ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALBRECHT DOLD
DIETER PUPPE

Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 201-312
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__201_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 201-312.

HOMOLOGIE NICHT-ADDITIVER FUNKTOREN. ANWENDUNGEN

von Albrecht DOLD und Dieter PUPPE.
(Columbia University, New York; Universität Saarbrücken)

EINLEITUNG

In dieser Arbeit sollen die in einer Note [11] angekündigten Ergebnisse ausführlicher dargestellt werden. Es wird also im Rahmen semi-simplizialer (= s.s.) Begriffsbildungen die Theorie der *derivierten Funktoren* (oder *Satelliten*) von additiven (s. [7]) auf beliebige Funktoren (zwischen abelschen Kategorien) verallgemeinert. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Derivierten ergeben sich aus dem *Einhängungshomomorphismus* und der *Bar-Konstruktion*; das sind Konstruktionen, die wir aus der Topologie übertragen und verallgemeinern. Unsere Anwendungen, die in [11] noch nicht enthalten sind, liegen auf dem Gebiet der Topologie : *Homologieeigenschaften Eilenberg-MacLanescher Komplexe*, *Homotopie und Homologie symmetrischer Produkte.*

Im Gegensatz zu [11], wo wir uns auf Moduln beschränken, legen wir hier *beliebige abelsche Kategorien* zugrunde. Dies hat vor allem den Vorteil, daß wir im wesentlichen nur *kovariante* Funktoren *einer* Variablen und nur *Links*derivierte zu betrachten brauchen : Funktoren mehrerer Variabler bezw. kontravariante Funktoren und Rechtsderivierte werden durch Übergang zur Produktkategorie bezw. zur dualen Kategorie darauf zurückgeführt.

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgeteilt. Die ersten drei Paragraphen enthalten Vorbereitungen und Hilfsmittel. In § 1 definieren wir *s.s. Homotopien* (allgemeiner einen *Funk-*

tionalkomplex) für s.s. Morphismen über einer beliebigen Kategorie $\mathfrak{C}$. Anwenden eines (kovarianten) Funktors $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ führt dann Homotopien in Homotopien über; dies ist eine leichte Verallgemeinerung eines Ergebnisses von D. Kan [19]. § 2 bringt eine Verallgemeinerung des Satzes von Eilenberg-Zilber, die wir Herrn P. Cartier verdanken. Diese Verallgemeinerung zeigt z.B., daß man im Satz von Eilenberg-Zilber das Tensorprodukt durch einen beliebigen (kovarianten) Funktor zweier Variabler ersetzen kann (s. 2. 10, i). Im 3. Paragraphen geben wir einen neuen und auf abelsche Kategorien verallgemeinerten Beweis für die Äquivalenz zwischen Kettenkomplexen und FD-Komplexen vgl. ([18], [9]).

Derivierte Funktoren, *Einhängung* und *Bar-Konstruktion* werden in § 4-9 behandelt. Kurz gesagt erhält man die Derivierten LT eines (evtl. nicht-additiven) Funktors T einfach so, daß man in der Konstruktion für den additiven Fall (s. [7]) alle Begriffe und Beweise durch ihre s.s. Analoga ersetzt; d.h. man nehme eine projektive s.s. Auflösung X von A und setze $L_q T(A) = H_q(TX) = q$—*te* Homologie von TX. Hierbei wird die Äquivalenz aus § 3 benutzt (und § 1). Es ist zu beachten, daß der Randoperator in TX von der Form

$$\Sigma(-1)^i T(\partial_i), \qquad \partial_i = \text{i-ter Seitenoperator in } X,$$

ist und daher im nicht-additiven Fall i.a. *nicht gleich*

$$T(\Sigma(-1)^i \partial_i) = T(\partial)$$

wie in [7], IV. 5.

Im nicht-additiven Fall erscheint es angebracht, dem Objekt A einen Grad $n \geqslant 0$ zu geben und dann für X eine s.s. Auflösung zu nehmen, die in der Dimension n beginnt (nicht in der Dimension 0 wie üblich). Man spricht dann von einer *Auflösung von* (A, n) und von derivierten Funktoren *n-ter Stufe* $L_q T(A, n) = H_q(TX)$. Für additive T ist

$$L_{q+1} T(A, n+1) \cong L_q T(A, n);$$

für nicht-additive T dagegen gilt das i.a. nur im *stabilen Bereich* $q < 2n$. Es besteht jedoch immer eine gewisse Verbindung zwischen diesen beiden Funktoren, der *Einhängungs*homomorphismus $\sigma: L_q T(A, n) \to L_{q+1} T(A, n+1)$. Dies ist ein Spezialfall des in § 5 untersuchten Einhängungshomomorphismus $\sigma: H_q(TY) \to H_{q+1}(TSY)$ (s. 5. 9), der für einen

beliebigen Funktor T (mit $T(0) = 0$) und beliebigen FD-Komplex Y definiert ist. Der aus der Topologie bekannte *Einhängungsfunktor* S (s. 5. 1) besteht ungenau gesagt darin, daß man alle Dimensionen um eins erhöht.
Die Abbildung σ hat ähnliche Eigenschaften wie in der Topologie: Sie annulliert *zusammengesetzte* Elemente und ihr Bild ist *primitiv* (s. 5. 25); sie ist isomorph im *stabilen* Bereich (s.6. 12) usw. Die einfacheren dieser Eigenschaften werden in § 5 bewiesen, die tieferen (vom Whiteheadschen Typ; s. 6. 11) mit Hilfe der Bar-Konstruktion in § 6.

Die *Bar-Konstruktion* (§ 6) liefert, unter Benutzung der Eilenberg-MacLaneschen *Mischeffekt*-Funktoren (crosseffects, s. [13], 9), einen Übergang von TX zu TSX. Die Bezeichnung «Bar-Konstruktion» haben wir gewählt, weil in zwei Beispielen (T^1 = Gruppenring, T^2 = symmetrische Algebra) diese Konstrukton im wesentlichen mit der Eilenberg-MacLaneschen Bar-Konstruktion übereinstimmt (s. 6. 26). Die Derivierten $L_qT(A, n)$ sind in diesen Beispielen gerade die Eilenberg-MacLaneschen Gruppen $H_q(A, n)$ (s. 4. 15).

In § 7 diskutieren wir Besonderheiten, die bei Funktoren mehrerer Variabler auftreten, insbesondere eine *partielle* Einhängung und Bar-Konstruktion. § 8 bringt Spezialisierungen von § 5-7 auf s.s. Auflösungen Y, d.h. auf die derivierten Funktoren. Schließlich werden in § 9, dem letzten Paragraphen des allgemeinen Teils, verschiedene Dualisierungen auseinandergesetzt: *Kontravariante Funktoren, Rechtsderivierte, Kobar-Konstruktion.*

Die Anwendungen in § 10-11 beruhen i. w. auf den Ergebnissen von § 5, die in § 12 außerdem auf der Bar-Konstruktion aus § 6. In § 10-11 beweisen wir Sätze über primitive und zusammengesetzte Elemente in der Homologie der symmetrischen Produkte und der Eilenberg-MacLaneschen Komplexe. Als einfach zu formulierendes Beispiel erwähnen wir hier (s. 11. 12): *Außer den Koeffizientenhomomorphismen und den Bocksteinoperatoren gibt es keine additiven Kohomologieoperationen der Ordnung* p^2, $p > 1$.

Etwas schwieriger zu beweisende Resultate über Homologie und Homotopie symmetrischer Produkte sind am Anfang von § 12 zusammengestellt; das geometrisch interessanteste darunter ist der Satz 12. 11.

INHALT

1. — HOMOTOPIE SEMI-SIMPLIZIALER MORPHISMEN

Wir erklären eine Homotopierelation für s.s. Morphismen über einer beliebigen Kategorie $\mathfrak{C}$ und zeigen, daß diese Relation bei Anwendung eines beliebigen (kovarianten) Funktors $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ erhalten bleibt (vgl. [19]). Allgemeiner kann für beliebige s.s. Objekte X, Y über $\mathfrak{C}$ der « Funktionalkomplex » Y^X definiert werden (s. 1. 11); die s.s. Morsphismen $X \to Y$ bezw. die Homotopien zwischen ihnen sind dann die 0-Simplexe bezw. 1-Simplexe von Y^X. Jeder kovariante Funktor $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ induziert eine s.s. Abbildung $Y^X \to TY^{TX}$.

Es bezeichne $[n]$ die Menge der ganzen Zahlen 0, 1, ..., n. Eine Abbildung $\alpha: [m] \to [n]$ ist *monoton*, wenn aus $i \leqslant j$ stets $\alpha(i) \leqslant \alpha(j)$ folgt.

1. 1. Definition ([19]). — Es sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Kategorie. $X_0, X_1, \ldots,$ sei eine Folge von Objekten aus $\mathfrak{C}$, und für jede monotone Abbildung $\alpha: [m] \to [n]$ sei $X_\alpha: X_n \to X_m$ ein Morphismus aus $\mathfrak{C}$. Wir sprechen von einem *s.s. Objekt* X (*über* $\mathfrak{C}$), falls

(i) $X_{\iota[n]} = \iota(X_n)$, wo $\iota =$ Identität,

(ii) $X_{\alpha \circ \beta} = X_\beta \circ X_\alpha$, wo $\beta: [q] \to [m]$.

Sind X, Y s.s. Objekte, dann ist ein *s.s. Morphismus* (*über* $\mathfrak{C}$) eine Folge $f_n: X_n \to Y_n$, $n = 0, 1, \ldots,$ von Morphismen aus $\mathfrak{C}$ mit $f_m \circ X_\alpha = Y_\alpha \circ f_n$.

Ein s.s. Objekt ist, mit anderen Worten, ein kontravarianter Funktor X aus der Kategorie der monotonen Abbildungen in die Kategorie $\mathfrak{C}$; ein s.s. Morphismus ist eine natürlicheTransformation zwischen solchen Funktoren.

1. 2. Wir betrachten die speziellen monotonen Abbildungen (für $i = 0, 1, \ldots, q$)

$$\begin{array}{llll} \varepsilon^i = \varepsilon^i_q: & [q-1] \to [q]; & \varepsilon^i(j) = j & \text{für} \quad j < i, \\ & & \varepsilon^i(j) = j+1 & \text{für} \quad j \geq i, \\ \eta^i = \eta^i_q: & [q+1] \to [q]; & \eta^i(j) = j & \text{für} \quad j \leq i, \\ & & \eta^i(j) = j-1 & \text{für} \quad j > i. \end{array}$$

Die Morphismen X_{ε^i} bezw. X_{η^i} heißen auch *Seiten-* bezw. *Ausartungsoperatoren* von X und werden mit ∂_i^X bezw. s_i^X (oder auch einfach ∂_i, s_i) bezeichnet. Zwischen diesen Operatoren bestehen die bekannten s.s. Identitäten (s. [12], 2. 3-2. 5).

Ein Produkt ε von Abbildungen ε^i ist stets injektiv (¹), ein Produkt η von Abbildungen η^i stets surjektiv (¹). Jede monotone Abbildung α kann in eindeutiger Weise in der Form $\alpha = \varepsilon\eta$ geschrieben werden. Ein s.s. Objekt X ist demnach bestimmt, wenn man X_n, $n = 0, 1, \ldots$, und die Operatoren ∂_i^X, s_i^X kennt. Dies wird gelegentlich zur Definition von s.s. Objekten benutzt (vgl. [12], 2).

1. 3. *Beispiele.* — (i) Die s.s. Objekte bezw. Morphismen über der Kategorie der Mengen sind die üblichen *s.s. Komplexe* bezw. *s.s. Abbildungen* (s. [14]). Wir werden in diesem Falle von *s.s. Mengen* sprechen.

(ii) Die *FD-Komplexe* aus [12], 2 sind die s.s. Objekte über der Kategorie der abelschen Gruppen.

Eine Homotopie zwischen s.s. Morphismen $X \to Y$ wird üblicherweise als s.s. Morphismus $I \times X \to Y$ erklärt, wo I das Standard-1-Simplex ist. Hier steht uns ein Objekt $I \times X$ nicht zur Verfügung (und nur insofern sind die Betrachtungen dieses Paragraphen allgemeiner als [19]); nichtsdestoweniger kennen wir « seine Morphismen », wie wir nun zeigen werden. Betrachten wir dazu eine beliebige s.s. Menge K (s. 1. 3 (i)). Ein hypothetischer s.s. Morphismus $F: K \times X \to Y$ müßte der Relation

$$(1.\ 4) \qquad F(K_\alpha\sigma, X_\alpha x) = Y_\alpha F(\sigma, x), \qquad \sigma \in K_n, \qquad « x \in X_n »$$

genügen. Definieren wir Morphismen

$$F(\sigma): X_n \to Y_n, \qquad F(\sigma)x = F(\sigma, x) \qquad \text{für jedes} \qquad \sigma \in K_n,$$

(¹) Injektiv = eineindeutig in, surjektiv = auf.

dann können wir statt 1. 4 auch schrebien

$$F(K_\alpha\sigma)\circ X_\alpha = Y_\alpha\circ F(\sigma).$$

Diese Gleichung hat Sinn in $\mathfrak{C}$ und führt zur

1. 5. Definition. — Es seien X, Y s.s. Objekte und K eine s.s. Menge. Eine Funktion F, die jedem Simplex $\sigma \in K_n$, $n = 0, 1, \ldots$, einen Morphismus $F(\sigma) : X_n \to Y_n$ zuordnet, heißt *s.s. Morphismus von* K $\times$ X in Y, in Zeichen

$$F : K \times X \to Y,$$

wenn

$$(1.\,6) \qquad F(K_\alpha\sigma)\circ X_\alpha = Y_\alpha\circ F(\sigma)$$

gilt für alle $\sigma \in K_n$ und alle α wie in 1. 1.

1. 7. *Beispiele.* — (i) Sei $K = \Delta[0]$ das Standard-0-Simplex ($= K[0]$ in [12], 2). Jedes K_n enthält nur ein Element τ_n. Die s.s. Morsphismen $F : \Delta[0] \times X \to Y$ entsprechen umkehrbar eindeutig den s.s. Morphismen $f : X \to Y$ vermöge der Beziehung $f_n = F(\tau_n)$.

(ii) Sei $K = I = \Delta[1]$ das Standard-1-Simplex ($= K[1]$ in [12], 2). Ein s.s. Morphismus $\Theta : I \times X \to Y$ heißt *Homotopie.*

Die s.s. Morphismen der Definition 1. 5 lassen sich in analoger Weise zusammensetzen wie gewöhnliche Morphismen. Sind z.B. L, K s.s. Mengen, $a : L \to K$ eine s.s. Abbildung und $F : K \times X \to Y$ ein s.s. Morphismus, dann erhält man durch Zusammensetzen einen s.s. Morphismus

$$(1.\,8) \quad F\cdot a : L \times X \to Y, \qquad (F\cdot a)(\sigma) = F(a(\sigma)), \qquad \sigma \in L.$$

Entsprechend kann man mit s.s. Morphismen $X' \to Y$ oder $Y \to Y'$ zusammensetzen.

Insbesondere betrachten wir die beiden «Ecken» des Standard-1-Simplexes

$$(1.\,9) \quad \varepsilon^i : \Delta[0] \to I = \Delta[1], \quad i = 0, 1, \quad (= \delta_i \text{ in } [6], \text{Exp. } 3.\,1).$$

Ist $\Theta : I \times X \to Y$ eine Homotopie, dann sind

$$f^i = \Theta\cdot\varepsilon^i : \Delta[0] \times X \to Y, \qquad i = 0, 1,$$

s.s. Morphismen, die wir nach 1. 7 (i) auch als s.s. Morphismen $f^i : X \to Y$ betrachten können. Wir sagen dann, Θ sei eine *Homotopie zwischen f^0 und f^1*. Sind umgekehrt f^0, f^1 gegeben, dann heißt f^0 *homotop zu* f^1, in Zeichen $f^0 \simeq f^1$, wenn es ein solches Θ gibt.

Auf Grund der heuristischen Betrachtung, die der Definition 1. 5 vorausging, ist es klar, daß diese Homotopierelation in den Beispielen 1. 3 mit den dort üblichen Homotopierelationen übereinstimmt (vgl. [17], 8). Beispiel 1. 3 (i) zeigt, daß die Relation $\simeq$ im allgemeinen weder symmetrisch noch transitiv ist. Dagegen ist stets $f \simeq f$, wie die Homotopie

$$\Theta(\sigma) = f_n, \qquad \sigma \in I_n$$

zeigt.

1. 10. Bemerkung. — Wie in [6], Exp. 3 kann für je zwei s.s. Objekte X, Y die s.s. Menge Y^X (der « Funktionalkomplex ») definiert werden (vgl. auch [17], 3) : Die Menge $(Y^X)_n$ seiner n-Simplexe besteht aus den s.s. Morphismen $s_n : \Delta[n] \times X \to Y$, wobei $\Delta[n]$ das Standard-n-Simplex bezeichnet. Ist

$$\alpha : \Delta[m] \to \Delta[n]$$

eine s.s. Abbildung (das ist im wesentlichen dasselbe wie eine monotone Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$; s. [12], 2), dann ist $(Y^X)_\alpha(s_n) = s_n \cdot \alpha$ (s. 1. 7). Die 0-Simplexe von Y^X sind nach 1. 6 (i) s.s. Morphismen $X \to Y$, die 1-Simplexe sind die Homotopien zwischen ihnen.

1. 11. Es sei jetzt $\mathfrak{C}'$ eine zweite Kategorie und $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein (kovarianter) Funktor. Der Definitionsbereich von T kann in natürlicher Weise auf s.s. Objekte X und s.s. Morphismen f über $\mathfrak{C}$ ausgedehnt werden : TX bezw. Tf ist ein s.s. Objekt bezw. s.s. Morphismus über $\mathfrak{C}'$, und zwar gilt

$$(1.12) \qquad (TX)_n = T(X_n), \qquad (TX)_\alpha = T(X_\alpha), \qquad (Tf)_n = T(f_n).$$

Aber auch auf die s.s. Morphismen der Definition 1. 5 kann T angewendet werden : Ist $F : K \times X \to Y$ gegeben, dann definieren wir

$$(1.13) \qquad TF : K \times TX \to TY, \qquad (TF)(\sigma) = T(F(\sigma)), \qquad \sigma \in K.$$

Anwenden von T auf die Gleichung 1. 6 ergibt die entsprechende Gleichung für TF. — Diese Definition könnte theoretisch zu Verwechslungen führen, wenn $K \times X$ selbst s.s. Objekt über $\mathfrak{C}$ ist. Im folgenden wird aber aus dem Zusammenhang stets hervorgehen, was gemeint ist.

Ist $a : L \to K$ eine s.s. Abbildung, dann ist (in der Bezeichnung von 1. 8)

(1. 14) $\quad \mathrm{T}(\mathrm{F} \cdot a) = (\mathrm{TF}) \cdot a : \mathrm{L} \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}.$

Beweis. — $\mathrm{T}(\mathrm{F} \cdot a)(\sigma) = \mathrm{T}((\mathrm{F} \cdot a)(\sigma)) = \mathrm{T}(\mathrm{F}(a(\sigma)))$
$= \mathrm{TF}(a(\sigma)) = (\mathrm{TF} \cdot a)(\sigma).$

Wenden wir 1. 14 auf die Situation unter 1. 9 an, so erhalten wir

1. 15. Satz. — *Ist* $\Theta : \mathrm{I} \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *eine Homotopie zwischen* f^0 *und* $f^1 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, *dann ist* $\mathrm{T}\Theta : \mathrm{I} \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$ (*s.* 1. 13) *eine Homotopie zwischen* $\mathrm{T}f^0$ *und* $\mathrm{T}f^1 : \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$. *Aus* $f^0 \simeq f^1$ *folgt also* $\mathrm{T}f^0 \simeq \mathrm{T}f^1$, *d.h.* T *erhält die Homotopierelation.*

Beweis. — *Aus* 1. 14 *folgt* $(\mathrm{T}\Theta) \cdot \varepsilon^i = \mathrm{T}(\Theta \cdot \varepsilon^i) = \mathrm{T}f^i$, qed.

1. 16. Bemerkung. — Ist $s_n : \Delta[n] \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ein n-Simplex des Funktionalkomplexes Y^{X} (s. 1. 10), dann ist $\mathrm{T}(s_n) : \Delta[n] \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$ ein n-Simplex von $\mathrm{TY}^{\mathrm{TX}}$. *Die Zuordnung* $s_n \to \mathrm{T}(s_n)$ *ist*, wie man leicht aus 1. 14 folgert, *eine s.s. Abbildung* $\mathrm{Y}^{\mathrm{X}} \to \mathrm{TY}^{\mathrm{TX}}$. Diese Aussage enthält 1. 15 (vgl. den letzten Satz unter 1. 10).

1. 17. Bemerkung. — Der Satz 1. 15 kann auf c.s.s. Funktoren im Sinne von Kan [19], Definition (5. 2) verallgemeinert werden und ergibt dann das Analogon zu Thm 5. 3 in [19].

1. 18. Bemerkung. — Ohne weiteres übertragen sich die vorstehenden Betrachtungen auf (kovariante) Funktoren T mehrerer, etwa zweier Variabler $\mathrm{C} \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{D} \in \mathfrak{D}$, da man T stets als Funktor einer Variablen (C, D) der Produktkategorie $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ interpretieren kann:

Sind X, Y s.s. Objekte über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, dann erhält man wie folgt ein s.s. Objekt (X, Y) über $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$

(1. 19) $\quad (\mathrm{X}, \mathrm{Y})_n = (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n), \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y})_\alpha = (\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{Y}_\alpha);$

entsprechend für Paare $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ von s.s. Morphismen über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$

(1. 20) $\quad (f, g) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), \qquad (f, g)_n = (f_n, g_n).$

Ist Θ eine Homotopie zwischen f_0 und $f_1 : X \to X'$ und H eine Homotopie zwischen g_0 und $g_1 : Y \to Y'$, dann ist

$$(1.21) \qquad \begin{aligned} &(\Theta,\ H) : I \times (X,\ Y) \to (X',\ Y'), \\ &(\Theta,\ H)(\sigma) = (H(\sigma),\ H(\sigma)), \qquad \sigma \in I, \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen (f_0, g_0) und (f_1, g_1) also

$$(f_0, g_0) \simeq (f_1, g_1).$$

Insbesondere gilt

$$(1.22) \qquad \begin{aligned} f_0 \simeq f_1 &\Rightarrow (f_0, g) \simeq (f_1, g) \\ g_0 \simeq g_1 &\Rightarrow (f, g_0) \simeq (f, g_1), \end{aligned}$$

denn $f \simeq f$, $g \simeq g$.

Interpretiert man nun T als Funktor einer Variablen $(C, D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$, so erhält man nach 1.1-1.16 die folgenden Begriffsbildungen und Beziehungen

$$(1.23) \qquad T(X, Y) \quad \text{mit} \quad T(X, Y)_n = T(X_n, Y_n), \quad T(X, Y)_\alpha = T(X_\alpha, Y_\alpha)$$

$$(1.24) \qquad T(f, g) : T(X, Y) \to T(X', Y') \quad \text{mit} \quad T(f, g)_n = T(f_n, g_n)$$

$$(1.25) \qquad f_0 \simeq f_1,\ g_0 \simeq g_1 \Rightarrow T(f_0, g_0) \simeq T(f_1, g_1)$$

insbesondere

$$(1.26) \qquad \begin{aligned} f_0 \simeq f_1 &\Rightarrow T(f_0, g) \simeq T(f_1, g), \\ g_0 \simeq g_1 &\Rightarrow T(f, g_0) \simeq T(f, g_1). \end{aligned}$$

2. — DER VERALLGEMEINERTE SATZ VON EILENBERG-ZILBER

Wir betrachten s.s. Doppelobjekte V (s. 2. 2) über einer additiven Kategorie $\mathfrak{A}$ (s. [16], 1. 3). Mit jedem solchen Doppelobjekt sind zwei (Ketten-) Komplexe über $\mathfrak{A}$ assoziiert: der *totale Komplex* tV und der *diagonale Komplex* dV (s. 2. 5-2. 7). Der verallgemeinerte Satz von Eilenberg-Zilber besagt, daß diese beiden Komplex in universeller Weise homotopie-äquivalent sind (s. 2. 9). Wir verdanken diesen Satz Herrn P. Cartier.

Wie schon bemerkt, legen wir eine *additive* Kategorie $\mathfrak{A}$ zugrunde. Dann können wir jedes s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ in bekannter Weise als *Komplex* über $\mathfrak{A}$ ([2]) auffassen; der Randoperator ist

$$(2.\ 1) \qquad \partial = \partial^q : \mathrm{X}_q \to \mathrm{X}_{q-1}, \qquad \partial^q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_i,$$

wo ∂_i den i-ten Seitenoperator (s. 1. 2) bezeichnet. Wir schreiben auch kX für diesen Komplex, wenn es angebracht ist, ihn von X zu unterscheiden.

2. 2. Definition. — Es sei $\mathrm{V}_{p,q}$, p, $q = 0, 1, \ldots$, eine Doppelfolge von Objekten aus $\mathfrak{A}$. Für jedes Paar monotoner Abbil-

([2]) Ein Komplex über $\mathfrak{A}$ ist eine Folge von Objekten X_q und Morphismen (« Randoperatoren ») $\partial^q : \mathrm{X}_q \to \mathrm{X}_{q-1}$ aus $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $\partial^q\partial^{q+1} = 0$ für alle ganzen Zahlen q. Begriffe wie Kettenabbildung (= Kettenmorphismus), Homotopie usw. sind genau wie in [7], IV. 3 zu definieren. Vgl. auch [16], 2. 1. Wenn wir im folgenden X_q nur für $q \geqslant 0$ definieren, so ist $\mathrm{X}_q = 0$ für $q < 0$ zu setzen (positiver Komplex).

dungen $\alpha : [r] \to [p]$, $\beta : [s] \to [q]$ (s. § 1) sei ein Morphismus $V_{\alpha, \beta} : V_{p,q} \to V_{r,s}$ gegeben, und es gelte

(i) $\quad V_{\iota[p], \iota[q]} = \iota(V_{p,q})$, wo $\iota =$ Identität;

(ii) $\quad V_{\alpha \circ \alpha', \beta \circ \beta'} = V_{\alpha', \beta'} \circ V_{\alpha, \beta}$,

wo $\quad \alpha' : [t] \to [r], \qquad \beta' : [u] \to [s]$.

Dann sprechen wir von einem *s.s. Doppelobjekt* V (über $\mathfrak{A}$). Beispiele finden sich unter 2. 10. Ein s.s. Morphismus $g : V \to W$ zwischen s.s. Doppelobjekten V, W ist eine Doppelfolge $g_{p,q} : V_{p,q} \to W_{p,q}$ von Morphismen, die den Gleichungen

$$g_{r,s} \circ V_{\alpha, \beta} = W_{\alpha, \beta} \circ g_{p,q}$$

genügen.

2. 3. Für jedes q ist die Folge $V_{0,q}$, $V_{1,q}$, $V_{2,q}$, ... mit den Morphismen $V_{\alpha, \iota[q]}$ ein s.s. Objekt $V_{*,q}$ im Sinne von 1. 1, ebenso für festes p die Folge $V_{p,0}$, $V_{p,1}$, ... mit den Morphismen $V_{\iota[p], \beta}$; daher der Name s.s. *Doppel*objekt. Ferner gilt nach (ii)

$$(2.\ 4) \qquad V_{\alpha, \iota[s]} \circ V_{\iota[p], \beta} = V_{\alpha, \beta} = V_{\iota[r], \beta} \circ V_{\alpha, \iota[q]},$$

d.h. $V_{\iota[*], \beta} : V_{*,q} \to V_{*,s}$ ist ein s.s. Morphismus, ebenso $V_{\alpha, \iota[*]} : V_{p,*} \to V_{r,*}$.

2. 5. Wie man jedes s.s. Objekt als Komplex (s. 2. 1), so kann man jedes s.s. Doppelobjekt als *Doppelkomplex* (s. [7], IV, 4) auffassen: der erste Randoperator ∂' ist der der Komplexe $V_{*,q}$, der zweite ∂'' der der Komplexe $V_{p,*}$, d.h.

$$(2.\ 6) \qquad \begin{aligned} \partial' &= {}'\partial^{p,q} : V_{p,q} \to V_{p-1,q}, \qquad & {}'\partial^{p,q} &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i V_{\varepsilon^i, \iota[q]} \\ \partial'' &= {}''\partial^{p,q} : V_{p,q} \to V_{p,q-1}, \qquad & {}''\partial^{p,q} &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i V_{\iota[p], \varepsilon^i} \end{aligned}$$

(ε^i wie in 1. 2).

Aus 2. 4 folgt, daß die beiden Randoperatoren vertauschbar sind, $\partial'\partial'' = \partial''\partial'$. Wir haben es also mit einem Doppelkomplex im Sinne von [7], IV, 4, [16], S. 146 zu tun; mit dem *totalen* Randoperator ∂,

$$\partial | V_{p,q} = {}'\partial^{p,q} + (-1)^{p''} \partial^{p,q},$$

wird die Folge $\bigoplus_{p+q=i} V_{p,q}$, $i = 0, 1, \ldots$, zu einem gewöhnlichen Komplex tV, dem *totalen Komplex des s.s. Doppelobjektes* V.

2. 7. Das *diagonale s.s. Objekt* dV des s.s. Doppelobjektes V ist die Folge

$$(dV)_p = V_{p,p}$$

mit den Morphismen

$$(dV)_\alpha = V_{\alpha,\alpha} : (dV)_p \to (dV)_r, \qquad \text{wo} \qquad \alpha : [r] \to [p].$$

Die Gleichungen 1. 1 (i), (ii) für dV folgen aus 2. 2. (i), (ii). Fassen wir dV als Komplex auf ($= kdV$; s. 2. 1), dann sprechen wir vom *diagonalen Komplex von* V.

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen lautet.

2. 9. Satz (Eilenberg-Zilber-Cartier). — *Es gibt eine universelle (Ketten-) Homotopieäquivalenz zwischen dem totalen und dem diagonalen Komplex des Doppelobjektes* V. *Allgemeiner gilt: Es seien* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(V)$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(V)$ *jeweils der totale oder diagonale Komplex von* V; *insbesondere ist* $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{Y}_0 = V_{0,0}$.

(a) *Jeder universelle Morphismus* $\mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ *(insbesondere der identische) läßt sich zu einem universellen Kettenmorphismus* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *erweitern.*

(b) *Je zwei universelle Kettenmorphismen* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, *die in der Dimension* 0 (d.i. $\mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$) *übereinstimmen, sind universell homotop.*

Dabei bedeutet « universell » etwa, daß sich die betreffenden Morphismen in einer vom Doppelobjekt V und der Kategorie $\mathfrak{A}$ unabhängigen Weise linear (mit ganzzahligen Koeffizienten) aus den Morphismen $V_{\alpha,\beta}$ kombinieren lassen. Eine genauere Definition folgt weiter unten.

2. 10. *Beispiele.* — (i) Es seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ beliebige Kategorien und T(C, D) ein beliebiger kovarianter Funktor zweier Variabler $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$ mit Werten in $\mathfrak{A}$. Analog wie beim Funktor einer Variablen läßt sich T auf s.s. Objekte und s.s. Morphismen ausdehnen. Für jedes Paar X, Y von s.s. Objekten über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ erhalten wir ein s.s. Doppelobjekt $\hat{T}$ (X, Y) über $\mathfrak{A}$ wie folgt:

$$\hat{T}(X, Y)_{p,q} = T(X_p, Y_q), \qquad \hat{T}(X, Y)_{\alpha,\beta} = T(X_\alpha, Y_\beta);$$

ebenso $\hat{T}(f, g)_{p,q} = \hat{T}(f_p, g_q)$ für Paare f, g von s.s. Morphismen. Dies ist die Situation, auf die wir 2. 9 später anwenden werden.

Das diagonale Objekt $d\hat{T}(X, Y)$ kann man hier auch erhalten, indem man T als Funktor einer Variablen $(C, D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$

auffaßt und dann nach 1. 18 auf s.s. Objekte über $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ ausdehnt. Wir können also schreiben

$$(2.11) \qquad d\hat{T}(X, Y) = T(X, Y).$$

(ii) Nehmen wir in Beispiel (i) für $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{A}$ die Kategorie $\mathfrak{G}$ der abelschen Gruppen und als Funktor T das Tensorprodukt $T(C, D) = C \otimes D$, dann geht 2. 9, angewendet auf $\hat{T}(X, Y) = X \hat{\otimes} Y$, in den klassischen Satz von Eilenberg-Zilber über (s. [15], 3. 9. 1). Die Verallgemeinerung 2. 9 dieses Satzes besteht also nicht nur im Übergang zu einer beliebigen Kategorie.

(iii) Wie im klassischen Fall spielen beim Beweis von 2. 9 die « Modelle » $K(m, n)$ eine Rolle. $K(m, n)$ entsteht, wenn wir im Beispiel (ii) für X, Y die Standardsimplexe $K(m)$, $K(n)$ im Sinne von [12], 2 wählen, d.h. die FD-Komplexe der in § 1 verwendeten $\Delta[m]$, $\Delta[n]$, also im Sinne von (ii)

$$K(m, n) = K(m) \hat{\otimes} K(n).$$

Die Gruppe $K(p, q)_{r,s}$ *ist also frei und besitzt als Basis die Paare* (α, β) *monotoner Abbildungen* $\alpha : [r] \to [p]$, $\beta : [s] \to [q]$.

Beweis von 2. 9. — Wir bezeichnen mit $M(p, q; r, s)$ die freie abelsche Gruppe, die von den Paaren (α, β) monotoner Abbildungen $\alpha : [r] \to [p]$, $\beta : [s] \to [q]$ erzeugt wird. Die Elemente $a \in M(p, q; r, s)$ schreiben sich also eindeutig in der Form $a = \Sigma n_{\alpha,\beta} (\alpha, \beta)$ mit ganzzahligen Koeffizienten $n_{\alpha,\beta}$. Die Zusammensetzung monotoner Abbildungen induziert eine bilineare Paarung, ebenfalls Zusammensetzung genannt,

$$(2.12) \quad M(r, s; t, u) \times M(p, q; r, s) \to M(p, q; t, u),$$
$$(\Sigma n_{\alpha',\beta'}(\alpha', \beta')) \cdot (\Sigma n_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)) = \Sigma n_{\alpha,\beta} n_{\alpha',\beta'}(\alpha \circ \alpha', \beta \circ \beta'),$$

wobei $\alpha' : [t] \to [r]$, $\beta' : [u] \to [s]$. Insbesondere ist

$$(\alpha', \beta') \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha \circ \alpha', \beta \circ \beta').$$

Damit werden diese Gruppen zu einer additiven Kategorie $\mathfrak{M}$: Die Objekte sind die Symbole $M_{p,q}$ die Morphismen sind

$$\mathrm{Hom}(M_{p,q}, M_{r,s}) = M(p, q; r, s),$$

und die Zusammensetzung ist durch 2. 12 gegeben (3).

(3) Es fehlen allerdings die endlichen direkten Summen (= direkten Produkte), deren Existenz man in jeder additiven Kategorie fordert (s. [16], 1. 3). Diese kann man aber, falls erwünscht, ohne weiteres formal zu $\mathfrak{M}$ adjungieren; es ist klar, welche Morphismen man dann noch hinzufügen muß.

Ein s.s. Doppelobjekt V über $\mathfrak{A}$ kann jetzt als kovarianter additiver Funktor V : $\mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ aufgefaßt werden (und umgekehrt)

$$(2.13) \quad V(M_{p,q}) = V_{p,q}, \quad V(\Sigma n_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)) = \Sigma n_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}.$$

Die Gleichungen (i), (ii) aus 2. 2 drücken gerade die Definitionseigenschaften eines kovarianten Funktors aus. S.s. Morphismen zwischen s.s. Doppelobjekten gehen bei dieser Entsprechung in natürliche Transformationen zwischen Funktoren über (vgl. auch die Bemerkung am Ende der Definition 1. 1).

