$ où δ est effilé, est associé un voisinage de x_0 dont l'intersection avec δ est contenue dans ω, et

$$\liminf_{\substack{x \in \delta \\ x \to x_0}} R^{\omega}_{V_0}(x) = V_0(x_0).$$

Conclusion : $\overline{H}^{\delta}_{V_0\chi_e}$, majoré par $R^{\omega}_{V_0}$ dans δ, est arbitrairement petit au point x_0.

27. Recherche de propriétés équivalentes au théorème de convergence.

Rappelons le théorème de convergence :

(C) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de fonctions $\in S^+$, $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V}$ q.p. dans Ω.

Nous allons montrer que les énoncés suivants, qui sont tous des conséquences du théorème de convergence, lui sont équivalents :

(C_1) Étant donné un compact $K \subset \Omega$ non polaire et un potentiel P_0 fini continu dans Ω, $\hat{R}^K_{P_0} = P_0$ en un point au moins de K.

(C_2) Étant donné un compact $K \subset \Omega$ non polaire, il existe un point $x_0 \in \partial K$, régulier pour l'intersection de $\complement K$ et de tout ouvert ω tel que $x_0 \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ [38].

(C_3) L'ensemble des points-frontières irréguliers de tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ est de mesure harmonique nulle pour ω [39].

LEMME 27. 1. — C_3 *entraîne* C_2.

Soit un compact $K \subset \Omega$, non polaire, et un ouvert $\omega \supset K$, $\bar{\omega} \subset \Omega$. ∂K est de mesure harmonique > 0 pour $\omega - K$ (proposition 13. 1) ; il existe donc un point $x_0 \in \partial K$, régulier pour $\omega - K$.

LEMME 27. 2. — C_2 *entraîne* C_1.

Soit un compact $K \subset \Omega$, non polaire, et ω un ouvert $\supset K$, $\bar{\omega} \subset \Omega$. Si $\underset{*}{P_0}$ est la fonction, définie sur la frontière de $\omega - K$, égale à P_0 sur ∂K et à 0 sur $\partial\omega$, on a par hypothèse

$$\lim_{\substack{x \in \omega - K \\ x \to x_0}} H^{\omega - K}_{\underset{*}{P_0}}(x) = P_0(x_0).$$

Comme $H^{\omega - K}_{\underset{*}{P_0}} \leqslant R^K_{P_0} \leqslant P_0$ dans $\omega - K$, on en déduit $\lim\limits_{\substack{x \in \omega - K \\ x \to x_0}} R^K_{P_0}(x) = P_0(x_0)$ et la continuité de $R^K_{P_0}$ au point x_0.

[38] Pour tout compact K d'intérieur non vide, C_1 est vérifié sans supposer le théorème de convergence, ainsi que C_2 d'après le théorème 8. 2.

[39] Le théorème de convergence entraîne même que cet ensemble est polaire. Remarque analogue pour C_1 et C_2.

Lemme 27. 3. — C_1 *entraîne*: $\hat{R}_V^K = V$ *q.p. sur* K, *pour tout compact* $K \subset \Omega$ *et toute* $V \in S^+$.

— Pour tout potentiel P_0 fini continu dans Ω, $\hat{R}_{P_0}^K = P_0$ q.p. sur K:

En effet, s'il existait un compact K_1 non polaire $\subset K$, tel que

$$(1) \qquad \hat{R}_{P_0}^K(x) < P_0(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in K_1,$$

on aurait, d'après l'hypothèse, en un point $x_1 \in K_1$:

$$\hat{R}_{P_0}^{K_1}(x_1) = P_0(x_1) \qquad \text{et } a\ fortiori \qquad \hat{R}_{P_0}^K(x_1) = P_0(x_1),$$

en contradiction avec (1).

— Si V est une fonction quelconque $\in S^+$, elle est limite d'une suite croissante de potentiels P_n finis continus dans Ω, et $\hat{R}_{P_n}^K = P_n$ q.p. sur K entraîne $\hat{R}_V^K = V$ q.p. sur K (proposition 10. 1).

Théorème 27. 1. — *Chacun des énoncés* C_1, C_2, C_3 *est équivalent au théorème de convergence.*

Il suffit de montrer que C_1 entraîne le théorème de convergence pour une suite décroissante de fonctions $V_n \in S^+$ (cf. théorème 23. 2).

Soit V_0 une fonction finie continue $\in S^+$, et p un entier > 0; on va montrer que tout compact $K \subset \Omega$ sur lequel

$$\inf_n V_n \geqslant \widehat{\inf_n V_n} + \frac{V_0}{p}$$

est nécessairement polaire.

Posons $V = \widehat{\inf_n V_n}$. Pour chaque n: $V_n \geqslant V + \frac{V_0}{p}$ sur K; donc: $V_n \geqslant \hat{R}_V^K + \frac{1}{p}\hat{R}_{V_0}^K$ dans Ω (proposition 10. 1), et $V \geqslant \hat{R}_V^K + \frac{1}{p}\hat{R}_{V_0}^K$ dans Ω. Or, si K est non polaire, $\hat{R}_V^K = V$ en un point au moins (lemme 27. 3).

28. Balayage d'une mesure, moyennant l'axiome D.

Dans une 1re partie, on complète, grâce à l'axiome D, les résultats obtenus principalement au chapitre I, n° 10; puis on donne des propriétés de la mesure balayée.

A) Propriétés complémentaires de la balayée d'une fonction, moyennant l'axiome D.

Théorème 28. 1. — *Il existe un potentiel* U, *fini continu dans* Ω, *tel que, pour tout ensemble* $E \subset \Omega$, *les points* $\in \Omega$ *où* E *est effilé, coïncident avec les points* $\in \Omega$ *où* $\hat{R}_U^E < U$.

Reprenons la fonction U déterminée au théorème 9. 1.

1) Soit E effilé au point x_0 :

si $x_0 \notin E$, $\hat{R}_U^E(x_0) \leqslant R_U^E(x_0) < U(x_0)$ (théorème 9. 1);

si $x_0 \in E$, x_0 est polaire et $\hat{R}_U^E(x_0) = \hat{R}_U^{E-\{x_0\}}(x_0) < U(x_0)$.

2) Inversement, soit E non effilé au point x_0.

D'après l'axiome D, pour toute fonction $v \in S^+$, on a $\hat{R}_v^E = v$ q.p. sur E. Donc, $\hat{R}_v^E$ est égal à v sur un ensemble non effilé au point x_0 et $\hat{R}_v^E(x_0) = v(x_0)$.

Conséquences :

1) L'ensemble des points $\in E$, où E est effilé, est polaire ([40]).

2) L'ensemble des points $\in \Omega$, où E est effilé, est un F_σ.

Proposition 28. 1. — *Soit* E *un ensemble quelconque* $\subset \Omega$.

1) *Si* v_n *est une suite croissante* $\in S^+$ *et* $v = \lim\limits_n v_n \in S^+$:

$$\hat{R}_v^E = \lim_n \hat{R}_{v_n}^E. \tag{1}$$

2) *Si* v_1 *et* $v_2 \in S^+$:

$$\hat{R}_{v_1+v_2}^E = \hat{R}_{v_1}^E + \hat{R}_{v_2}^E. \tag{2}$$

1) $\hat{R}_v^E \geqslant \lim\limits_n \hat{R}_{v_n}^E$. D'autre part, $\hat{R}_v^E$ est la plus petite fonction $\in S^+$, majorant v q.p. sur E, d'où $\hat{R}_v^E \leqslant \lim\limits_n \hat{R}_{v_n}^E$.

2) Toute $v \in S^+$ est limite d'une suite croissante de $v_n \in S^+$, finies continues dans Ω, et l'égalité (2) se déduit de la proposition 10. 3.

Corollaire. — *Étant donné une mesure de Radon* > 0, μ, *sur* Ω, *portée par un compact* $\subset \Omega$, *et un ensemble* $E \subset \Omega$, *alors, pour toute* $v \in S^+$:

$$\int \hat{R}_v^E \, d\mu = \int v \, d\mu^E, \tag{1}$$

où μ^E *est la balayée de* μ *sur* E.

([40]) Pour ce théorème fondamental, l'emploi d'une telle fonction U remonte au cas classique [4, 6 et 25]; il n'est d'ailleurs pas indispensable, même dans le cas général (cf. [18]; théorème 31).

Cette propriété complète le théorème 10. 1, et la formule (1) s'obtient en considérant v comme limite d'une suite croissante de potentiels finis continus dans Ω.

THÉORÈME 28. 2 (en remplaçant l'axiome 3 par 3'). — *Soit un ensemble quelconque* $E \subset \Omega$, *et* V *une fonction* $\in S^+$, *admettant la représentation intégrale* $V(x) = \int p(x)\, d\nu(p)$, *à l'aide des éléments extrémaux d'une base compacte du cône* S^+. *Alors, pour toute mesure de Radon* $\mu > 0$ *sur* Ω, *portée par un compact* $\subset \Omega$:

$$\int \hat{R}_V^E\, d\mu = \int \left(\int \hat{R}_p^E\, d\mu \right) d\nu(p).$$

Même démonstration que celle du théorème 22. 3.

B) NOUVELLES PROPRIÉTÉS DE LA BALAYÉE μ^E D'UNE MESURE DE RADON $\mu > 0$, PORTÉE PAR UN COMPACT $\subset \Omega$, SUR UN ENSEMBLE $E \subset \Omega$ (41).

PROPOSITION 28. 2. — *L'ensemble des points* $\in \Omega$, *où* E *est effilé, est de* μ^E*-mesure nulle.*

L'ensemble des points $\in \Omega$, où E est effilé, est caractérisé par $\hat{R}_U^E < U$ (théorème 28. 1). $\hat{R}_U^E$ est invariant par balayage sur E; donc $\int \hat{R}_U^E\, d\mu = \int \hat{R}_U^E\, d\mu^E = \int U\, d\mu^E$, et $\hat{R}_U^E = U$ μ^E-p.p.

PROPOSITION 28. 3. — *Pour que* $\mu = \mu^E$, *il faut et il suffit que* μ *soit portée par l'ensemble des points* $\in \Omega$ *où* E *n'est pas effilé.*

La condition est suffisante, car, pour toute $v \in S^+$, $\hat{R}_v^E = v$ en tout point où E n'est pas effilé.

Réciproquement, si $\mu = \mu^E$, μ est portée par l'ensemble des points $\in \Omega$ où E n'est pas effilé, d'après la proposition 28. 2.

PROPOSITION 28. 4. — *Tout ensemble* $\subset \Omega$, *polaire et de* μ*-mesure nulle, est de* μ^E*-mesure nulle.*

Soit $B \subset \Omega$, un ensemble polaire de μ-mesure nulle, qu'on peut supposer borélien.

(41) Ces propriétés sont inspirées de celles que M. BRELOT a démontrées dans le cas classique [6 et 12]. On notera toutefois que, dans le cas classique, si μ engendre le potentiel p, μ^E engendre le potentiel $\hat{R}_p^E$; cette relation entre les mesures μ et μ^E n'existe pas ici.

1^er^ cas : B est disjoint à S_μ.

Soit K un compact $\subset$ B. Il existe une fonction $v \in S^+$, valant $+\infty$ sur K et continue sur le compact S_μ, donc $\hat{R}_v^E$ est μ-sommable. Par suite, K est de μ^E-mesure nulle, ainsi que B.

Cas général :

Soit E_1 l'ensemble des points $\in \Omega$ où E est effilé, et

$$E_2 = \Omega - E_1.$$

On peut partager B en ses intersections B_1 et B_2 avec E_1 et E_2, et μ en ses restrictions μ_1 et μ_2 à E_1 et E_2. D'après la proposition 28. 2, il suffit de raisonner sur B_2, et d'après la proposition 28. 3, il suffit de raisonner sur μ_1. L'ensemble E_1 est réunion d'une suite croissante de fermés F_n, donc μ_1 est limite vague de la suite croissante ν_n, restriction de μ_1 à F_n, et μ_1^E est limite vague de la suite croissante ν_n^E (propriété 3 de la mesure μ^E, n° 10). B_2 est disjoint à S_{ν_n}, donc, d'après le 1^er^ cas, B_2 est de ν_n^E-mesure nulle, et par conséquent, de μ_1^E-mesure nulle.

Lemme 28. 1. — *Soit ω_n une suite décroissante d'ouverts $\subset \Omega$, $A = \bigcap_n \omega_n$ et E un ensemble tel que $\Omega \cap \complement A \subset E \subset \Omega$. Pour toute* $V \in S^+$:

$$\hat{R}_V^E = \lim_n \left[\hat{R}_V^{\complement\omega_n} + (\hat{R}_{v_n}^{E\cap A})_{\omega_n}\right] \qquad \textit{dans } A,$$

avec $v_n = V - \hat{R}_V^{\complement\omega_n}$ dans ω_n.

1) Pour chaque n, $\hat{R}_V^E \geqslant \hat{R}_V^{\complement\omega_n} + (\hat{R}_{v_n}^{E\cap A})_{\omega_n}$ dans ω_n :

Soit $W \in S^+$, $W \geqslant V$ sur E; $W - \hat{R}_V^{\complement\omega_n}$ est $\geqslant 0$, surharmonique dans ω_n, et $\geqslant v_n$ sur $E \cap A$ en particulier. Donc :

$$W - \hat{R}_V^{\complement\omega_n} \geqslant (\hat{R}_{v_n}^{E\cap A})_{\omega_n} \qquad \text{dans } \omega_n.$$

2) $\hat{R}_V^E \leqslant \lim_n \left[\hat{R}_V^{\complement\omega_n} + (\hat{R}_{v_n}^{E\cap A})_{\omega_n}\right]$ dans A :

Soit

$$V_n = \begin{cases} V & \text{dans } \Omega \cap \complement\omega_n, \\ \hat{R}_V^{\complement\omega_n} + (\hat{R}_{v_n}^{E\cap A})_{\omega_n} & \text{dans } \omega_n. \end{cases}$$

n étant fixé, V_n est l'enveloppe inférieure des fonctions $\in S^+$:

$$\begin{cases} V & \text{dans } \Omega \cap \complement\, \omega_n, \\ \inf\left[V,\ u + (\hat{R}_{v_n}^{E \cap A})_{\omega_n}\right] & \text{dans } \omega_n, \end{cases}$$

où u décrit l'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans ω_n, dont la limite inférieure, en chaque point $\in \Omega \cap \partial\omega_n$, est $\geqslant V$. Donc $V_n = \hat{V}_n$ q.p. dans Ω (conséquence de l'axiome D), et $V_n = \hat{V}_n$ dans ω_n.