Es sei nun $a = \Sigma n_{\alpha,\beta} (\alpha, \beta) \in M(p, q; r, s)$. Für jedes Doppelobjekt V ist

$$V(a) = \Sigma n_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta} : V_{p,q} \to V_{r,s}$$

ein Morphismus. Die Form dieses Morphismus' (als Linearkombination der $V_{\alpha,\beta}$) ist dieselbe für alle V und unabhängig von der Kategorie $\mathfrak{A}$; $V(a)$ ist ein *universeller Morphismus* $V_{p,q} \to V_{r,s}$. Z. B. ist der Randoperator des diagonalen Komplexes

$$V_{p,q} = (dV)_p \xrightarrow{\partial} (dV)_{p-1} = V_{p-1,p-1}$$

ein universeller Morphismus; er entspricht dem Element $a = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i(\varepsilon^i, \varepsilon^i) \in M(p, p; p-1, p-1)$. Die Gruppe der universellen Morphismen $V_{p,q} \to V_{r,s}$ ist — nach Definition — kanonisch isomorph mit $M(p, q; r, s)$. ($\mathfrak{M}$ selbst bezw. der identische Funktor $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ist das *universelle s.s. Doppelobjekt*).

Allgemein bezeichnen wir einen Morphismus zwischen direkten Summen von Objekten $V_{p,q}$ als *universell*, wenn seine Komponenten universelle Morphismen sind. Z.B. ist der Randoperator des totalen Komplexes tV,

$$\partial : \bigoplus_{p+q=m} V_{p,q} \to \bigoplus_{r+s=m-1} V_{r,s},$$

ein universeller Morphismus, weil er sich aus universellen Morphismen $V_{p,q} \to V_{p-1,q}$ bezw. $V_{p,q} \to V_{p,q-1}$ zusammensetzt.

Eine Folge von Morphismen

$$(2.14) \qquad \varphi_m : V_{m,m} \to \bigoplus_{p+q=m} V_{p,q}$$

ist ein *universeller Kettenmorphismus* von dV in tV, wenn jedes φ_m universell und wenn $\{\varphi_m\}$ ein Kettenmorphismus ist für alle V. Die Eigenschaft von $\{\varphi_m\}$, ein *Ketten*morphismus zu sein, braucht man natürlich nur für das universelle Objekt zu verifizieren, weil jede Relation zwischen Morphismen von $\mathfrak{M}$, die man durch Zusammensetzen und Addieren dieser Morphismen erhält, automatisch die gleiche Relation für universelle Morphismen zur Folge hat (denn V ist ein kovarianter additiver Funktor). Vertauschbarkeit der φ_m mit dem Randoperator von dV. bezw. tV ist aber eine solche Relation.

Analog dazu sind die anderen in 2. 9 vorkommenden universellen Kettenmorphismen bezw. Homotopien erklärt. Man sieht also, daß 2. 9 nur ein Satz über die Kategorie $\mathfrak{M}$ (bezw. das universelle Doppelobjekt) ist. Zum Beweis gehen wir nun so vor, daß wir eine zu $\mathfrak{M}$ isomorphe Kategorie $\mathfrak{N}$ angeben, in der der Satz 2. 9 wohlbekannt ist.

Dazu betrachten wir die Modelle $K(l, m)$ aus 2. 10 (iii) und die s.s. Morphismen zwischen ihnen. Wir sprechen von einem *natürlichen Homomorphismus*

$$f_{p,q;r,s}\colon K(l, m)_{p,q} \to K(l, m)_{r,s}$$

wenn $f_{p,q;r,s}$ für alle (l, m) definiert ist und vertauschbar ist mit allen s.s. Morphismen zwischen den Modellen $K(l, m)$. Wie in [12], Thm. 3.1 folgt, daß jeder natürliche Homomorphismus $f_{p,q;r,s}$ *eindeutig* in der Form $\Sigma n_{\alpha,\beta} K(l, m)_{\alpha,\beta}$ geschrieben werden kann mit Koeffizienten $n_{\alpha,\beta}$, die nicht von (l, m) abhängen. D. h. die Gruppe $N(p, q; r, s)$ der natürlichen Homomorphismen $f_{p,q;r,s}$ ist kanonisch isomorph mit der Gruppe $M(p, q; r, s)$. Die Zusammensetzung $\cdot$ der natürlichen Homomorphismen geht dabei in die Zusammensetzung $\cdot$ in $\mathfrak{M}$ über. *Die Kategorie $\mathfrak{M}$ ist also kanonisch isomorph der Kategorie* $\mathfrak{N}$ mit den Objekten $N_{p,q}$, den Morphismen $\mathrm{Hom}\,(N_{p,q}; N_{r,s}) = N(p, q; r, s)$ und der üblichen Zusammensetzung von natürlichen Abbildungen.

In der Kategorie $\mathfrak{N}$ wird 2. 9 aber zum klassischen Satz von Eilenberg-Zilber (einem Spezialfall davon); er ergibt sich dort aus der Azyklizität des diagonalen bezw. totalen Komplexes der Modelle $K(l, m)$ (s. [14], 2 oder [15], 3. 9). Für den ersten Teil von 2. 9 können wir uns auch auf [13], Thm. 2. 1 und Thm. 2 .1 a berufen und erhalten damit explizite universelle Homotopieäquivalenzen. Dieses Ergebnis notieren wir in

2. 15. SATZ. — *Der « shuffle » Morphismus* (s. [12], 5. 3)

$$\nabla : \bigoplus_{p+q=m} V_{p,q} \to V_{m,m} \qquad m = 0, 1, \ldots$$

und der Alexander-Whitney-Morphismus (s. [13], 2. 9)

$$f : V_{m,m} \to \bigoplus_{p+q=m} V_{p,q}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

sind universelle Homotopieäquivalenzen zwischen dem totalen und dem diagonalen Komplex des s.s. Doppelobjektes V.

Der Morphismus f hat die folgenden Komponenten

$$f_{p,q} : V_{m,m} \to V_{p,q}, \quad f_{p,q} = V(\varepsilon_m^m \circ \varepsilon_{m-1}^{m-1} \circ \cdots \varepsilon_{p+1}^{p+1}, \quad \varepsilon_m^0 \circ \varepsilon_{m-1}^0 \circ \cdots \varepsilon_{q+1}^0)$$

(s. 1. 2 für ε_j^i. Wie in 2. 13 schreiben wir die monotonen Abbildungen als Argument).

Der Morphismus ∇ hat die Komponenten

$$\nabla_{p,q} : V_{p,q} \to V_{m,m}$$
$$\nabla_{p,q} = \Sigma_{(\mu,\nu)} \operatorname{sign}(\mu, \nu) V(\eta_p^{\nu_q} \circ \eta_{p+1}^{\nu_{q-1}} \circ \cdots \eta_{m-1}^{\nu_1}, \eta_q^{\mu_p} \circ \eta_{q+1}^{\mu_{p-1}} \circ \cdots \eta_{m-1}^{\mu_1}),$$

wobei sich die Summe über alle (p, q)-shuffles (μ, ν) erstreckt (s. [12], 5), $\operatorname{sign}(\mu, \nu) = (-1)^{\varepsilon(\mu)}$ *das Vorzeichen von* (μ, ν) *und η_j^i wie in* 1. 2 *definiert ist.*

2. 16. BEMERKUNG. — Allgemeiner als 2. 2 lassen sich Tripel-, Quadrupel- usw. s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ definieren, d.s. kontravariante Funktoren V dreier oder mehrerer Variabler aus der Kategorie der monotonen Abbildungen in die Kategorie $\mathfrak{A}$. Außer dem diagonalen und dem totalen Komplex treten nun noch « partielle » Diagonalkomplexe usw. auf. Eine naheliegende Verallgemeinerung von 2. 9 besagt, daß alle diese Komplexe in universeller Weise homotopieäquivalent sind.

Schließlich kann man Funktoren V betrachten, die teils kovariant, teils kontravariant sind, und hier wieder Diagonalen bilden bezüglich der Argumente gleicher Varianz usw.

3. — ÄQUIVALENZ ZWISCHEN KETTENKOMPLEXEN UND FD-KOMPLEXEN

Über einer *abelschen Kategorie* $\mathfrak{A}$ (s. [16], 1. 4), sind « (Ketten-) Komplex » und « s.s. Objekt » äquivalente Begriffe. Dies wird in [18], [9] bewiesen, falls $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von Moduln ist. Die Übertragung auf den allgemeinen Fall ist nicht ganz selbstverständlich; wir geben daher hier einen neuen Beweis (nach dem Muster [3] oder [20]).

Wie in [18], [9] definieren wir einen additiven Funktor N von s.s. Objekten (über $\mathfrak{A}$) zu Komplexen (über $\mathfrak{A}$) und einen Funktor K von Komplexen zu s.s. Objekten, so daß die zusammengesetzten Funktoren jeweils dem identischen Funktor äquivalent sind.

3. 1. Der funktor N. — Es sei X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir definieren

$$(\mathrm{NX})_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Kern}\ (\partial_i : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_{n-1})\ (^4).$$

Aus $\partial_i\partial_q = \partial_{q-1}\partial_i$, $i < q$, folgt Bild $(\partial_0|\mathrm{NX}) \subset \mathrm{NX}$, $\partial_0\partial_0|\mathrm{NX} = 0$; daher definiert ∂_0 einen Morphismus $\partial : (\mathrm{NX})_n \to (\mathrm{NX})_{n-1}$ mit $\partial\partial = 0$. Die Folge $(\mathrm{NX})_n$, $n = 0, 1, \ldots$, mit dem Randoperator ∂ ist also ein Komplex NX, der *normale Komplex von* X.

Jeder s.s. Morphismus $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ definiert (durch Ein-

[4] Sind $\varphi_i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, Morphismen in $\mathfrak{A}$, dann ist nach Definition $\bigcap_i \mathrm{Kern}\ (\varphi_i) = \mathrm{Kern}\ (\varphi)$, wo $\varphi : \mathrm{A} \to \prod_i \mathrm{A}_i$ den Morphismus mit den Komponenten φ_i bezeichnet.

schränkung) einen Kettenmorphismus $Nf : NX \to NY$. N ist ein additiver kovarianter Funktor von s.s. Objekten zu Komplexen.

3. 2. Der Funktor K. — Für jede monotone Abbildung $\alpha : [n] \to [q]$ setzen wir $d(\alpha) = n$, $r(\alpha) = q$. Mit ε, ε', $\tilde{\varepsilon}$, ... bezw. η, η', $\tilde{\eta}$, ... bezeichnen wir monotone Abbildungen, die injektiv bezw. surjektiv ([1]) sind. Jedes α läßt sich eindeutig in der Form $\alpha = \varepsilon\eta$ schreiben.

Es sei nun C ein Komplex über $\mathfrak{A}$. Wir setzen

$$(3.3)\qquad (KC)_n = \bigoplus\nolimits_{d(\eta)=n} C_{r(\eta)};$$

die (direkte) Summe ist über alle η mit $d(\eta) = n$ zu erstrecken; es kommen darin also so viele Summanden C_q vor, als es monotone Abbildungen von $[n]$ *auf* $[q]$ gibt.

Für jedes $\alpha : [m] \to [n]$ definieren wir $(KC)_\alpha : (KC)_n \to (KC)_m$, indem wir die « Beschränkungen » $(KC)_\alpha | C_{r(\eta)}$ angeben. Ist $\eta\alpha = \varepsilon'\eta'$, dann bildet diese Beschränkung $C_{r(\eta)}$ ganz in den Summanden (= Faktor) $C_{r(\eta')}$ von $(KC)_m$ ab (d.h. die anderen Komponenten von $(KC)_\alpha | C_{r(\eta)}$ sind null). Bezeichnet

$$k(\eta, \alpha) : C_{r(\eta)} \to C_{r(\eta')}$$

diesen Morphismus, dann ist

$$(3.4)\qquad k(\eta, \alpha) = \begin{cases} \iota(C_{r(\eta)}), & \text{falls } \varepsilon' = \iota[r(\eta)], \quad \iota = \text{Identität} \\ \partial : C_{r(\eta)} \to C_{r(\eta)-1} = C_{r(\eta')}, & \text{falls } \varepsilon' = \varepsilon^0, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Diese Definitionen ergeben ein s.s. Objekt KC, wenn wir die Bedingungen (1. 1) (i), (ii) nachweisen können. Die erste, $(KC)_{\iota[n]} = \iota(KC)_n$, ist klar; es bleibt also

$$(3.5)\qquad (KC)_{\alpha\beta} = (KC)_\beta (KC)_\alpha$$

zu verifizieren, wobei $\beta : [l] \to [m]$. Dabei genügt es, sich auf einen Summanden $C_{r(\eta)}$ von $(KC)_n$ zu beschränken.

Ist nun wie oben $\eta\alpha = \varepsilon'\eta'$ und $\eta'\beta = \varepsilon''\eta''$, dann ist

$$\eta(\alpha\beta) = (\varepsilon'\varepsilon'')\eta''$$

offenbar die entsprechende Zerlegung von $\eta(\alpha\beta)$. Daraus folgt, daß beide Seiten von 3. 5 den Summanden $C_{r(\eta)}$ von $(KC)_n$ in den gleichen Summanden $C_{r(\eta'')}$ von $(KC)_l$ abbilden und zwar vermöge des gleichen Morphismus $k(\eta, \alpha\beta) = k(\eta', \beta) k(\eta, \alpha)$.

Jeder Kettenmosphismus $u: \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ liefert durch direkte-Summenbildung einen s.s. Morphismus $\mathrm{K}u: \mathrm{KC} \to \mathrm{KD}$, und K wird dadurch zum additiven kovarianten Funktor von Komplexen zu s.s. Objekten.

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist der

3. 6. Satz. — *Die zusammengesetzten Funktoren* NK *und* KN *sind den jeweiligen identischen Funktoren natürlich äquivalent.*

Ehe wir den Beweis beginnen, ziehen wir einige Folgerungen.

3. 7. Korollar.

(*a*) $\mathrm{N}:$ s.s.-Hom $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \cong$ Ketten-Hom $(\mathrm{NX}, \mathrm{NY})$ *für beliebige s.s. Objekte* X, Y.

(*b*) $\mathrm{K}:$ Ketten-Hom $(\mathrm{C}, \mathrm{D}) \cong$ s.s.-Hom $(\mathrm{KC}, \mathrm{KD})$ *für beliebige Komplexe* C, D.

Zum Beweis vgl. [9], 1. 23.

Ein s.s. Objekt X (ein Komplex C) heißt *projektiv*, wenn alle X_n (alle C_n) projektiv sind (s. [15], 1. 8).

3. 8. Korollar. — *Ein s.s. Objekt* X (*ein Komplex* C) *ist genau dann projektiv, wenn* NX (*wenn* KC) *projektiv ist.*

Beweis. — Nach 3. 6. ist $\mathrm{X}_n \cong (\mathrm{KNX})_n = \bigoplus_{d(\eta)=n}(\mathrm{NX})_{r(\eta)}$. Eine direkte Summe ist aber genau dann projektiv, wenn jeder Summand es ist.

Ein entsprechender Satz gilt für die Eigenschaft « injektiv ».

3. 9. Die aushängung (J. C. Moore). — Unter der *Aushängung* eines s.s. Objektes X verstehen wir das folgende s.s. Objekt $\overline{\mathrm{X}}$.

$$(3.\ 10)\qquad \overline{\mathrm{X}}_n = \mathrm{Kern}\,(\partial_{n+1}: \mathrm{X}_{n+1} \to \mathrm{X}_n), \qquad n \geq 0.$$

Sei $\alpha: [m] \to [n]$ monoton und sei

$\tilde{\alpha}: [m+1] \to [n+1]$, $\tilde{\alpha}(\mathrm{i}) = \alpha(\mathrm{i})$ für $i \leq m$, $\tilde{\alpha}(m+1) = n+1$.

Wegen $\tilde{\alpha} \circ \varepsilon_{m+1}^{m+1} = \varepsilon_{n+1}^{n+1} \circ \alpha$ ist $\mathrm{X}_{\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{X}}_n) \subset \overline{\mathrm{X}}_m$; durch Einschränkung definiert $\mathrm{X}_{\tilde{\alpha}}$ daher einen Morphismus

$$\overline{\mathrm{X}}_\alpha : \overline{\mathrm{X}}_n \to \overline{\mathrm{X}}_m,$$

und wegen $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ folgt $\overline{\mathrm{X}}_{\alpha\beta} = \overline{\mathrm{X}}_\beta\overline{\mathrm{X}}_\alpha$. Wir haben es also wirklich mit einem s.s. Objekt $\overline{\mathrm{X}}$ zu tun.

Ein s.s. Morphismus $f : X \to Y$ definiert durch Einschränkung einen s.s. Morphismus $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$. Die Aushängung wird dadurch zum kovarianten additiven Funktor. Sie dient uns als Hilfsbegriff beim Beweis von 3. 6 und an anderer Stelle. Wegen der Bezeichnung « Aushängung » vgl. 3. 13.

Unmittelbar aus der Definition folgt

$$(3.\,11) \qquad (N\overline{X})_n = (NX)_{n+1}, \qquad n \geq 0.$$

Ferner ergibt sich aus der Identität $\partial_{n+1} s_n = id$, daß s_n monomorph ist und

$$(3.\,12) \quad X_{n+1} \cong \text{Kern}\,(\partial_{n+1} : X_{n+1} \to X_n) \oplus \text{Bild}\,(s_n : X_n \to X_{n+1}) = \overline{X}_n \oplus s_n(X_n).$$

Sei nun C ein Komplex und C^- der Komplex, der aus C durch Erniedrigen der Dimension um 1 entsteht,

$$C_n^- = C_{n+1}, \ n \geq 0; \qquad (\partial : C_n^- \to C_{n-1}^-) = (\partial : C_{n+1} \to C_n), \ n > 0.$$

Z.B. ist nach (3. 11) : $N\overline{X} = (NX)^-$.

3. 13. Hilfssatz. — *Die Funktoren* KC^- *und* $\overline{KC}$ *sind natürliche äquivalent.*

Beweis. — Ist $\xi : [n+1] \to [q+1]$ eine surjektive monotone Abbildung mit $\xi(n) = \xi(n+1)$, dann bildet ∂_{n+1} den Summanden $C_{r(\xi)}$ von $(KC)_{n+1}$ identisch auf $C_{r(\xi')}$ ab, wo $\xi' = \xi\varepsilon^{n+1}$; ist dagegen $\xi(n) \neq \xi(n+1)$, dann ist $\partial_{n+1}|C_{r(\xi)} = 0$ (vgl. 3. 4). Andererseits bedeutet $\xi(n) \neq \xi(n+1)$ gerade, daß ξ sich in der Form $\tilde{\eta}$ mit $\eta : [n] \to [q]$ schreiben läßt. Daher ist

$$\overline{KC_n} = \text{Kern}\ (\partial_{n+1} : KC_{n+1} \to KC_n) \cong \bigoplus_{d(\eta)=n} C_{r(\tilde{\eta})}.$$

Wegen

$$C^-_{r(\eta)} = C_{r(\eta)+1} = C_{r(\tilde{\eta})}$$

erhalten wir also durch direkte Summenbildung einen Isomorphismus

$$(3.\,15) \quad (KC^-)_n = \bigoplus_{d(\eta)=n} C^-_{r(\eta)} = \bigoplus_{d(\eta)=n} C_{r(\tilde{\eta})} = \overline{KC}_n,$$

und es bleibt nur zu zeigen, daß es sich dabei um einen s.s. Morphismus handelt. Das folgt aber ohne Schwierigkeiten aus 3. 4 und $\widetilde{\eta\alpha} = \tilde{\eta}\tilde{\alpha}$.

Beweis für 3. 6. — Wir definieren eine natürliche Transformation $\Phi = \Phi(C) : C \to NKC$, indem wir C_n identisch auf den Summanden $C_{r(\iota[n]}$ von $(KC)_n$ abbilden. Wir behaupten, daß dieser Summand mit $(NKC)_n$ übereinstimmt, d.h. daß Φ eine natürliche Aquivalenz ist.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt. Für $n=0$ ist die Behauptung klar. Aus 3. 11, 3. 15, der Induktionsvoraussetzung, 3. 15 in dieser Reihenfolge erhalten wir

$$(NKC)_{n+1} = (N\overline{KC})_n \cong (NKC^-)_n = C^-_{r(\iota[n])} = C_{r(\iota[n+1])}.$$

Die zweite gesuchte natürliche Transformation

$$\Psi = \Psi(X) : KNX \to X$$

wird durch ihre Einschränkungen auf die Summanden $(NX)_{r(\eta)}$ von $(KNX)_n$ erklärt und zwar durch das kommutative Diagramm

$$\text{(3. 16)} \qquad \begin{array}{ccc} (NX)_{r(\eta)} & \xrightarrow{\Psi} & X_n \\ \| & & \uparrow X_\eta, \\ (NX)_q & \xrightarrow{\subset} & X_q \end{array} \qquad \text{wo} \qquad \eta : [n] \to [q].$$

Aus 3. 4 folgt leicht, daß Ψ ein s.s. Morphismus ist; wir haben zu zeigen, daß ein Isomorphismus vorliegt.

Aus der Definition ergibt sich, daß $N\Psi(X) : NKNX \to NX$ mit $(\Phi(NX))^{-1}$ übereinstimmt, also eine Äquivalenz ist. Die Behauptung folgt daher aus dem.

3. 17. Hilfssatz. — *Ist* $f : X \to Y$ *ein s.s. Morphismus und ist* $(Nf)_i : (NX)_i \to (NY)_i$ *monomorph (epimorph) für* $i \leq n$, *dann ist* $f_n : X_n \to Y_n$ *monomorph (epimorph).*

Beweis durch Induktion nach n. — Für $n=0$ ist die Behauptung klar. Ist $(Nf)_i$ epimorph (monomorph) für $i \leq n$, dann auch $(N\bar{f})_j$ für $j < n$ (s. 3. 11), also f_{n-1} und $\bar{f}_{n-1}$ epimorph (monomorph) nach Induktionsvoraussetzung, also f_n epimorph (monomorph) wegen 3. 12.

3. 18. Aus der Definition der Operatoren $(KC)_\alpha$ folgt, daß die Teilsumme $\bigoplus C_{r(\eta)}$ von $(KC)_n$ mit $d(\eta) = n$, $\eta \neq \iota[n]$ gerade der « ausgeartete Teil » (s. [12,] 4) von $(KC)_n$ ist, d.h. mit

$(DKC)_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} \text{Bild } (s_j : KC_{n-1} \to KC_n)$ [5] übereinstimmt. Der verbleibende Summand $C_{r(\iota[n])}$ dagegen stimmt mit $(NKC)_n$ überein, wie die Äquivalenz Φ zeigt. Da nach 3. 6 jedes s.s. Objekt X bis auf Isomorphie von der Form KC ist, folgt

$$X_n \cong (NX)_n \oplus (DX)_n \tag{3. 19}$$

wo $(DX)_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} \text{Bild } (s_j : X_{n-1} \to X_n)$ [5] den ausgearteten Teil bezeichnet. Überdies ist $DX = \{(DX)_n\}$ wie man leicht verifiziert (vgl. [12], 4) ein Unterkomplex von kX (s. 2. 1), und 3. 19 ist eine direkte Summe von Komplexen

$$kX \cong NX \oplus DX. \tag{3. 20}$$

Daraus folgt

$$NX \cong X/DX, \tag{3. 21}$$

d.h. der normale Komplex NX stimmt bis auf natürliche Isomorphie mit dem normalisierten Komplex X/DX (s. [12], 4) überein.

3. 22. Satz (Eilenberg-MacLane). — *Die natürliche Inklusion* $NX \to kX$ *ist eine Homotopieäquivalenz. Der Komplex* DX *ist nullhomotop.*

Der Beweis [12], 4 läßt sich ohne weiteres übertragen (man beachte 3. 20). Wir skizzieren einen anderen Beweis, der die Aushängung benutzt. Dazu betrachten wir den dimensionserhöhenden Morphismus

$$s : X \to X, \qquad s|X_n = (-1)^n s_n : X_n \to X_{n+1}$$

Die s.s. Identitäten $\partial_i s_n = s_{n-1}\partial_i$, $i < n$, und $\partial_n s_n = \partial_{n+1} s_n = \iota$ ergeben

$$\partial s + s\partial = - s_{n-1}\partial_n = (\iota - s_{n-1}\partial_n) - \iota. \tag{3. 23}$$

Dies zeigt, daß

$$(\iota - s_{n-1}\partial_n) : X_n \to X_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

[5] Sind $\varphi_i : A_i \to A$, $i = 1, 2, \ldots, r$, Morphismen in $\mathfrak{A}$, dann ist nach Definition $\bigcup_i \text{Bild } (\varphi_i) = \text{Bild } (\varphi)$, wo $\varphi : \oplus_i A_i \to A$ den Morphismus mit den Komponenten φ_i bezeichnet.

ein der Identität homotoper Kettenmorphismus $X \to X$ ist; in der Dimension 0 ist er gleich der Identität (s_{-1} ist $= 0$ zu setzen). Für $n > 0$ liegt eine Projektion auf $\overline{X}$ vor :

$$(\iota - s_{n-1}\partial_n)(X_n) \subset \overline{X}_{n-1}, \qquad (\iota - s_{n-1}\partial_n)|\overline{X}_{n-1} = \iota(\overline{X}_{n-1})$$

Dies folgt sofort aus der Definition der Aushängung.

Nun ist aber die Aushängung selbs ein s.s. Objekt. Man kann die Konstruktion also iterieren. Da die Operatoren ∂_i, s_i von $\overline{X}$ durch Beschränkung der ∂_i, s_i von X gewonnen wurden, erhält man durch ∞-fache Iteration (in jeder Dimension bricht sie ab) :

Die Morphismen

$$p_n = (\iota - s_0\partial_1)(\iota - s_1\partial_2) \ldots (\iota - s_{n-1}\partial_n) : X_n \to X_n$$

bilden einen zur Identität homotopen Kettenmorphismus $p : kX \to kX$. p *ist eine Projektion von* kX *auf* NX, *d.h.*

$$\text{Bild}\,(p) \subset \text{NX}, \qquad p|\text{NX} = \iota(\text{NX}).$$

Damit ist 3. 22 bewiesen. — Der Kern von p ist übrigens gerade DX.

3. 24. Bemerkung. — *Man kann in den vorstehenden Betrachtungen die Rolle des ersten Seitenoperators mit der des letzten vertauschen.*

Um dies einzusehen, definieren wir Abbildungen

(3. 25) $\tau_n : [n] \to [n], \quad \tau_n(i) = n - i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$

und setzen

(3. 26) $\alpha^* = \tau_n \alpha \tau_m$ für jedes monotone $\alpha : [m] \to [n]$.

Offenbar ist $(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$, $(\alpha^*)^* = \alpha$. Die Zuordnung $\alpha \to \alpha^*$ ist also ein involutiver Automorphismus der Kategorie der monotonen Abbildungen. Er überträgt sich auf die Kategorie der s.s. Objekte X :

(3. 27) $(X^*)_n = X_n, \qquad (X^*)_\alpha = X_{\alpha^*},$

und es ist $(X^*)^* = X$.

Dabei hat sich nun die Reihenfolge der Seiten- und Ausartungsoperatoren umgekehrt : *Der erste Operator von* X *ist der* *letzte von* X^* *usw.* Ferner kann man N und K in 3.6-3.8 durch die folgenden Funktoren N^*, K^* ersetzen

$$(3.28) \qquad N^*X = N(X^*), \qquad K^*C = (KC)^*,$$

denn $N^*K^* = NK$, $K^*N^*X = (KN(X^*))^* \cong X^{**} = X$. Allgemeiner gilt

3.29. Satz. — *Es gibt eine natürliche Äquivalenz* $X \cong X^*$.

Beweis. Die Abbildungen

$$(3.30) \qquad (-1)^n\iota : X_n \to X_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

definieren einen Isomorphismus $kX \cong k(X^*)$ (s. 2.1), denn bis auf die Reihenfolge sind die Seitenoperatoren von X und X^* ja dieselben; 3.30 ist natürlich kein s.s. Morphismus. Durch Übergang zu den Quotienten entsteht aus 3.30 ein Isomorphismus $j : X/DX \cong X^*/DX^*$ (man beachte $(DX)_n = (DX^*)_n$). Wegen 3.21 können wir auch schreiben $j : NX \cong N(X^*)$. Anwenden des Funktors K und 3.6 ergeben dann einen natürlichen Isomorphismus $J : X \cong X^*$, wie behauptet.

Wir notieren nun noch, daß die Funktoren N und K Homotopien erhalten, genauer

3.31. Satz. — (a) *Zwei s.s. Morphismen* $f_0, f_1 : X \to Y$ *sind genau dann homotop, wenn* $Nf_0, Nf_1 : NX \to NY$ *kettenhomotop sind.*

(b) *Zwei Kettenmorphismen* $\varphi_0, \varphi_1 : C \to D$ *sind genau dann kettenhomotop, wenn* $K\varphi_0 \cong K\varphi_1$.

Der Beweis in [9], 2.6 läßt sich ohne weiteres übertragen; wir haben lediglich eine Bemerkung über das dort auftretende Tensorprodukt zu machen.

3.32. Das Tensorprodukt $G \otimes A$, $A \in \mathfrak{A}$, $G =$ endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Es sei zunächst F eine freie abelsche Gruppe mit endlicher Basis $\{\nu_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Wir setzen

$$(3.33) \qquad (F, \{\nu_i\}) \otimes A = \bigoplus_{i=1}^m A_i \qquad \text{mit} \qquad A_i = A.$$

Ist F', $\{\nu'_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ eine zweite solche Gruppe und

$$(3.34) \qquad f : F \to F', \qquad f(\nu_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\nu'_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

ein Homorphismus, dann definiert dieselbe Matrix (a_{ij}) einen Morphismus $\bigoplus_{i=1}^{m} A_i \to \bigoplus_{j=1}^{n} A_j$ (mit den Komponenten $a_{ji}\iota(A)$), den wir auch mit

$$(3.35) \qquad f \otimes A : (F, \{\nu_i\}) \otimes A \to (F', \{\nu'_j\}) \otimes A$$

bezeichnen.

Das Produkt $(F, \{\nu_i\}) \otimes A$ wird damit zu einem kovarianten Funktor der Variablen $(F, \{\nu_i\})$. Ist insbesondere $F = F'$ und sind

$$(F, \{\nu_i\}) \xrightarrow{f} (F', \{\nu'_j\}) \xrightarrow{g} (F, \{\nu_i\})$$

die identischen Homorphismen, dann folgt $(g \otimes A)(f \otimes A) = \iota$, $(f \otimes A)(g \otimes A) = \iota$, d.h. $f \otimes A$, $g \otimes A$ sind reziproke Äquivalenzen. $(F, \{\nu_i\}) \otimes A$ ist also bis auf Äquivalenz unabhängig von der Basis $\{\nu_i\}$, und wir können

$$(3.36) \qquad F \otimes A \cong (F, \{\nu_i\}) \otimes A$$

setzen. Dieses *Tensorprodukt* $F \otimes A$ ist ein kovarianter additiver Funktor der beiden Variablen F, A (für die erste Variable vgl. 3. 35, für die zweite ist das klar nach 3. 33) mit Werten in $\mathfrak{A}$.

Für unsere Zwecke (s. 3. 31 und § 5) würde diese Definition bereits genügen. (Übrigens haben wir bisher nur benutzt, daß $\mathfrak{A}$ additiv ist). Im allgemeinen Fall stellt man G als Faktorgruppe einer endlich erzeugten freien Gruppe F dar,

$$R \xrightarrow{f} F \to G \to 0$$

und setzt

$$(3.37) \qquad G \otimes A \cong \text{Kokern}\,(R \otimes A \xrightarrow{f \otimes A} F \otimes A).$$

Wir verzichten auf den Nachweis, daß dies einen wohlbestimmten Funktor der beiden Variablen G, A definiert.

Wenn man die Beschränkung auf *endlich* erzeugte Gruppen G vermeiden will, muß man voraussetzen, daß in $\mathfrak{A}$ direkte Summen $\bigoplus_\lambda A$ mit beliebig vielen Summanden existieren.

4. — DERIVIERTE EINES BELIEBIGEN FUNKTORS

Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ *abelsche* Kategorien und $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein Funktor. Ist T additiv, dann lassen sich bekanntlich Derivierte (oder Satelliten) von T definieren (s. [7], [16]), vorausgesetzt, daß es hinreichend viele projektive bezw. injektive Objekte in $\mathfrak{A}$ gibt.

Wir zeigen nun, wie sich diese Definitionen mit Hilfe der Ergebnisse in § 1-3 auf beliebige Funktoren T verallgemeinern lassen. Dabei können wir uns auf *Links*derivierte eines *kovarianten* Funktors T in *einer* Variablen beschränken (s. Einleitung und § 9). Wir geben dann einige elementare Eigenschaften dieser Derivierten und diskutieren verschiedene Beispiele. Weitere Eigenschaften werden sich aus der « Bar-Konstruktion » ergeben (s. § 6).

Wir setzen von der Kategorie $\mathfrak{A}$ voraus, daß sie hinreichend viele projektive Objekte enthält, d.h. daß jedes $A \in \mathfrak{A}$ Quotient eines projektiven $P \in \mathfrak{A}$ ist (s. [16], 1. 10).

4. 1. S.S. Auflösungen. — Es sei A ein Objekt aus $\mathfrak{A}$ und $n \geqslant 0$ eine ganze Zahl. Eine *s.s. Auflösung von* (A, n) ist ein Paar (X, ξ), bestehend aus einem s.s. Objekt X mit $X_i = 0$ für $i < n$, $H_i(X) = 0$ für $i > n$, und einem Isomorphismus $\xi : H_n(X) \cong A$. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir im folgenden stets $H_n(X)$ mit A identifizieren; wir lassen also das Symbol ξ weg, schreiben $H_n(X) = A$ und bezeichnen X selbst als s.s. Auflösung von (A, n).

Eine s.s. Auflösung X von (A, n) heißt *projektiv*, falls alle X_i projektiv sind. Aus 3. 22 und 3. 8 folgt

4. 2. *Ein s.s. Objekt* X *ist genau dann eine* (*projektive*) *s.s. Auflösung von* (A, n), *wenn* NX *eine* (*projektive*) *Auflösung*

von (A, n) *im üblichen Sinne* ([7], V. 1 oder [16], S. 143, Fußnote 3)) *ist.*

Daraus ergibt sich.

4. 3. *Jedes* (A, n) *besitzt eine projektive s.s. Auflösung.*

Beweis. — Ist C eine projektive Auflösung von (A, n) im üblichen Sinne (sie existiert, weil es hinreichend viele projektive Objekte in $\mathfrak{A}$ gibt), dann ist KC (s. 3. 2) eine projektive s.s. Auflösung von (A, n) (denn $\mathrm{NKC} \cong \mathrm{C}$; s. 3. 6).

4. 4. *Es seien* $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *ein Morphismus aus* $\mathfrak{A}$ *und* X, Y *projektive s.s. Auflösungen von* (A, n), (B, n). *Dann gibt es einen s.s. Morphismus* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *mit* $\alpha = \mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{Y})$, *und je zwei solche s.s. Morphismen sind homotop. Insbesondere sind je zwei projektive Auflösungen von* (A, n) *homotopieäquivalent.* (Vgl. [7], V, 1).