La suite $\hat{V}_n$ est croissante : en effet, $\hat{V}_{n+1} - \hat{R}_V^{\complement\omega_n}$, surharmonique $\geqslant 0$ dans ω_n et $\geqslant v_n$ q.p. sur $E \cap A$, est $\geqslant (\hat{R}_{v_n}^{E\cap A})_{\omega_n}$ dans ω_n; d'où $V_{n+1} \geqslant V_n$ dans ω_n, donc aussi dans Ω.

Alors, $\lim\limits_n \hat{V}_n$ est une fonction $\in S^+$, $\geqslant V$ q.p. sur E, donc $\geqslant \hat{R}_V^E$ dans Ω.

LEMME 28. 2. — *Soit* P *et* Q *deux potentiels dans* Ω, P *fini continu dans* Ω, $P \geqslant Q$ *dans* Ω, *et* $A = \{x \in \Omega | P(x) = Q(x)\}$. *Alors, pour tout ensemble* E *tel que* $\Omega \cap \complement A \subset E \subset \Omega$: $\hat{R}_P^E = \hat{R}_Q^E$ *dans* A.

Soit $\omega_n = \left\{x \in \Omega | Q(x) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) P(x)\right\}$; les ω_n forment une suite décroissante d'ouverts $\subset \Omega$, et $A = \bigcap\limits_n \omega_n$.

Comme P et Q sont des potentiels $\in s^+$, les plus grandes minorantes harmoniques de P et Q dans ω_n valent $\hat{R}_P^{\complement\omega_n}$ et $\hat{R}_Q^{\complement\omega_n}$ dans ω_n (conséquence de l'axiome D). On a donc, dans ω_n :

$$\hat{R}_Q^{\complement\omega_n} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \hat{R}_P^{\complement\omega_n}, \quad \text{soit} \quad \hat{R}_P^{\complement\omega_n} - \hat{R}_Q^{\complement\omega_n} \leqslant \frac{1}{n} \hat{R}_P^{\complement\omega_n},$$

et, d'autre part, dans ω_n :

$$P - \hat{R}_P^{\complement\omega_n} \leqslant \frac{Q}{1 - \frac{1}{n}} - \hat{R}_Q^{\complement\omega_n} = \frac{Q}{n-1} + Q - \hat{R}_Q^{\complement\omega_n}.$$

En posant, dans ω_n, $p_n = P - \hat{R}_P^{\complement\omega_n}$ et $q_n = Q - \hat{R}_Q^{\complement\omega_n}$, on a, dans A, d'après le lemme 28. 1 :

$$\begin{aligned} \hat{R}_P^E - \hat{R}_Q^E &= \lim_n \left[\hat{R}_P^{\complement\omega_n} - \hat{R}_Q^{\complement\omega_n} + (\hat{R}_{p_n}^{E\cap A})_{\omega_n} - (\hat{R}_{q_n}^{E\cap A})_{\omega_n}\right] \\ &\leqslant \lim_n \left[\frac{1}{n} \hat{R}_P^{\complement\omega_n} + \frac{1}{n-1} (\hat{R}_Q^{E\cap A})_{\omega_n}\right] = 0. \end{aligned}$$

Proposition 28. 5. — *Tout ensemble μ-négligeable, situé dans l'ensemble des points $\in \Omega$ où $\complement$ E est effilé, est μ^{E}-négligeable.*

Soit μ_1 la restriction de μ à l'ensemble des points de Ω où E est effilé; grâce à la proposition 28. 3, il suffit de montrer que l'ensemble des points de Ω où $\complement$ E est effilé, ensemble qui est μ_1-négligeable, est aussi μ_1^{E}-négligeable.

Soit A l'ensemble des points de Ω où $\complement$ E n'est pas effilé; $\mathrm{A} = \{x \in \Omega \mid \hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{U}}^{\complement \mathrm{E}}(x) = \mathrm{U}(x)\}$ (théorème 28. 1), et l'ensemble $\Omega \cap \complement \mathrm{A}$ est contenu dans E à un ensemble polaire près. D'après le lemme 28. 2, on a donc $\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}_{\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{U}}^{\complement \mathrm{E}}} = \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{U}}$ dans A, en particulier en tout point de Ω où E est effilé. Par suite

$$\int \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}_{\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{U}}^{\complement \mathrm{E}}}\, d\mu_1 = \int \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{U}}\, d\mu_1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int \hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{U}}^{\complement \mathrm{E}}\, d\mu_1^{\mathrm{E}} = \int \mathrm{U}\, d\mu_1^{\mathrm{E}},$$

et $\Omega \cap \complement \mathrm{A}$ est de μ_1^{E}-mesure nulle.

CHAPITRE VI

LES FONCTIONS HARMONIQUES ADJOINTES.

Hypothèses de ce chapitre :

les fonctions harmoniques satisfont aux axiomes 1, 2, 3′, et Ω est à base dénombrable ;

il existe une base des ouverts de Ω, soit $\mathfrak{D}$, formée de domaines δ c.d. (cf. n° 11) ;

il existe un potentiel > 0 dans Ω, et, pour tout $y \in \Omega$, les potentiels dans Ω de support y sont proportionnels.

Sous ces hypothèses, on a montré (n° 18, ou proposition 22. 1) que, pour chaque $y \in \Omega$, on peut définir un potentiel p_y dans Ω, de support y, tel que l'application $(x, y) \rightarrow p_y(x)$, de $\Omega \times \Omega$ dans $\overline{\mathrm{R}}^+$, soit s. c. i. et continue pour $x \neq y$.

Cela étant, d'après les théorèmes 18. 2 et 18. 3, il y a correspondance biunivoque, par la formule

$$\mathrm{P}_\lambda(x) = \int p_y(x)\, d\lambda(y),$$

entre les potentiels dans Ω et les mesures $\lambda \geqslant 0$ dans Ω satisfaisant à

$$\int \left(\int p_y \, d\rho_x^\omega \right) d\lambda(y) < +\infty$$

pour un couple (ω, x).

Remarque. — Les fonctions harmoniques adjointes qui vont être définies dépendent du choix de p_y ; lorsque ce sera nécessaire (n° 35), on dira qu'elles sont associées aux fonctions harmoniques données à l'aide du potentiel p_y. Comme deux potentiels, p_y et p'_y, satisfaisant à la condition indiquée, se déduisent l'un de l'autre par multiplication par une fonction $f(y)$ continue > 0 dans Ω, les systèmes correspondants de fonctions harmoniques adjointes se déduisent aussi l'un de l'autre par multiplication par f (cf. définition de σ_y^ω).

29. Définition des fonctions harmoniques adjointes.

Pour définir les fonctions harmoniques adjointes, on peut s'inspirer de cette propriété classique : la fonction de Green relative à une équation aux dérivées partielles du second ordre, de type elliptique, devient, par échange des deux variables, la fonction de Green relative à l'équation adjointe, lorsque celle-ci existe. Dans la présente axiomatique, $y \to p_y(x)$ devra être un potentiel adjoint dans Ω de support x.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la mesure harmonique adjointe, σ_y^ω, de l'ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, au point $y \in \omega$, satisfasse aux conditions suivantes :

$$\int p_z(x)\, d\sigma_y^\omega(z) \leqslant p_y(x),$$

avec $=$ si $x \notin \bar{\omega}$, et $<$ si x est dans la même composante connexe de ω que y; autrement dit, le potentiel

$$x \to \int p_z(x)\, d\sigma_y^\omega(z)$$

minore $p_y(x)$, avec $=$ si $x \notin \bar{\omega}$, et $<$ si x est dans la même composante connexe de ω que y. Or $\hat{\mathrm{R}}_{p_y}^{\complement\omega}$ remplit ces conditions, d'où la définition de la mesure harmonique adjointe :

Définition 1. — *Étant donné un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et $y \in \omega$, on désigne par σ_y^ω la mesure > 0 de Radon, portée par $\partial\omega$, définie par*

$$\hat{\mathrm{R}}_{p_y}^{\complement\omega}(x) = \int p_z(x)\, d\sigma_y^\omega(z).$$

Définition 2. — *Une fonction réelle h^*, définie dans l'ouvert $\omega \subset \Omega$, est dite harmonique adjointe (ou harmonique*) dans ω, si :*

1) *h^* est finie continue dans ω;*
2) *quels que soient l'ouvert c. d. $\delta \subset \bar{\delta} \subset \omega$ et $y \in \delta$:*

$$h^*(y) = \int h^*\, d\sigma_y^\delta.$$

Exemple. — $y \to p_y(x)$ est harmonique* dans $\Omega - \{x\}$; plus généralement, si μ est une mesure de Radon > 0, portée par un compact $K \subset \Omega$, $y \to \int p_y(x)\, d\mu(x)$ est harmonique* dans $\Omega - K$: en effet, pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega - K$, et $y \in \omega$, $\iint p_z(x)\, d\mu(x)\, d\sigma_y^{\omega}(z) = \int \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x)\, d\mu(x) = \int p_y(x)\, d\mu(x)$.

Nous allons montrer que les fonctions harmoniques* satisfont aux axiomes 1, 2, 3′, ce qui justifie le qualificatif « harmoniques ».

Toutes les notions relatives à ces nouvelles fonctions harmoniques seront distinguées par une étoile (*).

Lemme 29. 1 ([42]). — *Étant donné un ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, *un compact* $K \subset \omega$, *deux potentiels dans* Ω, p_0 *et* p_1, *dont les supports sont contenus dans* K *et tels que* $p_0 - R_{p_0}^{\complement\omega} \leq p_1 - R_{p_1}^{\complement\omega}$ *dans* $\omega - K$ (*donc aussi dans* $\Omega - K$), *alors : dans* Ω,

$$\hat{R}_{p_1}^{\complement\omega} = \hat{R}_{p_0}^{\complement\omega} + \textit{une fonction} \in S^+.$$

Soit $v = R_{p_1}^{\complement\omega} - R_{p_0}^{\complement\omega}$. Dans ω, v est harmonique; donc

$$v = \hat{v} = \hat{R}_{p_1}^{\complement\omega} - \hat{R}_{p_0}^{\complement\omega} \quad \text{dans } \omega.$$

Montrons que v est une $\mathcal{S}$ fonction dans $\Omega - K$: $v, \geq -p_0$, est localement bornée inférieurement dans $\Omega - K$.

L'inégalité $v(x) \geq \overline{H}_v^{\omega_1}(x)$ (1) est satisfaite pour tout ouvert ω_1 tel que $\bar{\omega}_1$ soit disjoint à $\partial\omega$. Supposons $\bar{\omega}_1$ disjoint à K et $\bar{\omega}_1 \cap \partial\omega \neq \emptyset$;

si $x \in \omega_1 \cap \complement\omega$: $v(x) = p_1(x) - p_0(x) = H_{p_1-p_0}^{\omega_1}(x) \geq \overline{H}_v^{\omega_1}(x)$ d'après l'hypothèse;

si $x \in \omega_1 \cap \omega$: $v(x) = H_{p_1-p_0}^{\omega}(x) = \overline{H}_v^{\omega\cap\omega_1}(x)$ (théorème de comparaison, n° 4, A), et $\overline{H}_v^{\omega_1}(x) = \overline{H}_{v'}^{\omega\cap\omega_1}(x)$ où

$$v' = \begin{cases} v \text{ sur } \partial\omega_1 \cap \partial(\omega \cap \omega_1) \\ \overline{H}_v^{\omega_1} \text{ sur } \omega_1 \cap \partial(\omega \cap \omega_1) \end{cases};$$

d'après le cas précédent, $v \geq v'$ sur $\partial(\omega \cap \omega_1)$, et l'inégalité (1) en résulte.

Conséquence :

Dans $\Omega - K$: $R_{p_1}^{\complement\omega} = R_{p_0}^{\complement\omega} +$ une $\mathcal{S}$ fonction v; donc $\hat{R}_{p_1}^{\complement\omega} = \hat{R}_{p_0}^{\complement\omega} + \hat{v}$ (propriété 2, n° 5, A).

([42]) Ce lemme ne suppose que les axiomes 1, 2, 3 et Ω à base dénombrable.

Par suite, $\hat{R}^{\complement\omega}_{p_1} - \hat{R}^{\complement\omega}_{p_0} = \hat{\varphi}$ est surharmonique dans Ω (propriété 1; n° 2, C).

Enfin $\hat{\varphi}$, $\geqslant -p_0$ dans Ω, est $\geqslant 0$ dans Ω (principe du minimum).

LEMME 29. 2. — *Étant donné un ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, *un point* $y_0 \in \omega$, *un voisinage compact* K *de* y_0, *situé dans la composante connexe de* ω *contenant* y_0, *et* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* Y *de* y_0, $Y \subset \underline{K}$, *tel que: $y \in Y$ entraîne*

$$(1-\varepsilon)(p_{y_0} - R^{\complement\omega}_{p_{y_0}}) \leqslant p_y - R^{\complement\omega}_{p_y} \leqslant (1+\varepsilon)(p_{y_0} - R^{\complement\omega}_{p_{y_0}})$$

sur $\omega - K$.

Quand $y \to y_0$, $p_y(x) \to p_{y_0}(x)$ uniformément pour $x \in \partial\omega$ et $x \in \partial K$; et $R^{\complement\omega}_{p_y}(x) \to R^{\complement\omega}_{p_{y_0}}(x)$ uniformément pour $x \in \partial K$. Il existe donc un voisinage Y de y_0, $Y \subset \underline{K}$, tel que : $y \in Y$ et $x \in \partial K$ entraînent

$$(1-\varepsilon)[p_{y_0}(x) - R^{\complement\omega}_{p_{y_0}}(x)] \leqslant p_y(x) - R^{\complement\omega}_{p_y}(x)$$
$$\leqslant (1+\varepsilon)[p_{y_0}(x) - R^{\complement\omega}_{p_{y_0}}(x)];$$

et, $p_y - R^{\complement\omega}_{p_y}$ étant un potentiel dans ω, la double inégalité est valable pour $x \in \omega - K$ (lemme 3. 1 en remplaçant l'espace Ω par ω).