Beweis. — Es gibt einen bis auf Homotopie bestimmten Kettenmorphismus $\varphi : \mathrm{NX} \to \mathrm{NY}$ mit $\mathrm{H}_n(\varphi) = \alpha$ (s. [7], V. 1). Daraus folgt die Behauptung wegen 3. 7 und 3. 31.

4. 5. Die Definition der Derivierten erfolgt nun nach bekanntem Muster: Sei $\mathrm{T} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein Funktor und $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ein Morphismus aus $\mathfrak{A}$. Wir wählen projektive s.s. Auflösungen X, Y von (A, n), (B, n) und einen s.s. Morphismus $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ mit $\mathrm{H}_n(f) = \alpha$. Wir haben gesehen, daß X, Y und f bis auf Homotopie bestimmt sind. Nach 1.15 sind also auch TX, TY, Tf bis auf Homotopie und demnach HTX, HTY, HTf bis auf natürliche Isomorphie bestimmt. Wir setzen

$$(4.\ 6) \qquad \mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{A}, n) = \mathrm{H}_q\mathrm{TX}, \qquad \mathrm{L}_q\mathrm{T}(\alpha, n) = \mathrm{H}_q\mathrm{T}f$$

und definieren damit einen neuen kovarianten Funktor $\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\ \ , n) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, den *$q$-ten (links-) derivierten Funktor n-ter Stufe von* T.

Ist X eine s.s. Auflösung von (A, n), dann ist kX (s. 2. 1) eine Auflösung von (A, n) im üblichen Sinne. Für einen additiven Funktor T gilt ferner $k\mathrm{TX} = \mathrm{T}k\mathrm{X}$ (s. [7], IV. 5); daher folgt.

4. 7. *Ist* T *additiv, dann ist* $\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\ \ , n)$ *äquivalent zu* $\mathrm{L}_{q-n}\mathrm{T}$, *dem* ($q$ — n)*-ten Derivierten von* T *im Sinne von* [7].

Im nicht-additiven Fall ist im allgemeinen $k\mathrm{TX} \neq \mathrm{T}k\mathrm{X}$: Der Randoperator in $k\mathrm{TX}$ ist $\Sigma(-1)^i\mathrm{T}(\partial_i)$, in $\mathrm{T}k\mathrm{X}$ dagegen $\mathrm{T}(\Sigma(-1)^i\partial_i)$ (falls $\mathrm{T}0 = 0$). Indessen hängen auch im nicht-additiven Fall die Derivierten mit gleichem $q - n$ zusammen nämlich vermöge der Einhängung

$$\sigma : \mathrm{L}_q\mathrm{T}(\ \ , n) \to \mathrm{L}_{q+1}\mathrm{T}(\ \ , n+1),$$

die wir in § 8 untersuchen werden. Im nicht-additiven Fall ist sie jedoch im allgemeinen keine Äquivalenz.

4. 8. Etwas allgemeiner als in 4. 5 sei A jetzt eine Folge $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ von Objekten in $\mathfrak{A}$ (ein *graduiertes Objekt* über $\mathfrak{A}$). Für jedes $n \geq 0$ sei X^n eine projektive s.s. Auflösung von (A_n, n) Dann bezeichnen wir die direkte Summe $\mathrm{X} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{X}^n$ als *projektive s.s. Auflösung von* A; diese Summe existiert, weil $\mathrm{X}_i = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{X}_i^n \cong \bigoplus_{n=0}^{i}\mathrm{X}_i^n$ nur aus endlich vielen Summanden besteht. Entsprechend verfahren wir mit « graduierten » Morphismen $\alpha = \{\alpha_n : \mathrm{A}_n \to \mathrm{B}_n\}$: wir konstruieren $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{Y}^n$, $n = 0, 1, \ldots$, wie oben und erhalten in der direkten Summe $\bigoplus_{n=0}^{\infty} f^n = f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ einen Morphismus der projektiven Auflösungen mit $\mathrm{H}(f) = \alpha$, dessen Homotopieklasse durch α bestimmt ist. Wie in 4. 6 können wir also einen Funktor LT, *den (links-) derivierten Funktor von* T, durch

$$(4.\,9) \qquad \mathrm{LT(A)} = \mathrm{HTX}, \qquad \mathrm{LT}(\alpha) = \mathrm{HT}f$$

definieren. LT *ist ein Funktor von graduierten Objekten über* $\mathfrak{A}$ *zu graduierten Objekten über* $\mathfrak{A}'$.

4. 10. Beispiel (a). — Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der Moduln über einem kommutativen Ring Λ. Für jedes $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ sei $\bigotimes^m \mathrm{A} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \otimes \cdots \otimes \mathrm{A}$ die m-te Tensorpotenz von A. Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}(m)$ operiert in $\bigotimes^m \mathrm{A}$ durch Vertauschung der Faktoren, ebenso jede Untergruppe $\pi \subset \mathfrak{S}(m)$. Wie in [9], 6. 2 definieren wir das π-*Produkt von* A,

$$\mathrm{TA} = \bigotimes^m \mathrm{A}/\pi,$$

als Quotienten von $\bigotimes^m \mathrm{A}$ nach dem Untermodul, der von den Elementen $y - \gamma(y)$ mit $y \in \bigotimes^m \mathrm{A}$, $\gamma \in \pi$, erzeugt wird.

Ist Λ ein nullteilerfreier Hauptidealring und X ein freies s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$(= freier s.s. Modul = freier FD-Modul über Λ), dann hängt HTX nur von H(X) ab (s. [9], 5. 11). Daraus folgt

$$(4.11) \qquad H(\otimes^m X/\pi) \cong LTH(X).$$

Durch geometrische Realisierung überträgt sich dieses Ergebnis auf das π-Produkt $\times^m P/\pi$ von Polyedern (CW-Komplexen), das ganz analog wie $\otimes^m A/\pi$ zu definieren ist. Man erhält (vgl. [9], 7)

$$(4.12) \qquad H(\times^m P/\pi) \cong LTH(P;\ \Lambda).$$

Eine 4. 11 oder 4. 12 entsprechende Gleichung für Abbildungen gilt dagegen nicht: Ist $g: X \to X'$ eine s.s. Abbildung zwischen freien s.s. Moduln (oder auch eine stetige Abbildung zwischen Polyedern), dann ist im allgemeinen $H(Tg) \neq LTH(g)$ Das liegt daran, daß man in 4. 8 zur Definition von $LT(\alpha)$ eine « direkte Summenabbildung » f verwenden muß und nicht etwa eine beliebige Abbildung $X \to X'$, die α induziert. Für ein Bespiel vgl. [9], 4. 5.

4. 13. *Beispiel* (b). — Wir betrachten noch einmal die Operation von π in $\otimes^m A$ (s. 4. 10) und setzen nun

$$TA = (\otimes^m A)^\pi$$

= Modul der bei π invarianten Elemente von $\otimes^m A$, das sind die Elemente $x \in \otimes^m A$ mit $x = \gamma(x)$ für alle $\gamma \in \pi$.

Für $\pi = \mathfrak{S}(m)$ und *freie* A stimmt T mit dem Funktor Γ_m von Eilenberg-MacLane überein (s. [5], Exp. 8. 4; dort S_m). Daraus folgt

$$(4.14) \qquad LT \cong L\Gamma_m, \qquad \text{falls} \qquad \pi = \mathfrak{S}(m),$$

denn zur Bestimmung von LT braucht man T nur auf freien (projektiven) Objekten und Morphismen zwischen solchen zu kennen. — Man beachte aber, daß für nicht-freie A im allgemeinen $TA \ncong \Gamma_m A$ ist.

Aus 4. 14 folgt insbesondere (analog zu 4. 11)

$$H((\otimes^m X)^{\mathfrak{S}(m)}) \cong L\Gamma_m(H(X)),$$

falls X ein freier s.s. Modul über einem nullteilerfreien Hauptidealring Λ ist.

4. 15. *Beispiel* (c). — In den beiden folgenden Beispielen ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. G sei eine feste abelsche Gruppe. Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ sei

$$TA = \mathbf{Z}A \otimes G, \qquad T'A = SA(A) \otimes G.$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{Z}A$ den Gruppenring von A über den ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ und SA(A) die symmetrische Algebra von A (s. [8], Ch. V, 18).

4. 16. SATZ. — *Die Derivierten* $L_qT(A, n)$, $n \geq 0$, *und* $L_qT'(A, n)$, $n > 0$, *sind mit den Eilenberg-MacLane-Funktoren* $H_q(A, n; G)$ *äquivalent.*

BEWEIS. — Im Falle des Funktors T folgt dies fast unmitelbar aus der Definition: Eine (nicht notwendig projektive) s.s. Auflösung X von (A, n) ist ein s.s. (abelscher Gruppen-) Komplex, dessen einzige nicht verschwindende Homotopiegruppe π_n mit A übereinstimmt (s. [22], 2 App. A oder [24], 1. 4). D. h. X ist ein Eilenberg-MacLane-Komplex $K(A, n)$, und TX ist sein Kettenkomplex mit Koeffizienten in G, also in der Tat $HTX = H(A, n; G)$, wie behauptet.

Nun zum Funktor T'. Y sei eine zusammenhängende s.s. Menge (= c.s.s. Komplex) mit Basispunkt P, deren einzige nicht verschwindende Homologiegruppe positiver Dimension $H_n(Y, \mathbf{Z}) = A$ ist (ein « Moore-Komplex »). Ferner sei $\mathbf{Z}(Y, P)$ sein FD-Komplex modulo P, d.i. die von Y erzeugte freie abelsche s.s. Gruppe $\mathbf{Z}Y$, dividiert durch $\mathbf{Z}P$. Die einzige nicht verschwindende Homologiegruppe von $\mathbf{Z}(Y, P)$ ist

$$H_n\mathbf{Z}(Y, P) = A.$$

$\mathbf{Z}(Y, P)$ ist also bis auf Homotopieäquivalenz eine s.s Auflösung X von (A, n) (s. [10], 5. 3). Also ist auch $T'\mathbf{Z}(Y, P) \simeq T'X$ und

$$HT'\mathbf{Z}(Y, P) = HT'X = LT'(A, n).$$

Andererseits ist $SA(\mathbf{Z}(Y, P))$ isomorph mit $\mathbf{Z}SP^{\infty}Y$, dem FD-Komplex des unendlichen symmetrischen Produktes von Y (s. [9], 10. 10.) Nach [25], 3. 7 oder [28], 7 ist aber $SP^{\infty}Y$ ein Eilenberg-MacLane-Komplex $K(A, n)$, also in der Tat

$$LT'(A, n) = HT'\mathbf{Z}(Y, P) = H((\mathbf{Z}SP^{\infty}Y) \otimes G) = H(A, n; G).$$

4.17. *Beispiel* (d). — Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ wie in 4.15, und es sei TA die Tensoralgebra von $A \in \mathfrak{A}$. Ist P ein zusammenhängendes Polyeder, dann gibt LTH(P) die Homologie des Wegeraums der Einhängung von P, $\mathrm{LTH(P)} \cong \mathrm{H\Omega SP}$ (vgl. [9], 11).

4.18. Misch-effekte (cross-effects). — Die Beispiele 4.16 zeigen, daß die Derivierten eines nicht-additiven Funktors sehr kompliziert sein können (z. B. ∞-dimensional), auch wenn das Argument A projektiv ist. Wir werden nun aber sehen (s. 4.22), daß die homologische Dimension von A doch einen gewissen Einfluß auf LTA hat, jedenfalls dann, wenn T ein Funktor *endlichen Grades* ist. Dieser Begriff des Grades hängt eng mit dem des *Mischeffektes* zusammen. Wir erinnern kurz daran und verweisen im übrigen auf [13], 9.

$T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ sei ein kovarianter Funktor mit $T0 = 0$. Die Mischeffekte eines solchen Funktors messen seine Abweichung von der Additivität. Der *k-te Mischeffekt*, $k = 1, 2, \ldots$, ist ein kovarianter Funktor $T_k(A_1, \ldots, A_k)$ von k Variablen $A_j \in \mathfrak{A}$ mit Werten in $\mathfrak{A}'$. Es bestehen die folgenden Beziehungen, welche die Funktoren T_k charakterisieren (s. [13], 9.1, 9.6).

Es gibt natürliche Äquivalenzen

$$(4.19) \qquad T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) \cong \bigoplus\nolimits_\sigma T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}),$$

so daß für jede nicht-leere Teilmenge τ *von* $(1, 2, \ldots, k)$ *die Diagramme*

$$(4.20) \qquad \begin{array}{ccc} T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) & \cong & \bigoplus_\sigma T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \\ {\scriptstyle T(\lambda_\tau)}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle I_\tau} \\ T(A_{\tau_1} \oplus \cdots \oplus A_{\tau_t}) & \cong & \bigoplus_{\sigma \subset \tau} T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \end{array}$$

$$(4.21) \qquad \begin{array}{ccc} T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) & \cong & \bigoplus_\sigma T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \\ {\scriptstyle T(q_\tau)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_\tau} \\ T(A_{\tau_1} \oplus \cdots \oplus A_{\tau_t}) & \cong & \bigoplus_{\sigma \subset \tau} T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \end{array}$$

kommutativ sind. Die Summe in 4.19 *erstreckt sich über alle nicht-leeren Teilmengen* σ *von* $(1, 2, \ldots, k)$, *die Morphismen* λ_τ *und* I_τ *sind jeweils die Injektionen von Teilsummen in die ganze Summe, und* q_τ, P_τ *sind die Projektionen auf diese Teilsummen.*

Z.B. ist $T_1 = T$,

$$T(A \oplus B) \cong TA \oplus TB \oplus T_2(A, B),$$
$$T(A \oplus B \oplus C) \cong TA \oplus TB \oplus TC \oplus T_2(A, B) \oplus T_2(B, C) \oplus T_2(A, C) \oplus T_3(A, B, C).$$

Auch im Falle $T0 \neq 0$ kann man durch 4.19-4.21 eindeutig Mischeffekte T_k, $k \geq 0$, definieren, vorausgesetzt daß man auch die leeren Teilmengen σ, τ von $(1, 2, \ldots, k)$ zuläßt. Man hat dann $T_0 = T0 =$ konstant,

$$TA \cong T_0 \oplus T_1A, \qquad T(A \oplus B) \cong T_0 \oplus T_1A \oplus T_1B \oplus T_2(A, B), \text{ usw.}$$

Ein Funktor ist *vom Grade* $\leq k$, wenn sein $(k+1)$-ter Mischeffekt null ist. Dann sind auch alle höheren Mischeffekte null. T ist genau dann vom Grade $\leq k$, wenn der k-te Mischeffekt multilinear ist. Insbesondere sind die Funktoren T vom Grade ≤ 1 (und mit $T0 = 0$) gerade die additiven Funktoren. Die Beispiele 4. 10, 4. 13 sind Funktoren vom Grade genau m.

4. 22. Satz. — *Es sei* T *ein Funktor vom Grade* $\leq k$, *und die projektive Dimension* (s. [7], VI. 2) *von* $A \in \mathfrak{A}$ *sei* $\leq r$. *Dann ist*

$$L_qT(A, n) = 0 \qquad \textit{für} \qquad q > k(n+r).$$

Beweis. — Die Voraussetzung über die projektive Dimension von A besagt, daß es eine (gewöhnliche) projektive Auflösung C von (A, n) gibt mit $C_i = 0$ für $i > n + r$. Dann ist KC eine projektive s.s. Auflösung X von (A, n) mit $(NX)_i = 0$ für $i > n + r$. Wegen $H(Y) = H(NY)$ (s. 3. 22) folgt die Behauptung daher aus dem.

4. 23. Hilfssatz. — *Es sei* T *ein kovarianter Funktor vom Grade* $\leq k$, *und* X *sei ein s.s. Objekt mit* $(NX)_i = 0$ *für* $i > m$. *Dann ist* $(NTX)_q = 0$ *für* $q > km$.

Beweis. — Wir können $X = KC$ annehmen (s. 3. 6). Wegen $C_i = 0$ für $i > m$ sind in $(KC)_q = \bigoplus_{d(\eta)=q} C_{r(\eta)}$ nur die Summanden mit $r(\eta) \leqslant m$ evtl. von null verschieden.

Bilden wir nun TKC. Nach 4. 19 ist $(TKC)_q = T(\bigoplus_{d(\eta)=q} C_{r(\eta)})$ eine direkte Summe von Ausdrücken $T_s(C_{r(\eta_1)}, \ldots, C_{r(\eta_s)})$. Wegen Grad $(T) \leq k$ können wir $s \leq k$ voraussetzen, außerdem wie schon bemerkt, $r(\eta_\nu) \leq m$. Die Abbildung $\eta_\nu : [q] \to [r(\eta_\nu)]$ hat also höchstens m Sprungstellen, und die Sprungstellen aller

η_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, teilen das Intervall $[q]$ in höchstens $km + 1$ Stücke. Ist $q > km$, dann gibt es demnach ein Stück, in welchem mehr als eine ganze Zahl liegt, d.h. es gibt ganze Zahlen $j, j+1 \in [q]$ mit $\eta_\nu(j) = \eta_\nu(j+1)$ für alle ν. Dann kann man aber von η_ν den Faktor η^j (s. 1. 2) abspalten,

$$\eta_\nu = \eta'_\nu \eta^j,$$

also

$$\begin{aligned} T_s(C_{r(\eta_1)}, \ldots, C_{r(\eta_s)}) &= T_s(KC_{\eta^j}(C_{r(\eta'_1)}), \ldots, KC_{\eta^j}(C_{r(\eta'_s)})) \\ &= (TKC)_{\eta^j}(T_s(C_{r(\eta'_1)}, \ldots, C_{r(\eta'_s)}) \subset \text{Bild } (TKC)_{\eta^j} = \text{Bild } (s_j). \end{aligned}$$

TKC ist also ausgeartet (s. 3. 18) oberhalb der Dimension km, also (s. 3. 21) $(NTX)_q \cong (TX/DTX)_q = 0$ für $q > km$, wie behauptet.

5. — EINHÄNGUNG

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ abelsche Kategorien und $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein (eventuell nicht additiver) kovarianter Funktor mit $T(0) = 0$. Zu jedem s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ werden wir die *Einhängung* SX und den *Einhängungsmorphismus* $\sigma = \sigma_X(T) : H_qTX \to H_{q+1}TSX$ definieren. Wir geben ferner Verallgemeinerungen dieses Begriffs auf Funktoren mehrerer Variabler an und beweisen einige einfache Ergebnisse über den Einhängungsmorphismus. Weitere Resultate werden sich aus der « Bar-Konstruktion » im nächsten Paragraphen ergeben.

5. 1. Sei A ein Kettenkomplex über $\mathfrak{A}$. Der *Kegel* CA ist ein Kettenkomplex über $\mathfrak{A}$, der folgendermaßen definiert wird : Es ist $(CA)_q = A_q \oplus A_{q-1}$, und bezeichnet $\varkappa_{q,p} : A_p \to (CA)_q$, $p = q, q - 1$, die Injektion, so ist

$$\begin{aligned} \partial^{CA}\varkappa_{q,q} &= \varkappa_{q-1,q-1}\partial^A \\ \partial^{CA}\varkappa_{q,q-1} &= \varkappa_{q-1,q-1} - \varkappa_{q-1,q-2}\partial^A. \end{aligned}$$

Wenn $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen ist, bedeutet das

$$\partial^{CA}(a_q, a_{q-1}) = (\partial a_q + a_{q-1}, \; -\partial a_{q-1}), \quad a_p \in A_p.$$

Definiert man die Morphismen $s : (CA)_q \to (CA)_{q+1}$ durch

$$\begin{aligned} s\varkappa_{q,q} &= \varkappa_{q+1,q} \\ s\varkappa_{q,q-1} &= 0, \end{aligned}$$

d.h. im Spezialfall der abelschen Gruppen

$$s(a_q, a_{q-1}) = (0, a_q),$$

so ist $\partial s + s\partial = \iota =$ Identität, d.h. s ist eine Nullhomotopie von CA.

Die Injektion $\varkappa_{q,q} : A_q \to (CA)_q$ liefert einen Kettenmorphismus $\varkappa : A \to CA$. Den Kokern von $\varkappa$ bezeichnen wir mit $\pi : CA \to SA$ und nennen SA die Einhängung von A. Dann ist $(SA)_q = A_{q-1}$, $\partial^{SA} = -\partial^{A}$. Wir haben eine exakte Folge

$$(5.2) \qquad 0 \to A \xrightarrow{\varkappa} CA \xrightarrow{\pi} SA \to 0,$$

die als Folge von graduierten Objekten (ohne Randoperator) zerfällt.

5. 3. Vermöge der Äquivalenz zwischen Kettenkomplexen und s.s. Objekten (§ 3) übertragen sich diese Begriffe auf s.s. Objekte. Sei X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir definieren Kegel und Einhängung von X durch

$$\begin{aligned} CX &= KCNX \\ SX &= KSNX, \end{aligned}$$

wobei N und K die Funktoren von 3. 1, 3. 2 sind. Dann ist CX nullhomotop (3. 31), und es besteht die exakte Folge

$$(5.4.) \qquad 0 \to X \xrightarrow{\varkappa} CX \xrightarrow{\pi} SX \to 0,$$

die als Folge von graduierten Objekten wieder zerfällt.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese Definition von CX und SX mit der in [11] gleichwertig ist. Wir werden das aber nicht benutzen und übergehen den Beweis.

5. 5. Wendet man den Funktor T auf (5. 4) an, so erhält man

$$TX \xrightarrow{T\varkappa} TCX \xrightarrow{T\pi} TSX.$$

Diese Folge ist i.a. nicht mehr exakt (für nicht-additives T), aber es gilt $(T\pi)(T\varkappa) = T(\pi\varkappa) = T(0) = 0$ (6). Wegen $CX \simeq 0$ ist $TCX \simeq 0$, zunächst als s.s. Objekt (1. 14). Daraus folgt aber $NTCX \simeq N(0) = 0$ (3. 31) und $kTCX \simeq NTCX \simeq 0$ (3. 22), d.h. TCX ist auch als Kettenkomplex nullhomotop.

5. 6. Seien nun allgemein

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(6) Ferner ist $T\varkappa$ monomorph und $T\pi$ epimorph, weil $\varkappa$ und π als Morphismen von graduierten Objekten (ohne Randoperator) einseitige Inverse haben. Das ist aber an dieser Stelle ohne Bedeutung.

Kettenmorphismen von Komplexen über einer abelschen Kategorie mit $gf = 0$. Sei ferner $B \simeq 0$, d.h. es gibt $s : B_q \to B_{q+1}$ mit $\partial s + s\partial = \iota$. Dann ist $h = gsf : A \to C$ ein Kettenmorphismus vom Grade 1 (d.h. $\partial h = -\partial h$) und induziert $h_* : H_q(A) \to H_{q+1}(C)$.

5. 7. SATZ. — *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

sei kommutativ, und beide Zeilen mögen die obigen Voraussetzungen erfüllen. Sind dann s und s′ irgend zwei Nullhomotopien von B *bzw.* B′ *so ist auch*

$$\begin{array}{ccc} H_q(A) & \xrightarrow{(gsf)_*} & H_{q+1}(C) \\ \alpha_*\downarrow & & \downarrow\gamma_* \\ H_q(A') & \xrightarrow{(g's'f')_*} & H_{q+1}(C') \end{array}$$

kommutativ.

Nimmt man speziell $f' = f$, $g' = g$ und für α, β, γ die Identitäten, so folgt: $(gsf)_*$ ist unabhängig von der Wahl von s. Wir definieren

$$(g, f)_* = (gsf)_* : H_q(A) \to H_{q+1}(C).$$

BEWEIS VON 5. 7. — Es ist

$$\begin{aligned} (g's'f')_*\alpha_* &= (g's'f'\alpha)_*, \\ \gamma_*(gsf)_* &= (\gamma gsf)_* \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g's'f'\alpha &= g's'\beta f, \\ \gamma gsf &= g'\beta sf. \end{aligned}$$

Setzt man $t = s'\beta - \beta s$, so gilt $\partial t + t\partial = 0$, d.h. $t : B_q \to B'_{q+1}$ ist ein Kettenmorphismus vom Grade 1. Wegen $B' \simeq 0$ ist er nullhomotop, in Formeln:

$$\partial s't - s't\partial = (\partial s' + s'\partial)t = t.$$

Insbesondere ist $t_* = 0$, also

$$(g's'f')_*\alpha_* - \gamma_*(gsf)_* = g'_*t_*f_* = 0.$$

5. 8. BEMERKUNG. — $(g, f)_*$ kann auch definiert werden, wenn B nur als azyklisch (nicht notwendig nullhomotop)

vorausgesetzt wird. Man zerlegt dann

$$A \xrightarrow{f'} \text{Kern } g \subset B \to \text{Kobild } g \xrightarrow{g'} C$$

oder

$$A \xrightarrow{f''} \text{Bild } f \subset B \to \text{Kokern } f \xrightarrow{g''} C.$$

Die « verbindenden Morphismen » ([4], I, 5. 8; II, 1. 2)

$$\begin{aligned} \partial'_* &: H_{q+1}(\text{Kobild } g) \to H_q(\text{Kern } g) \\ \partial''_* &: H_{q+1}(\text{Kokern}) f \to H_q(\text{Bild } f). \end{aligned}$$

sind Isomorphismen, und es ist nicht schwer zu zeigen (mit Hilfe der Natürlichkeit des verbindenden Morphismus), daß $g'_*(\partial'_*)^{-1}f'_* = g''_*(\partial''_*)^{-1}f''_*$: $H_q(A) \to H_{q+1}(C)$ ist. Ferner stimmt dieser Morphismus im Fall $B \simeq 0$ mit dem oben definierten $(g, f)_*$ überein. Den Beweis übergehen wir. In einer Kategorie von abelschen Gruppen ist er fast trivial.

5. 9. Wir kehren nun zurück der Situation von 5. 5 und definieren den *Einhängungsmorphismus*

$$\sigma = \sigma_X = \sigma_X(T) = (T\pi, T\varkappa)_* : H_q(TX) \to H_{q+1}(TSX).$$

Ein s.s. Morphismus f: $X \to X'$ liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} TX & \xrightarrow{T\varkappa} & TCX & \xrightarrow{T\pi} & TSX \\ {\scriptstyle Tf}\downarrow & & {\scriptstyle TCf}\downarrow & & {\scriptstyle TSf}\downarrow \\ TX' & \xrightarrow{T\varkappa'} & TCX' & \xrightarrow{T\pi'} & TSX'. \end{array}$$

Nach 5. 7 ist dann auch

$$(5.\ 10) \qquad \begin{array}{ccc} H_q(TX) & \xrightarrow{\sigma_X} & H_{q+1}(TSX) \\ {\scriptstyle (Tf)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (TSf)_*} \\ H_q(TX') & \xrightarrow{\sigma'_X} & H_{q+1}(TSX') \end{array}$$

kommutativ, d.h. σ *ist eine natürliche Transformation* (in Abhängigkeit von X).

Ist $\varphi : T \to T'$ eine natürliche Transformation (und $T'(0) = 0$), so ergibt sich analog das kommutative Diagramm

$$(5.\ 11) \qquad \begin{array}{ccc} H_q(TX) & \xrightarrow{\sigma(T)} & H_{q+1}(TSX) \\ {\scriptstyle \varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ H_q(T'X) & \xrightarrow{\sigma(T')} & H_{q+1}(T'SX) \end{array}$$

d.h. σ ist auch natürlich in Abhängigkeit von T.

5. 12. Bemerkung. — Ist T additiv, so ist

$$0 \longrightarrow TX \xrightarrow{T\varkappa} TCX \xrightarrow{T\pi} TSX \longrightarrow 0$$

exakt, und die Einhängung ist das Inverse des verbindenden Morphismus $H_{q+1}(TSX) \to H_q(TX)$(5.8). Insbesondere ist sie ein Isomorphismus. Dieses Ergebnis wird sich in § 6 noch auf andere Art ergeben (6. 5).

5. 13. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Wir definieren den Funktor T durch $TA = \bar{Z}A \otimes G$, $A \in \mathfrak{A}$. Dabei ist ZA der Gruppenring von A, $\bar{Z}A = ZA/Z0$, und G ist eine feste abelsche Gruppe. Für eine s.s. abelsche Gruppe X ist dann kTX der gewöhnliche Kettenkomplex der s.s. Menge X mod 0 mit Koeffizienten in G, also

$$HTX = H(X, 0; G).$$

Als s.s. Menge ist CX ein zusammenziehbarer Faserraum mit der Basis SX und der Faser X (7). Aus der Definition von $\sigma_X(T)$ (5. 9) ergibt sich unmittelbar, daß es mit der bekannten « Homologie-Einhängung » [26], [31]

$$\sigma : H_q(X, 0; G) \to H_{q+1}(SX, 0; G)$$

übereinstimmt.

5. 14. Der Einhängungsmorphismus läßt sich in verschiedener Weise auf Funktoren von mehreren Variablen verallgemeinern. Wir erläutern das am Beispiel von 2 Variablen. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ abelsche Kategorien und T(A, B), $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$, ein kovarianter Funktor mit Werten in $\mathfrak{A}'$. Bildet man die Produktkategorie $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ mit den Objekten (A, B) und den Morphismen (f, g), so kann man T als Funktor $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}'$ von einer Variablen auffassen. Setzt man T(0, 0) = 0 voraus, so ist also für zwei s.s. Objekte X über $\mathfrak{A}$ und Y über $\mathfrak{B}$ der « *totale* » *Einhängungsmorphismus*

$$\sigma = \sigma_{X, Y}(T) = (T(\pi, \pi), T(\varkappa, \varkappa))_* : H_qT(X, Y) \to H_{q+1}T(SX, SY)$$

mit $\quad T(X, Y) \xrightarrow{T(\varkappa, \varkappa)} T(CX, CY) \xrightarrow{T(\pi, \pi)} T(SX, SY).$

definiert. (Dabei wurden C(X, Y) = (CX, CY) und die analoge

(7) Man beachte, daß CX und SX nicht Kegel bzw. Einhängung von X als s.s. Menge sind. Es ist vielmehr $CX = WX$, $SX = \bar{W}X$ (W-Konstruktion [12], 17; [22] 2. 17).

Beziehung für S benutzt, die sich leicht aus den Definitionen ergeben.)

5. 15. Setzt man sogar $T(0, B) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ voraus, so läßt sich noch eine andere Art von Einhängung definieren. Wir betrachten dazu

$$T(X, Y) \xrightarrow{T(\varkappa, \iota)} T(CX, Y) \xrightarrow{T(\pi, \iota)} T(SX, Y).$$

Die Zusammensetzung ist $T(\pi, \iota) \circ T(\varkappa, \iota) = T(\pi\varkappa, \iota) = T(0, \iota) = 0$. Aus $CX \simeq 0$ folgt $T(CX, Y) \simeq T(0, Y) = 0$ (1. 26). Nach 5. 6 können wir also

$$\sigma^1 = \sigma^1_{X, Y}(T) = (T(\pi, \iota), T(\varkappa, \iota))_* : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(SX, Y)$$

definieren. Wir nennen diesen Morphismus die *partielle Einhängung* in Bezug auf die erste Variable. Entsprechend wird die partielle Einhängung

$$\sigma^2 = \sigma^2_{X, Y}(T) : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(X, SY)$$

für die zweite Variable erklärt, wenn $T(A, 0) = 0$ ist für alle $A \in \mathfrak{A}$.

5. 16. Um die Beziehung zwischen totaler und partieller Einhängung herzustellen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T(X, Y) & \xrightarrow{T(\varkappa, \iota)} & T(CX, Y) & \xrightarrow{T(\pi, \iota)} & T(SX, Y) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle T(\iota, \varkappa)} & & \downarrow{\scriptstyle T(\iota, 0)} \\ T(X, Y) & \xrightarrow{T(\varkappa, \varkappa)} & T(CX, CY) & \xrightarrow{T(\pi, \pi)} & T(SX, SY) \end{array}$$

Unter der Voraussetzung $T(0, B) = 0$ können wir σ und σ^1 bilden, und nach 5. 7 ist

$$\text{(5. 17)} \qquad \begin{array}{ccc} & \overset{\sigma^1}{\nearrow} & H_{q+1} T(SX, Y) \\ H_q T(X, Y) & & \downarrow{\scriptstyle T(\iota, 0)_*} \\ & \underset{\sigma}{\searrow} & H_{q+1} T(SX, SY) \end{array}$$

kommutativ. Ist zusätzlich $T(A, 0) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, so gilt $T(\iota, 0) = 0$, und wir haben :

5. 18. Satz. — *Ist* $T(A, 0) = T(0, B) = 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, *so verschwindet der totale Einhängungsmorphismus* $\sigma_{X, Y}(T)$ *für alle s.s. Objekte* X, Y.

5. 19. Bemerkung. — Der Satz 5. 18 zeigt, daß die totale Einhängung an sich nicht sehr interessant ist. Denn erstens wird für die meisten Funktoren $T(A, B)$, die im folgenden vorkommen, die Voraussetzung von 5. 18 erfüllt sein. Zweitens kann man jeden Funktor von 2 Variablen so in der Form $T(A, B) = T'(A) \oplus T''(B) \oplus T'''(A, B)$ aufspalten, daß T''' die Voraussetzung von 5. 18 erfüllt. Wir werden aber sogleich wichtige Folgerungen für Funktoren einer Variablen aus 5. 18 ziehen.

5. 20. Korollar. — *Setzt man unter den Voraussetzungen von* 5. 18 $T^d(A) = T(A, A)$, *so verschwindet der (gewöhnliche) Einhängungsmorphismus* $\sigma_X(T^d)$ *für jedes s.s. Objekt* X.

Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß $\sigma_X(T^d) = \sigma_{X,X}(T)$ ist. Das folgt sofort aus den Definitionen 5. 9, 5. 14.

5. 21. Sei nun $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ wie früher ein Funktor von einer Variablen mit $T(0) = 0$. Dann sind die Mischeffekte

$$T_k(A_1, \ldots, A_k)$$

Funktoren von k Variablen aus $\mathfrak{A}$, die den Wert 0 haben, wenn eine der Variablen verschwindet (4. 18 und [13], 9. 2). Setzen wir $T_k^d(A) = T_k(A, A, \ldots, A)$, so folgt aus 5. 20 (mit einer trivialen Verallgemeinerung von 2 auf k) :

5. 22. *Der Einhängungsmorphismus*

$$\sigma_X(T_k^d) : H_q T_k^d X \to H_{q+1} T_k^d SX$$

verschwindet für $k > 1$.

5. 23. Für irgendein $A \in \mathfrak{A}$ definieren wir die « *Addition* » oder « *Kodiagonale* » $\alpha' : A \oplus A \to A$ als denjenigen Morphismus, der auf beiden Summanden die Identität ist ($\alpha'(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ in einer Kategorie von abelschen Gruppen). Dual dazu wird die « *Diagonale* » oder « *Koaddition* » $\beta' : A \to A \oplus A$ dadurch definiert, daß die Zusammensetzung mit der Projektion auf jeden der beiden Summanden die Identität ist ($\beta'(a) = (a, a)$ in einer Kategorie von abelschen Gruppen). Diese Morphismen liefern

$$\alpha : T_2^d(A) = T_2(A, A) \xrightarrow{\lambda} T(A \oplus A) \xrightarrow{T(\alpha')} T(A)$$
$$\beta : T(A) \xrightarrow{T(\beta')} T(A \oplus A) \xrightarrow{\rho} T_2(A, A) = T_2^d(A),$$

wobei λ und ρ die zur direkten Summendarstellung

$$T(A \oplus A) = T(A) \oplus T(A) \oplus T_2(A, A)$$

(4. 19) gehörige Injektion bzw. Projektion bezeichnen.