THÉORÈME 29. 1. — *Etant donné un ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, $y_0 \in \omega$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* Y *de* y_0, $\overline{Y} \subset \omega$, *tel que* $y \in Y$ *entraîne*

$$(1-\varepsilon)\sigma^{\omega}_{y_0} \leqslant \sigma^{\omega}_{y} \leqslant (1+\varepsilon)\sigma^{\omega}_{y_0}.$$

La double inégalité de l'énoncé est équivalente aux deux conditions :

$$V = \hat{R}^{\complement\omega}_{p_y} - (1-\varepsilon)\hat{R}^{\complement\omega}_{p_{y_0}} \in S^+ \quad \text{et} \quad V' = (1+\varepsilon)\hat{R}^{\complement\omega}_{p_{y_0}} - \hat{R}^{\complement\omega}_{p_y} \in S^+$$

On se donne un voisinage compact K de y_0, situé dans la composante connexe de ω contenant y_0; le lemme 29. 2 détermine un voisinage Y de y_0, $Y \subset \underline{K}$, tel que $y \in Y$ entraîne

$$(1-\varepsilon)(p_{y_0} - R^{\complement\omega}_{p_{y_0}}) \leqslant p_y - R^{\complement\omega}_{p_y} \leqslant (1+\varepsilon)(p_{y_0} - R^{\complement\omega}_{p_{y_0}})$$

sur $\omega - K$; et le lemme 29. 1 prouve alors que V et $V' \in S^+$.

Remarque. — Le théorème 29. 1 montre que, dans la définition 2, la condition 1) peut être remplacée par : h^* est sommable pour toute mesure σ_y^δ, δ ouvert c. d., $\delta \subset \bar{\delta} \subset \omega$ et $y \in \delta$.

COROLLAIRE. — *Si* y_0 *et* y_1 *sont deux points d'un domaine* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, *il existe un nombre* $k \geqslant 1$ *tel que* $\frac{1}{k}\sigma_{y_0}^\omega \leqslant \sigma_{y_1}^\omega \leqslant k\,\sigma_{y_0}^\omega$.

Soit Y l'ensemble des points $y \in \omega$, auxquels on peut associer un nombre k tel que $\frac{1}{k}\sigma_{y_0}^\omega \leqslant \sigma_y^\omega \leqslant k\,\sigma_{y_0}^\omega (1)$. Y est non vide et ouvert dans ω (théorème 29. 1); il suffit donc de prouver que Y est fermé dans ω. Soit $y' \in \omega$, adhérent à Y; $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage Y' de y', tel que, pour tout $y \in$ Y' : $(1-\varepsilon)\,\sigma_{y'}^\omega \leqslant \sigma_y^\omega \leqslant (1+\varepsilon)\,\sigma_{y'}^\omega$ (2). Y' rencontre Y en un point y satisfaisant à (1) et à (2); il en résulte que $y' \in$ Y.

LEMME 29. 3. — *Si* δ *est un domaine c. d., tout ouvert non vide de* $\partial\delta$ *est de* σ_y^δ*-mesure* > 0 *quel que soit* $y \in \delta$.

Supposons qu'il existe un point $y_0 \in \partial\delta$, et un voisinage ouvert Y de y_0, tels que $\partial\delta \cap$ Y soit de σ_y^δ-mesure nulle pour un point $y \in \delta$, donc aussi pour tout $y \in \delta$ (corollaire du théorème 29. 1). $\hat{R}_{p_y}^{\complement\delta}$ serait alors harmonique dans Y, quel que soit $y \in \delta$. Si y_n est une suite de points $\in \delta$, tendant vers y_0, $\hat{R}_{p_{y_n}}^{\complement\delta} \xrightarrow{T} \hat{R}_{p_{y_0}}^{\complement\delta}$, grâce à la continuité des applications $y \to p_y$ (corollaire de la proposition 19. 3) et $p_y \to \hat{R}_{p_y}^{\complement\delta}$ (proposition 24. 3). Par suite, $\hat{R}_{p_{y_0}}^{\complement\delta}$ est harmonique dans Y (corollaire 2 de la proposition 21. 2), ainsi que $p_{y_0} = \hat{R}_{p_{y_0}}^{\complement\delta}$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 29. 2. — *Soit* h^* *une fonction harmonique** $\geqslant 0$ *dans un domaine* ω; *alors, ou bien* $h^* > 0$ *dans* ω, *ou bien* $h^* \equiv 0$ *dans* ω.

Supposons que l'ensemble des points $\in \omega$ où $h^* > 0$ ne soit, ni vide, ni ω, et désignons par β une de ses composantes connexes.

Il existe un point $y_0 \in \partial\beta \cap \omega$, puis un domaine δ c. d. tel que $y_0 \in \delta \subset \bar{\delta} \subset \omega$ et $\bar{\delta} \not\supset \beta$. Alors $\partial\delta \cap \beta$ est un ouvert non vide de $\partial\delta$; il est de $\sigma_{y_0}^\delta$-mesure > 0 (lemme 29. 3), ce qui est incompatible avec $0 = h^*(y_0) = \int h^*\, d\sigma_{y_0}^\delta$.

Conséquence. — Il résulte des théorèmes 29.1 et 29.2 que les fonctions harmoniques* satisfont à l'axiome 3'.

THÉORÈME 29.3. — *Soit h^* une fonction harmonique* dans un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, et telle que, pour tout $y \in \partial\omega$,*

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \omega}} h^*(x) \geqslant 0;$$

alors $h^* \geqslant 0$ dans ω.

La démonstration est analogue à celle du lemme 11.2 (on peut prendre pour fonction harmonique* dans ω, de borne inférieure > 0 dans ω, $y \to p_y(x_1)$, avec $x_1 \notin \bar{\omega}$).

Remarque. — Les théorèmes 29.2 et 29.3 sont encore vrais si l'on suppose seulement h^* définie dans ω et harmonique* dans un voisinage ouvert de chaque point de ω.

LEMME 29.4. — 1) *Pour tout ouvert δ c. d. et tout point $x \in \delta$, la fonction $y \to f_{\delta, x}(y) = \int p_y(u)\, d\rho_x^\delta(u)$ est continue dans Ω.*

2) *Étant donné un ensemble $\mathcal{X}$ dense dans Ω, pour tout compact $K \subset \Omega$, les restrictions à K des fonctions $f_{\delta, x}$, où $\delta \in \mathfrak{D}$, $x \in \delta \cap \mathcal{X}$, forment un sous-ensemble total de $C(K)$; ce sous-ensemble est dénombrable si $\mathfrak{D}$ et $\mathcal{X}$ le sont.*

1) La continuité des fonctions $f_{\delta, x}$ résulte de la continuité des applications $y \to p_y$ et $p_y \to \int p_y\, d\rho_x^\delta$ pour δ c. d.

2) Soit $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ une mesure de Radon de signe quelconque portée par K. Si, pour tout $\delta \in \mathfrak{D}$ et tout $x \in \delta \cap \mathcal{X}$, on a :

$$\iint p_y(u)\, d\rho_x^\delta(u)\, d\lambda^+(y) = \iint p_y(u)\, d\rho_x^\delta(u)\, d\lambda^-(y),$$

c'est-à-dire

$$H_{P_{\lambda^+}}^\delta(x) = H_{P_{\lambda^-}}^\delta(x),$$

alors : pour tout $\delta \in \mathfrak{D}$, $H_{P_{\lambda^+}}^\delta = H_{P_{\lambda^-}}^\delta$ dans δ; d'où $P_{\lambda^+} = P_{\lambda^-}$ dans Ω, et $\lambda^+ = \lambda^-$.

THÉORÈME 29.4. — *Tout ouvert c. d. δ_1 est régulier*, la mesure harmonique* de δ_1 au point $y \in \delta_1$ étant $\sigma_y^{\delta_1}$. La base $\mathfrak{D}$ réalise donc l'axiome 2 pour les fonctions harmoniques*.*

Soit f une donnée continue sur $\partial\delta_1$.

1) $y \to \int f\, d\sigma_y^{\delta_1}$ est harmonique* dans δ_1 :

Grâce au lemme 29. 4 et au théorème 29. 1, il suffit de prouver l'harmonicité* de $\int f\, d\sigma_y^{\delta_1}$, pour les fonctions $f(z)$ de la forme $\int p_z\, d\rho_x^{\delta}$, où $\delta \in \mathfrak{D}$ et $x \in \delta$. Posons $\rho_x^{\delta} = \mu$;

$$\iint p_z(u)\, d\mu(u)\, d\sigma_y^{\delta_1}(z) = \int \hat{R}_{p_y}^{\complement\delta_1}(u)\, d\mu(u) = \int p_y(u)\, d\mu^{\complement\delta_1}(u)$$

(théorème 10. 1), est bien fonction harmonique* de y dans δ_1, car $\mu^{\complement\delta_1}$ est portée par le compact $\left(\complement\delta_1 \cap \partial\delta\right) \cup \partial\delta_1$ (propriété 4 de la balayée d'une mesure, n° 10).

2) $\int f\, d\sigma_y^{\delta_1}$ effectue un prolongement continu de f dans $\overline{\delta}_1$:

Soit $y_0 \in \partial\delta_1$ et $y \in \delta_1$ tendant vers y_0; il y a équivalence entre :

$$\int f\, d\sigma_y^{\delta_1} \to f(y_0) \text{ pour toute } f \in C(\partial\delta_1) \quad (1),$$

et $\qquad \sigma_y^{\delta_1}$ converge vaguement vers ε_{y_0} $\qquad$ (2).

La convergence vague des mesures portées par un compact est équivalente à la T-convergence des potentiels engendrés par ces mesures (proposition 19. 3); par suite, la condition (2) est équivalente à

$$\hat{R}_{p_y}^{\complement\delta_1} \xrightarrow{T} p_{y_0}. \tag{3}$$

Et la condition (3) est bien réalisée, car les applications $y \to p_y$ et $p_y \to \hat{R}_{p_y}^{\complement\delta_1}$ sont continues, et $\hat{R}_{p_{y_0}}^{\complement\delta_1} = p_{y_0}$ dans Ω.

3) $\int f\, d\sigma_y^{\delta_1}$ est $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$; et le prolongement est unique, en vertu du théorème 29. 3.

Théorème 29. 5. — *Les fonctions harmoniques* satisfont à l'axiome* 1.

Si h^* est définie dans l'ouvert $\omega \subset \Omega$, et harmonique* dans un voisinage ouvert de chaque point $\in \omega$, h^* est harmonique* dans ω : en effet, h^* est continue dans ω; d'autre part, pour chaque ouvert c. d. $\delta \subset \overline{\delta} \subset \omega$, la donnée h^* sur $\partial\delta$ est prolongeable dans δ selon une fonction h'^*, harmonique* dans δ, continue dans $\overline{\delta}$ (théorème 29. 4), et qui coïncide avec h^* dans δ (cf. théorème 29. 3, en tenant compte de la remarque).

Conclusion. — A partir des fonctions harmoniques*, qui satisfont aux axiomes 1, 2, 3', on peut définir :

les fonctions hyperharmoniques*, en particulier les fonctions surharmoniques* $\geqslant 0$ dans Ω, dont l'ensemble sera noté S^{*+};
la topologie T^* sur S^{*+};
les ensembles polaires*;
la balayée* d'une fonction $v^* \in S^{*+}$, sur un ensemble E, notée $\hat{R}_{v^*}^{*E}$;
la balayée* d'une mesure de Radon $\mu > 0$, portée par un compact $\subset \Omega$, sur un ensemble E, notée μ^{*E}.

30. Une classe de fonctions $\in S^{*+}$: les potentiels* P_μ^*. Applications.

Définition des potentiels* P_μ^*.

Lemme 30. 1. — *Pour toute mesure de Radon $\mu > 0$ sur Ω, la fonction*

$$P_\mu^*(y) = \int p_y(x)\, d\mu(x)$$

est hyperharmonique dans Ω; si μ est portée par un compact $\subset \Omega$, $P_\mu^* \in S^{*+}$. En particulier, $y \to p_y(x)$, encore noté $p_x^*(y)$, $\in S^{*+}$.*

La fonction P_μ^* est s. c. i. dans Ω. D'autre part, pour tout ouvert ω tel que $y \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$:

$$\int P_\mu^* d\sigma_y^\omega = \iint p_z(x)\, d\mu(x)\, d\sigma_y^\omega(z)$$
$$= \int \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x)\, d\mu(x) \leqslant \int p_y(x)\, d\mu(x) = P_\mu^*(y).$$

Comme les domaines δ c. d. forment une base de domaines réguliers*, dont la mesure harmonique* est σ_y^δ (théorème 29. 4), P_μ^* est hyperharmonique* (nº 2, C, propriété 1).

Lemme 30. 2. — *Quels que soient l'ouvert $\omega \subset \Omega$, et les points x et $y \in \Omega$:* $R_{p_y}^\omega(x) \geqslant R_{p_x^*}^{*\omega}(y)$.

$$y \to R_{p_y}^\omega(x) \in S^{*+},$$

car
$$R_{p_y}^\omega(x) = \int p_y(u)\, d\varepsilon_x^\omega(u) \quad \text{(théorème 10. 1).}$$

D'autre part, si $y \in \omega$, $R_{p_y}^\omega(x) = p_y(x)$ quel que soit $x \in \Omega$:

en effet, δ étant un voisinage ouvert de y, tel que $\overline{\delta} \subset \omega$, toute $\varphi \in S^+$, majorant p_y sur ω, donc en particulier sur $\partial\delta$, le majore dans $\Omega \cap \complement\delta$ d'après le lemme 3. 1.

On en déduit $R^{\omega}_{p_y}(x) \geqslant R^{*\omega}_{p^*_x}(y)$ quels que soient x et $y \in \Omega$.

Remarque. — Le même raisonnement donnera l'inégalité inverse dès qu'on saura que p^*_x est un potentiel* (cf. propositions 30. 1 et 30. 2).

PROPOSITION 30. 1. — 1) *Pour tout $x \in \Omega$, p^*_x est un potentiel* dans Ω, de support x.*

2) *Pour toute mesure de Radon $\mu > 0$ sur Ω,*

$$P^*_{\mu}(y) = \int p^*_x(y)\, d\mu\,(x)$$

est $\equiv +\infty$ ou est un potentiel dans Ω, harmonique* hors de S_μ. En particulier, si μ est portée par un compact $\subset \Omega$, P^*_μ est toujours un potentiel*.*

1) Appliquons le lemme 30. 2 aux ouverts $\omega \subset \Omega$ tels que $\Omega - \omega$ soit compact : $R^{\omega}_{p_y}(x) \to 0$ selon l'ordonné filtrant décroissant formé par ces ouverts, donc aussi $R^{*\omega}_{p^*_x}(y)$, et cela quels que soient x et y. Par suite, p^*_x est un potentiel* dans Ω (propriété 4; n° 5, B).

2) D'après le lemme 30. 1, P^*_μ est hyperharmonique*. Alors, ou bien $P^*_\mu \equiv +\infty$, ou bien $P^*_\mu \in S^{*+}$, et dans ce cas le théorème 18. 3 s'applique : $P^*_\mu \in P^{*+}$.

Applications.