α und β sind offenbar natürliche Transformationen zwischen den Funktoren T_2^d und T. Wir wollen sie ebenfalls *Kodiagonale* bzw. *Diagonale* nennen.

5. 24. Sei nun X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Das Bild von $\alpha_* : H_q T_2(X, X) \to H_q TX$ heißt der *zerlegbare Teil* von $H_q TX$. Der Kern von $\beta_* : H_q TX \to H_q T_2(X, X)$ heißt der *primitive Teil* von $H_q TX$. Wegen der Beziehung dieser Definition zu anderen Begriffen von « zerlegbar » und « primitiv » vgl. 5. 26, 8. 11, § 11.

5. 25. Satz. — *In der Folge*

$$H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q TX \xrightarrow{\sigma} H_{q+1} TSX \xrightarrow{\beta_*} H_{q+1} T_2(SX, SX)$$

verschwinden die Zusammensetzungen von zwei aufeinanderfolgenden Morphismen. M.a.W. σ *annulliert den zerlegbaren Teil von* $H_q TX$ *und bildet ganz* $H_q TX$ *in den primitiven Teil von* $H_{q+1} TSX$ *ab.*

Beweis. — Nach (5. 11) haben wir das kommutative Diagramm ($T_2^d(A) = T_2(A, A)$)

$$\begin{array}{ccc} H_q T_2^d X & \xrightarrow{\sigma(T_2^d)} & H_{q+1} T_2^d SX \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} \\ H_q TX & \xrightarrow{\sigma(T)} & H_{q+1} TSX \end{array}$$

$\sigma(T_2^d)$ verschwindet aber nach 5. 22. Also folgt

$$\sigma(T) \circ \alpha_* = \alpha_* \circ \sigma(T_2^d) = 0.$$

Analog erhält man $\beta_* \circ \sigma(T) = \sigma(T_2^d) \circ \beta_* = 0$.

Später wird gezeigt, daß die obige Folge unter gewissen Voraussetzungen sogar exakt ist (6. 6, 6. 11).

5. 26. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen und $TA = \bar{Z}A \otimes G$, $A \in \mathfrak{A}$, wie in 5. 13. Dann ist

$$T_2(A, B) = \frac{T(A \oplus B)}{TA + TB} = \frac{Z(A \oplus B)}{ZA + ZB} \otimes G.$$

Für s.s. abelsche Gruppen X, Y folgt

$$HT_2(X, Y) = H(X \times Y,\ X \vee Y; G),$$

wobei X, Y auf der rechten Seite als s.s. Mengen aufzufassen sind. Nach 5. 13 ist $HTX = H(X, 0; G)$. Der Homomorphismus

$$\beta_* : (H(X, 0; G) \to (H\,(X \times X, X \vee X, G)$$

($\beta : TX \to T_2(X, X)$ nach 5. 23) wird offenbar durch die « geometrische » Diagonalabbildung $X \to X \times X$ induziert, er stimmt also mit d_2 in [31], 2 überein.

Es ist leicht zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H(X \times X,\ 0 \times 0;\ G) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha'_* - \pi'_* - \pi''_*"'] & & H(X \times X,\ X \vee X;\ G) \arrow[dl, "\alpha_*"] \\ & H(X,\ 0;\ G) & \end{tikzcd}$$

in dem $\alpha' : X \times X = X \oplus X \to X$ die Addition und $\pi', \pi'' : X \times X \to X$ die beiden Projektionen bezeichnen, kommutativ ist ($\alpha : T_2(X, X) \to TX$ nach 5. 23). Die geometrische Realisierung $|X|$ ist mit dem Schleifenraum $\Omega|SX|$ homotopieäquivalent (5. 13), und zwar so, daß die Addition der Punkte in $|X|$ in die punktweise Addition der Wege in $|SX|$ übergeht ($|X|$, $|SX|$ sind abelsche Gruppen). Bekanntlich ist aber die punktweise Addition der Wege als Abbildung

$$(\Omega|SX| \times \Omega|SX|, 0 \times 0) \to (\Omega|SX|, 0)$$

zu der Zusammensetzung der Wege μ homotop. Folglich gilt für die Homomorphismen μ_4 und λ in [31], 2 .5 : $\alpha'_* = \mu_4$, und daher $\alpha_* = \lambda$.

In dem betrachteten Beispiel liefert 5. 25 also dasselbe wie die ersten Teile der Korollare 6. 1 und 6. 2 in [31], angewandt auf $B = |SX|$. Für die zweiten Teile vgl. 6. 16.

ZWEITE DEFINITION DER EINHÄNGUNG

Der bisher benutzte Begriff des Kegels eines s.s. Objekts entspricht im Fall eines gewöhnlichen simplizialen Komplexes K dem Verbindungskomplex (join) mit einem Punkt P. Eine andere Art von « Kegel » erhält man, wenn man im Produkt $I \times K$ den Teilkomplex $0 \times K$ zu einem Punkt identifiziert. Es entsteht ein s.s. Komplex (s.s. Menge), der zu dem ersten Kegel i.a. nicht isomorph ist, wenn auch die geometrischen Realisierungen homöomorph sind. Wir wollen nun auch die zweite Kegeldefinition auf abelsche Kategorien übertragen und zeigen, daß man mit ihr die Einhängung und den Einhängungsmorphismus völlig gleichwertig definieren kann. Diese neue Definition wird sich in den beiden nächsten Paragraphen als nützlich erweisen.

5. 27. Sei $\Delta[r]$ das Standard-r-Simplex, d.h. $\Delta[r]_p$ besteht aus den monotonen Abbildungen $[p] \to [r]$. Insbesondere hat $\Delta[0]_p$ ein einziges Element $\gamma^p : [p] \to [0]$, und für jedes monotone $\alpha : [q] \to [p]$ ist $\Delta[0]_\alpha(\gamma^p) = \gamma^q$. $\Delta[1]_p$ besteht aus den Elementen $\gamma_k^p : [p] \to [1]$, $k = 0, 1, \ldots, p+1$, mit

$$\gamma_k^p(l) = \begin{cases} 0, & l < k, \\ 1, & l \geq k. \end{cases}$$

Für die Seiten- und Ausartungsoperatoren (1. 2) gilt

$$(5.\ 28) \qquad \begin{aligned} \partial_i \gamma_k^p &= \begin{cases} \gamma_k^{p-1}, & k \leq i \\ \gamma_{k-1}^{p-1}, & k > i \end{cases} \\ s_i \gamma_k^p &= \begin{cases} \gamma_k^{p+1}, & k \leq i \\ \gamma_{k+1}^{p+1}, & k > i. \end{cases} \end{aligned}$$

Für irgendeine Menge M bezeichne ZM die von M erzeugte freie abelsche Gruppe. Mit Hilfe dieses Funktors von Mengen zu abelschen Gruppen definieren wir die s.s. abelschen Gruppen

$$(5.\ 29) \qquad \begin{aligned} Q &= Z\Delta[0] \\ C &= Z\Delta[1]/Z\varepsilon^0\Delta[0] \\ S &= Z\Delta[1]/(Z\varepsilon^0\Delta[0] + Z\varepsilon^1\Delta[0]) \end{aligned}$$

mit $\varepsilon^0\gamma^p = \gamma^p_{p+1}$, $\varepsilon^1\gamma^p = \gamma^p_0$ (vgl. 1. 2). Man hat also eine exakte Folge

$$(5.30) \qquad 0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\varkappa = \varepsilon^1} C \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow 0,$$

die als Folge von graduierten Objekten (ohne s.s Struktur) zerfällt. Wir merken noch an

5. 31. *Für jedes* $p \geq 0$ *ist* $Q_p = Z$, *und für jedes monotone* $\alpha : [r] \to [p]$ *ist* $Q_\alpha : Q_p \to Q_r$ *die Identität.*

Sei nun $\mathfrak{G}$ die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen und $\mathfrak{A}$ irgendeine abelsche Kategorie. Nach 3. 32 ist das Tensorprodukt als Funktor $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ definiert. Sind $\mathfrak{G}$ und X s.s Obkjete über $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{A}$, so ist $G \mathbin{\widehat{\otimes}} X$ ein s.s. Doppelobjekt über $\mathfrak{A}$ mit $(G \mathbin{\widehat{\otimes}} X)_{p,q} = G_p \otimes X_q$ und entsprechend für monotone Abbildungen (2. 10). $G \otimes X$ ist das Diagonalobjekt von $G \mathbin{\widehat{\otimes}} X$. Nach 5. 31 gilt speziell $Q \otimes X = X$.

5. 32. Hilfssatz. — *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
Q \otimes X & \xrightarrow{\varkappa \otimes \iota} & C \otimes X & \xrightarrow{\pi \otimes \iota} & S \otimes X \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
X & \xrightarrow{\varkappa} & CX & \xrightarrow{\pi} & SX
\end{array}$$

in dem φ *und* ψ *natürliche Homotopieäquivalenzen sind.*

Beweis. — Sei G ein s.s. Objekt über $\mathfrak{G}$ und

$$f : k(G \otimes X) \to t(G \mathbin{\widehat{\otimes}} X) = kG \otimes kX$$

die Alexander-Whitneysche Homotopieäquivalenz (2. 15). Die Zusammensetzung mit der Injektion $N(G \otimes X) \to k(G \otimes X)$ auf der einen und dem Tensorprodukt der Projektionen $kG \to NG$, $kX \to NX$ (3. 20) auf der anderen Seite liefert eine natürliche Homotopieäquivalenz

$$\bar{f} : N(G \otimes X) \to NG \otimes NX.$$

Wegen der Natürlichkeit ist das Diagramm

$$(5.33) \qquad \begin{array}{ccccc}
N(Q \otimes X) & \xrightarrow{N(\varkappa \otimes \iota)} & N(C \otimes X) & \xrightarrow{N(\pi \otimes \iota)} & N(S \otimes X) \\
\downarrow{\scriptstyle\bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{f}} \\
NQ \otimes NX & \xrightarrow{N\varkappa \otimes \iota} & NC \otimes NX & \xrightarrow{N\pi \otimes \iota} & NS \otimes NX
\end{array}$$

kommutativ. Wie man mit Hilfe von (5. 28) leicht bestätigt ist

$$(\mathrm{NQ})_p = \begin{cases} Z\gamma^0, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{NC})_p = \begin{cases} Z\gamma^p_p, & p = 0, 1 \\ 0, & p \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{NS})_p = \begin{cases} Z\gamma^1_1, & p = 1 \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Für den Randoperator $\partial = \partial_0$ in NC gilt $\partial\gamma^1_1 = \gamma^0_0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \varkappa\gamma^0 &= \gamma^0_0 \\ \pi\gamma^1_1 &= \gamma^1_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die untere Zeile von (5. 33) mit

$$\mathrm{NX} \xrightarrow{\varkappa} \mathrm{CNX} \xrightarrow{\pi} \mathrm{SNX}$$

(5. 2) übereinstimmt.

In $\bar{f} : (\mathrm{N}(\mathrm{Q} \otimes \mathrm{X}))_m \to (\mathrm{NQ} \otimes \mathrm{NX})_m = (\mathrm{NQ})_0 \otimes (\mathrm{NX})_m$ liefert offenbar nur die Komponente $\bar{f}_{0,m}$ einen Beitrag. Nach Definition (2. 15) ist aber $f_{0,m}$ die Identität. Also ist

$$\bar{f} : \mathrm{N}(\mathrm{Q} \otimes \mathrm{X}) \to \mathrm{NQ} \otimes \mathrm{NX}$$

(linker vertikaler Morphismus in (5. 33)) die Identität von NX. Durch Anwendung des Funktors K (3. 6) auf (5. 33) erhält man demnach das gesuchte Diagramm von 5. 32.

Nebenbei folgt $\mathrm{NC} = \mathrm{NC} \otimes \mathrm{NQ} = \mathrm{CNQ}$, also $\mathrm{C} = \mathrm{CQ}$ und entsprechend $\mathrm{S} = \mathrm{SQ}$.

Sei nun wieder T ein kovarianter Funktor von $\mathfrak{A}$ in eine andere abelsche Kategorie $\mathfrak{A}'$ mit $\mathrm{T}(0) = 0$. Wendet man ihn auf 5. 32 an, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}(\mathrm{Q} \otimes \mathrm{X}) \arrow[r, "\mathrm{T}(\varkappa \otimes \iota)"] & \mathrm{T}(\mathrm{C} \otimes \mathrm{X}) \arrow[r, "\mathrm{T}(\pi \otimes \iota)"] \arrow[d, "\mathrm{T}\varphi"] & \mathrm{T}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{X}) \arrow[d, "\mathrm{T}\psi"] \\ \mathrm{TX} \arrow[r, "\mathrm{T}\varkappa"] & \mathrm{TCX} \arrow[r, "\mathrm{T}\pi"] & \mathrm{TSX} \end{tikzcd}$$

in dem $\mathrm{T}\varphi$ und $\mathrm{T}\psi$ Homotopieäquivalenzen sind und die Zusammensetzungen in beiden Zeilen 0 ergeben. Nach 5. 7 folgt:

5. 34. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $(\mathrm{T}\psi)_* : \mathrm{HT}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{X}) \cong \mathrm{HTSX}$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}_{q+1}\mathrm{T}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{X}) \arrow[d, "(\mathrm{T}\psi)_*"] \\ \mathrm{H}_q\mathrm{TX} \arrow[ur, "\bar{\sigma}"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \\ & \mathrm{H}_{q+1}\mathrm{TSX} \end{tikzcd}$$

mit $\bar{\sigma} = (T(\pi \otimes \iota),\ T(\varkappa \otimes \iota))_*$ *kommutativ ist.* σ *ist dabei der Einhängungsmorphismus von* 5. 9.

5. 35. Bemerkung. — Die Einhängung kann noch auf viele andere Arten definiert werden. Ist nämlich $X \subset Y$, Y nullhomotop und X als graduiertes Objekt ein direkter Summand von Y, so kann man zeigen, daß es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, equal] & CX \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & SX \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/X \end{tikzcd}$$

gibt, in dem die vertikalen Morphismen Homotopieäquivalenzen sind.

6. — DIE BAR-KONSTRUKTION

Das Haupziel dieses Paragraphen ist der Beweis des Satzes 6. 4, aus dem sich eine Reihe von Folgerungen über den Einhängungsmorphismus $\sigma : H_q TX \to H_{q+1} TSX$ (5. 9) ergeben wird. $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ist dabei wie in § 5 ein Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$.

6. 1. $T_p(A_1, \ldots, A_p)$ bezeichne den p-ten Mischeffekt von T (4. 18) und

$$T_p(A_1, \ldots, A_p) \underset{\rho}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_p)$$

seien die zur direkten Summendarstellung 4. 19 gehörigen natürlichen Morphismen (Injektion und Projektion). Ist $A_1 = \cdots = A_p = A$, so kürzen wir $A_1 \oplus \cdots \oplus A_p$ durch $\bigoplus^p A$ ab. $\alpha_i' : \bigoplus^p A \to \bigoplus^{p-1} A$, $A \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, p-1$, bilde den k-ten Summanden von $\bigoplus^p A$ identisch in den k-ten (für $k \leq i$) bzw. $(k-1)$-ten (für $k > i$) Summanden von $\bigoplus^{p-1} A$ ab. Ist $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen, so bedeutet das

$$\alpha_i'(a_1, \ldots, a_p) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_p).$$

Wir definieren dann

$$(6.\ 2) \qquad \alpha_i = \rho \circ T\alpha_i' \circ \lambda : T_p^d A \to T_{p-1}^d A, \quad i = 1, \ldots, p-1,$$

mit der Abkürzung $T_p^d A = T_p(A, \ldots, A)$. α_i ist eine natürliche Transformation von T_p^d in T_{p-1}^d. $\alpha_1 : T_2^d A \to T_1^d A = TA$ stimmt offenbar mit der Kodiagonale α von 5. 23 überein.

6. 3. Sei nun X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir bilden die Folge

$$TX = T_1^d X \xleftarrow{\partial'} T_2^d X \xleftarrow{\partial'} T_3^d X \xleftarrow{\partial'} \cdots$$

mit

$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : T_p^d X \to T_{p-1}^d X,$$

insbesondere

$$\partial' = -\alpha_1 = -\alpha : T_2^d X = T_2(X, X) \to TX.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß $\partial'\partial' = 0$ ist. Wir übergehen das hier, da es sich später von selbst ergeben wird (6. 23). Man kann die Folge also als Doppelkomplex $\mathfrak{T}X$ auffassen. Die Bigraduierung wird durch $(\mathfrak{T}X)_{p,q} = T_p^d X_q$ festgelegt. Der erste Randoperator ist ∂', der zweite ist der « innere » Randoperator $\partial'' = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i T_p^d(\partial_i) : T_p^d X_q \to T_p^d X_{q-1}$ des Kettenkomplexes $kT_p^d X$. Die Injektion $i : TX = (\mathfrak{T}X)_{1,*} \subset t\mathfrak{T}X$ ist ein Kettenmorphismus vom Grad 1 (t bezeichnet den Übergang zum totalen Komplex).

6. 4. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus der* (*totalen*) *Homologie* $\omega : H\mathfrak{T}X \cong HTSX$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\sigma}{\nearrow} & H_{q+1}TSX \\ H_qTX & & \uparrow{\scriptstyle\omega} \\ & \underset{i_*}{\searrow} & H_{q+1}\mathfrak{T}X \end{array}$$

kommutativ ist.

Wir nennen $\mathfrak{T}X$ « *Bar-Konstruktion* », weil es in Analogie zur bekannten « bar construction » von Eilenberg-MacLane [12], [5] steht. Im Fall des Funktoren « Gruppenring » und « Symmetrische Algebra » ist $\mathfrak{T}X$ fast dasselbe wie die bar construction über TX. Wir werden das am Schluß des Paragraphen genauer erläutern (6. 26, 6. 27).

Der Beweis von 6. 4 beruht auf den Isomorphien

$$HTSX \cong HT(S \otimes X)$$

(5. 34) und $\mathfrak{T}X \cong N'T(S \hat{\otimes} X)$. Dabei ist $S \hat{\otimes} X$ das s.s. Doppelobjekt mit $(S \hat{\otimes} X)_{p,q} = S_p \otimes X_q$ (2. 10), und N' bezeichnet das Normalisieren bezüglich der ersten s.s. Struktur eines s.s. Doppelobjekts. Wie werden das in 6. 17-6. 25 im einzelnen ausführen. Vorher sollen einige Folgerungen aus 6. 4 gezogen werden.

6.5. Korollar. — *Ist der Funktor* T *additiv, so ist der Einhängungsmorphismus* σ *ein Isomorphismus.*

Beweis. — Ist T additiv, so ist $T_p = 0$ für alle $p > 1$, und $i : TX \to t\mathfrak{T}X$ ist ein Isomorphismus (vom Grade 1). Also ist auch i_* ein Isomorphismus und damit σ nach 6. 4 (vgl. auch 5. 12).

6.6. Korollar. — *Ist* T *ein quadratischer Funktor*, d.h. $T_p = 0$ *für alle* $p > 2$, *so gibt es einen Morphismus* $\bar\beta$, *so daß die Folge*

$$\cdots \xrightarrow{\bar\beta} H_qT_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_qTX \xrightarrow{\sigma} H_{q+1}TSX \xrightarrow{\bar\beta} H_{q-1}T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}TX \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

exakt ist. ($\alpha : T_2(X, X) \to TX$ ist dabei die Kodiagonale, 5. 23). Insbesondere bedeutet das in Verschärfung von 5. 25, daß der zerlegbare Teil von H_qTX für quadratisches T genau der Kern von σ ist. Später werden wir zeigen, daß es einen Isomosphismus $H_{q-1}T_2(X, X) \cong H_{q+1}T_2(SX, SX)$ gibt, durch den $\bar\beta$ in $\beta_* : H_{q+1}TSX \to H_{q+1}T(SX, SX)$ (β = Diagonale, 5. 23) übergeht (7. 14). Dann folgt, daß der primitive Teil von $H_{q+1}TSX$ genau das Bild von σ ist.

Beweis von 6. 6. — Für quadratisches T reduziert sich $\mathfrak{T}X$ auf die Folge von Komplexen

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow TX \xleftarrow{\partial' = -\alpha} T_2(X, X) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

Man hat also eine exakte Folge

$$0 \to TX \xrightarrow{i} t\mathfrak{T}X \xrightarrow{p} T_2(X, X) \to 0$$

mit Grad $i = 1$, Grad $p = -2$. Daraus ergibt sich die exakte Homologiefolge

$$\cdots \xrightarrow{p_*} H_qT_2(X, X) \xrightarrow{\partial_*} H_qTX \xrightarrow{i_*} H_{q+1}\mathfrak{T}X \xrightarrow{p_*} H_{q-1}T_2(X, X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}TX \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Nach 6. 4 kann man $H_{q+1}\mathfrak{T}X$ durch $H_{q+1}TSX$ ersetzen, und i_* geht dabei in σ über. Aus p_* entsteht ein Morphismus

$$H_{q+1}TSX \to H_{q-1}T_2(X, X),$$

den wir mit $\bar{\beta}$ bezeichnen. Es bleibt der verbindende Morphimus ∂_* zu bestimmen. Bezeichne Z die Zyklen von $T_2(X, X)$ (d.h. $Z = \text{Kern } \partial''$) und $j : Z \to \mathfrak{T}X$ die Injektion. Dann ist pj die Injektion $Z \subset T_2(X, X)$. Nach seiner Definition ([4], I, 5. 3; II, 1. 2) wird ∂_* durch ∂j induziert, wobei $\partial = \partial' \pm \partial''$ der totale Randoperator von $\mathfrak{T}X$ ist (8). Nun ist aber $\partial'' j = 0$, also $\partial j = \partial' j = -\alpha j$, und der induzierte Morphismus ist $-\alpha_*$. Ersetzt man ihn durch α_*, so wird an der Exaktheit offenbar nichts geändert.

Im Falle eines beliebigen Funktors T tritt an die Stelle der exakten Folge von 6. 6 die erste spektrale Folge des Doppelkomplexes $\mathfrak{T}X$ ([7] XV, 6). Sie gehört zu der Filterung $F_p\mathfrak{T}X$, die durch

$$(F_p\mathfrak{T}X)_{n,*} = \begin{cases} (\mathfrak{T}X)_{n,*}, & n \leq p \\ 0, & n > p \end{cases}$$

definiert ist. Wegen $(\mathfrak{T}X)_{p,q} = 0$ für $p < 1$ oder $q < 0$ ist die Filterung regulär und die spektrale Folge konvergent. Ersetzt man nach 6. 4 $H\mathfrak{T}X$ durch HTSX, so ergibt sich

6. 7. Korollar. — *Es gibt eine konvergente spektrale Folge* E^r, so daß folgendes gilt:

a) $E^1_{*,q}$ *zusammen mit dem Randoperator* d^1 *ist der Komplex*

$$H_qTX \xleftarrow{\alpha_*} H_qT_2(X, X) \xleftarrow{\partial'_*} H_qT_3(X, X, X) \xleftarrow{\partial'_*} \cdots$$

b) E^∞ *ist das bigraduierte Objekt, das mit einer gewissen Filterung von* HTSX *assoziiert ist.*

c) *Der « Kantenmorphismus »* (*edge morphism*)

$$H_qTX = E^1_{1,q} \to H_{q+1}TSX$$

ist die Einhängung σ.

6. 8. Für quadratisches T entartet die spektrale Folge zu der exakten Folge von 6. 6, weil $E^1_{p,q} = H_qT_p(X, \ldots, X) = 0$ ist außer für $p = 1$ oder 2. Bei beliebigem T gilt etwas Entsprechendes, sofern X in den niedrigen Dimensionen « trivial » ist und man q in geeigneter Weise auf kleine Werte beschränkt. Wir sagen « *X ist trivial unterhalb n* », wenn es ein s.s. Objekt

(8) Die Konstruktion von ∂_* ist hier deswegen besonders einfach, weil die betrachtete exakte Folge von Kettenkomplexen als Folge von graduierten Objekten zerfällt.

X' vom gleichen Homotopietyp wie X gibt mit $X'_q = 0$ für $q < n$. Der folgende Hilfssatz gibt eine hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft.

6. 9. Hilfssatz. — *Ist* X_q *projektiv und* $H_q X = 0$ *für alle* $q < n$, *so ist* X *trivial unterhalb* n.

Beweis. — Voraussetzung und Behauptung des Hilfssatzes sind mit den entsprechenden Aussagen über den normalen Komplex NX äquivalent (§ 3). Es genügt daher, den Hilfssatz für einen positiven Kettenkomplex A zu beweisen. Sei also A_q projektiv und $H_q A = 0$ für $q < n$. Wir definieren den Unterkomplex A' durch

$$A'_q = \begin{cases} 0, & q < n, \\ \text{Kern } \partial, & q = n, \\ A_q, & q > n. \end{cases}$$

Der Hilfssatz ist bewiesen, wenn wir $A' \simeq A$ gezeigt haben. Dazu betrachten wir den Quotienten $A'' = A/A'$, der durch die Folge

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{\partial} A_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} A_{n-1} \leftarrow A_n/\text{Kern } \partial \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

gegeben ist. Wegen der Voraussetzung $H_q A = 0$ für $q < n$ ist sie exakt. Weil alle ihre Glieder mit möglicher Ausnahme des letzten projektiv sind, ist auch das letzte projektiv. Das folgt z.B. aus [7] VI, 2. 1. Ein direkter Beweis besteht darin, daß man die Folge in kurze exakte Folgen

$$\begin{array}{l} 0 \to K_1 \to A_1 \to A_0 \to 0 \\ 0 \to K_2 \to A_2 \to K_1 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \to K_{n-1} \to A_{n-1} \to K_{n-2} \to 0 \\ 0 \to A_n/\text{Kern } \partial \to K_{n-1} \to 0 \end{array}$$

zerlegt und für $q = 1, \ldots, n-1$ der Reihe nach schließt, daß die q-te Folge zerfällt und K_q projektiv ist.

A'' kann man demnach als projektive Auflösung von 0 auffassen Nach dem fundamentalen Lemma über projektive Auflösungen folgt $A'' \simeq 0$. Als Folge von graduierten Objekten zerfällt

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0.$$

Daraus folgt die Behauptung $A' \simeq A$ nach [10] 2. 18 c).

6. 10. Hilfssatz. — *Sei* T *ein Funktor von* l *Variablen (zwischen abelschen Kategorien), der den Wert* 0 *hat, wenn eines der Argumente verschwindet. Sind dann die s.s. Objekte* X^j *trivial unterhalb* n_j, $j = 1, \ldots, l$, *so ist* $T(X^1, \ldots, X^l)$ *trivial unterhalb* $n = n_1 + \cdots + n_l$. *Insbesondere ist* $H_q T(X^1, \ldots, X^l) = 0$ *für* $q < n$.

Beweis. — Weil T Homotopien erhält (1. 15, 1. 18), kommt es nur auf den Homotopietyp der X^j an, und wir können von vornherein $X^j_q = 0$ für $q < n_j$ voraussetzen. $T(X^1, \ldots, X^l)$ ist das Diagonalobjekt des l-fachen s.s. Objekts $\hat{T}(X^1, \ldots, X^l)$ (2. 10; was dort für $l = 2$ ausgeführt ist, überträgt sich ohne Schwierigkeiten auf beliebiges l). Nach dem Satz von Eilenberg-Zilber-Cartier (2. 9, 2. 16) ist der Kettenkomplex $kT(X^1, \ldots, X^l)$ mit dem totalen Komplex $t\hat{T}(X^1, \ldots, X^l)$ homotopieäquivalent. Unter Benutzung von § 3 folgt

$$T(X^1, \ldots, X^l) \cong KNT(X^1, \ldots, X^l) \simeq KkT(X^1, \ldots, X^l) \simeq Kt\hat{T}(X^1, \ldots, X^l).$$

(s. der Reihe nach 3. 6, 3. 22, 3. 31 (b)). Andererseits ist

$$(t\hat{T}(X^1, \ldots, X^l))_q = \bigoplus_{q_1 + \cdots + q_l = q} T(X^1_{q_1}, \ldots, X^l_{q_l}) = 0$$

für $q < n$, und das bleibt bei der Anwendung des Funktors K erhalten.

Nun ergeben sich aus 6. 4 weitere Folgerungen:

6. 11. Korollar. — *Sei* X *trivial unterhalb* n *und* $q \leqslant 3n$, *Dann gibt es einen Morphismus* $\bar{\beta}$, *so daß die Folge*

$$H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q TX \xrightarrow{\sigma} H_{q+1} TSX \xrightarrow{\bar{\beta}} H_{q-1} T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1} TX.$$

exakt ist.

Später werden wir zeigen, daß es (für $q \leq 3n$) einen Isomorphismus $H_{q-1} T_2(X, X) \cong H_{q+1} T_2(SX, SX)$ gibt, durch den $\bar{\beta}$ in $\beta_* : H_{q+1} TSX \to H_{q+1} T_2(SX, SX)$ übergeht (7. 14). In dem betrachteten Dimensionsbereich $q \leq 3n$ haben wir also eine Verschärfung von 5. 25.

6. 12. Korollar. — *Ist* X *trivial unterhalb* n, *so ist*

$$\sigma : H_q TX \to H_{q+1} TSX$$

ein Isomorphismus für $q < 2n$ und ein Epimorphismus für $q = 2n$.

6. 12. folgt unmittelbar aus 6. 11, wenn man beachtet, daß $T_2(X, X)$ unterhalb $2n$ trivial ist (6. 10).

6. 11. ergibt sich aus der spektralen Folge von 6. 7 nach einem bekannten Verfahren ([26] I, 4), weil

$$E^1_{p,\, m-p} = H_{m-p} T_p(X, \ldots, X) = 0$$

ist für $m < 3n + 3$ und $p \neq 1, 2$ (6. 10). Wir führen einen etwas anderen Schluß durch, weil wir ihn später zur Untersuchung von $\overline{\beta}$ ohnehin brauchen. Dazu wird zunächst $F_2\mathfrak{T}X$, d.h. der Doppelkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow TX \xleftarrow{\alpha} T_2(X, X) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

betrachtet. Wie beim Beweis von 6. 6 ergibt sich eine exakte Folge

$$(6.\ 13) \quad H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q TX \xrightarrow{i_*} H_{q+1} F_2 \mathfrak{T} X \xrightarrow{p_*} H_{q-1} T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1} TX$$

(ohne Beschränkung für q). Andererseits haben wir eine exakte Folge

$$(6.\ 14) \qquad 0 \to F_2\mathfrak{T}X \xrightarrow{j} \mathfrak{T}X \to W \to 0,$$

wobei W der Doppelkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow T_3(X, X, X) \leftarrow T_4(X, X, X, X) \leftarrow \cdots$$

ist. Bezeichnet H' die Homologie bezüglich des ersten und H'' die bezüglich des zweiten Randoperators, so ist nach 6. 10

$$H''_{p,q} W = \begin{cases} 0 & \text{für } p < 3 \\ H_q T_p(X, \ldots, X) = 0 & \text{für } p \geq 3, \qquad q < 3n, \end{cases}$$

also auch $H'_{p,q} H'' W = 0$ für $p < 3$ oder $q < 3n$. Nach einem bekannten Satz über (positive) Doppelkomplexe ([7] XV, 6) folgt für die totale Homologie $H_m W = 0$ für $m < 3n + 3$. Aus der zu (6. 14) gehörigen exakten Homologiefolge erhält man $j_* : H_m F_2 \mathfrak{T} X \cong H_m \mathfrak{T} X$ für $m \leq 3n + 1$. Für $q \leq 3n$ kann man also $H_{q+1} F_2 \mathfrak{T} X$ in (6. 13) durch $H_{q+1} \mathfrak{T} X$ und dieses vermöge 6. 4 durch $H_{q+1} TSX$ ersetzen.

6. 15. Für spätere Zwecke merken wir an, daß $\bar{\beta}$ sowohl in 6. 6 als auch in 6. 11 die Zusammensetzung

$$H_{q+1}TSX \xrightarrow{\omega^{-1}} H_{q+1}\mathfrak{T}X \xrightarrow{j_*^{-1}} H_{q+1}F_2\mathfrak{T}X \xrightarrow{p_*} H_{q-1}T_2(X, X)$$

ist. ω ist der Isomorphismus von 6. 4. Im Fall von 6. 6 reduziert sich j_* auf die Identität.

6. 16. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen und $TA = \bar{Z}A \otimes G$ wie in 5. 13. Ersetzt man nach 7. 14 $\bar{\beta}$ durch β_* und benutzt man die Interpretationen von σ, α_* und β_* in 5. 13, 5. 26, so erhält man aus 6. 11 die exakte Folge

$$\begin{aligned} &H_{3n}(X \times X, X \vee X; G) \xrightarrow{\alpha_*} H_{3n}(X, 0; G) \xrightarrow{\sigma} H_{3n+1}(SX, 0; G) \\ &\xrightarrow{\beta_*} H_{3n+1}(SX \times SX, SX \vee SX; G) = H_{3n-1}(X \times X, X \vee X; G) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\alpha_*} H_{3n-1}(X, 0; G) \xrightarrow{\sigma} \cdots \end{aligned}$$

Sie stimmt überein mit der exakten Folge von G. W. Whitehead [31] (für den ersten Schritt s. Barcus-Meyer [2]), angewandt auf $B = |SX|$. Daß die Homomorphismen σ, α_* und β_* dieselben sind wie in [31] wurde in 5. 13, 5. 26 gezeigt. Auf die entsprechende Frage für die Identifizierung von

$$H_{q+1}(SX \times SX, SX \vee SX; G)$$

mit $H_{q-1}(X \times X; X \vee X; G)$ gehen wir allerdings nicht ein.

Beweis von 6. 4.

6. 17. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Sei V ein s.s. Doppelobjekt (2. 2). Es sind also zwei Arten von Seiten und Ausartungsoperatoren definiert

$$\begin{aligned} \partial_i' &= V_{\varepsilon^i, \iota}, & s_i' &= V_{\eta^i, \iota} \\ \partial_i'' &= V_{\iota, \varepsilon^i}, & s_i'' &= V_{\iota, \eta^i} \end{aligned}$$

(vgl. 1. 2, ι = Identität), die miteinander vertauschbar sind. Bezüglich jeder der beiden s.s. Strukturen kann man normalisieren. Wir führen es für die erste durch : Der ausgeartete Teil ist

$$D'V = \bigcup_i \text{Bild } s_i' \qquad (3. 19)$$

un der normale

$$N'V = \bigcap_{i>0} \text{Kern } \partial'_i \qquad (3.\ 1)$$

Beides sind bigraduierte Objekte. Bezüglich der ersten Graduierung sind es Kettenkomplexe. Der Randoperator wird durch den ersten Randoperator von V induziert. Bezüglich der zweiten Graduierung sind es sogar s.s. Objekte. Die s.s. Operatoren werden durch die zweite s.s. Struktur von V induziert. Sie sind mit dem (ersten) Randoperator vertauschbar. Insbesondere könne D'V und N'V als Doppelkomplexe aufgefaßt werden. Es gilt

$$(6.\ 18) \qquad V = N'V \oplus D'V$$

(als « gemischte Doppelobjekte » und folglich auch als Doppelkomplexe). Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß man V als (einfaches)s.s. Objekt V' über der (abelschen) Kategorie der s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ auffassen kann, indem man $V'_p = V_{p,*}$, $V'_\alpha = V_{\alpha,\iota}$ setzt (α monotone Abbildung, ι = Identität). (3. 20) angewandt auf V', liefert dann die Behauptung.

Ist s' eine Nullhomotopie des Kettenkomplexes $DV' = D'V$ (3. 22), so ist $\partial' s' + s'\partial' = \iota$, und s' ist mit allen s.s. Operatoren der zweiten s.s. Struktur von D'V vertauschbar. Insbesondere ist es mit dem zweiten Randoperator ∂'' vertauschbar. Für den totalen Randoperator $\partial = \partial' + (-1)^p \partial''$ (auf $(D'V)_{p,*}$) gilt dann ebenfalls $\partial s' + s'\partial = \iota$, d.h. s' ist eine Nullhomotopie des totalen Komplexes $tD'V$. Es folgt:

6. 19. *Injektion und Projektion* $N'V \rightleftarrows V$ *von* (6. 18) *sind als Morphismen der totalen Komplexe zueinander homotopieinvers.*

6. 20. Sei nun X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$ und G ein s.s. Objekt über der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen. Dann ist $T(G \widehat{\otimes} X)$ ein s.s. Doppelobjekt über $\mathfrak{A}'$ mit

$$T(G \widehat{\otimes} X)_{p,q} = T(G_p \otimes X_q)$$

(und entsprechend für monotone Abbildungen 2. 10, 3. 32). Sein Diagonalobjekt ist $dT(G \widehat{\otimes} X) = Td(G \widehat{\otimes} X) = T(G \otimes X)$. Sei $f: T(G \otimes X) \to tT(G \widehat{\otimes} X)$ die Alexander-Whitneysche Homotopieäquivalenz (2. 15) und $\rho: T(G \widehat{\otimes} X) \to N'T(G \widehat{\otimes} X)$ die natürliche Projektion (6. 18).

Wir erinnern an die exakte Folge

$$0 \to Q \xrightarrow{\varkappa} C \xrightarrow{\pi} S \to 0$$

von s.s. abelschen Gruppen (5. 30), mit der am Schluß von § 5 eine zweite Definition der Einhängung gegeben wurde. Sie liefert uns das kommutative Diagramm

$$(6.\ 21)\qquad \begin{array}{ccccc} H_qTX & = & H_qT(Q\otimes X) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_qN'T(Q\hat{\otimes} X) \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle\hat{\sigma}} \\ H_{q+1}TSX & \xrightarrow{(T\psi)_*} & H_{q+1}T(S\otimes X) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_{q+1}N'T(S\hat{\otimes} X) \end{array}$$

Das linke Quadrat stimmt mit dem Diagramm in 5. 34 überein (man beachte $Q \otimes X = X$, 5. 31), das rechte ergibt sich aus

$$\begin{array}{ccccc} T(Q\otimes X) & \xrightarrow{T(\varkappa\otimes\iota)} & T(C\otimes X) & \xrightarrow{T(\pi\otimes\iota)} & T(S\otimes X) \\ \downarrow{\scriptstyle\rho f} & & \downarrow{\scriptstyle\rho f} & & \downarrow{\scriptstyle\rho f} \\ tN'T(Q\hat{\otimes} X) & \xrightarrow{N'T(\varkappa\hat{\otimes}\iota)} & tN'T(C\hat{\otimes} X) & \xrightarrow{N'T(\pi\hat{\otimes}\iota)} & tN'T(S\hat{\otimes} X) \end{array}$$

durch Anwendung von 5. 7. Es ist also $\hat{\sigma} = (N'T(\pi\hat{\otimes}\iota), N'T(\varkappa\hat{\otimes}\iota))_*$ (5. 6). Alle horizontalen Pfeile in (6. 21) bezeichnen Isomorphismen. Wir werden nun zeigen:

6. 22. *Es ist*

$$N'T(Q\hat{\otimes} X)_{p,*} = \begin{cases} TX, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0, \end{cases}$$

folglich $tN'T(Q\hat{\otimes} X) = TX$, *und* $\rho f\colon T(Q\otimes X) \to tN'T(Q\hat{\otimes} X)$ *ist die Identität.*

6. 23. $N'T(S\hat{\otimes} X)$ *ist als Doppelkomplex mit der Bar-Konstruktion* $\mathfrak{T}X$ *in natürlicher Weise isomorph.*

6. 24. *Durch den Isomorphismus von* 6. 23 *geht* $\hat{\sigma}$ *in*

$$i_*\colon H_qTX \to H_{q+1}\mathfrak{T}X$$

über.

Dann liest man aus (6. 21) unmittelbar die Behauptung von 6. 4 ab. Der Isomorphismus ω ist die Zusammensetzung

$$\omega\colon H\mathfrak{T}X \cong HN'T(S\hat{\otimes} X) \xrightarrow{(\rho f)_*^{-1}} HT(S\otimes X) \xrightarrow{(T\psi)_*} HTSX.$$

Beweis von 6. 22. — Nach Definition von Q (5. 31) ist $T(Q\hat{\otimes} X)_{p,*} = TX$, und die s.s. Operatoren ∂_i', s_i' der ersten s.s. Struktur sind Identitäten. Daraus folgt die erste Behauptung.

In $\rho f : T(Q \otimes X)_m \to (tN'T(Q \hat{\otimes} X))_m = (N'T(Q \hat{\otimes} X))_{0,m}$ liefert offenbar nur die Komponente $\rho f_{0,m}$ einen Beitrag. Nach Definition (2. 15) ist aber $f_{0,m} = \partial_1' \partial_2' \dots \partial_m'$ die Identität, womit auch die zweite Behauptung bewiesen ist.

Beweis von 6. 23. — Nach Definition von S (5. 29) bilden die Elemente γ_k^p, $k = 1, \dots, p$, eine Basis von S_p. Daraus folgt $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} = T(S_p \otimes X) = T(\bigoplus_{k=1}^p \gamma_k^p \times X)$, wobei $\gamma_k^p \times X = X$ ist und nur zur Kennzeichnung seiner Stellung so geschrieben wird. Unter Benutzung der Mischeffekte (4. 18) folgt weiter

$$T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} = \bigoplus_\tau T_r(\gamma_{\tau_1}^p \times X, \dots, \gamma_{\tau_r}^p \times X),$$

wobei $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$, $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_r$, alle nicht-leeren Teilmengen von $\{1, \dots, p\}$ durchläuft. Die Seiten- und Ausartungsoperatoren ∂_i', s_i' der ersten s.s. Struktur von $T(S \hat{\otimes} X)$ liest man aus (5. 28) ab. Insbesondere erkennt man

$$\begin{aligned} \text{Bild } (s_{i-1}' : T(S \hat{\otimes} X)_{p-1,*} &\to T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}) \\ &= \bigoplus_{\tau \not\ni i} T_r(\gamma_{\tau_1}^p \times T, \dots, \gamma_{\tau_r}^p \times X) \end{aligned}$$

(vgl. 4. 20), folglich

$$D'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} = \bigoplus_{\tau \neq \{1, \dots, p\}} T_r(\gamma_{\tau_1}^p \times X, \dots, \gamma_{\tau_r}^p \times X).$$

Dieser Teil von $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ hat also einerseits $N'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ (6. 18), andererseits $T_p(\gamma_1^p \times X, \dots, \gamma_p^p \times X) = T_p(X, \dots, X) = (\mathfrak{T}X)_{p,*}$ als direktes Komplement. Die beiden Komplemente brauchen als *Teile* von $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ nicht gleich zu sein, aber es gibt einen Isomorphismus zwischen ihnen, so daß die *Projektionen* $\rho : T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} \to N'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ und

$$\rho : T(\bigoplus^p X) \to T_p(X, \dots, X)$$

(6. 1) einander entsprechen.

Identifizieren wir durch diesen Isomorphismus $N'T(S \hat{\otimes} X)$ mit $\mathfrak{T}X$, so bleibt zu zeigen, daß der erste Randoperator ∂' von $N'T(S \hat{\otimes} X)$ gerade der in 6. 3 für $\mathfrak{T}X$ definierte ist. In $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ ist $\partial' = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_i'$ mit $\partial_i' = T(\partial_i \otimes \iota)$. Bezeichnet $\lambda : T_p(X, \dots, X) \to T(\bigoplus^p X)$ wie in 6. 1 die natürliche Injektion, so ist $\rho\lambda = \iota$. $\rho : T(S \hat{\otimes} X) \to N'T(S \hat{\otimes} X)$ ist ein Kettenmorphismus von Doppelkomplexen, also insbesondere mit ∂' vertauschbar. In $N'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ gilt demnach

$$\partial' = \partial'\rho\lambda = \rho\partial'\lambda = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \rho\partial_i'\lambda.$$

Aus (5. 28) entnimmt man, daß $\partial_i \otimes \iota : \bigoplus^p X \to \bigoplus^{p-1} X$ für $i = 1, \ldots, p-1$ mit α_i' von 6. 1 übereinstimmt. $\partial_0 \otimes \iota$ ist die Projektion auf die letzten und $\partial p \otimes \iota$ die Projektion auf die ersten $p-1$ Summanden. Daraus folgt

$$\rho\partial_i'\lambda = \begin{cases} \alpha_i, & i = 1, \ldots, p-1 \\ 0, & i = 0, p \end{cases}$$

(6. 2) und weiter $\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i$. So wurde aber gerade der erste Randoperator in $\mathfrak{T}X$ definiert (6. 3).

Beweis von 6. 24. — Um den Morphismus $\hat{\sigma}$ in (6. 21) zu bestimmen, müssen wir eine Nullhomotopie von $tN'T(C \hat{\otimes} X)$ angeben (5. 6). Nach Definition von C (5. 29) bilden die Elemente γ_k^p, $k = 0, \ldots, p$, eine Basis von C_p. Wir definieren $s : C_p \to C_{p+1}$ durch

$$s\gamma_k^p = \gamma_{k+1}^{p+1}, \qquad k = 0, \ldots, p.$$

Dann gilt in C_p, wie man mit Hilfe von (5. 28) leicht nachprüft,

$$\begin{aligned} &\partial_0 s = \iota \\ &\partial_1 s = 0, && p = 0 \\ &\partial_{i+1} s = s\partial_i, && p > 0,\ i = 0, \ldots, p \\ &s_{i+1} s = s s_i, && i = 0, \ldots, p. \end{aligned} \tag{6. 25}$$

Für den Randoperator $\partial = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_i$ folgt daraus $\partial s + s\partial = \iota$, d.h. s ist eine Nullhomotopie des Kettenkomplexes C [9].

Setzt man $s' = T(s \otimes \iota) : T(C \hat{\otimes} X)_{p,*} \to T(C \hat{\otimes} X)_{p+1,*}$, so bestehen zwischen s' und den ersten s.s. Operatoren $\partial_i' = T(\partial_i \otimes \iota)$, $s_i' = T(s_i \otimes \iota)$ von $T(C \hat{\otimes} X)$ ebenfalls die Relationen (6. 25), während s' mit jedem der zweiten s.s. Operatoren $\partial_i'' = T(\iota \otimes \partial_i)$, $s_i'' = T(\iota \otimes s_i)$ vertauschbar ist. Daraus folgt für die Randopera-

[9] In gewissem Sinne ist s eine s.s. Nullhomotopie des s.s. Objekts C. Wir gehen darauf aber nicht näher ein.

toren $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}' + (-1)^p\mathfrak{d}''$ (auf $T(C \hat{\otimes} X)_{p,*}$) : $\mathfrak{d}'s' + s'\mathfrak{d}' = \iota$, $\mathfrak{d}''s' = s'\mathfrak{d}''$ und schließlich $\mathfrak{d}s' + s'\mathfrak{d} = \iota$. s' ist also eine Nullhomotopie von $t\mathrm{T}(C \hat{\otimes} X)$. Aus der letzten Zeile von (6. 25) folgt

$$s'\mathrm{D}'\mathrm{T}(C \hat{\otimes} X) \subset \mathrm{D}'\mathrm{T}(C \hat{\otimes} X),$$

d.h. s' induziert eine Nullhomotopie $\mathrm{N}'s'$ von

$$t\mathrm{N}'(C \hat{\otimes} X) = t\mathrm{T}(C \hat{\otimes} X)/t\mathrm{D}'\mathrm{T}(C \hat{\otimes} X) \quad (3.\ 21).$$

Nach Definition (5. 6) wird $\hat{\sigma} = (\mathrm{N}'\mathrm{T}(\pi \hat{\otimes} \iota),\ \mathrm{N}'\mathrm{T}(\varkappa \hat{\otimes} \iota))_*$ durch den Kettenmorphismus

$$\mathrm{N}'\mathrm{T}(\pi \hat{\otimes} \iota) \circ \mathrm{N}'s' \circ \mathrm{N}'\mathrm{T}(\varkappa \hat{\otimes} \iota) = \mathrm{N}'\mathrm{T}(\pi s \varkappa \otimes \iota)\ (^{10}).$$

(vom Grade 1) induziert. Q_p wird von γ^p erzeugt (5. 29). Nach Definition von $\varkappa$, π (5. 30) und s ist $\pi s \varkappa \gamma^p = \pi s \gamma_0^p = \gamma_1^{p+1} \in S_{p+1}$. Folglich wird $t\mathrm{N}'\mathrm{T}(Q \hat{\otimes} X) = (\mathrm{N}'\mathrm{T}(Q \hat{\otimes} X))_{0,*} = \mathrm{T}(\gamma^0 \times X) = \mathrm{TX}$ durch $\mathrm{N}'\mathrm{T}(\pi s \varkappa \otimes \iota)$ identisch in $(\mathrm{N}'\mathrm{T}(S \hat{\otimes} X))_{1,*} = \mathrm{T}(\gamma_1^1 \times X) = \mathrm{TX}$ abgebildet. Damit ist 6. 24 bewiesen.

VERGLEICH MIT DER BAR CONSTRUCTION VON EILENBERG-MAC LANE [12]

6. 26. Sei jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen, und T sei entweder der Funktor « Gruppenring » oder « Symmetrische Algebra », d. h. $\mathrm{TA} = \mathbf{Z}\mathrm{A}$ oder

$$\mathrm{TA} = \mathbf{Z} \oplus \mathrm{A} \oplus \mathrm{SP}^2\mathrm{A} \oplus \mathrm{SP}^3\mathrm{A} \oplus \cdots$$

(vgl. [8], ch. v, 18; [9], 10) für $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$. In beiden Fällen ist TA ein Ring. Wir haben bestimmte Ringhomomorphismen $\varepsilon : \mathbf{Z} \to \mathrm{TA}$ und $\eta : \mathrm{TA} \to \mathbf{Z}$ (Ergänzung), so daß $\eta\varepsilon$ die Identität ist. Im Fall der symmetrischen Algebra handelt es sich dabei um die natürliche Injektion des Summanden $\mathbf{Z}$ bzw. die Projektion auf diesen Summanden. Im Fall des Gruppenrings ist $\varepsilon(n) = ne$ ($n \in \mathbf{Z}$, $e =$ neutrales Element von A) und $\eta(a) = 1$ für jedes $a \in \mathrm{A}$. Durch ε und η wird eine Zerlegung $\mathrm{TA} = \mathbf{Z} \oplus \mathrm{T}^0\mathrm{A}$ festgelegt mit $\mathrm{T}^0\mathrm{A} = \mathrm{Kern}\,\eta$. $\mathrm{T}^0\mathrm{A}$ ist ein

(^{10}) Man beachte, daß N′V dabei als Quotient nicht als Teil von V aufgefaßt wird. Für $\mathrm{N}'\mathrm{T}(\pi \hat{\otimes} \iota)$ und $\mathrm{N}'\mathrm{T}\ (\varkappa \hat{\otimes} \iota)$ macht das keinen Unterschied, wohl aber für $\mathrm{N}'s'$, da wir nicht wissen, ob $s'\mathrm{N}'\mathrm{T}'(C \hat{\otimes} X) \subset \mathrm{N}'\mathrm{T}(C \hat{\otimes} X)$.

Ideal in TA, insbesondere also selbst ein Ring. T^0 ist ein Funktor mit $T^0(0) = 0$.

Es gilt $TA \otimes TB = T(A \oplus B)$, und der Isomorphismus ergibt sich durch Multiplikation der Injektionen $TA \to T(A \oplus B)$ und $TB \to T(A \oplus B)$. Für den Gruppenring ist das trivial, für die symmetrische Algebra *s.* [9], (10. 8). Nun ist einerseits

$$TA \otimes TB = \mathbf{Z} \oplus T^0A \oplus T^0B \oplus (T^0A \otimes T^0B),$$

andererseits

$$T(A \oplus B) = \mathbf{Z} \oplus T^0(A \oplus B).$$

Daraus folgt für den Mischeffekt (4. 18)

$$T_2^0(A, B) = T^0A \otimes T^0B,$$

und die Injektion hiervon in $T^0(A \oplus B)$ ergibt sich durch Multiplikation der Injektionen

$$T^0A \to T^0(A \oplus B), \qquad T^0B \to T^0(A \oplus B).$$

Die Kodiagonale $\alpha : T_2^0(A, A) \to T^0(A \oplus A) \to T^0A$ (5. 23) stimmt demnach mit der Multiplikation $T^0A \otimes T^0A \to T^0A$ überein. Analog beweist man

$$T_p^0(A_1, \ldots, A_p) = T^0A_1 \otimes \cdots \otimes T^0A_p$$
$$\alpha_i(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes u_i u_{i+1} \otimes u_{i+2} \otimes \cdots \otimes u_p$$

$u_j \in T^0A$, $i = 1, \ldots, p - 1$ (vgl. 6. 2).

6. 27. Sei nun X eine s.s. abelsche Gruppe. Der Doppelkomplex $\mathfrak{T}^0X$ ist durch

$$(\mathfrak{T}^0X)_{p,*} = \bigotimes^p T^0X$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : \bigotimes^p T^0X \to \bigotimes^{p-1} T^0X$$

gegeben. Er unterscheidet sich von der Eilenberg-MacLaneschen Bar-Konstruktion [12] haupsächlich dadurch, daß er aus Tensorprodukten von *s.s. abelschen Gruppen* (= kartesische Produkte von FD-Komplexen im Sinne von [12]) aufgebaut ist, während es sich dort um Tensorprodukte von *Kettenkomplexen* handelt. Wir wollen zeigen, daß das kein wesentlicher Unterschied ist.

Durch die Multiplikation ∇

$$kT^0X \otimes kT^0X \to k(T^0X \otimes T^0X) \xrightarrow{\alpha} kT^0X$$

(∇ = « shuffle »-Abbildung, 2. 15) wird der Kettenkomplex kT^0X zu einem graduierten ∂-Ring gemacht ([12] 6. 1). Durch Übergang zum Quotienten erhält man eine gleichartige Struktur im normalisierten Komplex NT^0X. Wir definieren

$$\alpha_i : \bigotimes^p kT^0X \to \bigotimes^{p-1} kT^0X$$
$$\alpha_i : \bigotimes^p NT^0X \to \bigotimes^{p-1} NT^0X$$

durch

$$\alpha_i(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{i-1} \otimes \varphi_i\varphi_{i+1} \otimes \varphi_{i+2} \otimes \cdots \otimes \varphi_p,$$

$\varphi_j \in kT^0X$ bzw. NT^0X, $i = 1, \ldots, p-1$, unter Benutzung der soeben eingeführten Multiplikationen. Analog zu $\mathfrak{T}^0X$ bilden wir Doppelkomplexe V und $\overline{V}$ mit

$$V_{p,*} = \bigotimes^p kT^0X, \qquad \overline{V}_{p,*} = \bigotimes^p NT^0X$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i \qquad \text{auf} \qquad V_{p,*} \text{ bzw. } \overline{V}_{p,*}.$$

Es bestehen Kettenabbildungen von Doppelkomplexen

$$\nabla : V \to \mathfrak{T}^0X$$
$$\rho : V \to \overline{V}.$$

$\nabla : \bigotimes^p kT^0X \to k\bigotimes^p T^0X$ ist die auf mehrere Faktoren verallgemeinerte « shuffle »-Abbildung, und ρ ist die natürliche Projektion. Offenbar ist ρ mit beiden Randoperatoren und ∇ mit ∂'' vertauschbar. ∇ ist auch mit ∂' vertauschbar, weil es sogar mit jedem α_i vertauschbar ist. Den genauen Nachweis wollen wir jedoch übergehen. Sowohl ∇ als auch ρ induzieren Isomophismen der Homologiegruppen H'' (bezüglich des zweiten Randoperators), folglich auch der totalen Homologiegruppen nach einen bekannten Satz über (positive) Doppelkomplexe ([7], XV, 6). In diesem Sinne ist also $\mathfrak{T}^0X$ mit $\overline{V}$ äquivalent.

Nach Definition (6. 26) ist $T^0X = \text{Kern } (\eta : TX \to Q)$ mit $Q_p = Z$ für alle $p \geq 0$ (5. 31). Es folgt $NT^0X = \text{Kern } (N\eta : NTX \to NQ)$. Andererseits ist

$$(NQ)_p = \begin{cases} Z, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

$N\eta$ ist also eine Ergänzung (augmentation) des graduierten ∂-Rings NTX.

Nun sieht man, daß $\overline{V}$ nichts anderes ist als die modifizierte, normalisierte Bar-Konstruktion (im Sinne von [12] 10, 11) über NTX mit der Ergänzung $N\eta$ (bis auf $\overline{V}_{0,0}$, das bei uns $= 0$, in [12] aber $= \mathbf{Z}$ ist).

7. — DIE BAR-KONSTRUKTION FÜR MEHRERE VARIABLE. DER MORPHISMUS $\bar{\beta}$

Die Bar-Konstruktion von § 6 läßt sich auf Funktoren von mehreren Variablen verallgemeinern. Wie das für die totale Einhängung (5. 14) zu geschehen hat, ist klar, da man den Funktor in diesem Fall als Funktor *einer* Variablen der Produktkategorie auffassen kann. Die Übertragung auf die partielle Einhängung (5. 15) ist ebenfalls naheliegend. Im einzelnen geben wir sie für den Fall eines Funktors T(A, B) von zwei Variablen an. Als Anwendung werden wir den in § 6 angekündigten Zusammenhang zwischen dem Morphismus $\bar{\beta}$ in den exakten Folgen 6. 6, 6. 11 und der Diagonale $\beta : \mathrm{TA} \to \mathrm{T}_2(\mathrm{A}, \mathrm{A})$ (5. 23) erhalten.

7. 1. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ abelsche Kategorien und $\mathrm{T} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}'$ ein kovarianter Funktor, so daß $\mathrm{T}(0, \mathrm{B}) = 0$ für alle $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}$. Dann können wir T(, B) für jedes feste B als Funktor $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ auffassen. Den p-ten Mischeffekt davon, angewandt auf $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p \in \mathfrak{A}$, bezeichnen wir mit $\mathrm{T}^1_p(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p, \mathrm{B})$. Nach (6. 2) haben wir natürliche Transformationen

$$\alpha_i : \mathrm{T}^1_p(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{T}^1_{p-1}(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}, \mathrm{B}), \quad i = 1, \ldots, p-1.$$

Sind nun X, Y, s.s Objekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so definieren wir den Doppelkomplex $\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ durch

$$\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{p,*} = \mathrm{T}^1_p(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : \mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{p,*} \to \mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{p-1,*}.$$

Die Injektion $i^1 : \mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{T}^1_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \subset t\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ist ein Kettenmorphismus vom Grade 1. Wir nennen $\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ die partielle Bar-Konstruktion bezüglich der ersten Variablen.

7. 2. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $\omega^1 : H\mathfrak{T}^1(X, Y) \cong HT(SX, Y)$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H_{q+1}T(SX, Y) \\ H_qT(X, Y) \arrow[ur, "\sigma^1"] \arrow[dr, "i^1_*"'] & \\ & H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y) \arrow[uu, "\omega^1"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Der Beweis verläuft in völliger Analogie zu dem von 6. 4 und wird in 7. 15 skizziert. Aus dem Satz ergeben sich entsprechende Korollare wie in § 6 aus 6. 4. Wir begnügen uns hier mit der Formulierung von

7. 3. Korollar. — *Ist* T(A, B) *additiv in der ersten Variablen , so ist der Einhängungsmorphismus* σ^1 *ein Isomorphismus.*

7. 4. Korollar. — *Sei* $T(A, 0) = 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$ (*zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen*). *Sind dann* X *und* Y *trivial unterhalb* n *bzw.* m (6. 8), *so ist* $\sigma^1 : H_qT(X, Y) \to H_{q+1}T(SX, Y)$ *ein Isomorphismus für* $q < 2n + m$ *und ein Epimorphismus für* $q = 2n + m$.

7. 3. folgt aus der Tatsache, daß $i^1 : T(X, Y) \to t\mathfrak{T}^1(X, Y)$ für additives T ein Isomorphismus (vom Grade 1) ist.

Zum Beweis von 7. 4 fassen wir $T(X, Y) = \mathfrak{T}^1(X, Y)_{1,*}$ als Unterdoppelkomplex von $\mathfrak{T}^1(X, Y)$ auf. Der Quotient W ist dann durch

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow T^1_2(X, X, Y) \leftarrow T^1_3(X, X, X, Y) \leftarrow \cdots$$

gegeben. Bezeichnet H′ die Homologie bezüglich des ersten und H″ die bezüglich des zweiten Randoperators, so ist nach 6. 10

$$H''_{p,q}W = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad p < 2 \\ H_qT^1_p(X, \ldots, X, Y) = 0 & \text{für} \quad p \geq 2, \quad q < 2n + m, \end{cases}$$

also auch $H'_{p,q}H''W = 0$ für $p < 2$ oder $q < 2n + m$. Nach einem bekannten Satz über (positive) Doppelkomplexe ([7] XV, 6) folgt für die totale Homologie $H_rW = 0$ für $r < 2n + m + 2$. Aus der exakten Homologiefolge

$$H_{q+2}W \to H_qT(X, Y) \xrightarrow{i^1_*} H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y) \to H_{q+1}W,$$

in der man i_*^1 nach 7. 2 durch σ^1 ersetzen kann, ergibt sich nun die Behauptung.

7. 5. Von jetzt an setzen wir immer $T(A, 0) = T(0, B) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ voraus. Dann existiert neben σ^1 auch die partielle Einhängung $\sigma^2 : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(X, SY)$ bezüglich der zweiten Variablen. Wir definieren $T_p^2(A, B_1, \ldots, B_p)$ als den p-ten Mischeffekt des Funktors $T(A, \ )$ bei festem $A \in \mathfrak{A}$ und mit seiner Hilfe die partielle Bar-Konstruktion $\mathfrak{T}^2(X, Y)$ bezüglich der zweiten Variablen analog zu $\mathfrak{T}^1(X, Y)$. Dann besteht analog zu 7. 2 das kommutative Diagramm

$$(7.6) \qquad \begin{tikzcd} & H_{q+1}T(X, SY) \\ H_qT(X, Y) \arrow[ur, "\sigma^2"] \arrow[dr, "i_*^2"'] & \\ & H_{q+1}\mathfrak{T}^2(X, Y) \arrow[uu, "\omega^2"', "\wr\|"] \end{tikzcd}$$

Wir wollen ferner eine Konstruktion einführen, die für die Zusammensetzung

$$H_qT(X, Y) \xrightarrow{\sigma^1} H_{q+1}T(SX, Y) \xrightarrow{\sigma^2} H_{q+2}T(SX, SY)$$

dieselbe Rolle spielt wie die Bar-Konstruktion für die (einfache) Einhängung:

7. 7 Sei $T_{p,q}(A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q)$ der *q-te* Mischeffekt von $T_p^1(A_1, \ldots, A_p, \ )$ oder, was dasselbe ist ([13], 9. 8), de p-te Mischeffekt von $T_q^2(\ , B_1, \ldots, B_q)$. In beiden Fällen können wir die Konstruktion von 6. 1 anwenden und erhalten natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \alpha_i^1 &: T_{p,q}(A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_q) \\ &\qquad \to T_{p-1,q}(A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_q), \quad i = 1, \ldots, p-1, \\ \alpha_i^2 &: T_{p,q}(A_1, \ldots, A_p, B, \ldots, B) \\ &\qquad \to T_{p,q-1}(A_1, \ldots, A_p, B, \ldots, B), \quad i = 1, \ldots, q-1. \end{aligned}$$

Sind X und Y s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so definieren wir den *Tripelkomplex* $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,q,*} &= T_{p,q}(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y), \\ \partial' &= \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i^1 : \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,*,*} \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p-1,*,*}, \\ \partial'' &= \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i \alpha_i^2 : \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{*,q,*} \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{*,q-1,*}. \end{aligned}$$

Offenbar ist $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{1,*,*} = \mathfrak{T}^2(X, Y)$ und $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{*,1,*} = \mathfrak{T}^1(X, Y)$. Die Injektion

$$j^2 : \mathfrak{T}^2(X, Y) \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$$

ist ein Kettenmorphismus der totalen Komplexe vom Grade 1, nicht so dagegen die Injektion

$$j^1 : \mathfrak{T}^1(X, Y) \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y).$$

Um einen Kettenmorphismus

$$'j^1 : t\mathfrak{T}^1(X, Y) \to t\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$$

vom Grade 1 zu erhalten, setzen wir $'j^1 = (-1)^p j^1$ auf $\mathfrak{T}^1(X, Y)_{p,*}$.

7. 8. SATZ. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $\tilde{\omega}$: $H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}T(SX, Y) & \xrightarrow{\sigma^2} & H_{q+2}T(SX, SY) \\ {\scriptstyle\omega^1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\tilde{\omega}} \\ H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y) & \xrightarrow{'j^1_*} & H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \end{array}$$

kommutativ ist. ω^1 *ist dabei der Isomorphismus von* 7. 2.

Für den Beweis s. 7. 20. Vertauscht man die Rollen der beiden Variablen, so erhält man das kommutative Diagramm

$$(7.\ 9)\qquad \begin{array}{ccc} H_{q+1}T(X, SY) & \xrightarrow{\sigma^1} & H_{q+2}T(SX, SY) \\ {\scriptstyle\omega^2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\tilde{\omega}} \\ H_{q+1}\mathfrak{T}^2(X, Y) & \xrightarrow{j^2_*} & H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \end{array}$$

Der Beweis ist dem von 7.8 völlig analog bis auf den Unterschied im Vorzeichen zwischen $'j^1$ und j^2. Wir werden beim Beweis von 7. 8 erklären, wie dieser Unterschied zustande kommt (s. Beweis von 7. 27).

Offenbar ist $j^2 i^2 = j^1 i^1 = -\, 'j^1 i^1$ die Injektion

$$i : T(X, Y) = \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{1,1,*} \subset \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y).$$

Nach den Sätzen 7. 2, 7. 8 und ihren durch Vertauschung der Variablen gewonnenen Analoga (7. 6), (7. 9) sind i^1_*, $'j^1_*$, i^2_*, j^2_* bzw. mit σ^1, σ^2, σ^2, σ^1 äquivalent. Es folgt :

7. 10. KOROLLAR. — *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & H_{q+2}T(SX, SY) \\ H_qT(X, Y) \arrow[ur, "\sigma^1\sigma^2"] \arrow[dr, "i_*"'] & \\ & H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \arrow[uu, "\tilde{\omega}"'] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, und es gilt $\sigma^2\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^2$. $\tilde{\omega}$ *ist der Isomorphismus von* 7. 8.

7. 11. Neben dem Isomorphismus $\tilde{\omega}$ von 7. 8 haben wir $\omega : H\mathfrak{T}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$, wenn wir T als Funktor einer Variablen der Produktkategorie $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ auffassen (6. 4). Es liegt nahe, nach einer direkten Beschreibung von

$$\tilde{\omega}^{-1}\omega : H\mathfrak{T}(X, Y) \to H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$$

zu fragen, und wir werden eine solche Beschreibung für die Untersuchung von $\bar{\beta}$ brauchen (7. 14).

Seien

$$\begin{aligned} &\xi'_p : \textstyle\bigoplus_{i=1}^m A_i \to \bigoplus_{i=1}^p A_i, \\ &\xi''_p : \textstyle\bigoplus_{i=1}^m B_i \to \bigoplus_{i=m-p+1}^m B_i, \qquad p = 0, \ldots, m \end{aligned}$$

die Projektionen auf die ersten bzw. letzten p Summanden. Wir definieren $\xi_{p,m-p}$ als die Zusammensetzung

$$\text{(7. 12)} \quad T_m(A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m) \xrightarrow{\lambda} T(\textstyle\bigoplus_{i=1}^m A_i, \bigoplus_{i=1}^m B_i)$$
$$\xrightarrow{T(\xi'_p, \xi''_{m-p})} T(\textstyle\bigoplus_{i=1}^p A_i, \bigoplus_{i=p+1}^m B_i) \xrightarrow{\tilde{\rho}} T_{p,m-p}(A_1, \ldots, A_p, B_{p+1}, \ldots, B_m).$$

Dabei bezeichnet $T_m(A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m)$ den m-ten Mischeffekt von T, aufgefaßt als Funktor einer Variablen aus $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ([11]). λ ist die natürliche Injektion (6. 1), $\tilde{\rho}$ die Projektion. Schließlich definieren wir

$$\begin{aligned} \xi : \mathfrak{T}(X, Y)_{m,*} &= T_m(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y) \\ &\to \textstyle\bigoplus_{p=1}^{m-1} T_{p,m-p}(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y) = \bigoplus_{p=1}^{m-1} \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,m-p,*} \end{aligned}$$

als den Morphismus mit den Komponenten $\xi_{p,m-p}$.

([11]) Eigentlich müßte man $T_m((A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m))$ schreiben.

7. 13. Hilfssatz. — $\xi : \mathfrak{T}(X, Y) \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ *ist ein Kettenmorphismus der totalen Komplexe, und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} H\mathfrak{T}(X, Y) \arrow[d, "\xi_*"'] \arrow[dr, "\omega"] & \\ H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \arrow[r, "\tilde{\omega}"'] & HT(SX, SY) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Den Beweis geben wir am Schluß des Paragraphen (7. 29).

Wir sind nun in der Lage, den Morphismus $\bar{\beta}$ in den exakten Folgen 6. 6 und 6. 11 näher zu untersuchen, und wollen zeigen :

7. 14. Satz. — *Sei* $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ *ein Funktor zwischen abelschen Kategorien mit* $T(0) = 0$, X *ein s.s. Objekt über* $\mathfrak{A}$ *und*

entweder (*a*) T *quadratisch*
oder (*b*) X *trivial unterhalb* n *und* $q \leq 3n$.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H_{q-1}T_2(X, X) \arrow[d, "\sigma^1\sigma^2"] \\ H_{q+1}TSX \arrow[ur, "\bar{\beta}"] \arrow[r, "\beta_*"'] & H_{q+1}T_2(SX, SX) \end{tikzcd}$$

kommutativ, und $\sigma^1\sigma^2$ *ist ein Isomorphismus.*

$$\beta : TSX \to T_2(SX, SX)$$

ist dabei die Diagonale (5. 23).

Beweis. — Im Fall (*a*) ist $T_2(A, B)$ additiv in jeder der beiden Variablen, und σ^1, σ^2 sind Isomorphismen für alle Dimensionen q nach 7. 3. Im Fall (*b*) ist

$$\sigma^2 : H_{q-1}T_2(X, X) \to H_qT_2(X, SX)$$

ein Isomorphismus für $q \leq 3n$ nach 7.4. Aus demselben Grund ist aber $\sigma^1 : H_qT_2(X, SX) \to H_{q+1}T_2(SX, SX)$ ein Isomorphismus für $q \leq 3n$, denn SX ist trivial unterhalb $n + 1$. (Ist nämlich $X' \simeq X$ und $X'_q = 0$ für $q < n$, so ist $SX' \simeq SX$ und $(SX')_q = 0$ für $q < n + 1$.)

Es ist also nur noch die Kommutativität $\beta_* = \sigma^1\sigma^2\bar{\beta}$ zu beweisen. Es gilt

$$\sigma^1\sigma^2 = \tilde{\omega}i_* \quad \text{nach 7. 10}$$
$$\bar{\beta} = p_*j_*^{-1}\omega^{-1} \quad \text{nach 6. 15.}$$

Die zu beweisende Gleichung ist demnach mit $\tilde{\omega}^{-1}\beta_*\omega j_* = i_* p_*$ äquivalent.