A) LE BALAYAGE* SUR UN OUVERT.

PROPOSITION 30. 2. — *Quel que soit l'ouvert $\omega \subset \Omega$:*

1) *pour tout couple de points x et $y \in \Omega$, $R^{\omega}_{p_y}(x) = R^{*\omega}_{p^*_x}(y)$;*

2) *pour toute mesure $\mu > 0$ sur Ω, portée par un compact $\subset \Omega$, $R^{*\omega}_{P^*_\mu} = P^*_{\mu^\omega}$, et $R^{\omega}_{P_\mu} = P_{\mu^{*\omega}}$.*

1) Cf. lemme 30. 2 et remarque.

$$\begin{aligned} 2)\ R^{*\omega}_{P^*_\mu}(y) &= \int R^{*\omega}_{p^*_x}(y)\, d\mu\,(x) \text{ (th. 22. 4 appliqué au balayage*)} \\ &= \int R^{\omega}_{p_y}(x)\, d\mu(x) = \int p_y(x)\, d\mu^{\omega}(x) \text{ [th. 10. 1, (2)]} \\ &= P^*_{\mu^\omega}(y). \end{aligned}$$

Même raisonnement pour la seconde formule.

B) Suites monotones de potentiels et de potentiels* P^*_μ.

Proposition 30. 3. — *Soit une suite de mesures* $\lambda_n > 0$, *portées par un même compact* $\subset \Omega$, *telle que la suite des potentiels* P_{λ_n} *soit décroissante. Alors:* $\inf\limits_n P_{\lambda_n} = \widehat{\inf\limits_n P_{\lambda_n}}$ μ-*p.p. pour toute mesure* $\mu > 0$ *telle que* P^*_μ *soit fini continu dans* Ω, *donc, en particulier (lemme* 29. 4), ρ^δ_x-*p.p. pour tout ouvert* δ *c. d. et tout point* $x \in \delta$.

On a vu (corollaire 1 du théorème 23. 1) que la suite λ_n a une limite vague λ, et que $P_\lambda = \widehat{\inf\limits_n P_{\lambda_n}}$. Par suite, pour tout potentiel* P^*_μ fini continu dans Ω :

$$\int P^*_\mu \, d\lambda = \lim_n \int P^*_\mu \, d\lambda_n,$$

c'est-à-dire

$$\int P_\lambda \, d\mu = \lim_n \int P_{\lambda_n} \, d\mu = \int \left(\inf_n P_{\lambda_n}\right) d\mu.$$

Corollaire. — *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille de fonctions* $V \in S^+$: *alors* $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V}$ μ-*p.p. pour toute mesure* $\mu > 0$ *telle que* P^*_μ *soit fini continu dans* Ω, *donc, en particulier,* ρ^δ_x-*p.p. pour tout ouvert* δ *c. d. et* $x \in \delta$ (43).

On se ramène: d'abord au cas d'une suite décroissante de fonctions $V_n \in S^+$ (cf. alinéa 1 de la démonstration du théorème 23. 2), puis, en balayant les V_n sur un compact $K \subset \Omega$, au cas d'une suite décroissante de potentiels harmoniques dans $\Omega - K$, et coïncidant avec les V_n à l'intérieur de K.

Proposition 30. 4. — *Soit une suite de mesures* $\mu_n > 0$, *portées par un même compact* $\subset \Omega$, *telle que la suite des potentiels** $P^*_{\mu_n}$ *soit décroissante. Alors:* $\inf\limits_n P^*_{\mu_n} = \widehat{\inf\limits_n P^*_{\mu_n}}$ λ-*p.p. pour toute mesure* $\lambda > 0$ *telle que* P_λ *soit fini continu dans* Ω, *donc, en particulier* (44), σ^ω_y-*p. p. pour tout ouvert* ω *régulier et* $y \in \omega$.

Même démonstration que pour la proposition 30. 3.

(43) Ce dernier résultat était déjà connu, car (théorème 11. 2) $\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V}$ ρ^ω_x-*p-p.* pour tout ouvert ω *d.* et $x \in \omega$ (et même avec les seuls axiomes 1, 2, 3, Ω à base dénombrable, existence d'un potentiel > 0 dans Ω).

(44) En effet: $P_{\sigma^\omega_y} = \hat{R}^{\complement\omega}_{p_y}$ (définition 1, nº 29), qui est continu dans Ω si ω est régulier (propriété 7; nº 5, B).

Remarque. — On ne peut donner d'énoncé analogue au corollaire de la proposition 30. 3, parce qu'on ignore si l'enveloppe inférieure d'un nombre fini de potentiels* P^*_μ est encore un potentiel* P^*_μ.

31. Relation entre balayage et balayage*.

Le but de ce n° est d'étendre à un ensemble quelconque la formule $R^\omega_{p_y}(x) = R^{*\omega}_{p^*_x}(y)$, démontrée pour ω ouvert (proposition 30. 2).

Résultats préliminaires.

Désignons par :

$\mathfrak{L}$, une famille dénombrable de potentiels P_λ, finis continus dans Ω, telle que toute fonction continue sur un compact $K \subset \Omega$ puisse être approchée, uniformément sur K, par des différences de deux potentiels $\in \mathfrak{L}$ (lemme 6. 2);

$\mathfrak{L}^*$, une famille dénombrable de potentiels* P^*_μ, finis continus dans Ω, chacun ayant un support compact $\subset \Omega$, et possédant la même propriété d'approximation (lemme 29. 4 et proposition 30. 1, partie 2);

$\mathcal{L}$, l'ensemble des mesures de Radon $\lambda > 0$ sur Ω, telles que P_λ soit fini continu dans Ω ($\mathcal{L}$ contient en particulier les mesures σ^ω_y, où ω est un ouvert régulier et $y \in \omega$);

$\mathcal{M}$, l'ensemble des mesures $\mu > 0$ sur Ω, telles que P^*_μ soit fini continu dans Ω ($\mathcal{M}$ contient en particulier les mesures ρ^δ_x, où δ est un ouvert c. d. et $x \in \delta$).

Lemme 31. 1. — *Etant donné un ensemble* $E \subset \Omega$, *il existe une suite décroissante d'ouverts* $\omega_n \supset E$, *telle que :*

$$\hat{R}^E_{P_\lambda} = \widehat{\lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda}} \qquad \textit{pour tout potentiel} \qquad P_\lambda \in \mathfrak{L}.$$

D'après un lemme topologique [22], pour chaque $P_\lambda \in \mathfrak{L}$, il existe une suite d'ouverts $\omega_{n,\lambda} \supset E$, telle que $\hat{R}^E_{P_\lambda} = \widehat{\inf R^{\omega_{n,\lambda}}_{P_\lambda}}$.

En énumérant l'ensemble des ouverts $\omega_{n,\lambda}$ pour $n \in Z^+$ et $P_\lambda \in \mathfrak{L}$, on forme une suite, qu'on rend décroissante par le procédé classique.

Remarque. — De façon analogue, on détermine une suite décroissante d'ouverts $\omega'_n \supset E$, telle que :

$$\hat{R}^{*E}_{P^*_\mu} = \widehat{\lim_n R^{*\omega'_n}_{P^*_\mu}} \qquad \text{pour tout potentiel} \qquad P^*_\mu \in \mathcal{L}^*.$$

PROPOSITION 31. 1. — *Etant donné un ensemble* $E \subset \overline{E} \subset \Omega$, *soit* $\mathcal{O}_E$ *l'ordonné filtrant décroissant des ouverts* ω *tels que* $E \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

1) *Pour toute* $\mu \in \mathfrak{M}$, *portée par un compact* $\subset \Omega$, μ^E *est limite vague de* μ^ω *selon* $\mathcal{O}_E$.

2) *Il existe un ensemble* $e \subset \Omega$, μ*-négligeable pour toute* $\mu \in \mathfrak{M}$, *tel que, pour* $x \in \Omega - e$, ε^E_x *soit limite vague de* ε^ω_x *selon* $\mathcal{O}_E$.

μ^ω converge vaguement vers μ^E, selon $\mathcal{O}_E$, si, pour chaque $P_\lambda \in \mathcal{L}$:

$$\int P_\lambda \, d\mu^E = \lim_{\mathcal{O}_E} \int P_\lambda \, d\mu^\omega,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème 10. 1, en supposant seulement μ portée par un compact $\subset \Omega$:

$$(1) \qquad \int \hat{R}^E_{P_\lambda} \, d\mu = \lim_{\mathcal{O}_E} \int R^\omega_{P_\lambda} \, d\mu = \inf_{\omega \in \mathcal{O}_E} \int R^\omega_{P_\lambda} \, d\mu.$$

Soit ω_n la suite décroissante d'ouverts $\supset E$ déterminée par le lemme 31. 1. Alors, pour toute mesure μ dans Ω, on a

$$\int \hat{R}^E_{P_\lambda} \, d\mu = \int \widehat{\lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda}} \, d\mu \qquad \text{et} \qquad \lim_n \int R^{\omega_n}_{P_\lambda} \, d\mu = \int \lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda} \, d\mu.$$

1) Si $\mu \in \mathfrak{M}$, on a en outre (corollaire de la proposition 30. 3)

$$(2) \qquad \int \widehat{\lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda}} \, d\mu = \int \lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda} \, d\mu,$$

ce qui entraîne (1).

2) Pour chaque $P_\lambda \in \mathcal{L}$, l'ensemble

$$e_{P_\lambda} = \left\{ x \in \Omega \mid \widehat{\lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda}}(x) < \lim_n R^{\omega_n}_{P_\lambda}(x) \right\}$$

est μ-négligeable pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, donc aussi l'ensemble $e = \bigcup_{P_\lambda \in \mathcal{L}} e_{P_\lambda}$. Pour $x \in \Omega - e$ et $\mu = \varepsilon_x$, (2) est satisfait, donc aussi (1).

COROLLAIRE. — *Soit un ensemble* $E \subset \overline{E} \subset \Omega$.

1) *Pour toute* $\mu \in \mathfrak{M}$, *portée par un compact* $\subset \Omega$, $\hat{R}^{*E}_{P^*_\mu} = P^*_{\mu^E}$.

2) *Il existe un ensemble* $e \subset \Omega$, μ-*négligeable pour toute* $\mu \in \mathfrak{M}$, *tel que, pour* $x \in \Omega - e$, $\hat{\mathrm{R}}^{*\mathrm{E}}_{p^*_x} \leqslant \mathrm{P}^*_{\varepsilon^{\mathrm{E}}_x}$ [45].

Considérons d'abord une mesure $\mu > 0$, portée par un compact $\subset \Omega$, telle que μ^{E} soit limite vague de μ^ω selon $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Alors $\mathrm{P}^*_{\mu^{\mathrm{E}}}$ est la T*-limite, selon $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, de $\mathrm{P}^*_{\mu^\omega}$ (proposition 19. 3). D'autre part (proposition 30. 2), $\mathrm{P}^*_{\mu^\omega} = \mathrm{R}^{*\omega}_{\mathrm{P}^*_\mu}$, donc les $\mathrm{P}^*_{\mu^\omega}$ forment un ordonné filtrant décroissant de fonctions $\in \mathrm{S}^{*+}$, et leur T*-limite est $\widehat{\inf_{\omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}} \mathrm{R}^{*\omega}_{\mathrm{P}^*_\mu}}$ (corollaire 2 du théorème 23. 1).

En conclusion : $\widehat{\inf_{\omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}} \mathrm{R}^{*\omega}_{\mathrm{P}^*_\mu}} = \mathrm{P}^*_{\mu^{\mathrm{E}}}$.

1) Si $\mu \in \mathfrak{M}$, P^*_μ est continu, donc $\hat{\mathrm{R}}^{*\mathrm{E}}_{x^*_\mu} = \widehat{\inf_{\omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}} \mathrm{R}^{*\omega}_{\mathrm{P}^*_\mu}}$, d'où l'égalité cherchée.

2) Si $x \in \Omega - e$ et $\mu = \varepsilon_x$, on peut seulement affirmer que $\hat{\mathrm{R}}^{*\mathrm{E}}_{p^*_x} \leqslant \widehat{\inf_{\omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}} \mathrm{R}^{*\omega}_{p^*_x}}$, d'où l'inégalité cherchée.

Proposition 31. 2. — *Etant donné un ensemble* $\mathrm{E} \subset \overline{\mathrm{E}} \subset \Omega$:

1) *pour toute* $\lambda \in \mathfrak{L}$, *portée par un compact* $\subset \Omega$, $\lambda^{*\mathrm{E}}$ *est limite vague de* $\lambda^{*\omega}$ *selon* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ (*défini dans la proposition* 31. 1);

2) *il existe un ensemble* $e^* \in \Omega$, λ-*négligeable pour toute* $\lambda \in \mathfrak{L}$, *tel que, pour* $y \in \Omega - e^*$, $\varepsilon_y^{*\mathrm{E}}$ *soit limite vague de* $\varepsilon_y^{*\omega}$ *selon* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$.

La démonstration est identique à celle de la proposition 31. 1; toutefois, le corollaire de la proposition 30. 3 est remplacé par la proposition 30. 4: pour l'appliquer on utilise la proposition 30. 2, partie 2, et on suppose $\bar{\omega}_1 \subset \Omega$.

Corollaire. — *Soit un ensemble* $\mathrm{E} \subset \overline{\mathrm{E}} \subset \Omega$.

1) *Pour toute* $\lambda \in \mathfrak{L}$, *portée par un compact* $\subset \Omega$, $\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{P}_\lambda} = \mathrm{P}_{\lambda^{*\mathrm{E}}}$.

2) *Il existe un ensemble* $e^* \subset \Omega$, λ-*négligeable pour toute* $\lambda \in \mathfrak{L}$, *tel que, pour* $y \in \Omega - e^*$, $\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}}_{p_y} \leqslant \mathrm{P}_{\varepsilon_y^{*\mathrm{E}}}$.

Balayage et balayage* sur un ensemble fermé dans Ω. Mesure harmonique* d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

Proposition 31. 3. — *Quel que soit l'ensemble* F *fermé dans* Ω :

1) *pour tout couple de points* x *et* $y \in \Omega$, $\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{F}}_{p_y}(x) = \hat{\mathrm{R}}^{*\mathrm{F}}_{p^*_x}(y)$;

[45] Les résultats de la fin du n° 31 (corollaire 2*; corollaire 1, formule (3), et théorème 31. 1) étendent les conclusions de ce corollaire au cas de E quelconque, et montrent que l'inégalité $\hat{\mathrm{R}}^{*\mathrm{E}}_p \leqslant \mathrm{P}^*_{\varepsilon^{\mathrm{E}}_x}$ est en fait une égalité, valable pour tout $x \in \Omega$.