Sei $\varphi : T \to T'$ eine natürliche Tranformation von Funktoren ($T'(0) = 0$). Sie induziert natürliche Transformationen der Mischeffekte $T_p \to T'_p$, die wir ebenfalls mit φ bezeichnen. φ ist dann mit den α_i von (6. 2) vertauschbar und induziert einen Kettenmorphismus von Doppelkomplexen φ: $\mathfrak{T}X \to \mathfrak{T}'X$ für jedes s.s. Objekt X. Aus der Definition von ω im Anschluß an 6. 24 folgt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} HTSX & \xrightarrow{\varphi_*} & HT'SX \\ \omega\uparrow & & \uparrow\omega \\ H\mathfrak{T}X & \xrightarrow{\varphi_*} & H\mathfrak{T}'X \end{array}$$

kommutativ ist. (Auf diese Weise wird die Aussage präzisiert, daß ω in Abhängigkeit von T natürlich ist, vgl. 6. 4). Wenden wir das auf die Diagonale $\beta : T \to T_2^d$ ($T_2^d A = T_2(A, A)$, 5. 23) an, so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} HTSX & \xrightarrow{\beta_*} & HT_2(SX, SX) \\ \omega\uparrow & & \uparrow\omega \\ H\mathfrak{T}X & \xrightarrow{\beta_*} & H\mathfrak{T}_2(X, X). \end{array}$$

Also ist $\tilde{\omega}^{-1}\beta_*\omega j_* = \tilde{\omega}^{-1}\omega\beta_* j_* = \xi_*\beta_* j_*$ nach 7. 13, und zu zeigen bleibt $(\xi\beta j)_* = (ip)_*$.

Wir werden sogar $\xi\beta j = ip : F_2\mathfrak{T}X \to \tilde{\mathfrak{T}}_2(X, X)$ beweisen. Dabei ist $F_2\mathfrak{T}X$ der Doppelkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow TX \xleftarrow{-\alpha} T_2(X, X) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

(vgl. den Beweis von 6. 11). $p : F_2\mathfrak{T}X \to T_2(X, X)$ ist die natürliche Projektion. $j : F_2\mathfrak{T}X \to \mathfrak{T}X$ und $i : T_2(X, X) \to \tilde{T}_2(X, X)$ sind die Injektionen. Die behauptete Gleichung bedeutet: $\xi\beta$ verschwindet auf $(\mathfrak{T}X)_{1,*} = TX$ und bildet $(\mathfrak{T}X)_{2,*} = T_2(X, X)$ identisch in $T_2(X, X) = \tilde{\mathfrak{T}}_2(X, X)_{1,1,*}$ ab. Die erste Behauptung ist aus Gradgründen klar, denn $(\mathfrak{T}X)_{1,*}$ wird durch $\xi\beta$ in $\bigoplus_{p+q=1}\tilde{\mathfrak{T}}_2(X, X)_{p,q,*} = 0$ abgebildet. Um die zweite zu beweisen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T_2(X, X) & \xrightarrow{\beta} & (T_2)_2(X, X, X, X) = \mathfrak{T}_2(X, X)_{2,*} & & \\ \lambda\downarrow & & \downarrow\lambda & & \\ T(X \oplus X) & \xrightarrow{\beta} & T_2(X \oplus X, X \oplus X) & \xrightarrow{T_2(\xi'_1, \xi''_1)} & T_2(X, X). \end{array}$$

Das linke Quadrat entsteht aus

$$\begin{array}{ccc} T_2(X, X) & \xrightarrow{\varphi} & T_2'(X, X) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ T(X \oplus X) & \xrightarrow{\varphi} & T'(X \oplus X) \end{array}$$

wenn man für $\varphi : T \to T'$ speziell $\beta : T \to T_2$ nimmt. Nach Definition (7.12) ist $\xi = \xi_{1,1} = T_2(\xi_1', \xi_1'') \circ \lambda$ auf $\mathfrak{T}_2(X, X)_{2,*}$, folglich $\xi\beta = T_2(\xi_1', \xi_1'') \circ \lambda\beta = T_2(\xi_1', \xi_1'') \circ \beta\lambda$. Man verifiziert nun leicht, daß $T_2(\xi_1', \xi_1'') \circ \beta : T(X \oplus X) \to T_2(X, X)$ die natürliche Projektion und daher $\xi\beta : T_2(X, X) \to T_2(X, X)$ die Identität ist.

7. 15. Beweis von 7. 2. — Der Beweis unterscheidet sich von dem für 6. 4 nur dadurch, daß der Funktor T in § 6 bei Anwendung auf ein s.s. Objekt hier durch $T(\ , Y)$ und bei Anwendung auf ein s.s. Doppelobjekt durch $T(\ , Q \hat{\otimes} Y)$ ersetzt wird. Wir geben daher nur die wichtigsten Schritte noch einmal an und empfehlen, die entsprechenden Stellen in § 6 jeweils zum Vergleich heranzuziehen. Wir betrachten das zu (6. 21) analoge kommutative Diagramm

(7. 16)

$$\begin{array}{ccccc} H_q T(X, Y) & = & H_q T(Q \otimes X, Q \otimes Y) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_q N'T(Q \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y) \\ \downarrow \sigma^1 & & \downarrow \bar{\sigma}^1 & & \downarrow \hat{\sigma}^1 \\ H_{q+1} T(SX, Y) & \xleftarrow{T(\psi, \iota)_*} & H_{q+1} T(S \otimes X, Q \otimes Y) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_{q+1} N'T(S \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y) \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^1 &= (T(\pi \otimes \iota, \iota),\ T(\varkappa \otimes \iota, \iota))_* \\ \hat{\sigma}^1 &= (N'T(\pi \hat{\otimes} \iota, \iota),\ N'T(\varkappa \hat{\otimes} \iota, \iota))_*. \end{aligned}$$

Man beachte $Q \otimes X = X$, $Q \otimes Y = Y$ (5. 31). Das linke Quadrat ist zu 5. 34 analog und wird durch Anwendung des Funktors $T(\ , Y)$ auf das Diagramm in 5. 32 erhalten. Das rechte Quadrat ergibt sich aus der Natürlichkeit des Alexander-Whitney-Morphismus f und der Projektion ρ eines s.s. Doppelobjekts W auf seinen ersten normalisierten Komplex $N'W$. Für zwei s.s. Doppelobjekte U, V ist dabei $T(U, V)$ das s.s. Doppelobjekt mit $T(U, V)_{p,q} = T(U_{p,q}, V_{p,q})$ und entsprechend für monotone Abbildungen. Alle horizontalen Pfeile in (7. 16) bezeichnen Isomorphismen, da $T(\psi, \iota)$ ρ, und f Homotopieäquivalenzen sind. Fast wörtlich wie in § 6 beweist man:

7. 17. *ρf in der oberen Zeile von* (7. 16) *stimmt mit der Identität von* $T(X, Y)$ *überein* (vgl. 6. 22).

7. 18. *Es gibt einen Isomorphismus des Doppelkomplexes* $N'T(S \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y)$ *mit der partiellen Bar-Konstruktion* $\mathfrak{T}^1(X, Y)$, *durch den* $\hat{\sigma}^1$ *in* $i^1_*: H_q T(X, Y) \to H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y)$ *übergeht.* (vgl. 6. 23, 6. 24).

Dann liest man die Behauptung von 7. 2 aus (7. 16) ab. Der Isomorphismus ω^1 ist die Zusammensetzung

$$(7.\,19)\quad \omega^1 : H\mathfrak{T}^1(X, Y) \cong HN'T(S \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y) \xrightarrow{(\rho f)_*^{-1}} HT(S \otimes X, Q \otimes Y) \xrightarrow{T(\psi, \iota)_*} HT(SX, Y).$$

7. 20. Beweis von 7. 8. — Der Beweis verläuft wieder nach demselben Muster wie die Beweise von 6. 4 und 7. 2. Es kommen allerdings einige weitere Komplikationen hinzu, und wir müssen nun auch auf s.s. Tripelobjekte eingehen.

Sei W ein s.s. Tripelobjekt (Definition analog zu 2. 2). Es sind also 3 Arten von Seiten- und Ausartungsoperatoren erklärt

$$\begin{array}{lll} \partial'_i = W_{\varepsilon^i, \iota, \iota} & \partial''_i = W_{\iota, \varepsilon^i, \iota} & \partial'''_i = W_{\iota, \iota, \varepsilon^i} \\ s'_i = W_{\eta^i, \iota, \iota} & s''_i = W_{\iota, \eta^i, \iota} & s'''_i = W_{\iota, \iota, \eta^i} \end{array}$$

(vgl. 6. 17) die untereinander vertauschbar sind. Wie in 6. 17 definieren wir

$$N'W = \bigcap_{i>0} \operatorname{Kern} \partial'_i$$
$$D'W = \bigcup_i \operatorname{Bild} s'_i$$

und entsprechend N'', D'' usw. $N'W$ ist ein trigaduiertes Objekt, das bezüglich der ersten Graduierung ein Kettenkomplex, bezüglich jeder der beiden anderen ein s.s. Objekt ist. Wir bezeichnen die Seiten- und Ausartungsoperatoren wieder mit ∂''_i, ∂'''_i, s''_i, s'''_i. Dann können wir auch $N''N'W$ une analog $N'N''W$ bilden. Offenbar gilt

$$N'N''W = N''N'W = N'W \cap N''W,$$

wofür wir zur Abkürzung auch $\tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}$ schreiben wollen. Wie in (6. 18) hat man die Zerlegungen

$$\begin{aligned} \mathrm{W} &= \mathrm{N'W} \oplus \mathrm{D'W} \\ \mathrm{W} &= \mathrm{N''W} \oplus \mathrm{D''W}. \end{aligned}$$

Da sie miteinander verträglich sind, erhält man die Zerlegung

$$\text{(7. 21)} \qquad \mathrm{W} = \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W} \oplus (\mathrm{D'W} \cup \mathrm{D''W}).$$

Wie in 6. 19 sind die Projektionen

$$\rho'' : \mathrm{W} \to \mathrm{N''W}, \qquad \rho' : \mathrm{N''W} \to \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}.$$

Homotopieäquivalenzen der totalen Komplexe. Durch Zusammensetzen folgt

7. 22. *Die natürliche Projektion* $\tilde{\rho} : \mathrm{W} \to \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}$ *von* (7. 21) *ist eine Homotopieäquivalenz der totalen Komplexe.*

Unter dem Diagonalobjekt von W verstehen wir das (einfache) s.s. Objekt $d\mathrm{W}$ mit $(d\mathrm{W})_q = \mathrm{W}_{q,q,q}$ (und entsprechend für monotone Abbildungen). Nach dem Satz von Eilenberg-Zilber-Cartier (2. 9, 2. 16) ist der Kettenkomplex $kd\mathrm{W}$ mit dem totalen Komplex $t\mathrm{W}$ homotopieäquivalent. Eine spezielle Homotopieäquivalenz ist der Alexander-Whitney-Morphismus

$$\tilde{f} : (d\mathrm{W})_m \to \bigoplus_{p+q+r=m} \mathrm{W}_{p,q,r}$$

mit den Komponenten

$$\text{(7. 23)} \qquad \tilde{f}_{p,q,r} = \mathrm{W}(\varepsilon_m^m \varepsilon_{m-1}^{m-1} \ldots \varepsilon_{p+1}^{p+1},\ \varepsilon_m^m \ldots \varepsilon_{p+q+1}^{p+q+1} \varepsilon_{p+q}^0 \ldots \varepsilon_{q+1}^0,\ \varepsilon_m^0 \ldots \varepsilon_{r+1}^0)$$

(vgl. 2. 15, zur Definition von ε_j^i s. 1. 2).

Sind U, V s.s. Doppelobjekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so sei $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ das s.s. Tripelobjekt mit $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{U}, \mathrm{V})_{p,q,r} = \mathrm{T}(\mathrm{U}_{p,r}, \mathrm{V}_{q,r})$ und entsprechend für monotone Abbildungen. Sind G, G′ s.s. Objekte über der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen und X, Y s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so ist $\mathrm{T}(\mathrm{G} \otimes \mathrm{X}, \mathrm{G'} \otimes \mathrm{Y})$ das Diagonalobjekt von $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{G} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{G'} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{Y})$.

Wir betrachten nun das zu (6. 21) und (7. 16) analoge kommutative Diagramm

(7. 24)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{q+1}\mathrm{T}(\mathrm{SX}, \mathrm{Y}) \arrow[r, "\mathrm{T}(\psi, \iota)_*"] \arrow[d, "\sigma^2"] & \mathrm{H}_{q+1}\mathrm{T}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{Y}) \arrow[r, "(\tilde{\rho}\tilde{f})_*"] \arrow[d, "\bar{\sigma}^2"] & \mathrm{H}_{q+1}\tilde{\mathrm{N}}\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{Q} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{Y}) \arrow[d, "\tilde{\sigma}^2"] \\
\mathrm{H}_{q+2}\mathrm{T}(\mathrm{SX}, \mathrm{SY}) \arrow[r, "\mathrm{T}(\psi, \psi)_*"] & \mathrm{H}_{q+2}\mathrm{T}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{Y}) \arrow[r, "(\tilde{\rho}\tilde{f})_*"] & \mathrm{H}_{q+2}\tilde{\mathrm{N}}\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{S} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathrm{Y})
\end{tikzcd}$$

mit

$$\bar{\sigma}^2 = (T(\iota, \pi\otimes\iota),\ T(\iota, \varkappa\otimes\iota))_*$$
$$\tilde{\sigma}^2 = (\tilde{N}\tilde{T}(\iota, \pi\,\tilde{\otimes}\,\iota),\ \tilde{N}\tilde{T}(\iota, \varkappa\,\tilde{\otimes}\,\iota))_*.$$

Das linke Quadrat ergibt sich aus 5. 32, das rechte aus der Natürlichkeit des Alexander-Whitney-Morphismus $\tilde{f}$ und der Projektion $\tilde{\rho} : W \to \tilde{N}W$. Alle horizontalen Pfeile in (7. 24) bezeichnen Isomorphismem. Wir werden zeigen:

7. 25. *Es gilt*

$$N''\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,Y)_{*,q,*} = \begin{cases} T(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,X), & q = 0 \\ 0, & q \neq 0, \end{cases}$$

folglich $t\tilde{N}\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,Y) = tN'T(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,Y)$, *und der Morphismus* $\tilde{\rho}\tilde{f}$ *in der oberen Zeile von* (7. 24) *stimmt mit* ρf *in der unteren Zeile von* (7. 16) *überein.*

7. 26. $\tilde{N}\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, S\,\tilde{\otimes}\,Y)$ *ist als Tripelkomplex mit* $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ *in natürlicher Weise isomorph.*

7. 27. *Durch die Isomorphismen von* 7. 18 *und* 7. 26 *geht* $\tilde{\sigma}^2$ *in* $'j^1_* : H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y) \to H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ *über.*

Dann liest man aus (7. 24) unter Beachtung der Definition von ω^1 (7. 19) die Behauptung von 7. 8 ab. Der Isomorphismus $\tilde{\omega}$ ist die Zusammensetzung

$$(7.\,28)\qquad \tilde{\omega} : H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \cong H\tilde{N}\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, S\,\tilde{\otimes}\,Y) \xrightarrow{(\tilde{\rho}\tilde{f})_*^{-1}} HT(S\,\tilde{\otimes}\,X, S\,\tilde{\otimes}\,Y) \xrightarrow{T(\psi,\psi)_*} HT(SX, SY).$$

Beweis von 7. 25 (vgl. 6. 22). — Nach Definition von Q (5. 31) ist $\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,Y)_{*,q,*} = T(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,Y)$, und alle s.s. Operatoren ∂''_i, s''_i der zweiten s.s. Struktur von $\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,Y)$ sind Identitäten. Daraus folgt die erste Behauptung.

In $\rho''\tilde{f} : T(S \otimes X, Q \otimes Y)_m \to (tN''\tilde{T}(S\,\tilde{\otimes}\,X, Q\,\tilde{\otimes}\,X))_m$ liefern nach dem, was eben bewiesen wurde, nur die Komponenten $\rho''\tilde{f}_{p,q,r}$ $(p + q + r = m)$ mit $q = 0$ einen Beitrag. Nach den Definitionen von f (2. 15) und $\tilde{f}$ (7. 23) ist aber

$$f_{p,r} = \tilde{f}_{p,0,r} : T(S_m \otimes X_m, Y_m) \to T(S_p \otimes X_r, Y_r), \quad p + r = m,$$

also $f = \rho''\tilde{f}$. Durch Zusammensetzen mit

$$\rho' : \mathrm{N}''\mathrm{W} \rightarrow \mathrm{N}'\mathrm{N}''\mathrm{W} = \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}$$

erhält man die zweite Behauptung.

Beweis von 7. 26. — Nach Definition von S (5. 29) ist

$$\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Y})_{p,q,*} = \mathrm{T}(\mathrm{S}_p \otimes \mathrm{X}, \mathrm{S}_q \otimes \mathrm{Y}) = \mathrm{T}(\bigoplus^p \mathrm{X}, \bigoplus^q \mathrm{Y}).$$

Wie im Beweis von 6. 23 bestimmt man $(\mathrm{D}'\mathrm{W})_{p,q,*}$ und $(\mathrm{D}''\mathrm{W})_{p,q,*}$ für $\mathrm{W} = \tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Y})$ und zeigt unter Verwendung der direkten Zerlegung (7. 21), daß es einen Isomorphismus

$$(\tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W})_{p,q,*} \cong \mathrm{T}_{p,q}(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{Y}) = \tilde{\mathfrak{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{p,q,*}$$

gibt, so daß die Projektionen $\tilde{\rho} : \mathrm{W} \rightarrow \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}$ und

$$\tilde{\rho} : \mathrm{T}(\bigoplus^p \mathrm{X}, \bigoplus^q \mathrm{Y}) \rightarrow \mathrm{T}_{p,q}(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{Y})$$

einander entsprechen. Daraus schließt man ebenso wie früher, daß die ersten beiden Randoperatoren ∂', ∂'' von $\tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}$ gerade den in 7. 7 für $\tilde{\mathfrak{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ definierten entsprechen ([12]).

Beweis von 7. 27. — Wir müssen eine Nullhomotopie von $t\tilde{\mathrm{N}}\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Y})$ angeben. Sei $s : \mathrm{C}_p \rightarrow \mathrm{C}_{p+1}$ wie im Beweis von 6. 24. Setzt man $s'' = \mathrm{T}(\iota, s \otimes \iota)$, so ist s'' eine Nullhomotopie von $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Y})$ bezüglich des zweiten Randoperators ∂'' und mit den beiden anderen Randoperatoren ∂', ∂''' vertauschbar. s'' ist i.a. keine Nullhomotopie bezüglich des totalen Randoperators $\partial = \partial' + (-1)^p\partial'' + (-1)^{p+q}\partial'''$ (auf $\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{S} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{X}, \mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Y})_{p,q,r}$), aber man erhält eine solche Nullhomotopie, wenn man s'' durch $(-1)^p s''$ ersetzt. An dieser Stelle kommt also das Vorzeichen $(-1)^p$ herein. Es würde nicht auftreten, wenn man die Rolle der beiden Variablen vertauscht hätte. Das erklärt den Unterschied zwischen $'j^1$ in 7. 8 und j^2 in (7. 9). Im übrigen verläuft der Beweis von 7. 27 wie der von 6. 24, und wir können die Einzelheiten übergehen.

Damit ist der Beweis von 7. 8 beendet.

([12]) Für die Anwendung, die wir von 7. 8 gemacht haben (7. 14), war übrigens die explizite Kenntnis der Randoperatoren ∂' und ∂'' in $\tilde{\mathfrak{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ nicht erforderlich.

7. 29. Beweis von 7. 13. — Wir betrachten das Diagramm

(7. 30)

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T}(X, Y) \arrow[dd, "\bar{g}"] & T(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y) \arrow[l, "\rho"'] \arrow[dd, "g"] & & \\
 & & T(S\otimes X, S\otimes Y) \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "\tilde{f}"] \arrow[r, "T(\psi, \psi)_*"] & T(SX, SY) \\
\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) & \tilde{T}(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y) \arrow[l, "\tilde{\rho}"] & &
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile stammt aus dem Beweis von 6. 4 (angewandt auf den Funktor $T: \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}'$) und liefert beim Übergang zur Homologie den Isomorphismus $\omega: H\mathfrak{T}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$ (6. 21). Entsprechend ist die untere Zeile dem Beweis von 7. 8 entnommen und liefert $\tilde{\omega}: H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$ (7. 24, 7. 28). Dabei wurde $\mathfrak{T}(X, Y)$ mit $N'T(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y)$ (6. 23) und $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ mit $\tilde{N}\tilde{T}(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y)$ (7. 26) identifiziert. Die Morphismen g und $\bar{g}$ sind noch zu definieren.

Wir können $\tilde{T}(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y)$ als s.s. Doppelobjekt V über der Kategorie der s.s. Objekte über $\mathfrak{A}'$ auffassen, indem wir

$$\begin{aligned} V_{p,q} &= \tilde{T}(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y)_{p,q,*} = T(S_p\otimes X, S_q\otimes Y) \\ V_{\alpha,\beta} &= \tilde{T}(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y)_{\alpha,\beta,\iota} = T(S_\alpha\otimes\iota, S_\beta\otimes\iota) \end{aligned}$$

setzen. $T(S\hat{\otimes} X, S\hat{\otimes} Y)$ entspricht dann dem Diagonalobjekt von V. Sei $g: dV \to tV$ der Alexander-Whitney-Morphismus (2. 15). Man verifiziert leicht $gD\,dV \subset D'V \cup D''V$, folglich wird durch Übergang zu den Quotienten $\bar{g}: N\,dV \to tN'N''V = t\tilde{N}V$ induziert (vgl. [13], 2. 1 *a*). In Anbetracht der vorgenommenen Identifizierungen sind damit die Morphismen g und $\bar{g}$ in (7. 30) definiert. Es sind Kettenmorphismen der totalen Komplexe. Offenbar ist das Quadrat in (7. 30) kommutativ. Aus den expliziten Definitionen (2. 15, 7. 23) entnimmt man $gf = \tilde{f}$, d.h. auch das Dreieck in (7. 30) ist kommutativ [13]. Wenn wir nun zeigen, daß $\bar{g} = \xi$ ist, so haben wir 7. 13 bewiesen.

Die Komponente

$$g_{p,q}: T(S_m\otimes X, S_m\otimes Y) \to T(S_p\otimes X, S_q\otimes Y), \quad m = p + q,$$

von g ist durch $g_{p,q} = T(\partial_{p+1}\partial_{p+2}\dots\partial_m\otimes\iota, (\partial_0)^p\otimes\iota)$ definiert (2.15).

[13] Uns würde auch $gf \simeq \tilde{f}$ genügen. Das schließt man ohne Rechnung aus 2. 9 *b*), übertragen auf *s.s.* Tripelobkejte.

Nach Definition von S (5. 29) ist $S_m \otimes X = \bigoplus_{k=1}^{m} \gamma_k^m \times X = \bigoplus^m X$, und mit den Bezeichnungen von 7. 11 gilt $\partial_{p+1}\partial_{p+2} \dots \partial_m \otimes \iota = \xi'_p$ (Projektion auf die ersten p Summanden) und $(\partial_0)^p \otimes \iota = \xi''_q$ (Projektion auf die letzten q Summanden). Also ist

$$g_{p,q} = \mathrm{T}(\xi'_p, \xi''_q) : \mathrm{T}(\bigoplus^m X, \bigoplus^m Y) \to \mathrm{T}(\bigoplus^p X, \bigoplus^q Y).$$

Die Morphismen ρ und $\tilde{\rho}$ in (7. 30) sind die natürlichen Projektionen

$$\rho : \mathrm{T}(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)_{m,*} = \mathrm{T}(\bigoplus^m X, \bigoplus^m Y) \to \mathrm{T}_m(X, \dots, X, Y, \dots, Y)$$
$$\tilde{\rho} : \tilde{\mathrm{T}}(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)_{p,q,*} = \mathrm{T}(\bigoplus^p X, \bigoplus^q Y) \to \mathrm{T}_{p,q}(X, \dots, X, Y, \dots, Y)$$

(s. Beweise von 6. 23 und 7. 26). Daß das Quadrat in (7. 30) kommutativ ist, bedeutet

$$\bar{g}_{p,q}\rho = \tilde{\rho} g_{p,q}.$$

Bezeichnet $\lambda : \mathrm{T}_m(X, \dots, X, Y, \dots, Y) \to \mathrm{T}(\bigoplus^m X, \bigoplus^m Y)$ die natürliche Injektion, so gilt $\rho\lambda = \iota$. Es folgt

$$\bar{g}_{p,q} = \bar{g}_{p,q}\rho\lambda = \tilde{\rho} g_{p,q}\lambda = \tilde{\rho}\mathrm{T}(\xi'_p; \xi''_q)\lambda = \xi_{p,q}$$

(letzteres nach Definition, 7. 12), also $\bar{g} = \xi$.

8. — ANWENDUNGEN AUF DERIVIERTE FUNKTOREN

Sei wieder $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein kovarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$. Wir setzen jetzt noch voraus, daß die Kategorie $\mathfrak{A}$ hinreichend viele projektive Objekte enthält, d.h. daß jedes $A \in \mathfrak{A}$ Quotient eines projektiven Objekts ist. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ und jeder ganzen Zahl $n \geq 0$ eine projektive s.s. Auflösung X von (A, n) in $\mathfrak{A}$ (4. 1, 4. 3). Der q-te (links-)derivierte Funktor L_qT ist durch

$$L_qT(A, n) = H_qTX$$

definiert (4. 5).

8. 1. *Ist* X *eine (projektive) s.s. Auflösung von* (A, n), *so ist die Einhängung* SX *eine (projektive) s.s. Auflösung von* $(A, n+1)$.

Beweis. — Nach 4. 2 genügt, es die entsprechende Behauptung für die normalen Komplexe NX und NSX zu beweisen. Wegen $NSX = SNX$ (5. 3) folgt diese unmittelbar aus der Definition der Einhängung eines Kettenkomplexes (5. 1).

Zum Begriff der s.s. Auflösung gehört es, daß ein Isomorphismus $H_n(X) \cong A$ *festgelegt* ist. Wir legen $H_{n+1}SX \cong A$ so fest, daß der Einhängungsisomorphismus $\sigma : H_nX \cong H_{n+1}SX$ (6. 5 mit $T =$ Identität) der Identität von A entspricht.

8. 2. Der Einhängungsmorphismus $\sigma_X(T) : H_qTX \to H_{q+1}TSX$ (5. 9) liefert demnach

$$\sigma = \sigma_A(T) : \ L_qT(A, n) \to L_{q+1}T(A, n+1),$$

und aus (5. 10) folgt, daß $\sigma(T)$ *eine natürliche Transformation von* $L_qT(\ \ , n)$ *in* $L_{q+1}T(\ \ , n+1)$ *ist.*

Die Ergebnisse von §§ 6, 7 lassen sich direkt auf $\sigma_A(T)$ als Spezialfall von $\sigma_X(T)$ anwenden. Wir diskutieren einige dieser Anwendungen im einzelnen:

8. 3. *Ist entweder* T *additiv oder* $q < 2n$, *so ist*

$$\sigma_A(T) : L_q T(A, n) \to L_{q+1} T(A, n+1)$$

ein Isomorphismus. Für $q = 2n$ *ist* $\sigma_A(T)$ *ein Epimorphismus.* Das folgt aus 6. 5 und 6. 12. Ist nämlich X eine s.s. Auflösung von (A, n), so ist X trivial unterhalb n im Sinne von 6. 8.

Nach diesem Resultat können wir die Funktoren $L_{q+n}T(\ , n)$ für alle $n > q$ miteinander identifizieren und dadurch den *q-ten stabilen derivierten Funktor* $L_q^S T$ definieren. Ist T additiv, so entfällt die Einschränkung $n > q$, und $L_q^S T = L_q T(\ , 0)$ stimmt mit dem gewöhnlichen derivierten Funktor $L_q T$ überein (4. 7). Man kann zeigen, daß $L_q^S T$ stets ein *additiver* Funktor ist.

8. 4. Entsprechendes gilt für Funktoren von mehreren Variablen. Wir führen es für $T(A, B)$, $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ aus. Dabei setzen wir auch von $\mathfrak{B}$ voraus, daß es eine abelsche Kategorie ist, die hinreichend viele projektive Objekte enthält. Die derivierten Funktoren werden durch

$$L_q T(A, n; B, m) = H_q T(X, Y)$$

definiert, wobei X und Y projektive s.s. Auflösungen von (A, n) bzw. (B, m) sind. Ist $T(A, 0) = T(0, B) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, so sind nach 5. 15 die partiellen Einhängungen

$$\sigma^1 = \sigma^1_{A,B}(T) : L_q T(A, n; B, m) \to L_{q+1} T(A, n+1; B, m)$$
$$\sigma^2 = \sigma^2_{A,B}(T) : L_q T(A, n; B, m) \to L_{q+1} T(A, n; B, m+1)$$

definiert. Aus 7. 3 und 7. 4 folgt:

8. 5. *Ist entweder* T *additiv in der ersten Variablen oder* $q < 2n + m$, *so ist* $\sigma^1_{A,B}(T)$ *ein Isomorphismus. Für* $q = 2n + m$ *ist* $\sigma^1_{A,B}(T)$ *ein Epimorphismus.*

Entsprechendes gilt für $\sigma^2_{A,B}(T)$. Nach 7. 10 ist $\sigma^2\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^2$. Um Kommutativität zu erreichen, ersetzen wir σ^2 durch

$$'\sigma^2 = (-1)^n \sigma^2 : L_q T(A, n; B, m) \to L_{q+1} T(A, n; B, m+1).$$

Dann ist $'\sigma^1\sigma^2 = \sigma^1{'\sigma^2}$; wir können die Funktoren

$$L_{q+n+m} T(A, n; B, m)$$

für alle $n > q$ und $m > q$ durch die Zusammensetzungen von σ^1 und $'\sigma^2$ miteinander identifizieren und auf diese Weise den *q-ten stabilen derivierten Funktor* $L_q^S T(A, B)$ definieren.

8. 6. *Ist* T *additiv in jeder der beiden Variablen, so ist*

$$L_q^S T(A, B) = L_{q+n+m} T(A, n; B, m)$$

für alle n, m und stimmt mit dem gewöhnlichen derivierten Funktor $L_q T(A, B)$ *überein.*

Beweis. — Die erste Behauptung ist klar nach 8. 5 und liefert insbesondere $L_q^S T(A, B) = L_q T(A, 0; B, 0) = H_q T(X, Y)$, wobei X und Y projektive s.s. Auflösungen von (A, 0) bzw. (B, 0) sind. Nach dem Satz von Eilenberg-Zilber-Cartier (2. 9) ist der Kettenkomplex $kT(X, Y) = kd\hat{T}(X, Y)$ (2. 10) mit dem totalen Komplex $t\hat{T}(X, Y)$ homotopieäquivalent. Für additives T stimmen aber die Doppelkomplexe $k\hat{T}(X, Y)$ und $T(kX, kY)$ überein. Daraus folgt $H_q T(X, Y) = H_q T(kX, kY)$, und kX, kY sind projektive Auflösungen von A bzw. B im üblichen Sinn [7].

8. 7. Sei nun wieder T ein Funktor einer Variablen mit $T(0) = 0$. Ist T *quadratisch*, so ist der Mischeffekt $T_2(A, B)$ in jeder der beiden Variablen additiv. Aus 6. 6 ergibt sich die exakte Folge

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\beta}} L_q T_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_q T(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{q+1} T(A, n+1)$$
$$\xrightarrow{\bar{\beta}} L_{q-1} T_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_{q-1} T(A, n) \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

Nach 8. 6 kann man darin $L_q T_2(A, n; A, n)$ durch $L_{q-2n} T_2(A, A)$ ersetzen. α_* wird durch die Kodiagonale $\alpha : T_2(A, A) \rightarrow TA$ (5. 23) induziert. Aus 7. 14 folgt, daß $\bar{\beta}$ unter Verwendung unserer Identifizierungen (8. 6) mit

$$\beta_* : L_{q+1} T(A, n+1) \rightarrow L_{q+1} T_2(A, n+1; A, n+1)$$
$$= L_{q-2n-1} T_2(A, A)$$

übereinstimmt, möglicherweise bis auf das Vorzeichen. β_* wird durch die Diagonale $\beta : TA \rightarrow T_2(A, A)$ (5. 23) induziert. Zusammenfassend stellen wir fest :

8. 8. *Ist T quadratisch, so ist die Folge*

$$\cdots \xrightarrow{\beta_*} L_{q-2n}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} L_qT(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{q+1}T(A, n+1)$$
$$\xrightarrow{\beta_*} L_{q-2n-1}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} L_{q-1}T(A, n) \xrightarrow{\sigma}$$

exakt.

Im Falle eines beliebigen Funktors T tritt an die Stelle der exakten Folge die spektrale Folge von 6. 7. Wir verzichten auf eine erneute Formulierung für die derivierten Funktoren. Dagegen wollen wir 5. 25 und 6. 11 übertragen. Aus 5. 25 ergibt sich :

8. 9. *In der Folge*

$$(F_q) \quad L_qT_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_qT(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{q+1}T(A, n+1)$$
$$\xrightarrow{\beta_*} L_{q+1}T_2(A, n+1; A, n+1)$$

ist $\sigma\alpha_* = 0$ *und* $\beta_*\sigma = 0$.

Für $q \leq 3n$ gilt nach 8. 5.

$$L^S_{q-2n-1}T_2(A, A) = L_{q-1}T_2(A, n; A, n) = L_{q+1}T_2(A, n+1; A, n+1),$$

d.h. das letzte Glied von (F_q) stimmt mit dem ersten von (F_{q-1}) überein. Durch Zusammensetzen erhält man

$$(F) \quad L_{3n}T_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_{3n}T(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{3n+1}T(A, n+1)$$
$$\xrightarrow{\beta_*} L^S_{n-1}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} L_{3n-1}T(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{3n}T(A, n+1)$$
$$\xrightarrow{\beta_*} L^S_{n-2}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots .$$

8. 10. *Die Folge* (F) *ist exakt.*

Beweis. — Sei X eine projektive s.s. Auflösung von (A, n). Offenbar stimmen dann die Morphismen σ und α_* in (F) mit den entsprechenden in 6. 11 überein. Nach 7. 14 ist ferner $\beta_* = \pm \overline{\beta}$ (unter Verwendung unserer Identifizierungen im Anschluß an 8. 5). Also folgt die Behauptung aus 6. 11.

8. 11. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Nimmt man für T den Funktor « Gruppenring » oder « Symmetrische Algebra », so gehen die vorstehenden Sätze in bekannte Resultat für die Eilenberg-MacLaneschen Gruppen $H_q(A, n; G)$ über (vgl. 4. 15, 4. 16).

Um das etwas genauer auszuführen, setzen wir $TA = \overline{\overline{Z}}A \otimes G$

wie in 5. 13 (ZA = Gruppenring von A, $\overline{\mathrm{ZA}} = \mathrm{ZA}/\mathrm{Z0}$, G eine feste abelsche Gruppe). Sei X eine (freie) s.s. Auflösung von (A, n). Als s.s. Menge ist X ein Eilenberg-MacLanescher Komplex K(A, n) (s. Beweis von 4. 16). Da kTX der Kettenkomplex von X mod 0 ist, gilt

$$L_q T(A, n) = H_q TX = H_q(X, 0; G) = H_q(A, n; G) \quad \text{für} \quad q > 0.$$

Die Einhängung SX ist ein Eilenberg-MacLanescher Komplex K(A, $n+1$) und $\sigma_A(T) : L_q T(A, n) \to L_{q+1}(A, n+1)$ stimmt mit dem üblichen Einhängungshomomorphismus

$$\sigma : H_q(A, n; G) \to H_{q+1}(A, n+1; G), \qquad q > 0,$$

überein (5. 13). Der bekannte Satz, daß σ für $q < 2n$ ein Isomorphismus und für $q = 2n$ ein Epimorphismus ist ([12] 20. 4, [26] VI Prop. 2), erweist sich damit als Spezialfall von 8. 3.

8. 9 besagt, daß die Einhängung alle zerlegbaren Elemente von $H_q(A, n; G)$ annulliert, und daß alle Bilder bei der Einhängung primitiv sind. 8. 10 liefert eine partielle Umkehrung dieser Aussagen in demselben Umfang, wie man sie aus der exakten Folge von G. W. Whitehead-Barcus-Meyer [31], [2] schließen kann (6. 16). Ein Element von $H_q(A, n; G) = H_q(X; G)$ $q > 0$, heißtdabei zerlegbar, wenn es Bild bei der «Multiplikation» $\alpha_* : H_q(X \times X, X \vee X; G) \to H_q(X; G)$ ist, und primitiv, wenn es im Kern der «Diagonale» $\beta_* : H_q(X; G) \to H_q(X \times X, X \vee X; G)$ liegt (5. 24, 5. 26). Häufig wird der Begriff « zerlegbar » enger gefaßt, indem man voraussetzt, daß G ein Ring ist, und nur die Bilder bei der Zusammensetzung

$$\bigoplus_{i=1}^{q-1} H_i(X; G) \otimes H_{q-i}(X; G) \to H_q(X \times X, X \vee X; G) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(X; G)$$

(Pontrjaginsche Multiplikation) zerlegbar nennt. Wenn G ein Körper ist, so sind beide Begriffe gleichwertig.

9. — KONTRAVARIANTE UND RECHTSDERIVIERTE FUNKTOREN. DIE KOBAR-KONSTRUKTION

Wir haben bisher nur kovariante Funktoren und ihre Linksderivierten behandelt. Analog kann man Linksderivierte eines kontravarianten und Rechtsderivierte eines ko- oder kontravarianten Funktors definieren. Wir werden zeigen, wie man durch Übergang zur dualen Kategorie alle diese Fälle auf den bisher behandelten zurückführen kann. Am Schluß des Paragraphen deuten wir eine Dualisierung der Bar-Konstruktion an, die Kobar-Konstruktion.

9. 1. Sei $\mathfrak{C}$ irgendeine Kategorie. Die *duale Kategorie* $\mathfrak{C}^*$ ([4] I, 4; [16] 1. 1) hat dieselben Objekte wie $\mathfrak{C}$. Ferner ist $\mathrm{Hom}^*(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A)$, und die Zusammensetzung der Morphismen in $\mathfrak{C}^*$ geschieht wie in $\mathfrak{C}$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Die « Identität » $\mathfrak{d} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^*$ ist ein kontravarianter Funktor, und $\mathfrak{d}\mathfrak{d}$ ist die Identität von $\mathfrak{C}$.

Ist $\mathfrak{C}$ additiv oder abelsch, so auch $\mathfrak{C}^*$.

9. 2. Sei nun $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ irgendein kontravarianter Funktor. Ist C ein graduiertes Objekt über $\mathfrak{C}$, so definieren wir das graduierte Objekt TC über $\mathfrak{C}$, durch

$$(TC)_q = T(C_{-q}).$$

Um Minuszeichen zu vermeiden, benutzen wir manchmal die Schreibweise $C^q = C_{-q}$. Ist C ein Kettenkomplex ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ additive Kategorien, T additiv), so setzen wir

$$\partial^{TC} = T(\partial^{C}).$$

Ist X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ und T wieder beliebig), so wird TX ein neuartiges Gebilde, nämlich ein *negatives s.s. Objekt* (ko-s.s. Objekt) über $\mathfrak{C}'$. Wir definieren

$$(TX)_q = T(X_{-q}), \qquad q = 0, -1, -2, \ldots$$
$$(TX)_\alpha = T(X_\alpha) : (TX)_{-p} \to (TX)_{-q}, \quad \alpha : [p] \to [q] \text{ monoton.}$$

9. 3. Allgemein sprechen wir von einen *negativen s.s. Objekt* Y über einer Kategorie $\mathfrak{C}$, wenn eine Folge $Y_0, Y_{-1}, Y_{-2}, \ldots$ von Objekten aus $\mathfrak{C}$ gegeben ist und zu jeder monotonen Abbildung $\alpha : [p] \to [q]$ $(p, q \geq 0)$ ein Morphismus $Y_\alpha : Y_{-p} \to Y_{-q}$, so daß

(i) $\quad Y_\iota = \iota \quad$ mit $\quad \iota =$ Identität,

(ii) $\quad Y_{\alpha\beta} = Y_\alpha \circ Y_\beta \quad$ mit $\quad \beta : [r] \to [p]$ monoton.

M.a.W.: Y ist ein *kovarianter* Funktor aus der Kategorie der monotonen Abbildungen in $\mathfrak{C}$.

Wir setzen

$$\partial_i = Y_{\varepsilon^i} : Y_{-q} \to Y_{-q-1}, \qquad i = 0, \ldots, q+1$$
$$s_i = Y_{\eta^i} : Y_{-q} \to Y_{-q+1}, \qquad i = 0, \ldots, q-1$$

und bezeichnen diese Morphismen als Seiten-bzw. Ausartungsoperatoren (vgl. 1. 2). Ist $\mathfrak{C}$ eine additive Kategorie, so können wir den Randoperator

$$\partial = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \partial_i : Y_{-q} \to Y_{-q-1}$$

bilden und Y als (negativen) Kettenkomplex auffassen. (Zum Beweis von $\partial\partial = 0$ genügt es zu bemerken, daß $\mathfrak{d}Y$ ein gewöhnliches (positives) s.s. Objekt über $\mathfrak{C}^*$ ist).

9. 4. Sei nun $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein kontravarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$. Dann ist $\mathfrak{d}T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'^*$ ein kovarianter Funktor mit $\mathfrak{d}T(0) = 0$, auf den wir die Definitionen und Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen anwenden können. Für ein s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ haben wir z.B. den Einhängungsmorphimus

$$\sigma = \sigma_X(\mathfrak{d}T) : H_q\mathfrak{d}TX \to H_{q+1}\mathfrak{d}TSX.$$

Ist C irgendein Kettenkomplex, so gilt

(9. 5) $\qquad H\mathfrak{d}C = \mathfrak{d}HC \qquad$ d.h. $\quad H_q\mathfrak{d}C = \mathfrak{d}H_{-q}C$

([4] II, 1). Folglich liefert die Anwendung von $\mathfrak{d}$ auf $\sigma_X(\mathfrak{d}T)$ den Einhängungsmorphismus

$$\sigma = \sigma_X(T) : H_{-q-1}TSX \to H_{-q}TX$$

für einen kontravarianten Funktor T.

9. 6. Die Bar-Konstruktion $\mathfrak{T}^*X$ für den Funktor $T^* = \mathfrak{d}T$ ist durch

$$(\mathfrak{T}^*X)_{p,*} = T^*_p(X, \ldots, X)$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : (\mathfrak{T}^*X)_{p,*} \to (\mathfrak{T}^*X)_{p-1,*}$$

gegeben (6. 3). Wendet man $\mathfrak{d}$ auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H_{q+1}T^*SX \arrow[d, "\wr", no head, equal] \\ H_qT^*X \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "i_*"'] & H_{q+1}\mathfrak{T}^*X \end{tikzcd}$$

von 6. 4 an, so erhält man

$$\begin{tikzcd} & H_{-q-1}TSX \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, "\wr", no head, equal] \\ H_{-q}TX & H_{-q-1}\mathfrak{T}X \arrow[ul, "p_*"] \end{tikzcd}$$

mit $\mathfrak{T}X = \mathfrak{d}\mathfrak{T}^*X$. $\mathfrak{T}X$ ist ein negativer Doppelkomplex, und $p : \mathfrak{T}X \to (\mathfrak{T}X)_{-1,*} = TX$ ist die natürliche Projektion. Sie ist ein Kettenmorphismus des totalen Komplexes $t\mathfrak{T}X$ vom Grade 1. Alle Korollare von 6. 4 haben eine offensichtliche Übertragung auf kontravariante Funktoren.

9. 7. Wir lassen nun die Voraussetzung $T(0) = 0$ weg, nehmen aber zusätzlich an, daß jedes Objekt von $\mathfrak{A}$ Quotient eines projektiven ist. Die *Rechtsderivierten* des *kontravarianten* Funktors $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ werden durch

$$R^qT(A, n) = R_{-q}T(A, n) = \mathfrak{d}L_q(\mathfrak{d}T)(A, n), \qquad A \in \mathfrak{A}$$

definiert (vgl. [4], III, 6). Alle Sätze über die Linksderivierten von kovarianten Funktoren (§ 8) lassen sich durch « Dualisieren » auf R^qT übertragen.

Ist X eine projektive s.s. Auflösung von (A, n), so gilt

$$R^qT(A, n) = \mathfrak{d}H_q\mathfrak{d}TX = H_{-q}TX,$$

wobei TX ein negatives s.s. Objekt ist.

9. 8. *Beispiele.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen, G eine feste abelsche Gruppe und

$$\begin{aligned} TB &= \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}B, G) \\ T'B &= \operatorname{Hom}(SA(B), G), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Z}B$ den Gruppenring und SA(B) die symmetrische Algebra der abelschen Gruppe B bezeichnet (vgl. 4. 15).

9. 9. SATZ. — *Die Derivierten* $R^qT(B, n)$, $n \geq 0$, *und* $R^qT'(B, n)$, $n > 0$, *sinds als Funktoren von* B *mit den Eilenberg-MacLaneschen Kohomologiegruppen* $H^q(B, n; G)$ *äquivalent.*

Der Beweis verläuft wörtlich wie der von 4. 16 mit folgenden Unterschieden : 1) TX ist jetzt der *Kokettenkomplex* von X mit Koeffizienten in G. 2) $\mathbf{Z}SP^\infty Y \otimes G$ in der letzten Zeile ist durch $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}SP^\infty Y, G)$ zu ersetzen.

9. 10. Wir kehren nun wieder zu den Voraussetzungen von 9. 7 zurück In Anlehnung an 4. 8 definieren wir RT als Funktor von graduierten Objekten über $\mathfrak{A}$ zu graduierten Objekten über $\mathfrak{A}'$ durch

$$RT = \mathfrak{d} \circ L(\mathfrak{d}T).$$

9. 11. *Beispiele.* — Sei jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der Moduln über einem kommutativen nullteilerfreien Hauptidealring Λ. π sei eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}(m)$, die auf $\otimes^m B$, $B \in \mathfrak{A}$, durch Vertauschung der Faktoren operiert. Wir setzen

$$\begin{aligned} VB &= (\otimes^m B)/\pi \qquad &(\text{vgl. } 4.\ 10) \\ V'B &= (\otimes^m B)^\pi \qquad &(\text{vgl. } 4.\ 13) \\ UB &= \operatorname{Hom}(B, \Lambda). \end{aligned}$$

Für einen Kettenkomplex C bezeichne $H^*C = HUC$ die Kohomologie. Wie in 4. 10 und 4. 13 ergibt sich für einen freien s.s. Λ-Modul X

$$\begin{aligned} H^*(\otimes^m X/\pi) &\cong R(UV)HX \\ H^*((\otimes^m X)^\pi) &\cong R(UV')HX \\ H^*((\otimes^m X)^{\mathfrak{S}(m)}) &\cong R(U\Gamma_m)HX \end{aligned} \tag{9. 12}$$

(letzteres weil Γ_m auf freien Moduln mit V' für $\pi = \mathfrak{S}(m)$ übereinstimmt). Für endlich erzeugte freie Moduln stimmt UV mit V'U überein. Ist H_nX für jedes n endlich erzeugt, so kann man freie. s.s. Auflösungen von $(H_n X, n)$ finden, die in jeder Dimension endlich erzeugt sind. Aus der ersten Zeile von (9. 12) folgt in diesen Fall

$$\begin{aligned} H^*(\otimes^m X/\pi) &\cong R(V'U)HX \\ H^*(\otimes^m X/\mathfrak{S}(m)) &\cong R(\Gamma_m U)HX. \end{aligned} \tag{9. 13}$$

Man beachte, daß die Isomorphismen (9. 12), (9. 13) ebenso wie die analogen in der Homologie (4. 10-4. 13) keine Äquivalenzen von Funktoren sind.

9. 14. Wir behalten die Festsetzungen von 9. 11 bei und spezialisieren $\Lambda = \mathbf{Z}$. Dann ist nach 9. 9 für $n > 0$ und irgendeine abelsche Gruppe B

$$H^q(B, n; \mathbf{Z}) = R^q(U \circ SA)(B, n).$$

Die symmetrische Algebra ist durch

$$SA(B) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} SP^m B = Z \oplus B \oplus \bigoplus_{m=2}^{\infty} (\otimes^m B/\mathfrak{S}(m))$$

definiert. Es folgt $U \circ SA = \prod_{m=0}^{\infty} U \circ SP^m$ und daher

$$R^q(U \circ SA)(B, n) = \prod_{m=0}^{\infty} R^q(U \circ SP^m)(B, n).$$

Das Produkt rechts hat aber für jedes feste q nur endlich viele nicht-triviale Faktoren. Das folgt z.B. aus 12. 1. Wenn man B als endlich erzeugt voraussetzt, was wir jetzt ohnehin tun wollen, kann man es auch aus der bekannten Tatsache entnehmen, daß $H_q(B, n; \mathbf{Z})$ endlich erzeugt. ist Wir können also weiterschließen

$$R^q(U \circ SA)(B, n) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R^q(U \circ SP^m)(B, n) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R^q(\Gamma_m \circ U)B, n),$$

letzteres wegen $U \circ SP^m = \Gamma_m \circ U$ für freie endlich erzeugte abelsche Gruppen (vgl. 9. 11). In der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen gilt demnach die Äquivalenz

$$H^q(B, n; \mathbf{Z}) = R^q(\Gamma \circ U)(B, n) \tag{9. 15}$$

mit $\Gamma = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma_m$ ($\Gamma_0 B = \mathbf{Z}$, $\Gamma_1 B = B$ für jedes B).

9. 16. *Beispiel.* — Ist weiterhin $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen und bezeichnet TB jetzt die Tensoralgebra

von $B \in \mathfrak{A}$, so gilt $H^*(\Omega SP) \cong R(UT)H(P)$ für jedes zusammenhängende Polyeder P (vgl. 4. 17).

9. 17. Rechtsderivierte von kovarianten und linksderivierte von kontravarianten Funktoren. — Sei $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ irgendein Funktor zwischen abelschen Kategorien. Dann definieren wir für alle $n \leq 0$

$$\begin{aligned} R^q T(A, n) &= R^q(T\mathfrak{d})(\mathfrak{d}A, -n), && \text{T kovariant} \\ L_q T(A, n) &= L_q(T\mathfrak{d})(\mathfrak{d}A, -n), && \text{T kontravariant} \end{aligned}$$

$A \in \mathfrak{A}$ (vgl. [4], III, 6). Um sicher zu sein, daß diese Bildungen existieren, müssen wir annehmen, daß jedes Objekt in $\mathfrak{A}^*$ Quotient eines projektiven ist. Das bedeutet: Jedes Objekt von $\mathfrak{A}$ läßt sich in ein injektives einbetten.

Als *negative s.s. Auflösung von* (A, n), $A \in \mathfrak{A}$, $n \leq 0$, bezeichnen wir ein negatives s.s Objekt Y über $\mathfrak{A}$ zusammen mit einen bestimmten Isomorphismus $H_n Y \cong A$, so daß $Y_i = 0$ für $i > n$ und $H_i Y = 0$ für $i < n$. Y heißt injektiv, wenn jedes Y_i injektiv ist.

Sei nun Y eine injektive negative s.s. Auflösung von (A, n) in $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{d}Y$ eine projektive (positive) s.s. Auflösung von $(\mathfrak{d}A, -n)$ in $\mathfrak{A}^*$. Wendet man darauf $T\mathfrak{d}$, an so erhält man $T\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}Y = TY$, und es folgt

$$\begin{aligned} R^q T(A, n) &= H_{-q} TY, && \text{T kovariant} \\ L_q T(A, n) &= H_q TY, && \text{T kontravariant} \end{aligned}$$

(nach 9. 7 bzw. 4. 6). Im ersten Fall ist TY ein negatives, im zweiten ein positives, d.h. gewöhnliches, s.s. Objekt.

9. 18. Als Funktoren von graduierten Objekten definieren wir

$$\begin{aligned} RT &= R(T\mathfrak{d}) \circ \mathfrak{d}, && \text{T kovariant} \\ LT &= L(T\mathfrak{d}) \circ \mathfrak{d}, && \text{T kontravariant} \end{aligned}$$

(vgl. 9. 10, 4. 8).

9. 19. *Beispiele.* — Sei Λ ein Körper und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der endlich erzeugten Vektorräume über Λ. $U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ bezeichne wie in 9. 11 den Funktor $UA = \mathrm{Hom}\,(A, \Lambda)$, $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $U \circ U$ mit der Identität von $\mathfrak{A}$ äquivalent, und man kann die duale Kategorie $\mathfrak{A}^*$ so mit $\mathfrak{A}$ identifizieren, daß

$\mathfrak{d} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^*$ und $U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ einander entsprechen. Damit gehen die Definitionen von 9.18 in

$$\begin{aligned} RT &= R(TU) \circ U, \qquad \text{T kovariant} \\ LT &= L(TU) \circ U, \qquad \text{T kontravariant} \end{aligned}$$

über ([14]).

Mit den Bezeichnungen von 9.11 gilt $UV = V'U$ und $UV' = VU$ in ganz $\mathfrak{A}$. Ferner ist $H^*C = HUC = UHC$ für jeden Kettenkomplex C über $\mathfrak{A}$. Aus (9.12) folgt daher

$$\begin{aligned} H^*(\otimes^m X/\pi) \cong R(UV)HX = R(V'U)HX \\ = R(V')UHX = R(V')H^*X \end{aligned}$$

und analog

$$H^*((\otimes^m X)^\pi) \cong R(V)H^*X.$$

Diese Beispiele beruhen also auf den ganz speziellen Eigenschaften der Kategorie und sind etwas künstlich. Beispiele wesentlich anderer Art für die Definitionen 9.17, 9.18 bei nicht-additiven Funktoren sind uns nicht bekannt. Im additiven Fall hat man natürlich die Funktoren Ext^q als wichtigstes Beispiel von Rechtsderivierten eines kovarianten Funktors.

9.20. Die Kobar-Konstruktion. — Sei $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein kovarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$ und X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir gehen davon aus, daß die Bar-Konstruktion $\mathfrak{T}X$ mit dem Doppelkomplex $N'T(S \hat{\otimes} X)$ isomorph ist (6.23). Dabei ist S die durch (5.29) definierte s.s. abelsche Gruppe, und N′ bezeichnet das Normalisieren bezüglich der ersten s.s. Struktur des s.s. Doppelobjekts $T(S \hat{\otimes} X)$ (6.17). Eine in gewisser Weise duale Bildung ist

$$\mathfrak{T}^{\#}X = N'T(US \hat{\otimes} X).$$

Dabei ist der kontravariante Funktor U durch $UG = \mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{Z})$, G abelsche Gruppe, definiert. US ist eine negative s.s. abelsche Gruppe (9.2). $US \hat{\otimes} X$ und damit $T(US \hat{\otimes} X)$ sind bigraduierte Objekte, deren Bestandteile vom Bigrad (p, q) nur dann von 0 verschieden sind, wenn $p \leq -1$ und $q \geq 0$. Bezüglich der ersten Grauduierung sind es negative, bezüglich der zweiten positive s.s. Objekte. N′ bezeichnet das

([14]) Diese etwas ungenaue Schlußweise kann leicht präzisiert werden.

Normalisieren bezüglich der ersten (negativen) s.s. Struktur. Allgemein definieren wir für ein negatives s.s. Objekte Y den ausgearteten bzw. normalen Kettenkomplex durch

$$\mathrm{DY} = \mathfrak{d}\mathrm{D}\mathfrak{d}\mathrm{Y} = \bigcup_i \text{Kobild } s_i = \mathrm{Y}\Big/\bigcap_i \text{Kern } s_i$$
$$\mathrm{NY} = \mathfrak{d}\mathrm{N}\mathfrak{d}\mathrm{Y} = \bigcap_{i>0} \text{Kokern } \partial_i = \mathrm{Y}\Big/\bigcup_{i>0} \text{Bild } \partial_i.$$

9. 21. « Dual » zum Beweis von 6. 23 kann man zeigen

$$(\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-p,*} = \mathrm{T}_p(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X})$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \beta_i : (\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-p,*} \to (\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-p-1,*}.$$

Dabei ist T_p der p-te Mischeffekt von T (4. 18). $\beta_i : \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_{p+1}$ ist eine natürliche Transformation, die zu α_i (6. 2) « dual » ist und folgendermaßen definiert wird : Seien

$$\mathrm{T}_p(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p) \underset{\rho}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \mathrm{T}(\mathrm{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{A}_p)$$

die natürlichen Morphismen wie in 6. 1. $\varkappa_j : \mathrm{A} \to \bigoplus^p \mathrm{A}$ bezeichne die Injektion des j-ten Summanden und $\pi_j : \bigoplus^{p+1}\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ die Projektion auf den j-ten Summanden. Wir definieren dann $\beta'_i : \bigoplus^p \mathrm{A} \to \bigoplus^{p+1}\mathrm{A}$, $i = 1, \ldots, p$ durch

$$\pi_k \beta'_i \varkappa_j = \begin{cases} \iota, & k = j \leq i \quad \text{oder} \quad k - 1 = j \geq i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen, so bedeutet das

$$\beta'_i(a_1, \ldots, a_p) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_p).$$

Schließlich setzen wir

$$\beta_i = \rho \circ \mathrm{T}\beta'_i \circ \lambda : \ \mathrm{T}_p(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}) \to \mathrm{T}_{p+1}(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}).$$

$\beta_1 : \mathrm{TA} \to \mathrm{T}_2(\mathrm{A}, \mathrm{A})$ stimmt offenbar mit der Diagonale β von 5. 23 über ein.

Die Konstruktion $\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X}$ steht zur cobar construction von Adams [1] in derselben Beziehung wie $\mathfrak{T}\mathrm{X}$ zur bar construction von Eilenberg-MacLane (6. 26).

9. 22. Die natürliche Projektion $p : \mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X} \to (\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-1,*} = \mathrm{TX}$ ist für den totalen Komplex $t\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X}$ ein Kettenmorphismus vom

Grade 1. Es liegt nahe zu vermuten, daß es dual zu 6. 4 einen Isormorphismus $HTX \cong H\mathfrak{T}^{\#}SX$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_qTX \arrow[d, "\cong" description, no head] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ H_q\mathfrak{T}^{\#}SX \arrow[r, "p_*"'] & H_{q+1}TSX \end{tikzcd} \tag{9. 23}$$

kommutativ ist. Das würde eine neue Möglichkeit zur Untersuchung des Einhängungsmorphismus' σ bieten. Es ist uns jedoch nicht gelungen, den Beweis von § 6 übertragen. Mit anderen Methoden haben wir die Vermutung für Funktoren endlichen Grades (d.h. $T_k = 0$ für genügend großes k) bestätigt Sie folgt dann auch für direkte Summen von solchen, also z.B. für $T = \bigoplus_{m=1}^{\infty} SP^m$ (symmetrische Algebra). Da wir keine Anwendungen davon machen wollen, gehen wir nicht näher darauf ein. Fragt man nach den Folgerungen aus (9. 23), die den Korollaren von 6. 4 entsprechen, so ist zunächst nichts anderes zu erwarten als eine Wiederholung der Aussagen 6. 5, 6. 6, 6. 11, 6. 12. Nur an die Stelle von 6. 7 tritt eine neue spektrale Folge.

ANWENDUNG AUF SYMMETRISCHE PRODUKTE UND EILENBERG-MACLANE-KOMPLEXE

In den folgenden Paragraphen ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Ein s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ heißt auch FD-*Komplex* (s. [12], 2).

Wir betrachten $\mathfrak{S}(n)$-Produkte im Sinne von Beispiel 4. 10 und sprechen dann von (n-fachen) symmetrischen Produkten, in Zeichen $\mathrm{SP}^n\mathrm{X}$. Das analog definierte symmetrische Produkt einer s.s. Menge (eines Raumes) E wird ebenfalls mit $\mathrm{SP}^n\mathrm{E}$ bezeichnet.

Die Ergebnisse der Paragraphen 10, 11 werden ohne Benutzung der Bar-Konstruktion § 6 gewonnen.

10. — ZERLEGBARE UND PRIMITIVE ELEMENTE IN SYMMETRISCHEN PRODUKTEN

10. 1. SATZ. — *Ist n keine Primzahlpotenz, dann sind alle Elemente in* $H(SP^nX)$ *zerlegbar* (s. 5. 24), *und nur das Nullelement ist primitiv* (s. 5. 24). *Ist* $n = p^j$, $j > 0$, *p eine Primzahl, dann sind alle Elemente in* $pH(SP^nX)$ (*d.h. alle p-fachen*) *zerlegbar, und jedes primitive Element* $\neq 0$ *hat die Ordnung p. Dabei ist* X *ein beliebiger* (*nicht notwendig freier*) FD-*Komplex.*

Derselbe Satz gilt für Homologie mit beliebigen Koeffizienten.

10. 2. KOROLLAR. — *Ist n keine Primzahlpotenz, dann ist der Einhängungshomomorphismus* $\sigma : H_i(SP^nX) \to H_{i+1}(SP^nSX)$ *der Nullhomomorphismus. Ist* $n = p^j$, $j > 0$, *p prim, dann ist* $p\sigma = 0$. *Dasselbe Ergebnis gilt für Homologie mit beliebigen Koeffizienten.*

Das Korollar folgt unmittelbar aus 10. 1, z.B. weil σ alle zerlegbaren Elemente annulliert (s. 5. 25).

BEWEIS für 10. 1. — Es sei zunächst daran erinnert, daß die Mischeffekte (s. 4. 18) von SP^n die folgende Gestalt haben (s. [9], 8. 4)

$$(10.3) \qquad SP_2^n(X, Y) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} SP^iX \otimes SP^{n-i}Y,$$

allgemeiner

$$(10.4) \qquad SP_r^n(X_1, \ldots, X_r) = \bigoplus_{i_\nu > 0,\, \Sigma i_\nu = n} SP^{i_1}X_1 \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}X_r.$$

(N.B. $\otimes$ bezeichnet das *kartesische* Produkt $\times$ von FD-Komplexen im Sinne von [12], 5. Vgl. 1. 23).

Die Abbildungen $\alpha : SP^n_2(X, X) \to SP^n X$ (« Kodiagonale »; s. 5. 23) bezw. $\beta : SP^n X \to SP^n_2(X, X)$ (« Diagonale »; s. 5. 23) zerfallen nach 10. 3 in Kompononten

$$(10.5) \qquad \alpha_{i,n-i} : SP^i X \otimes SP^{n-i} \to SP^n X$$

bezw.

$$(10.6) \qquad \beta_{i,n-i} : SP^n X \to SP^i X \otimes SP^{n-i} X.$$

Wir betrachten $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n - i)$ als Untergruppe von $\mathfrak{S}(n)$, indem wir $\mathfrak{S}(i)$ auf den Zahlen $1, 2, \ldots, i$ und $\mathfrak{S}(n - i)$ auf $i + 1, i + 2, \ldots, n$ operieren lassen. Dann ist

$$\bigotimes^n X/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n - i) = SP^i X \otimes SP^{n-i} X,$$

d.i. das $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n - i)$-Produkt von X, und es gilt

10. 7. Hilfssatz. — *Die Abbildung $\alpha_{i,n-i}$ bezw. $\beta_{i,n-i}$ stimmt mit der natürlichen Projektion $\pi : \bigotimes^n X/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i) \to \bigotimes^n X/\mathfrak{S}(n)$ bezw. mit dem Transferhomomorphismus*

$$\tau : \bigotimes^n X/\mathfrak{S}(n) \to \bigotimes^n X/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n - i)$$

überein.

Der *Transferhomomorphismus* τ (s. [30], 11) entsteht aus der Abbildung

$$(10.8) \qquad \bigotimes^n X \to \bigotimes^n X, \qquad a \to \Sigma\gamma a, \qquad a \in \bigotimes^n X$$

durch Übergang zu den Quotienten. Dabei ertreckt sich die Summe $\Sigma\gamma$ über ein (beliebiges) Repräsentantensystem $\{\gamma\}$ für die Rechtsrestklassen von $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n - i) \subset \mathfrak{S}(n)$.

Aus der Definition 10. 8 und aus 10. 7 folgt (s. [30], 11. 3).

10. 9. Korollar. — *Die zusammengesetzte Abbildung*

$$SP^n X \xrightarrow{\beta_{i,n-i}} SP^i X \otimes SP^{n-i} X \xrightarrow{\alpha_{i,n-i}} SP^n X$$

multipliziert jedes Element mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$.

Für jedes $u \in H(SP^n X)$ ist also $\binom{n}{i} u$ zerlegbar, und für jedes primitive u ist $\binom{n}{i} u = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Der Satz 10. 1 ist daher eine Folge von

10. 10. HILFSSATZ. — *Der größte gemeinsame Teiler der Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *ist* p *falls* $n = p^j$, $j > 0$, p *prim, und ist* 1 *sonst.*

BEWEIS für 10. 7. — Die direkte Summendarstellung

$$(10.11) \qquad SP^n(X_1 \oplus X_2) \cong \bigoplus_{i=0}^n SP^i X_1 \otimes SP^{n-i} X_2$$

aus der 10. 3 hervorgeht, wird folgendermaßen gewonnen (s. [9], 8. 4). Seien $j_\nu : X_\nu \to (X_1 \oplus X_2)$ bezw. $p_\nu : (X_1 \oplus X_2) \to X_\nu$, $\nu = 1, 2$, die natürliche Injektion bezw. Projektion. Dann entsteht die zu 10. 11 gehörige Injektion

$$j_{i,n-i} : SP^i X_1 \otimes SP^{n-i} X_2 \to SP^n(X_1 \oplus X_2)$$

aus der Abbildung

$$\bigotimes^i X_1 \otimes \bigotimes^{n-i} X_2 \xrightarrow{\bigotimes^i j_1 \otimes \bigotimes^{n-i} j_2} \bigotimes^i (X_1 \oplus X_2) \otimes \bigotimes^{n-i}(X_1 \oplus X_2) = \bigotimes^n (X_1 \oplus X_2)$$

durch Übergang zu den Quotienten.

Ist $X_1 = X_2 = X$ und $\alpha' : X \oplus X \to X$ die Addition, dann ist $\alpha' j_\nu = \iota$ (= Identität), also wird die Zusammensetzung

$$SP^i X \otimes SP^{n-i} X \xrightarrow{j_{i,n-i}} SP^n(X \oplus X) \xrightarrow{SP^n(\alpha')} SP^n X$$

durch die identische Abbildung von $\bigotimes^n X$ induziert; diese Zusammensetzung ist aber gerade $\alpha_{i,n-i}$.

Nun zu $\beta_{i,n-i}$. Ist $y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in {}^n\bigotimes(X_1 \oplus X_2)$ und $y = [y_1, \ldots, y_n]$ sein Bild in $SP^n(X_1 \oplus X_2)$, dann erhält man die zu 10. 11 gehörige Projektion

$$p_{i,n-i} : SP^n(X_1 \oplus X_2) \to SP^i X_1 \otimes SP^{n-i} X_2,$$

indem man, auf alle möglichen Weisen, auf i Komponenten y_μ von y die Abbildung p_1, auf die anderen p_2 anwendet und summiert (s. [9], 8), d.h. $p_{i,n-i}$ ist die Zusammensetzung

$$(10.12) \qquad SP^n(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{\tau} SP^i(X_1 \oplus X_2) \otimes SP^{n-i}(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{SP^i p_1 \otimes SP^{n-i} p_2} SP^i X_1 \otimes SP^{n-i} X_2,$$

wobei τ der oben erklärte Tranfer ist. Die Abbildung $\beta_{i,n-i}$ erhält man also, indem man vor 10. 12 (mit $X_1 = X_2 = X$) noch die Abbildung

$$SP^n(\beta') : SP^n X \to SP^n(X \oplus X) \qquad (\beta' : X \to X \oplus X \text{ die Diagonale})$$

schaltet. Betrachten wir nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} SP^n(X\oplus X) \arrow[r, "\tau"] & SP^i(X\oplus X)\otimes SP^{n-i}(X\oplus X) \arrow[dr, "SP^ip_1\otimes SP^{n-i}p_2"] & \\ & & SP^iX\otimes SP^{n-i}X \\ SP^nX \arrow[uu, "SP^n(\beta')"] \arrow[r, "\tau"'] & SP^iX\otimes SPX^{n-i}X \arrow[uu, "SP^i\beta'\otimes SP^{n-i}\beta'"] \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

Das linke Quadrat ist kommutativ wegen der Natürlichkeit von τ, das rechte Dreieck wegen $p_\nu\beta' = \iota$, also

$$\beta_{i,\,n-i} = (SP^ip_1 \otimes SP^{n-i}p_2)\circ\tau\circ SP^n\beta' = \tau, \qquad \text{qed.}$$

Beweis für 10.10. — Sei p eine Primzahl und p^r die höchste Potenz von p, die in n aufgeht, also $n = p^rm$, $m \not\equiv 0 \bmod p$. Wir haben zu zeigen: Ist $m > 1$, dann $\gamma(n) \not\equiv 0 \bmod p$; ist $m = 1$, dann $\gamma(n) \equiv 0 \bmod p$, $\gamma(n) \not\equiv 0 \bmod p^2$, wobei $\gamma(n) = \text{g.g.T}\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dazu betrachten wir das Polynom $(x+y)^n$ in Unbestimmten x, y. Ist $m > 1$, dann gilt modulo p

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=0}^n\binom{n}{i}x^iy^{n-i} &= (x+y)^n \equiv (x^{p^r}+y^{p^r})^m \\ &= x^n + mx^{n-p^r}y^{p^r} + \cdots + y^n \not\equiv x^n + y^n,\end{aligned}$$

also $\gamma(n) \not\equiv 0$.

Ist $m = 1$, dann rechnen wir modulo p^2 und erhalten

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=0}^n\binom{n}{i}x^iy^{n-i} &= (x+y)^n = (x+y)^{p^{r-1}p} = (x^{p^{r-1}} + y^{p^{r-1}} + pR)^p \\ &\equiv (x^{p^{r-1}} + y^{p^{r-1}})^p = x^n + px^{n-p^{r-1}}y^{p^{r-1}} + \cdots + y^n \not\equiv x^n + y^n,\end{aligned}$$

wie behauptet.