2) *pour toute mesure* $\mu > 0$ *sur* Ω *portée par un compact* $\subset \Omega$, $\hat{R}^{*F}_{P^*_\mu} = P^*_{\mu^F}$, *et* $\hat{R}^F_{P_\mu} = P_{\mu^{*F}}$.

1) *a*) Supposons d'abord F compact $\subset \Omega$.

Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, portée par un compact $\subset \Omega$, donc en particulier pour toute $\mu = \rho^\delta_u$, où $\delta \in \mathfrak{D}$ et $u \in \delta$, on a (corollaire de la proposition 31. 1) :

$$\hat{R}^{*F}_{P^*_\mu} = P^*_{\mu^F}. \tag{1}$$

Comme F est fermé, les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$\hat{R}^{*F}_{P^*_\mu}(y) = \int \hat{R}^{*F}_{p^*_x}(y)\, d\mu(x) \text{ (th. 22. 4 appliqué au balayage*)},$$

et

$$P^*_{\mu^F}(y) = \int p_y(x)\, d\mu^F(x) = \int \hat{R}^F_{p_y}(x)\, d\mu(x) \quad \text{[th. 10. 1, (2)]}.$$

On déduit alors de (1) :

$$\int \hat{R}^F_{p_y}(x)\, d\rho^\delta_u(x) = \int \hat{R}^{*F}_{p^*_x}(y)\, d\rho^\delta_u(x) \text{ pour } \delta \in \mathfrak{D} \text{ et } u \in \delta.$$

D'autre part, comme F est fermé, le théorème 10. 1, appliqué au balayage* de la mesure ε_y, donne

$$\hat{R}^{*F}_{p^*_x}(y) = \int p^*_x(z)\, d\varepsilon^{*F}_y(z) = \int p_z(x)\, d\varepsilon^{*F}_y(z),$$

donc, pour chaque $y \in \Omega$, la fonction $x \to \hat{R}^{*F}_{p^*_x}(y)$ appartient à S^+.

Conclusion. — Pour chaque $y \in \Omega$, $x \to \hat{R}^F_{p_y}(x)$ et $x \to \hat{R}^{*F}_{p^*_x}(y)$ sont deux fonctions $\in S^+$, égales $\mathfrak{D}$-p.p., donc identiques.

b) F étant fermé dans Ω, soit une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \Omega$, dont la réunion est Ω. On est ramené au cas *a*), car :

$$R^F_{p_y} = \lim_n R^{F \cap \omega_n}_{p_y} \quad (\text{n}^\text{o}\ 5, \text{B, propriété } 5),$$

donc aussi $R^F_{p_y} = \lim_n R^{F\cap\bar{\omega}_n}_{p_y}$,

puis $\hat{R}^F_{p_y} = \lim_n \hat{R}^{F\cap\bar{\omega}_n}_{p_y}$ (n° 5, A, propriété 3).

2) Même démonstration que pour la proposition 30. 2, partie 2.

Corollaire 1. — *Pour tout ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ *et tout point* $y \in \omega$, *la mesure harmonique* de* ω *au point* y *est* σ^ω_y (46).

(46) Ce résultat n'était connu que pour un ouvert *c.d.* (théorème 29. 4).

Si $\sigma_y'^{\omega}$ désigne la mesure harmonique* de ω au point y, on a (n° 5, B, propriété 1) :

$$\hat{R}^{*\complement\omega}_{p_x^*}(y) = \int p_x^*(z)\, d\sigma_y'^{\omega}(z),$$

donc
$$\hat{R}^{\complement\omega}_{p_y}(x) = \int p_z(x)\, d\sigma_y'^{\omega}(z).$$

Cette relation, vraie pour chaque $x \in \Omega$, implique $\sigma_y'^{\omega} = \sigma_y^{\omega}$.

Corollaire 2. — *Etant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$, à chaque point $y \in \omega$ on associe le potentiel q_y dans ω, de support y, défini par*

$$q_y(x) = p_y(x) - \hat{R}^{\complement\omega}_{p_y}(x).$$

Alors, pour chaque $x \in \omega$, $y \to q_y(x)$ est un potentiel dans ω, de support x.*

Balayage et balayage* sur un ensemble quelconque.

Lemme 31. 2. — *Soit un ensemble $\mathrm{E} \subset \Omega$ et une fonction $\mathrm{V} \in \mathrm{S}^+$: pour toute suite croissante de potentiels p_n, finis continus dans Ω et tendant vers V,*

$$\int \mathrm{V}\, d\varepsilon_x^{\mathrm{E}} = \lim_n \hat{R}^{\mathrm{E}}_{p_n}(x);$$

par suite, $x \to \int \mathrm{V}\, d\varepsilon_x^{\mathrm{E}}$ est une fonction $\in \mathrm{S}^+$, et

$$\int \mathrm{V}\, d\varepsilon_x^{\mathrm{E}} \leqslant \hat{R}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{V}}(x) \quad (47).$$

En effet, p_n étant un potentiel fini continu, on a (théorème 10. 1) :

$$\int p_n\, d\varepsilon_x^{\mathrm{E}} = \hat{R}^{\mathrm{E}}_{p_n}(x).$$

Remarque. — Énoncé analogue pour une fonction $\mathrm{V}^* \in \mathrm{S}^{*+}$.

Théorème 31. 1. — *Quel que soit l'ensemble $\mathrm{E} \subset \Omega$, pour tout couple de points x et $y \in \Omega$:* $\hat{R}^{\mathrm{E}}_{p_y}(x) = \hat{R}^{*\mathrm{E}}_{p_x^*}(y)$.

1) Supposons $\mathrm{E} \subset \overline{\mathrm{E}} \subset \Omega$.

D'après le lemme 31. 2 et le corollaire de la proposition 31. 2, on a

$$(1) \qquad \int p_y(u)\, d\varepsilon_x^{\mathrm{E}}(u) \leqslant \hat{R}^{\mathrm{E}}_{p_y}(x) \leqslant \int p_z(x)\, d\varepsilon_y^{*\mathrm{E}}(z)$$

pour tout $x \in \Omega$ et $y \in \Omega - e^*$, où e^* est de σ_z^{ω}-mesure nulle pour

(47) Sans l'axiome D, pour E quelconque, je ne sais pas si l'on a $\hat{R}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{V}} = \lim_n \hat{R}^{\mathrm{E}}_{p_n}$; c'est ce qui complique l'étude du balayage dans le cas général.

tout ouvert régulier ω et tout point $z \in \omega$. Donc, si $\mathcal{B}$ est une base formée d'ouverts réguliers, e^* est de mesure harmonique* nulle pour tous les ouverts $\in \mathcal{B}$ (corollaire de la proposition 31. 3).

De façon analogue, on a

$$(2) \qquad \int p_x^*(z)\, d\varepsilon_y^{*E}(z) \leqslant \hat{R}_{p_x^*}^{*E}(y) \leqslant \int p_u^*(y)\, d\varepsilon_x^{E}(u)$$

pour tout $y \in \Omega$ et $x \in \Omega - e$, où e est $\mathcal{D}$-négligeable.

Par suite, les doubles inégalités (1) et (2) deviennent des égalités pour $x \in \Omega - e$, $y \in \Omega - e^*$; elles s'étendent à x et y quelconques par le raisonnement suivant :

a) $x \rightarrow \int p_z(x)\, d\varepsilon_y^{*E}(z)$ est une fonction $\in S^+$, ainsi que $x \rightarrow \int p_y(u)\, d\varepsilon_x^{E}(u)$ (lemme 31. 2); y étant fixé dans $\Omega - e^*$, ces deux fonctions $\in S^+$, égales $\mathcal{D}$-p. p., sont égales pour tout $x \in \Omega$.

b) De même, $y \rightarrow \int p_u^*(y)\, d\varepsilon_x^{E}(u)$ et $y \rightarrow \int p_x^*(z)\, d\varepsilon_y^{*E}(z)$ sont deux fonctions $\in S^{*+}$; x étant fixé dans Ω, leur égalité $\mathcal{B}$-p.p*. entraîne leur égalité pour tout $y \in \Omega$.

2) Si E est quelconque, on se ramène au cas précédent par le raisonnement de la proposition 31. 3, partie 1, *b*.

Corollaire 1. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$.

1) *Pour toute suite croissante de potentiels* p_n, *finis continus dans* Ω *et tendant vers* p_y :

$$(1) \qquad \hat{R}_{p_y}^{E} = \lim_n \hat{R}_{p_n}^{E}.$$

2) *Pour toute mesure* $\mu > 0$, *portée par un compact* $\subset \Omega$:

$$(2) \qquad \int \hat{R}_{p_y}^{E}\, d\mu = \int p_y\, d\mu^{E};$$

en particulier

$$(3) \qquad \hat{R}_{p_y}^{E}(x) = \int p_y\, d\varepsilon_x^{E}.$$

1) Pour $E \subset \overline{E} \subset \Omega$, on vient de montrer (3), qui entraîne (1) (lemme 31. 2).

Cas général : Soit une suite croissante d'ouverts $\omega_i \subset \bar{\omega}_i \subset \Omega$, dont la réunion est Ω.

$$\hat{R}_{p_y}^{E} = \lim_i \hat{R}_{p_y}^{E \cap \omega_i}, \qquad \text{car } p_y \text{ est un potentiel dans } \Omega,$$
$$= \lim_i \lim_n \hat{R}_{p_n}^{E \cap \omega_i} = \lim_n \lim_i \hat{R}_{n}^{E \cap \omega_i} = \lim_n \hat{R}_{p_n}^{E}.$$

2) La formule (2) résulte de $\int \hat{R}^{E}_{p_n}\, d\mu = \int p_n\, d\mu^{E}$.

Corollaire 1*. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$.

1) *Pour toute suite croissante de potentiels** p^*_n, *finis continus dans* Ω *et tendant vers* p^*_x : $\hat{R}^{*E}_{p^*_x} = \lim_n \hat{R}^{*E}_{p^*_n}$.

2) *Pour toute mesure* $\lambda > 0$, *portée par un compact* $\subset \Omega$:

$$\int \hat{R}^{*E}_{p^*_x}\, d\lambda = \int p^*_x\, d\lambda^{*E}; \quad \textit{en particulier} \quad \hat{R}^{*E}_{p^*_x}(y) = \int p^*_x\, d\varepsilon^{*E}_y.$$

Corollaire 2. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$. *Pour toute mesure* $\lambda \in \mathcal{L}$:

$$\hat{R}^{E}_{P_\lambda}(x) = \int \hat{R}^{E}_{p_y}(x)\, d\lambda(y),$$

et, si λ *est portée par un compact* $\subset \Omega$: $\hat{R}^{E}_{P_\lambda} = P_{\lambda^{*E}}$.

$$\begin{aligned} \hat{R}^{E}_{P_\lambda}(x) &= \int P_\lambda(u)\, d\varepsilon^{E}_x(u), \quad \text{car } P_\lambda \text{ est un potentiel fini continu,} \\ &= \iint p_y(u)\, d\lambda(y)\, d\varepsilon^{E}_x(u) \\ &= \int \hat{R}^{E}_{p_y}(x)\, d\lambda(y) \text{ (corollaire 1).} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \hat{R}^{E}_{P_\lambda}(x) &= \int \hat{R}^{*E}_{p^*_x}(y)\, d\lambda(y) \\ &= \int p^*_x(y)\, d\lambda^{*E}(y) = P_{\lambda^{*E}}(x) \end{aligned}$$

si λ est portée par un compact $\subset \Omega$ (corollaire 1*).

Corollaire 2*. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$. *Pour toute mesure* $\mu \in \mathfrak{M}$:

$$\hat{R}^{*E}_{P^*_\mu}(y) = \int \hat{R}^{*E}_{p^*_x}(y)\, d\mu(x),$$

et, si μ *est portée par un compact* $\subset \Omega$: $\hat{R}^{*E}_{P^*_\mu} = P^*_{\mu^E}$.

32. Applications de la formule $\hat{R}^{E}_{p_y}(x) = \hat{R}^{*E}_{p^*_x}(y)$.

A) Identité des ensembles polaires et polaires*.

Théorème 32. 1. — *Il y a identité entre les ensembles polaires et les ensembles polaires**.

En effet, pour qu'un ensemble $E \subset \Omega$ soit polaire, il faut et il suffit que $\hat{R}^{E}_{p_y}(x) = 0$ quels que soient x et $y \in \Omega$ (n° 5, C).

B) Caractérisation des ouverts d. et c. d.

Lemme 32. 1. — *Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et un point $y \in \partial\omega$. Pour que p_y soit conservé par balayage sur $\complement\omega$, il faut et il suffit que y soit régulier* pour ω.*

Choisissons un point x_i dans chaque composante connexe ω_i de ω.

Pour que p_y soit conservé par balayage sur $\complement\omega$, il faut et il suffit que, pour chaque indice i :

$$\hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x_i) = p_y(x_i), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega_i}(x_i) = p_y(x_i),$$

ou

$$\hat{R}_{p^*_{x_i}}^{*\complement\omega_i}(y) = p^*_{x_i}(y).$$

Et cette dernière condition est équivalente à : y point frontière régulier* pour ω_i ou y extérieur à ω_i (propriété 7, n° 5, B), c'est-à-dire : y régulier* pour ω (propriété 4, n° 4, B).

Théorème 32. 2. — *Il y a identité :*

1) *entre les ouverts c. d. et les ouverts réguliers*;*

2) *entre les ouverts d. et les ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ dont les points frontières irréguliers* forment un ensemble polaire.*

Étant donné un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, soit B l'ensemble des points $y \in \partial\omega$ tels que p_y ne soit pas conservé par balayage sur $\complement\omega$, c'est-à-dire (lemme 32. 1) l'ensemble des points-frontières irréguliers* de ω. Le théorème résulte du lemme 24. 1, selon lequel :

1) ω c. d. équivaut à $B = \emptyset$;

2) ω d. équivaut à B polaire.

Remarques. — 1) Ce théorème permet de construire des ouverts c. d., autres que ceux de la base $\mathfrak{D}$: par exemple, étant donné un compact $K \subset \Omega$ et un ouvert $\omega \supset K$, il existe un ouvert δ c. d. tel que $K \subset \delta \subset \omega$ (proposition 7. 1). D'autre part, le théorème 8. 2 prouve que, étant donné un domaine $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, il existe des points $y \in \partial\omega$, dans tout voisinage de tout point $\in \partial\bar{\omega}$, tels que p_y soit conservé par balayage sur $\complement\omega$.

2) On ne peut donner de caractérisation analogue pour les ouverts c. d.* et d.*, que si les potentiels* dans Ω, de support ponctuel donné, sont proportionnels.

C) Comparaison des théorèmes de convergence pour les fonctions $\in S^+$ et pour les fonctions $\in S^{*+}$.

Théorème 32. 3. — *Moyennant les axiomes supposés dans ce chapitre, les deux énoncés suivants sont équivalents* :

(C) *Pour toute famille* $\mathcal{F}$ *de fonctions* $\in S^+$: $\inf_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ q. p.

(C*) *Pour toute famille* $\mathcal{F}^*$ *de fonctions* $\in S^{*+}$: $\inf_{V^* \in \mathcal{F}^*} V^* = \widehat{\inf_{V^* \in \mathcal{F}^*} V^*}$ q. p.

Dans le cas de l'unicité, le théorème de convergence (C) est équivalent à l'axiome D (théorème 25. 3), donc (cf. début du n° 25) au fait que tous les ouverts $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ sont d., ou encore (théorème 32. 2) à la propriété suivante :

(P) L'ensemble des points-frontières irréguliers* de tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ est polaire.

D'autre part, le théorème de convergence (C*) entraîne (P) [cf., par exemple, n° 27, note (39)], et la réciproque est incluse dans le théorème 27. 1, appliqué aux fonctions $\in S^{*+}$.

D) Critères d'effilement d'un ensemble quelconque.

a) *Lemmes préliminaires* (valables avec les seuls axiomes 1, 2, 3).

Lemme 32. 2. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$ *et un potentiel* p *de support ponctuel* $y \notin E$. *Si* p *n'est pas conservé par balayage sur* E, *il existe un ouvert* $\omega \supset E$ *tel que* p *ne soit pas conservé par balayage sur* ω.

Par hypothèse $\hat{R}_p^E \not\equiv p$, donc $R_p^E \not\equiv p$, et $R_p^E(x_0) < p(x_0)$ pour un point $x_0 \neq y$.

Par suite, il existe une fonction $v \in S^+$, telle que

$$(1) \qquad v \geqslant p \quad \text{sur } E, \qquad \text{et} \qquad v(x_0) < p(x_0);$$

en outre, si v_0 est une fonction $\in S^+$, > 0 et finie au point x_0, on peut déterminer $\lambda > 0$ pour que

$$(2) \qquad v(x_0) + \lambda v_0(x_0) < p(x_0).$$

Soit ω l'ensemble des points $\in \Omega - \{y\}$ où $v + \lambda v_0 > p$; ω est ouvert dans $\Omega - \{y\}$, donc dans Ω, et $\omega \supset E$ d'après (1) ; enfin $v + \lambda v_0 \geqslant R_p^\omega$ dans Ω, joint à (2), entraîne $p(x_0) > R_p^\omega(x_0)$.

LEMME 32. 3. — *Soit un ensemble* $E \subset \Omega$ *et un point polaire* $y \in \Omega$. *Si un potentiel* p, *de support* y, *est conservé par balayage sur* E, *il est aussi conservé par balayage sur* $E \cap \delta$, *pour tout voisinage* δ *de* y.

On peut supposer δ ouvert.

On sait (n° 5, B, propriété 6) que $\hat{R}_p^{E\cap\delta} + \hat{R}_p^{E\cap \complement\delta} \geqslant \hat{R}_p^E$, donc, d'après l'hypothèse : $\hat{R}_p^{E\cap\delta} - p \geqslant -\hat{R}_p^{E\cap\complement\delta}$, où $\hat{R}_p^{E\cap\complement\delta}$ est harmonique dans δ.

Alors, $\hat{R}_p^{E\cap\delta} - p$, surharmonique dans $\Omega - \{y\}$ et bornée inférieurement au voisinage du point polaire y, est prolongeable en une fonction v surharmonique dans Ω; et $v \geqslant -p$ dans Ω entraîne $v \in S^+$.

b) La formule $\hat{R}_{p_y}^E(x) = \hat{R}_{p_x^*}^{*E}(y)$ permet de compléter un critère d'effilement vérifié avec les seuls axiomes 1, 2, 3 (n° 5, D, propriété 2) : Soit une fonction $v \in S^+$, > 0 et finie continue au point $x_0 \notin E$. Pour que E soit effilé au point x_0, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage δ de x_0, tel que $R_v^{E\cap\delta}(x_0) < v(x_0)$.

THÉORÈME 32. 4. — *Soit une fonction* $v \in S^+$, > 0 *et finie continue au point* $x_0 \notin E$. *Pour que* E *soit effilé au point* x_0, *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage* δ *de* x_0, *tel que*

$$\hat{R}_v^{E\cap\delta}(x_0) < v(x_0) \quad ({}^{48}).$$

Condition suffisante : Par hypothèse, $\hat{R}_v^{E\cap\delta}(x_0) < v(x_0)$ pour un voisinage δ de x_0. Par suite, pour toute fonction $\in S^+$ finie continue au point x_0, en particulier pour p_{y_0}, où $y_0 \neq x_0$, il existe un voisinage δ_0 de x_0 tel que :

$$(1) \qquad \hat{R}_{p_{y_0}}^{E\cap\delta_0}(x_0) < p_{y_0}(x_0).$$

De (1) on déduit que $p_{x_0}^*$ n'est pas conservé par balayage* sur $E \cap \delta_0$; donc, d'après le lemme 32. 2 appliqué au balayage*, il existe un ouvert $\omega \supset E \cap \delta_0$ tel que $R_{p_{x_0}^*}^{*\omega} \not\equiv p_{x_0}^*$.

Une nouvelle application du théorème 31. 1 donne $R_{p_y}^\omega(x_0) < p_y(x_0)$ pour un point $y \neq x_0$; d'où l'effilement de ω au point x_0 et *a fortiori* celui de $E \cap \delta_0$.

(48) Cf. remarque 1, ci-dessous.

Corollaire 1. — *Il existe un potentiel* U, *fini continu dans* Ω, *tel que, quels que soient l'ensemble* $E \subset \Omega$ *et le point* $x_0 \notin E$, *la condition:*

$$\hat{R}_U^E(x_0) < U(x_0)$$

est nécessaire et suffisante pour que E *soit effilé au point* x_0.

Le potentiel U déterminé par le théorème 9.1 répond à la question.

Corollaire 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit effilé en un point* $x_0 \notin E$, *est* $\varepsilon_{x_0}^E \neq \varepsilon_{x_0}$.

La condition nécessaire résulte du corollaire 1, car, U étant un potentiel fini continu dans Ω, on a $\hat{R}_U^E(x_0) = \int U \, d\varepsilon_{x_0}^E$ (théorème 10. 1).

Inversement, si $\varepsilon_{x_0}^E \neq \varepsilon_{x_0}$, d'après le théorème 6. 1, il existe un couple de potentiels p, p', finis continus dans Ω, tels que

$$\hat{R}_p^E(x_0) - \hat{R}_{p'}^E(x_0) = \int (p - p') \, d\varepsilon_{x_0}^E \neq p(x_0) - p'(x_0);$$

donc, pour l'un au moins des potentiels, p par exemple: $\hat{R}_p^E(x_0) \neq p(x_0)$.

Remarques. — 1) En supposant les axiomes 1, 2, 3, Ω à base dénombrable, l'existence d'un potentiel > 0 et le théorème de convergence, il est facile de démontrer directement le théorème 32. 4, en supprimant même la restriction $x_0 \notin E$.

2) Le théorème 32. 4 et ses corollaires se transposent pour l'effilement*.

c) On peut également caractériser l'effilement d'un ensemble E, en un point $x_0 \notin E$, par le balayage* de $p_{x_0}^*$ sur E [49]:

Théorème 32. 5 [50]. — *Pour qu'un ensemble* $E \subset \Omega$ *soit effilé au point* x_0, *il faut et il suffit:*

1) *si* $x_0 \notin E$, *qu'il existe un voisinage* δ *de* x_0, *tel que:*

$$\hat{R}_{p_{x_0}^*}^{*E \cap \delta} \not\equiv p_{x_0}^*;$$

2) *si* x_0 *est polaire, que* $\hat{R}_{p_{x_0}^*}^{*E} \not\equiv p_{x_0}^*$.

[49] Dans le cas classique, cette caractérisation se fait par le balayage de p_{x_0} lui-même.

[50] Ce théorème se transpose pour l'effilement*.

1) Soit $x_0 \notin \mathrm{E}$: y étant un point $\neq x_0$, pour que E soit effilé au point x_0, il faut et il suffit (théorème 32. 4) qu'il existe un voisinage δ de x_0 tel que $\hat{\mathrm{R}}_{p_y}^{\mathrm{E}\cap\delta}(x_0) < p_y(x_0)$, c'est-à-dire

$$\hat{\mathrm{R}}_{p_{x_0}^*}^{*\mathrm{E}\cap\delta} \not\equiv p_{x_0}^*.$$

2) Si x_0 est polaire, on peut supprimer la restriction $x_0 \notin \mathrm{E}$, car les balayées d'une même fonction sur deux ensembles différant d'un ensemble polaire, coïncident.

En outre, si E est effilé au point x_0, d'après la partie 1, il existe un voisinage δ de x_0 tel que $\hat{\mathrm{R}}_{p_{x_0}^*}^{*\mathrm{E}\cap\delta} \not\equiv p_{x_0}^*$, donc aussi $\hat{\mathrm{R}}_{p_{x_0}^*}^{*\mathrm{E}} \not\equiv p_{x_0}^*$ (lemme 32. 3, appliqué au balayage*).

33. Étude des potentiels* à support ponctuel.

Théorème 33. 1. — *Si x_0 est polaire, les potentiels* dans Ω de support x_0 sont tous proportionnels à $p_{x_0}^*$.*

Choisissons une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ et portée par un compact $\subset \Omega$: P_μ^* est fini continu dans Ω.

Soit q^* un potentiel* dans Ω, de support x_0 : q^* n'est pas borné supérieurement au voisinage de x_0, donc les ensembles

$$\mathrm{B}_n = \{y \in \Omega \mid q^*(y) \geqslant n\mathrm{P}_\mu^*(y)\}$$

ne sont pas vides; ils forment une suite décroissante; d'après le lemme 3. 1, un voisinage compact de x_0 contient les $\overline{\mathrm{B}}_n$ pour n assez grand, donc $\bigcap_n \overline{\mathrm{B}}_n = \{x_0\}$.

En outre, si $q^*(x_0) = +\infty$, B_n est un voisinage de x_0 fermé dans Ω; si $q^*(x_0) < +\infty$, $\mathrm{B}_n \cup \{x_0\}$ est fermé dans Ω (et d'ailleurs effilé* au point x_0 pour n assez grand).

Considérons $\hat{\mathrm{R}}_{n\mathrm{P}_\mu^*}^{*\mathrm{B}_n} = \mathrm{P}_{\mu_n}^*$, où $\mu_n = n\mu^{\mathrm{B}_n}$ (corollaire 2* du théorème 31. 1).

On a, d'après la définition de B_n :

(1) $$q^* \geqslant \mathrm{P}_{\mu_n}^* \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous allons montrer :

(2) $$q^* \leqslant \mathrm{P}_{\mu_n}^* \quad \text{dans} \quad \Omega \cap \complement \overline{\mathrm{B}}_n.$$

En effet, pour toute $v^* \in S^{*+}$, majorant nP^*_μ sur B_n :

$$v^* \geqslant q^* \quad \text{sur} \quad \Omega \cap \partial B_n \qquad \text{sauf peut-être au point } x_0.$$

x_0 étant polaire, il existe une fonction $w^* \in S^{*+}$, valant $+\infty$ au point x_0, et, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$v^* + \varepsilon w^* \geqslant q^* \qquad \text{sur} \qquad \Omega \cap \partial B_n.$$

Le lemme 3. 1 s'applique dans l'ouvert $\Omega \cap \complement \overline{B}_n$, car $q^* \leqslant nP^*_\mu$ dans $\Omega \cap \complement B_n$; on en déduit :

$$v^* + \varepsilon w^* \geqslant q^* \quad \text{dans} \quad \Omega \cap \complement \overline{B}_n,$$

puis $\quad v^* \geqslant q^*$ q. p., donc partout, dans $\Omega \cap \complement \overline{B}_n$,
enfin $\quad P^*_{\mu_n} \geqslant q^*$ dans $\Omega \cap \complement \overline{B}_n$.

De l'inégalité (1) résulte que les masses des mesures μ_n sont bornées dans leur ensemble pour n assez grand. Comme elles sont portées par un voisinage donné de x_0 pour n assez grand, on peut extraire de la suite μ_n une suite partielle $\mu_{n'}$ vaguement convergente vers une mesure de la forme $\alpha\varepsilon_{x_0}$, $\alpha \geqslant 0$. Alors :

$$P^*_{\mu_{n'}}(y) = \int p^*_x(y)\, d\mu_{n'}(x) \to \alpha p^*_{x_0}(y) \quad \text{pour tout} \quad y \neq x_0,$$

et les inégalités (1) et (2) donnent $q^* = \alpha p^*_{x_0}$ dans $\Omega - \{x_0\}$, donc aussi dans Ω.

Lemme 33. 1. — *Si x_0 est non polaire, $p^*_{x_0}$ est localement borné dans Ω.*

En effet, pour toute mesure $\mu > 0$ portée par un compact $\subset \Omega$, $\hat{R}^{*\{x_0\}}_{P^*_\mu} = P^*_{\mu^{\{x_0\}}}$ (proposition 31. 3); et, comme $\mu^{\{x_0\}}$ est portée par le point x_0, $\hat{R}^{*\{x_0\}}_{P^*_\mu}$ est proportionnel à $p^*_{x_0}$. En considérant un potentiel* P^*_μ borné au voisinage de x_0, on voit que $p^*_{x_0}$ est localement borné dans Ω.

Lemme 33. 2. — *Si x_0 est un point non polaire isolé, les potentiels* dans Ω de support x_0 sont tous proportionnels à $p^*_{x_0}$* ([51]).

Soit q^* un potentiel* dans Ω, de support x_0. Si σ_n désigne une suite décroissante de voisinages de x_0, formant système

([51]) Ce résultat peut s'étendre au cas où les points non polaires situés dans un voisinage de x_0 forment un ensemble dénombrable.

fondamental de voisinages de x_0, q^* est limite de la suite croissante $\hat{R}_{q^*}^{*\complement\sigma_n}$. Comme $\hat{R}_{q^*}^{*\complement\sigma_n}$ est harmonique* dans $\Omega - \partial\sigma_n$, sa représentation intégrale ne fait intervenir, pour n assez grand, que des potentiels* du type p_x^*. Par suite, $\hat{R}_{q^*}^{*\complement\sigma_n}$ est un potentiel* du type P_μ^*, ainsi que q^* (corollaire 1 du théorème 23. 1).

Remarque. — Dans le cas où les potentiels* de support ponctuel donné sont tous proportionnels — en particulier si les points non polaires sont isolés — les fonctions harmoniques**, associées aux fonctions harmoniques* à l'aide du potentiel* p_x^* ([52]), coïncident avec les fonctions harmoniques.

En effet, la mesure harmonique**, soit $\rho_x'^{\omega}$, d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ en un point $x \in \omega$, est, par définition, l'unique mesure telle que

$$\hat{R}_{p_x^*}^{*\complement\omega}(y) = \int p_u^*(y)\, d\rho_x'^{\omega}(u), \quad \text{soit} \quad \hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x) = \int p_y(u)\, d\rho_x'^{\omega}(u);$$

elle coïncide donc avec ρ_x^{ω}.

([52]) Cf. la remarque 2 sur le théorème 32. 2.

CHAPITRE VII

APPLICATION DE L'AXIOMATIQUE AUX SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE DE TYPE ELLIPTIQUE

34. Définition d'un système de fonctions harmoniques à partir d'un opérateur elliptique.

Soit L un opérateur différentiel du second ordre, de type elliptique, défini dans un domaine Ω_0 de l'espace euclidien R^m ($m \geqslant 2$):

$$\mathrm{L}u(x) = \sum_{1 \leqslant i,\ k \leqslant m} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c\,(x) u(x),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $a_{ik} = a_{ki}$ et la forme quadratique

$$\sum_{1 \leqslant i,\ k \leqslant m} a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k$$

est définie positive pour tout $x \in \Omega_0$.

Une solution de $\mathrm{L}u = 0$ (resp : $\mathrm{L}u \leqslant 0$) dans un ouvert $\omega \subset \Omega_0$ est une fonction de classe C^2 dans ω, satisfaisant à l'équation (resp. : inéquation) en tout point $\in \omega$.

Hypothèses de ce numéro :
dans Ω_0, les coefficients a_{ik}, b_i, c sont localement lipschitziens.

Lemme 34. 1 (démontré dans [37, p. 322]). — *Etant donné l'opérateur* L *dans* Ω_0, *à tout point* $y \in \Omega_0$ *on peut associer : un voisinage ouvert* Y *de* y, *une fonction* $f > 0$ *et de classe* C^∞ *dans* Y, *enfin un opérateur elliptique* L', *défini dans* Y, *dont les coefficients* a'_{ik}, b'_i, c' *sont localement lipschitziens,* $c' < 0$, *et tel que, pour toute* $u \in C^2(Y)$: $\mathrm{L}u = \mathrm{L}'(fu)$.

La fonction f correspondant à $y = (y_1, \ldots, y_m)$ est définie par $\dfrac{1}{f(x)} = 1 - A \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2$, où A est une const. > 0 convenablement choisie.

THÉORÈME 34. 1. — *Les solutions de* $Lu = 0$ *définissent dans* Ω_0 *un système de fonctions satisfaisant aux axiomes* 1, 2, 3′, *dites* L-*harmoniques* ([53]).

1er *cas :* $c \leqslant 0$ *dans* Ω_0.

L'axiome 1 est satisfait.

Pour vérifier l'axiome 2, montrons que chaque boule ouverte $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_0$ est un ouvert régulier : Toute fonction f, continue sur $\partial\omega$, peut être prolongée en une fonction continue dans $\bar{\omega}$, solution de $Lu = 0$ dans ω [42, théorèmes 35. VI et 36. IV]; ce prolongement est unique, et $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$, grâce au principe du minimum de Hopf [42, théorème 3. II].

Conséquence : Dans chaque boule ouverte $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_0$, il existe une solution de $Lu = 0$ dont la borne inférieure dans ω est > 0. En effet, soit $v = e^{Ax_1}$, où A est une const. > 0, choisie assez grande pour que $Lv \geqslant 0$ dans ω; v est continu, donc sa restriction à $\partial\omega$ peut être prolongée dans ω par une solution u de $Lu = 0$. On a $L(u - v) \leqslant 0$ dans ω et $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ x \in \omega}} [u(x) - v(x)] = 0$ pour tout $y \in \partial\omega$; d'où $u \geqslant v$ dans ω (principe du minimum) et $\inf\limits_{\omega} u > 0$.

Vérification de l'axiome 3′ :

a) Considérons les solutions de $Lu = 0$, > 0 dans un domaine $\delta \subset \Omega_0$ et égales à 1 en un point $y \in \delta$. Elles sont bornées dans leur ensemble sur tout compact $\subset \delta$ [49, théorème 4′]; donc, grâce à un théorème de Morrey [44, p. 123], leurs dérivées partielles premières sont bornées dans leur ensemble au voisinage du point y. On en déduit l'égale continuité, au point y, des fonctions considérées.

b) Une solution u de $Lu = 0$, $\geqslant 0$ dans un domaine $\delta \subset \Omega_0$, est, soit > 0, soit $= 0$ dans δ. Supposons, en effet, que l'ensemble des points $\in \delta$ où $u > 0$ ne soit ni $\emptyset$ ni δ; soit β

([53]) Toutes les notions relatives à ce système seront distinguées par la lettre L.

une de ses composantes connexes, y un point $\in \partial\beta \cap \delta$, et $\omega \subset \bar{\omega} \subset \delta$ une boule ouverte $\ni y$. Il existe une solution u_0 de $\mathrm{L}u = 0$ dans ω, égale à 1 au point y et > 0 dans ω ; donc les fonctions $u_0 + nu$ ($n \in \mathrm{Z}^+$), solutions > 0 de $\mathrm{L}u = 0$ dans ω et égales à 1 au point y, sont également continues en y, et ceci est en contradiction avec $u_0 + nu$ arbitrairement grand en chaque point $\in \beta$.

Cas général.

L'axiome 1 est satisfait.

Il suffit de vérifier les axiomes 2 et 3′ dans un voisinage de chaque point $y \in \Omega_0$; si l'on adopte le voisinage Y déterminé par le lemme 34. 1, il existe une fonction f finie continue > 0 dans Y, telle que les produits par f des solutions de $\mathrm{L}u = 0$ dans Y forment un système de fonctions harmoniques dans Y (1er cas); il en est donc de même des solutions de $\mathrm{L}u = 0$ dans Y (cf. nº 1).

Proposition 34. 1. — *Pour toute fonction u de classe C^2 dans un ouvert $\omega_0 \subset \Omega_0$:*

1) $\mathrm{L}u \leqslant 0$ *dans ω_0 équivaut à: u L-surharmonique dans ω_0;*

2) $\mathrm{L}u \leqslant 0$ *dans ω_0 et < 0 en un point $\in \omega_0$ équivaut à: u L-surharmonique et non L-harmonique dans ω_0.*

En utilisant le caractère local de la surharmonicité (nº 2, C, propriété 1) et les fonctions f-surharmoniques (nº 2, A), on se ramène, comme au théorème 34. 1, au cas $c \leqslant 0$ dans Ω_0.

Supposons $\mathrm{L}u \leqslant 0$ dans ω_0. Dans tout domaine L-régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \omega_0$, on a $\mathrm{L}(u - \mathrm{H}_u^\omega) \leqslant 0$, et $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ x \in \omega}} [u(x) - \mathrm{H}_u^\omega(x)] = 0$ pour tout $y \in \partial\omega$; d'où $u \geqslant \mathrm{H}_u^\omega$ dans ω (principe du minimum), et u L-surharmonique dans ω_0.

Réciproquement, soit u de classe C^2 et L-surharmonique dans ω_0. $\mathrm{L}u > 0$ en un point $x \in \omega_0$ entraînerait $\mathrm{L}u > 0$ dans un ouvert $\omega \ni x$, donc u L-sousharmonique et non L-harmonique dans ω.

Corollaire. — 1) *Si c est $\leqslant 0$ dans Ω_0, et < 0 en un point $\in \Omega_0$, il existe un L-potentiel > 0 dans Ω_0.*

2) *Si $c = 0$ dans Ω_0, il existe un L-potentiel > 0 dans tout ouvert $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega_0$.*

3) *Sans hypothèse supplémentaire sur c, il existe un L-potentiel > 0 dans le voisinage Y associé à chaque point $y \in \Omega_0$ par le lemme* 34. 1.

1) Toute const. > 0 est L-surharmonique et non L-harmonique dans Ω_0.

2) Toute constante est L-harmonique dans Ω_0, et, pour A const. > 0 assez grande, $-e^{Ax_1}$ est L-surharmonique et non L-harmonique dans Ω.

3) $\dfrac{1}{f}$ est L-surharmonique et non L-harmonique dans Y.

Dans toute la suite, on désignera par Ω un domaine $\subset \Omega_0$ où il existe un L-potentiel > 0, et on prendra Ω comme espace de base.

35. Les fonctions L-harmoniques adjointes.

Hypothèses de ce numéro :

Ω est un domaine de l'espace euclidien R^m, où les coefficients a_{ik}, b_i, c de l'opérateur L sont localement lipschitziens, et où il existe un L-potentiel > 0. $m \geqslant 3$ (le cas $m = 2$ se traite de la même façon, avec des logarithmes, mais ne sera pas envisagé, pour la simplicité des notations).

Proposition 35. 1. — 1) *Pour tout $y \in \Omega$, les L-potentiels dans Ω de support y sont proportionnels; il en existe un, soit P_y, caractérisé par la condition*

$$(1) \qquad P_y(x) \sim H_y(x) \qquad \textit{quand} \qquad x \to y\ (^{54});$$

et, pour tout $x \in \Omega$, l'application $y \to P_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, est continue.

2) *Étant donné un compact $K \subset \Omega$, il existe deux constantes $c_1(K)$, $c_2(K) > 0$ telles que*

$$(2) \qquad x, y \in K \quad \textit{entraîne} \quad \frac{c_2}{|x-y|^{m-2}} \leqslant P_y(x) \leqslant \frac{c_1}{|x-y|^{m-2}}.$$

Rappels :

A) [43] Étant donné un compact $X \subset \Omega$, on peut trouver un nombre $\rho(X) > 0$ tel que, pour toute boule ouverte $\omega \subset X$,

(54) $\dfrac{1}{H_y(x)} = \left[\sum_{1 \leqslant i, k \leqslant m} A_{ik}(y)(x_i - y_i)(x_k - y_k)\right]^{\frac{m}{2}-1}$, où la matrice (A_{ik}) est inverse de la matrice (a_{ik}).

de rayon $\leqslant \rho(X)$, et tout point $y \in \omega$, il existe : d'abord une solution fondamentale [55] F_y^ω de singularité y; puis une fonction de Green dans ω [56] de singularité y :

$$(3) \qquad p_y^\omega = F_y^\omega - H_{F_y^\omega}^\omega;$$

enfin, pour tout $x \in \omega$, l'application $y \to p_y^\omega(x)$, restreinte à $\omega - \{x\}$, est continue.

B) ([37], théorème 6). Étant donné $y \in \Omega$, pour toute boule $\omega \ni y$ et de rayon assez petit, les L-potentiels dans ω de support y sont tous proportionnels à p_y^ω; par suite, p_y^ω est le seul L-potentiel dans ω de support y tel que $p_y^\omega(x) \sim H_y(x)$ quand $x \to y$.

Démonstration de la proposition 35. 1 *:*

1) Soit ω une boule $\ni y$ et possédant la propriété B. On a établi (théorème 16. 4) une correspondance biunivoque entre les potentiels p dans ω, de support ponctuel donné $\in \omega$, et les potentiels P dans Ω, de même support, par la condition : $P - p$ harmonique dans ω, et d'ailleurs égal à H_P^ω.

On en déduit la proportionnalité des L-potentiels dans Ω de support y, et l'existence d'un L-potentiel unique P_y vérifiant (1) :

$$(4) \qquad p_y^\omega = P_y - H_{P_y}^\omega.$$

D'autre part, on peut trouver un potentiel Q_y dans Ω, de support y, tel que, pour tout $x \in \Omega$, l'application $y \to Q_y(x)$, restreinte à $\Omega - \{x\}$, soit continue (par exemple, théorème 18. 1). On a $P_y = f(y)\, Q_y$ avec $f(y) > 0$, donc il reste à montrer que f est continue dans Ω, ou dans toute boule ω possédant la propriété A.

Pour $y \in \omega$, posons $q_y = Q_y - H_{Q_y}^\omega$: pour tout $x \in \omega$, l'application $y \to q_y(x)$, restreinte à $\omega - \{x\}$, est continue; or on a aussi $p_y^\omega = f(y)\, q_y$, donc f est continue dans ω.

2) Soit ω une boule possédant les propriétés énoncées dans A, et ω' la boule concentrique de rayon moitié. A l'aide des relations (3) et (4), on montre l'existence d'un nombre $\delta(\omega, \varepsilon) > 0$ tel que $x, y \in \omega'$ et $|x - y| \leqslant \delta$ entraînent $|P_y(x) - H_y(x)| \leqslant \varepsilon . H_y(x)$.

[55] $x \to F_y^\omega(x)$ est solution de $Lu = 0$ dans $\omega - \{y\}$, de classe C^1 dans $\bar{\omega} - \{y\}$, et $F_y^\omega(x) \sim H_y(x)$ quand $x \to y$.

[56] C'est-à-dire une solution fondamentale nulle sur $\partial\omega$.

Commençons par déterminer un compact $X \subset \Omega$ tel que $K \subset \underline{X}$; soit $\alpha > 0$ la distance de K à ∂X et $\beta = \inf(\alpha, \rho(X))$. On peut couvrir K par un nombre fini de boules ω_i'', centrées dans K, de rayon $\frac{\beta}{4}$; si ω_i et ω_i' sont les boules concentriques à ω_i'' et de rayons respectifs β et $\frac{\beta}{2}$, on a $\bar{\omega}_i \subset X$ et deux points $x, y \in K$, distants d'au plus $\frac{\beta}{4}$, appartiennent nécessairement à une même boule ω_i'.

Si d est le plus petit des nombres $\frac{\beta}{4}$ et $\delta(\omega_i, \varepsilon)$: x, $y \in K$ et $|x - y| \leqslant d$ entraînent $|P_y(x) - H_y(x)| \leqslant \varepsilon . H_y(x)$; la relation (2) s'en déduit en utilisant la continuité de $P_y(x)$, sur tout compact de $K \times K$ disjoint à la diagonale, et les inégalités $\frac{C_2}{|x-y|^{m-2}} \leqslant H_y(x) \leqslant \frac{C_1}{|x-y|^{m-2}}$ pour $x, y \in K$.

Proposition 35. 2. — *Les boules ouvertes $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ sont* L-*c. d.*

D'après le lemme 24. 1, ω est L-c. d. si, et seulement si, pour tout $y \in \partial\omega$, P_y est conservé par balayage sur $\complement\omega$, soit

$$P_y(x) = \int P_y(u)\, d\rho_x^{\omega}(u) \quad \text{pour} \quad x \in \omega.$$

Considérons une suite de points $y_n \to y$, situés sur le prolongement du rayon de la boule aboutissant au point y;

$$P_{y_n}(u) \to P_y(u)$$

quel que soit u, et, pour $u \in \partial\omega$ (proposition 35. 1) :

$$P_{y_n}(u) \leqslant \frac{c_1}{|u - y_n|^{m-2}} \leqslant \frac{c_1}{|u - y|^{m-2}} \leqslant \frac{c_1}{c_2} P_y(u).$$

Donc $\int P_y(u)\, d\rho_x^{\omega}(u) = \lim_n \int P_{y_n}(u)\, d\rho_x^{\omega}(u)$ et, comme chaque P_{y_n} est conservé par balayage sur $\complement\omega$:

$$\int P_y(u)\, d\rho_x^{\omega}(u) = P_y(x).$$

Théorème 35. 1. — *A l'aide du potentiel* P_y *défini par la proposition* 35. 1, *on peut associer aux fonctions* L-*harmoniques un système de fonctions, dites* L-*harmoniques adjointes, satis-*

faisant aux axiomes 1, 2, 3′*: Si, outre les hypothèses de ce numéro, on suppose* $a_{ik} \in C^{2,\lambda}$ [57] *et* $b_i \in C^{1,\lambda}$, *les fonctions* L-*harmoniques adjointes sont les solutions de l'équation adjointe* $L^*u = 0$.

La première partie de l'énoncé résulte des propositions 35. 1 et 2.

Supposons en outre $a_{ik} \in C^{2,\lambda}$, $b_i \in C^{1,\lambda}$: alors les coefficients de l'opérateur adjoint L^* sont localement lipschitziens, donc les solutions de $L^*u = 0$ forment un système de fonctions satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3′. Il suffit de montrer qu'elles coïncident avec les fonctions L-harmoniques adjointes dans toute boule $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ possédant des fonctions de Green pour les deux opérateurs L et L^*; on sait [42, théorème 10. I] que, si $x \to p_y^\omega(x)$ désigne la fonction de Green de singularité y pour L, $y \to p_y^\omega(x)$ est la fonction de Green de singularité x pour L^*.

Remarquons maintenant que, étant donné $x \in \omega$, les L^*-potentiels dans ω de support x sont proportionnels entre eux (proposition 35. 1, appliquée à L^*), donc proportionnels à $y \to p_y^\omega(x)$. D'autre part, les L-potentiels adjoints, dans ω, de support x sont proportionnels entre eux (théorème 33. 1, valable pour chaque point x, car $P_x(x) = +\infty$), et $y \to p_y^\omega(x)$ est aussi un L-potentiel adjoint dans ω de support x, car $p_y^\omega = P_y - H_{P_y}^\omega$ dans ω (cf. corollaire 2 de la proposition 31. 3). L'identité des fonctions L^*-harmoniques et L-harmoniques adjointes résulte alors du théorème 22. 5.

36. Quelques propriétés des fonctions L-surharmoniques.

Mêmes hypothèses qu'au n° 35.

LES ENSEMBLES L-POLAIRES.

THÉORÈME 36. 1. — *Dans* Ω, *les ensembles* L-*polaires coïncident avec les ensembles* Δ-*polaires* [58].

Soit un ensemble $E \subset \Omega$: pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, $E \cap \omega$ L-polaire équivaut à l'existence d'un L-potentiel, de support

[57] Pour $k \geqslant 0$, $C^{k,\lambda}$ désigne l'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables et dont les dérivées partielles d'ordre k sont localement lipschitziennes.

[58] C'est-à-dire les ensembles polaires au sens classique.

Rappelons que les ensembles L-polaires coïncident avec les ensembles L-polaires adjoints (théorème 32. 1).

$\subset \bar{\omega}$, valant $+\infty$ sur $E \cap \omega$, donc aussi (proposition 35. 1, relation (2), avec $K = \bar{\omega}$) à l'existence d'un Δ-potentiel, de support $\subset \bar{\omega}$, valant $+\infty$ sur $E \cap \omega$, c'est-à-dire à $E \cap \omega$ Δ-polaire.

UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES NOYAUX RÉGULIERS DE G. CHOQUET.

THÉORÈME 36. 2. — 1) *Étant donné un compact* $K \subset \Omega$, *il existe une constante* $\lambda(K) \geqslant 1$ *telle que, pour tout* L-*potentiel, ou* L-*potentiel adjoint*, P *dans* Ω, *à support compact* $S \subset K$:

(1) $$\sup_K P \leqslant \lambda(K) \sup_S P.$$

2) *Par suite, pour tout* L-*potentiel, ou* L-*potentiel adjoint*, P *dans* Ω, *si la restriction de* P *à son support est finie continue, alors* P *est fini continu dans* Ω.

1) Supposons, par exemple, que P soit un L-potentiel, admettant la représentation intégrale $P(x) = \int P_y(x)\, d\mu(y)$, et posons

$$U(x) = \int \frac{1}{|x-y|^{m-2}}\, d\mu(y).$$

L'inégalité (1) résulte du principe de domination pour le Δ-potentiel U et de la proposition 35. 1, relation (2), appliquée à K : $\lambda(K) = \dfrac{c_1(K)}{c_2(K)}$.

2) D'après un résultat de G. Choquet [29, corollaire des propositions 1 et 2], pour tout L-potentiel, ou L-potentiel adjoint, P, à support compact, la continuité de la restriction de P à son support entraîne la continuité de P dans Ω, et cette propriété s'étend immédiatement à un L-potentiel, ou L-potentiel adjoint, quelconque.

COROLLAIRE. — *Les fonctions* L-*harmoniques, ou* L-*harmoniques adjointes, satisfont à l'axiome* D.

Cf. théorème 25. 1.

Signalons quelques conséquences (n° 25) :

Le théorème de convergence : Si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions L-surharmoniques, ou L-surharmoniques adjointes, $\geqslant 0$ dans Ω, $\inf_{V \in \mathcal{F}} V = \widehat{\inf_{V \in \mathcal{F}} V}$ dans Ω sauf sur un ensemble L-polaire.

Les points-frontières L-irréguliers (resp: L-irréguliers adjoints), pour un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, coïncident avec les points $\in \partial\omega$ où $\complement\omega$ est L-effilé (resp: L-effilé adjoint), et forment un ensemble L-polaire.

Les ensembles L-effilés.

Théorème 36. 3. — *Etant donné un ensemble* $E \subset \Omega$ *et un point* $x_0 \in \Omega$, *les conditions:* E *L-effilé en* x_0; E *L-effilé adjoint en* x_0; E *Δ-effilé en* x_0, *sont équivalentes.*

On peut supposer $x_0 \in \overline{E} - E$. Il y a équivalence (théorème 14. 1) entre le L-effilement de E au point x_0 et l'existence d'un L-potentiel P dans Ω, fini au point x_0, tel que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} P(x) = +\infty,$$

et dont on peut supposer le support contenu dans un compact $K \ni x_0$. La double équivalence annoncée résulte alors de la proposition 35. 1, relation (2).

Corollaire. — *Etant donné un ouvert* $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, *il y a identité entre points-frontières* L-*réguliers,* L-*réguliers adjoints et* Δ-*réguliers, pour* ω (59).

BIBLIOGRAPHIE

[0] H. Bauer, Une axiomatique du problème de Dirichlet pour certaines équations elliptiques et paraboliques. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **250**, 1960, pp. 2672-2674 (60).

[1] M. Brelot, Étude de l'équation $\Delta u = cu$, $c \geqslant 0$, au voisinage d'un point singulier de *c*. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **48**, 1931, pp. 153-246.

[2] M. Brelot, Sur l'allure des intégrales bornées de $\Delta u = cu$, $c \geqslant 0$, au voisinage d'un point singulier de *c*. *Bull. Sc. Math.*, **60**, 1936, pp. 112-128.

[3] M. Brelot, Familles de Perron et problème de Dirichlet. *Acta Szeged*, **9**, 1939, pp. 133-153.

[4] M. Brelot, Sur les ensembles effilés. *Bull. Sc. Math.*, **68**, 1944, pp. 12-36.

[5] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **61**, 1944, pp. 301-332.

(59) G. Tautz [50] a montré, à l'aide du critère de Wiener, l'identité entre points-frontières L-réguliers et Δ-réguliers pour ω.

(60) Note reprise sous une forme plus générale que les bases de l'axiomatique adoptée ici, dans un article à paraître aux Math. Annalen (1962), intitulé : Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen.

[6] M. Brelot, Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités. *Journal de Math.*, **24**, 1945, pp. 1-32.
[7] M. Brelot, Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes. *Bull. Soc. Math. France*, **73**, 1945, pp. 55-70.
[8] M. Brelot, Le problème de Dirichlet ramifié. *Ann. Univ. Grenoble*, **22**, 1946, pp. 167-200.
[9] M. Brelot, Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. *Ann. Univ. Grenoble*, 22, 1946, pp. 205-219.
[10] M. Brelot, Sur le principe des singularités positives et la notion de source pour l'équation $\Delta u = cu$. *Ann. Univ. Lyon*, **11**, 1948, pp. 9-19.
[11] M. Brelot, Sur le principe des singularités positives et la topologie de Martin. *Ann. Univ. Grenoble*, **23**, 1948, pp. 113-138.
[12] M. Brelot, Quelques propriétés et applications du balayage. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **227**, 1948, p. 19.
[13] M. Brelot, La théorie moderne du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, **4**, 1952, p.p 113-140.
[14] M. Brelot, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin. *Journal de Math.*, **35**, 1956, pp. 297-335.
[15] M. Brelot, Axiomatique du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts. *Séminaire de Théorie du potentiel*, 1957, Inst. H. Poincaré.
[16] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact. *Séminaire de Théorie du potentiel*, 1958, Inst. H. Poincaré.
[17] M. Brelot, Éléments de la théorie classique du potentiel. Paris, *C.D.U.* 1959.
[18] M. Brelot, Lectures on potential theory. Bombay, *Tata Inst.*, 1960, (Collection Math. n° 19.)
[19] M. Brelot, Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, *Journal d'Analyse Math.*, **8**, 1960-1961, pp. 273-288.
[20] M. Brelot, Introduction axiomatique de l'effilement. A paraître aux *Annali di Matematica*, **57**, 1962.
[21] M. Brelot et G. Choquet, Espaces et lignes de Green. *Ann. Inst. Fourier*, **3**, 1951, pp. 199-263.
[22] M. Brelot et G. Choquet, Le théorème de convergence en théorie du potentiel. *Journal Madras Univ.*, **27**, 1957, pp. 277-286.
[23] M. Brelot et R. M. Hervé, Introduction de l'effilement dans une théorie axiomatique du potentiel. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **247**, 1958, pp. 1956-1959.
[24] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels. *Bull. Soc. Math. France*, **73**, 1945, pp. 74-106.
[25] H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Ann. Univ. Grenoble*, **22**, 1946, pp. 221-280.

[26] G. Choquet, Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, **5**, 1954, pp. 131-295.

[27] G. Choquet, Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **243**, 1956, p. 555.

[28] G. Choquet, Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **243**, 1956, p. 699.

[29] G. Choquet, Les noyaux réguliers en théorie du potentiel. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **243**, 1956, p. 635.

[30] G. Choquet, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel. *Séminaire de théorie du potentiel*, 1957, Inst. H. Poincaré.

[31] G. Choquet, Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité. *Ann. Inst. Fourier*, **9**, 1959, pp. 91-102.

[32] G. Choquet, Sur les G_δ de capacité nulle, *Ann. Inst. Fourier*, **9**, 1959, pp. 103-110.

[33] J. Deny, Le principe des singularités positives et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine. *Revue scient.*, 1947, fasc. 14, pp. 866-872.

[34] J. Deny, Systèmes totaux de fonctions harmoniques. *Ann. Inst. Fourier*, **1**, 1949, pp. 103-120.

[35] J. L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem. *Proc. Third Berkeley Symp.*, **2**, 1954-1955, pp. 49-80.

[36] J. L. Doob, A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem. *Ann. Inst. Fourier*, **9**, 1959, pp. 293-300.

[37] D. Gilbarg et J. Serrin, On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. *Journal d'Analyse Math.*, **4**, 1954-1955, pp. 309-340.

[38] R. M. Hervé, Sur le problème de Dirichlet dans un espace de Green. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **247**, 1958, pp. 401-404.

[39] R. M. Hervé, Développements sur une théorie axiomatique des fonctions surharmoniques. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **248**, 1959, pp. 179-181.

[40] R. M. Hervé, Topologie sur l'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ et représentation intégrale. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **250**, 1960, pp. 2834-2836.

[41] R. M. Hervé, Les fonctions harmoniques adjointes dans l'axiomatique de M. Brelot. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **250**, 1960, pp. 4263-4265.

[42] C. Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. *Ergeb. Math.*, 1955.

[43] C. Miranda, Le soluzioni fondamentali delle equazioni ellittiche. *Conf. Sem. Mat. Univ.*, Bari, **30**, 1957, pp. 3-16.

[44] C. B. Morrey, Second order elliptic systems of differential equations, in Contributions to the theory of partial differential equations. *Ann. Math. Studies*, Princeton, **33**, 1954, pp. 101-159.

[45] A. P. Morse, A theory of covering and differentiation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**, 1944, p. 205.

[46] A. P. Morse, Perfect blankets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61**, 1947, p. 418.

[47] L. NAÏM, Sur le rôle de la frontière de Martin dans la théorie du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, **7**, 1957, pp. 183-285.

[48] P. ROSENBLOOM, Linear partial differential equations, in Numerical analysis and partial differential equations. *Surveys in applied Math.*, **5**, 1958, pp. 43-204.

[49] J. SERRIN, On the Harnack inequality for linear elliptic equations. *Journal d'Analyse Math.*, **4**, 1954-1955, pp. 292-308.

[50] G. TAUTZ, Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe. *Math. Nach.*, **2**, 1949, pp. 279-303.

[51] G. TAUTZ, Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen I, II et « Bemerkungen... ». *Archiv der Math.*, vol 3, 1952, pp. 232-238, 239-250 et 361-365.