11. — ZERLEGBARE UND PRIMITIVE ELEMENTE IN EILENBERG-MACLANE-KOMPLEXEN

Es sei K ein FD-Komplex mit *Ergänzung* $\eta : K \to Q$ und *Grundpunkt* $\varepsilon : Q \to K$. Dabei ist Q der FD-Komplex eines Punktes (d. h. $Q_j = \mathbf{Z}$ für alle j, $Q_\alpha = \iota$ für alle monotonen Abbildungen α), η und ε sind FD-Abbildungen und $\eta\varepsilon = \iota$. Es folgt

$$(11.\ 1) \qquad K \cong Q \oplus K^0 \qquad \text{mit} \qquad K^0 = \text{Kern}\,(\eta).$$

Das Tensorprodukt zweier FD-Komplexe (s. 1. 23) mit Ergänzung und Grundpunkt besitzt eine natürliche Ergänzung und einen Grundpunkt, nämlich

$$K \otimes K' \xrightarrow{\eta \otimes \eta'} Q \otimes Q \cong Q$$

und

$$Q \cong Q \otimes Q \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon'} K \otimes K'.$$

Eine *Multiplikation* in K ist eine FD-Abbildung

$$(11.\ 2) \qquad \mu : K \otimes K \to K,$$

die mit Ergänzung und Grundpunkt verträglich ist. Die Zahl $1 = 1_q \in \mathbf{Z} = Q_q$ ist dann Einselement für $\mu_q : K_q \otimes K_q \to K_q$, und η ist eine multiplikative Abbildung. μ induziert eine (gewöhnliche) FD-Abbildung $\mu^0 : K^0 \otimes K^0 \to K^0$ und ist umgekehrt durch μ^0 vollständig bestimmt.

Die Bildelemente beim induzierten Homomorphismus der Homologie,

$$H(\mu^0) : H(K^0 \otimes K^0) \to H(K^0) \subset H(K),$$

allgemeiner

$$H(\mu^0; G) : H(K^0 \otimes K^0; G) \to H(K^0; G) \subset H(K; G),$$

heißen *zerlegbar* (bezüglich μ) ([15]).

Eine *Komultiplikation* (auch « Diagonale ») in K ist eine FD-Abbildung

$$(11.3) \qquad \nu : K \to K \otimes K,$$

die mit Ergänzung und Grundpunkt verträglich ist. ν induziert eine FD-Abbildung $\nu^0 : K^0 \to K^0 \otimes K^0$ und ist umgekehrt durch ν^0 vollständig bestimmt. Die Elemente im Kern des induzierten Homomorphismus

$$H(\nu^0; G) : H(K^0; G) \to H(K^0 \otimes K^0; G)$$

heißen *primitiv* (bezüglich ν) ([15]).

Assoziativität und *Kommutativität* der Abbildung μ bezw. ν sind wie üblich definiert.

11. 4. *Beispiele.* — (i) Sei X ein beliebiger FD-Komplex und

$$(11.5) \qquad SA(X) = Q \otimes SP^1X \otimes SP^2X \otimes \cdots = \textstyle\bigoplus_{i=0}^{\infty} SP^iX$$

seine symmetrische Algebra (s. [9], 10). Projektion auf den Summanden Q bezw. Injektion von Q in SA(X) definieren Ergänzung und Grundpunkt in SA(X). Wendet man auf die Abbildung $\alpha' : X \oplus X \to X$ bezw. $\beta' : X \to X \oplus X$ den Funktor SA an und beachtet, daß $SA(X \oplus X) = SA(X) \otimes SA(X)$ ist (s. [9], 10. 9), dann erhält man eine (kommutative und assoziative) Multiplikation und Komultiplikation in SA. Die zerlegbaren bezw. primitiven Elemente bezüglich $SA(\alpha')$ bezw. $SA(\beta')$ stimmen offenbar gerade mit den früher definierten (s. 5. 24) zerlegbaren bezw. primitiven Elementen des Funktors $SA(X)^0$ überein (wobei derIndex ^{0} wie oben den Kern der Ergänzung bezeichnet). Da SA(X) direkte Summe der SP^iX ist, gilt dasselbe für die zerlegbaren bezw. primitiven Elemente. Wir können also 10. 1 anwenden und erhalten

([15]) Diese Definition ist etwas allgemeiner als die übliche, in welcher nur die Bilder bei der zusammengesetzten Abbildung

$$H(K^0) \otimes H(K^0) \to H(K^0 \otimes K^0) \to H(K^0)$$

zerlegbar heißen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für primitive Elemente.

11. 6. SATZ. — *Die Elemente der Gruppe*

$$H_i(SA(X); G)/[H_i(SP^1X; G) + \text{zerlegbare Elemente}], \quad i>0$$

bezw.

$$[\text{primitive Elemente von } H_i(SA(X); G)]/H_i(SP^1X; G), \quad i>0$$

haben endliche quadratfreie Ordnung, m.a.W. diese Gruppen sind direkte Summen von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung.

(ii) Sei M eine s.s. Menge mit Grundpunkt $b_0 \in M_0$. Dann ist der FD-Komplex ZM von M ein FD-Komplex mit Ergänzung, Grundpunkt (induziert durch $M \to b$ bezw. $b \to M$, wo $b_i = s_0^i(b_0)$) und Komultiplikation (induziert durch die geometrische Diagonale $M \to M \times M$, $\sigma \to (\sigma, \sigma)$). Ist M außerdem mit einer Multiplikation $M \times M \to M$ versehen, bezüglich der die b_i Einselemente sind, dann spricht man von einem (evtl. nicht-assoziativen) s.s. Monoid. Auf ZM wird dann eine Multiplikation induziert. Via ZM können wir dann von zerlegbaren oder primitiven Elementen in H(M) sprechen.

11. 7. SATZ. — *Es sei* M *ein zusammenhängendes* (d.h. $\pi_0(M) = 0$) *kommutatives assoziatives s.s. Monoid.*

$$\Phi_i : \pi_i(M) \to H_i(M)$$

bezeichne den Hurewiczhomomorphismus und $D(H_i(M))$ *bezw.* $P(H_i(M))$ *die zerlegbaren bezw. primitiven Elemente. Dann ist*

$$H_i(M)/[D(H_i(M) + \text{Bild }(\Phi_i))], \quad i > 0$$

eine direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung.

Ist $\pi_1(M) = 0$, *dann gilt dasselbe für die Gruppe*

$$P(H_i(M))/\text{Bild }(\Phi_i), \quad i > 0.$$

BEWEIS. — Ist E eine (zusammenhängende) s.s. Menge, mit Grundpunkt, dann ist das unendliche symmetrische Produkt SPE ein zusammenhängendes kommutatives, assoziatives s.s. Monoid (s. [24], 2. 10). Nach [32], Beweis zu 7. 1, gibt es zu jedem M ein E und einen Homomorphismus $SPE \to M$, der Isomorphismen aller Homotopiegruppen und Homologiegruppen induziert; außerdem kann man annehmen, daß $\Phi_i : \pi_i(E) \to H_i(E)$ epimorph ist (E kann als « wedge » von

« Moore-Komplexen » gewählt werden). Wir brauchen die Behauptung also nur für solche Monoide SPE zu beweisen.

Nun gibt es einen natürlichen multiplikativen Isomorphismus

$$(11.8) \qquad \mathrm{ZSPE} \cong \mathrm{SA}(\mathrm{ZE}^0) \quad (\text{s. [9], 10. 10}),$$

wobei ZE wie oben den FD-Komplex von E und ZE^0 den Kern der Ergänzung bezeichnet. Dabei wird $\mathrm{ZE} = \mathrm{ZSP}^1\mathrm{E}$ isomorph auf $\mathrm{Q} \oplus \mathrm{SP}^1(\mathrm{ZE}^0)$ abgebildet. Daher folgt die erste Behauptung von 11. 7 aus der ersten Behauptung von 11. 6.

Die zweite Behauptung können wir zunächst nicht genau so beweisen, weil der Isomorphismus 11. 8 nicht mit der Komultiplikation verträglich ist. Wenn aber $\pi_1(\mathrm{M}) = 0$ ist, dann können wir annehmen, daß E Einhängung einer anderen s.s. Menge ist (nach Konstruktion in [32], 7). Dann folgt die 2. Behauptung analog zur ersten aus 11. 6 und dem

11. 9. Hilfssatz. — *Ist* E *eine Einhängung*, $\mathrm{E} = \mathrm{SE}'$, *dann ist der Isomorphismus* 11. 8 *bis auf Homotopie mit der Komultiplikation verträglich.*

Beweis. — Wir identifizieren die beiden Seiten von 11. 8 und haben dann zwei Komultiplikationen ν^1, ν^2 in $\mathrm{X} = \mathrm{SA}(\mathrm{ZE}^0)$, von denen wir zeigen wollen, daß sie homotop sind. Dazu betrachten wir die Alexander-Whitney Abbildung

$$f : \mathrm{X} \otimes \mathrm{X} \to k\mathrm{X} \otimes k\mathrm{X} \qquad (\text{s. [13], 2. 9})$$

und zeigen, daß $f\nu^1 = f\nu^2$ ist; daraus folgt die Behauptung, weil f eine Homotopieäquivalenz ist.

Beide Komultiplikationen sind multiplikativ, wenn wir in $\mathrm{X} \otimes \mathrm{X}$ die Multiplikation des Tensorproduktes benutzen $((x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = y_1 y_1 \otimes x_2 y_2))$. Auch f ist multiplikativ für eine geeignete multiplikative Struktur in $k\mathrm{X} \otimes k\mathrm{X} : f$ bildet $\mathrm{X}_r \otimes \mathrm{X}_r$ in $\bigoplus_{i=0}^r \mathrm{X}_i \otimes \mathrm{X}_{r-i}$ ab, und die Komponente $f_{i,r-i}$: $\mathrm{X}_r \otimes \mathrm{X}_r \to \mathrm{X}_i \otimes \mathrm{X}_{r-i}$ ist gegeben durch $f_{i,r-i}(x \otimes y) = \tilde{\delta}^{r-i} x \otimes \delta_0^i y$, wobei $\tilde{\delta}$ jeweils den letzten Seitenoperator bezeichnet. Multipliziert man in $\mathrm{X}_i \otimes \mathrm{X}_{r-i}$ nun nach der Regel

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = x_1 y_1 \otimes x_2 y_2,$$

dann ist $f_{i,r-i}$ offenbar multiplikativ.

Weil $\mathrm{SA}(\mathrm{ZE}^0)$ multiplikativ von $\mathrm{ZE}^0 = \mathrm{SP}^1(\mathrm{ZE}^0)$ erzeugt wird, brauchen wir die zu beweisende Gleichung $f_{i,r-i}\nu^1 = f_{i,r-i}\nu^2$ also nur für die Elemente von ZE^0 bezw. eine Basis von ZE^0 zu zeigen. Die Gruppe $(ZE^0)_r$ besitzt als Basis die Elemente $x = \sigma - b$, wobei $b = b_r \in E_r$ den Grundpunkt bezeichnet und σ alle anderen r-Simplexe von E durchläuft. Ist ν^2 etwa die « geometrische » und ν^1 die « algebraische » Komultiplikation, dann ist

$$\begin{aligned}\nu^2(x) = \nu^2(\sigma - b) &= \sigma \otimes \sigma - b \otimes b = (x + b) \otimes (x + b) - b \otimes b \\ &= x \otimes b + b \otimes x + x \otimes x = \nu^1(x) + x \otimes x.\end{aligned}$$

Zu zeigen ist also

$$f_{i,r-i}(x \otimes x) = \tilde{\delta}^{r-i}x \otimes \delta_0^i x = 0.$$

Dies ist eine Gleichung, die man leicht in jeder Einhängung verifiziert (s. [21], 2). In anderen Worten besagt sie: *Ist σ ein r-Simplex und $\tilde{\delta}^{r-i}\sigma \neq b$, dann ist $\delta_0^i\sigma = b$.*

Die wichtigsten Beispiele von kommutativen, assoziativen s.s. Monoiden sind die Eilenberg-MacLane-Komplexe $M = K(A, n)$. Für diesen Fall geben wir 11. 7 noch eine etwas andere und allgemeinere Formulierung, nämlich

11. 10. Satz (vgl. [5], Exp. 11, Thm. 2). — *Die Gruppen*

$$H_i(A, n; G)/D(H_i(A, n; G)), \qquad n > 0, \quad i > n + 1$$

und

$$P(H_i(A, n; G)), \qquad n > 1, \quad i > n + 1$$

sind direkte Summen von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung. Dabei bezeichnet D *wie in* 11. 7 *die zerlegbaren und* P *die primitiven Elemente.* G *ist eine beliebige Koeffizientengruppe.*

Insbesondere hat das Bild beim Einhängungshomomorphismus

$$\sigma : H_{i-1}(A, n-1; G) \to H_i(A, n; G), \quad n > 1, \ i > n + 1,$$

als Untergruppe von $P(H_i(A, n; G))$ *diese Eigenschaft.*

Beweis. — Für $G = \mathbf{Z}$ ist 11. 10 eine Folge von 11. 7, weil $\pi_i K(A, n) = 0$ ist für $i > n + 1$ (ferner ist $H_{n+1}(A, n; \mathbf{Z}) = 0$, $H_n(A, n; \mathbf{Z}) = \pi_n K(A, n)$).

Für den allgemeinen Fall benutzen wir den Satz (s. [25], 3. 7), daß man $K(A, n)$ als unendliches symmetrisches Produkt SPE schreiben kann (bis auf Homotopieäquivalenz), wobei E ein Moore-Komplex mit $H_i(E) = 0$ für $i \neq 0, n$, $H_n(E) = A$ ist. Wegen 11. 8 folgt die Behauptung über $H_i(A, n; G)/D(H_i(A, n; G))$ dann aus der ersten Behauptung von 11. 6, und die Aussage über $P(H_i(A, n; G))$ wegen 11. 9 aus der zweiten Behauptung von 11. 6. Man hat nur zu beachten, daß $H_i(SP^1(ZE^0); G) = 0$ ist für $i \neq n, n+1$.

11. 11. Bermerkung. — Entsprechende Sätze wie wir sie in §§ 10-12 für Homologiegruppen ableiten, gelten natürlich auch für die Kohomologie. Wir beschränken uns darauf, das Gegenstück zur ersten Behauptung von 11. 10 zu formulieren, nämlich

11. 12. Satz. — *Die Gruppe*

$$\mathfrak{A}(A, n; G, q) \subset H^q(A, n; G)$$

der additiven Kohomologieoperationen mit $n > 0$, $q > n + 1$ *(beliebige Keoffizienten) ist eine direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung.*

Mit anderen Worten: *Außer evtl. den Koeffizientenhomomorphismen* (d.h. $q = n$) *und den Bocksteinoperatoren* (d.h. $q = n + 1$) *gibt es keine additive Kohomologieoperation der Ordnung* p^2, *p prim.*

12. — HOMOLOGIE UND HOMOTOPIE SYMMETRISCHER PRODUKTE

Unter Benutzung des Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n$ beweisen wir die folgenden Sätze [16].

12. 1. SATZ. — *Es sei* X *ein freier* FD-*Komplex und* $H_j(X) = 0$ *für* $j < k$, $k > 0$. *Dann ist*

$$(12.2) \qquad H_i(SP^nX) = 0 \qquad \text{für} \qquad i < n.$$

Ist $k > 1$, *dann gilt allgemeiner*

$$(12.3) \qquad H_i(SP^nX) = 0 \qquad \text{für} \qquad i < k + 2n - 2.$$

Für symmetrische Produkte besteht die exakte Folge 6. 11 in einem größeren Dimensionsbereich :

12. 4. SATZ. — *Es sei* X *ein freier* FD-*Komplex und* $H_j(X) = 0$ *für* $j < k$, $k > 1$. *Dann existiert eine exakte Folge*

$$(12.5) \qquad H_i(SP^n_2(X, X)) \xrightarrow{\alpha_*} H_i(SP^nX) \xrightarrow{\sigma} H_{i+1}(SP^nSX) \xrightarrow{\bar{\beta}} H_{i-1}(SP^n_2(X, X)) \xrightarrow{\alpha_*} H_{i-1}(SP^nX)$$

für $i < 3k + 2n - 5$. *Der Homomorphismus* $\bar{\beta}$ *stimmt wie in* 7. 14 *bis auf einen Isomorphismus*

$$H_{i-1}(SP^n_2(X, X)) \cong H_{i+1}(SP^n_2(SX, SX))$$

mit β_* : $H_{i+1}(SP^nSX) \rightarrow H_{i+1}(SP^n_2(SX, SX))$ *überein.*

[16] Diese Sätze folgen zum Teil auch aus den Ergebnissen von J. C. Moore über die Gruppen $H(SP^nX)$ (unveröffentlicht). Ein Spezialfall von 12. 1 findet sich in [23], App.

Zusatz bei der Korrektur : Die wichtigsten Resultate dieses Paragraphen wurden auf einem anderen Wege auch von Clare Friedmann gefunden.

Für $n = 2$ besteht die Folge 12. 5 natürlich für alle i, weil SP^2 ein quadratischer Funktor ist (s. 6. 6). Für $n = 3$ stimmt die Schranke $3k + 2n - 5$ mit $3k + 1$ (vgl. 6. 11) überein, für $n > 3$ liegt sie höher.

Einsetzen von 12. 1 in die in 12. 5 auftretenden Mischeffekte SP_2^n (vgl. 10. 3) gibt

12. 6. Korollar. — *Sind* X, k *wie in* 12. 4, *dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$\sigma : H_i(SP^n X) \to H_{i+1}(SP^n SX)$$

ein Isomorphismus für $i < 2k + 2n - 4$ *und ein Epimorphismus für* $i = 2k + 2n - 4$.

Wegen 10. 1 folgt hieraus

12. 7. Korollar. — *Seien* X, k *wie in* 12. 4 *aber* $k > 2$. *Ist* n *keine Primzahlpotenz, dann ist*

$$H_i(SP^n X) = 0 \quad \text{für} \quad i < 2k + 2n - 4 = (k + 2n - 2) + (k - 2). \tag{12. 8}$$

Ist $n = p^r$, $r > 0$, p *prim, dann ist*

$$pH_i(SP^n X) = 0 \qquad \text{für} \qquad i < 2k + 2n - 4. \tag{12. 9}$$

Schließlich beweisen wir noch

12. 10. Satz. — *Sind* X, k *wie in* 12. 7 *und ist* $n = p^r$, $r > 0$, p *prim, dann gilt*

$$H_{k+2n-2}(SP^n X) \cong H_k(X) \otimes \mathbf{Z}_p.$$

Man kann zeigen, daß dieser Isomorphismus im wesentlichen durch das Wort $\sigma^{k-2}\gamma_p^r\sigma^2$ im Sinne von [5], Exp. 9 gegeben ist; wir gehen hierauf jedoch nicht näher ein.

Unter Benutzung der Ergebnisse von [32] erhalten wir aus 12. 3 und 12. 10 durch « geometrische Realisierung »

12. 11. Satz. — *Es sei* E *ein zusammenhängender* CW-*Komplex und* $H_i(E) = 0$ *für* $0 < i < k$, $k > 1$. *Dann gilt*

$$\pi_i(SP^n E) \cong H_i(E) \quad \textit{für} \quad i < k + 2n - 1, \quad n > 1. \tag{12. 12}$$

Ist $k > 2$ *und* $n + 1$ *keine Primzahlpotenz, dann gilt auch noch*

$$\pi_{k+2n-1}(SP^n E) \cong H_{k+2n-1}(E). \tag{12. 13}$$

Ist dagegen $n + 1 = p^r$, $r > 0$, p prim (und $k > 2$), dann gibt es eine exakte Folge

$$(12.14) \quad \mathrm{H}_{k+2n}(\mathrm{E}) \to \mathrm{H}_k(\mathrm{E}) \otimes \mathbf{Z}_p \to \pi_{k+2n-1}(\mathrm{SP}^n\mathrm{E}) \to \mathrm{H}_{k+2n-1}(\mathrm{E}) \to 0.$$

Im Falle $\mathrm{H}_1(\mathrm{E}) \neq 0$ ist es uns nicht gelungen, einen entsprechenden Satz zu beweisen. Die Schwierigkeit tritt beim (relativen) Satz von Hurewicz auf, weil nun $\mathrm{SP}^n\mathrm{E}$, $n > 1$, nicht mehr einfach zusammenhängend ist. Modulo dieser Lücke würde sich ergeben $\pi_i(\mathrm{SP}^n\mathrm{E}) \cong \mathrm{H}_i(\mathrm{E})$, $i < n$, $\mathrm{E} =$ zusammenhängender CW-Komplex. Für $i = 1$ ist dies der Inahlt von

12. 15. Satz (P. A. Smith [27]). — *Sei* E *ein zusammenhängender* CW-*Komplex. Dann ist der durch die Inklusion* $i : \mathrm{E} \to \mathrm{SP}^n\mathrm{E}$ *induzierte Homomorphismus* $i_* : \pi_1(\mathrm{E}) \to \pi_1(\mathrm{SP}^n\mathrm{E})$, $n > 1$, *epimorph und besitzt als Kern die Kommutatorgruppe von* $\pi_1(\mathrm{E})$, *also*

$$\pi_1(\mathrm{SP}^n\mathrm{E}) \cong \mathrm{H}_1(\mathrm{E}) \qquad \text{für} \qquad n > 1.$$

Allgemeiner gilt dieselbe Beziehung für das ρ-*Produkt* $\times^n\mathrm{E}/\rho$ *von* E (s. [9], 6. 2) *wenn* ρ *eine beliebige transitive Untergruppe von* $\mathfrak{S}(n)$, $n > 1$, *ist.*

Da Smith nur den Fall $\rho = \mathfrak{S}(2)$ formuliert, geben wir einen Beweis von 12. 15 am Ende dieses Paragraphen.

Beweis für 12. 1. — Wir zeigen zunächst, daß dieser Satz richtig ist für eine direkte Summe

$$(12.16) \qquad \mathrm{X} = \bigoplus_\nu \mathrm{X}^\nu,$$

falls er für jeden Summanden gilt. Nach [9], 8. 4 ist

$$(12.17) \qquad \mathrm{SP}^n\mathrm{X} = \bigoplus_{\Sigma i_\nu = n} \bigotimes_\nu \mathrm{SP}^{i_\nu}\mathrm{X}^\nu.$$

Die Homologie von $\mathrm{SP}^{i_\nu}\mathrm{X}^\nu$ ($i_\nu > 0$) ist null unterhalb der Dimension i_ν (im Falle $k = 1$) bezw. $k + 2i_\nu - 2$ (im Fall $k > 1$). Auf Grund der Künnethformeln liefert der Summand $\bigotimes_\nu \mathrm{SP}^{i_\nu}\mathrm{X}^\nu$ von $\mathrm{SP}^n\mathrm{X}$ also nur dann einen Beitrag zur i-ten Homologiegruppe, wenn $i \geq \Sigma i_\nu = n$ ist (im Falle $k = 1$) bezw. (im Falle $k > 1$) für

$$(12.18) \quad i \geq (k + 2i_1 - 2) + \cdots + (k + 2i_r - 2) = rk + 2n - 2r = k + 2n - 2 + (r-1)(k-2) \geq k + 2n - 2,$$

wenn wir etwa annehmen, daß gerade die ersten r Exponenten i_ν größer als null sind.

Damit ist 12. 1 für X nachgewiesen. Für $k > 2$ kann übrigens in 12. 18 nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn $r = 1$ ist, also

$$(12.19) \qquad \mathrm{H}_{k+2n-2}(\mathrm{SP}^n\mathrm{X}) \cong \oplus_\nu \mathrm{H}_{k+2n-2}(\mathrm{SP}^n\mathrm{X}^\nu).$$

Für spätere Zwecke notieren wir das Ergebnis der Rechnung 12. 18 noch in

12. 20. Hilfssatz. — *Es seien* X^ν *freie* FD-*Komplexe*, $i_\nu > 0$ *ganze Zahlen*, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, $n = \Sigma i_\nu$, *und es gelte*

$$\mathrm{H}_j(\mathrm{SP}^{i_\nu}\mathrm{X}^\nu) = 0 \qquad \textit{für} \qquad j < k + 2i_\nu - 2.$$

Dann ist

$$\mathrm{H}_j(\mathrm{SP}^{i_1}\mathrm{X}^1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{SP}^{i_r}\mathrm{X}^r) = 0 \qquad \textit{für} \qquad j < r(k-2) + 2n.$$

Zum Beweis von 12. 1 können wir X als endlich erzeugt voraussetzen (d.h. X_i endlich erzeugt für alle i), weil sowohl die Bildung symmetrischer Produkte als auch die von Homologiegruppen mit dem direkten Limes vertauschbar sind. Ist X_i endlich erzeugt, dann auch $(\mathrm{SP}^n\mathrm{X})_i$ und $\mathrm{H}_i(\mathrm{SP}^n\mathrm{X})$. Wegen der universellen Koeffizientenformel genügt es dann zum Beweis von 12. 1 zu zeigen, daß in den betrachteten Dimensionen i die Homologiegruppen von $\mathrm{SP}^n\mathrm{X}$ mit Koeffizienten in jedem Primkörper $\varkappa$ null sind. Diese Gruppen

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{SP}^n\mathrm{X} \otimes \varkappa) = \mathrm{H}_i(\mathrm{SP}^n(\mathrm{X} \otimes \varkappa)),$$

hängen aber nur von den Gruppen $\mathrm{H}_j(\mathrm{X} \otimes \varkappa)$ ab (s. [9], 5. 11). Ist nun Q der FD-Komplex eines Punktes, $\mathrm{S}^m\mathrm{Q}$ seine m-fache Einhängung, dann können wir offenbar eine direkte Summe von Komplexen $\mathrm{S}^m\mathrm{Q}$ bilden, die dieselbe Homologie mit Koeffizienten in $\varkappa$ hat wie X. Wie oben bemerkt, brauchen wir dann die Behauptung nur für die Komplexe $\mathrm{S}^k\mathrm{Q}$ zu beweisen. Dies geschieht durch Induktion nach k.

Unter Benutzung der geometrischen Deutung von SP^n (vgl. Beweis zu 12. 11) ergibt nach sich [32], 6. 4. 6 und 3. 2

$$(12.21) \qquad \mathrm{H}_i(\mathrm{SP}^n\mathrm{SQ}) = 0 \quad \text{für} \quad i \geq 0 \quad \text{und} \quad n > 1.$$

$$(12.22) \qquad \mathrm{H}_i(\mathrm{SP}^n\mathrm{S}^2\mathrm{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq 2n \\ \mathrm{Z} & \text{für} \quad i = 2n. \end{cases}$$

Ein von [32] unabhängiger Beweis folgt weiter unten.

Nun der Schritt von k nach $k+1$ $(k \geq 2)$: In der Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n S^k Q$ (6. 3) treten die Mischeffekte $SP^{i_1}S^kQ \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}S^kQ$ auf, deren Homologie nach 12. 20 null ist unterhalb der Dimension $r(k-2) + 2n \geq k + 2n - 2$; für den Totalgrad ist noch $r \geq 1$ hinzuzufügen. Also ist die i-te Homologiegruppe von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n S^k Q$ bezüglich des zweiten Randoperators null unterhalb der Dimension $k+1+2n-2$, also auch $0 = H_i(\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n S^k Q) \cong H_i(SP^n S^{k+1} Q)$ (6. 4) für $i < k + 1 + 2n - 2$, wie behauptet.

12. 23. Beweis für 12. 21. — Man sieht sofort, daß alle π-Produkte (s. 4. 10) von Q mit Q übereinstimmen; insbesondere ist $SP^iQ = Q$ und $SPQ^1 \otimes SP^iQ = SP^{i+1}Q = Q$.

Wir zeigen nun, daß die Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q$ azyklisch ist für $n > 1$. Dazu konstruieren wir eine Nullhomotopie

$$s : SP^n_r(Q, \ldots, Q) \to SP^n_{r+1}(Q, \ldots, Q), \quad r = 1, 2, \ldots, \quad n > 1,$$

bezüglich des ersten Randoperators ∂' von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q$ wie folgt: s bildet den Summanden $SP^{i_1}Q \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}Q$ von $SP^n_r(Q, \ldots, Q)$ identisch auf den Summanden $SP^1Q \otimes SP^{i_1-1}Q \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}Q$ von $SP^n_{r+1}(Q, \ldots, Q)$ ab, falls $i_1 > 1$ ist, und s ist null auf den Summanden mit $i_1 = 1$. Wir übergehen den leichten Nachweis, daß $\partial' s + s \partial' = \iota$ ist. Die Homologie von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q$ bezüglich ∂' ist also null, also auch $H(SP^n SQ) = H(\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q) = 0$, wie behauptet.

12. 24. Beweis für 12. 22. — In der Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n SQ$ haben nach 12. 21 alle Terme $SP^{i_1}SQ \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}SQ$ verschwindende Homologie, es sei denn $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = 1$, also $r = n$. In diesem Falle ist die n-te Gruppe (Totalgrad $= 2n$) frei zyklisch, alle anderen sind null (Künneth-Formel). Die erste Spektralfolge von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n SQ$ (vgl. 6. 7) entartet also und liefert die Gleichung 12. 22.

Beweis für 12. 4. — In der Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X$ haben nach 12. 20 alle Terme $SP^{i_1}X \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}X$ mit $r \geq 3$ verschwindende Homologie unterhalb der Dimension $3k + 2n - 6$, d.h. unterhalb des Totalgrades $3k + 2n - 3$. Der Unter-Doppelkomplex (vgl. 6. 3)

$$U = \{ SP^n X \xleftarrow{\alpha} SP^n_2(X, X) \} \tag{12. 25}$$

von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X$ hat also bis zum Totalgrad $3k + 2n - 5$ einschließlich dieselbe Homologie wie $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X$ (der Quotient nach U hat verschwindende Homologie bezüglich des 2. Randoperators, also auch bezüglich des totalen), d. h.

$$H_i(U) \cong H_i(\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X) \cong H_i(SP^n SX), \qquad i \leq 3k + 2n - 5.$$

Die gesuchte Folge 12. 5 ist nun einfach ein Teil der exakten Homologiefolge von

$$0 \to SP^n X \to U \to SP_2^n(X, X) \to 0 \qquad \text{(s. 12. 25)}$$

Die zusätzliche Aussage über $\bar{\mathfrak{p}}$ beweist man wie 7. 14.

Beweis für 12. 6 und 12. 7. — Die Homologie von

$$SP_2^n(X, X) = \oplus_{i=1}^{n-1} SP^i X \otimes SP^{n-i} X \qquad (10. 3)$$

ist nach 12. 20 null unterhalb der Dimension $2k + 2n - 4$. Die Behauptung 12. 6 folgt daher aus der Exaktheit von 12. 5.

Für 12. 7 können wir X als Einhängung annehmen, $X = SX'$. In den angegebenen Dimensionen ist $\sigma : H_{i-1}(SP^n X') \to H_i(SP^n X)$ epimorph nach 12. 6. Daraus folgt die Behauptung wegen 10. 2.

Beweis für 12. 10. — Wir wissen bereits (s. 12. 3 und 12. 9), daß $H_{k+2n-3}(SP^n X) = 0$, $pH_{k+2n-2}(SP^n X) = 0$ ist. Nach der universellen Koeffizientenformel folgt

$$H_{k+2n-2}(SP^n X \otimes Z_p) = H_{k+2n-2}(SP^n X) \otimes Z_p = H_{k+2n-2}(SP^n X).$$

Die linke Seite hängt nur von $H(X \otimes Z_p)$ ab; wir können also (wie beim Beweis zu 12. 1) den Komplex X durch eine direkte Summe von Komplexen $S^m Q$ ersetzen. Wegen 12. 19 können wir uns dann auf den Fall $X = S^k Q$ beschränken.

Nach 12. 6 ist

$$\sigma : H_{k+2n-2}(SP^n S^k Q) \cong H_{k+1+2n-2}(SP^n S^{k+1} Q), \qquad k \geq 3;$$

wir brauchen also nur den Fall $k = 3$ zu betrachten. Hier haben wir eine exakte Folge (s. 12. 5)

(12. 26)

$$H_{2n}(SP_2^n(S^2Q, S^2Q)) \xrightarrow{\alpha_*} H_{2n}(SP^n S^2 Q) \xrightarrow{\sigma} H_{2n+1}(SP^n S^3 Q) \to 0.$$

Nach 12. 22 ist $H_{2n}(SP^n S^2 Q) = \mathbf{Z}$, ebenso

$$H_{2n}(SP^i S^2 Q \otimes SP^{n-i} S^2 Q) = \mathbf{Z},$$

und die Abbildung

$$\alpha_* : H_{2n}(SP^i S^2 Q \otimes SP^{n-i} S^2 Q) \to H_{2n}(SP^n S^2 Q)$$

ist die Multiplikation mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$; letzteres sieht man am besten aus der geometrischen Interpretation von SP^n (die Abbildung $SP^i S^2 \times SP^{n-i} S^2 \to SP^n S^2$, $S^2 =$ 2-Sphäre, hat den Abbildungsgrad $\binom{n}{i}$); man kann aber auch rein algebraisch beweisen, daß der Transfer $H_{2n}(\tau)$ aus 10. 7 hier ein Isomorphismus ist. Die Behauptung

$$H_{2n+1}(SP^n S^3 Q) \cong \mathbf{Z}_p$$

folgt daher aus 10.10.

Beweis für 12. 11. — Es genügt den Satz für s.s. Mengen (= c.s.s. Komplexe) zu beweisen, weil jeder CW-Komplex vom gleichen Homotopietyp wie die geometrische Relasierung einer s.s. Menge ist (vgl. [9], 7 für diese Argumentation).

Wir wählen einen Grundpunkt $b \in E_0$. $X = (\mathbf{Z}E)^0$ sei der FD-Komplex mit Ergänzung null von E (s. 11. 4 (ii)). Dann ist $SP^{n+1}X$ der FD-Komplex von $SP^{n+1}E$ modulo $SP^n E$ (s. [9], 9), also

$$(12.\ 27) \qquad H(SP^{n+1}X) \cong H(SP^{n+1}E,\ SP^n E).$$

Wegen $H_1(E) = 0$ ist $SP^n E$, $n > 1$, einfach zusammenhängend (s. 12. 15). Wir können also den Satz von Hurewicz auf das Paar $(SP^{n+1}E, SP^n E)$, $n > 1$, anwenden und erhalten wegen 12. 3

$$(12.\ 28) \quad \pi_i(SP^{n+1}E, SP^n E) = 0 \quad \text{für} \quad i < k + 2n, \quad n > 1,$$

und für $k > 2$

(12. 29)

$$\pi_{k+2n}(SP^{n+1}E, SP^n E) \cong \begin{cases} H_k(E) \otimes \mathbf{Z}_p, & \text{falls} \quad n + 1 = p^r, \quad p \text{ prim} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in die exakte Homotopiefolge

$$\rightarrow \pi_{i+1}(SP^{n+1}E,\ SP^nE) \rightarrow \pi_i(SP^nE) \rightarrow \pi_i(SP^{n+1}E) \\ \rightarrow \pi_i(SP^{n+1}E,\ SP^nE) \rightarrow$$

von $(SP^{n+1}E,\ SP^nE)$ ein, so erhalten wir (induktiv)

$$\pi_i(SP^nE) \cong \pi_i(SP^{n+1}E) \cong \pi_i(SP^{n+2}E) \cong \cdots \pi_i(SP^\infty E), \quad i < k + 2n - 1, \quad n > 1, \tag{12. 30}$$

und falls $n + 1$ keine Primzahlpotenz ist, auch noch

$$\pi_{k+2n-1}(SP^nE) \cong \pi_{k+2n-1}(SP^\infty E). \tag{12. 31}$$

Im Falle $n + 1 = p^r$, p prim, ergibt sich eine exakte Folge

$$\pi_{k+2n}(SP^\infty E) \rightarrow H_k(E) \otimes Z_p \rightarrow \pi_{k+2n-1}(SP^nE) \\ \rightarrow \pi_{k+2n-1}(SP^\infty E) \rightarrow 0. \tag{12. 32}$$

Wegen $\pi_j(SP^\infty E) \cong H_j(E)$ (s. [32], 6. 10) ist damit der Satz bewiesen.

Beweis für 12. 15. — Wie beim Beweis zu 12. 11 können wir E als s.s. Menge voraussetzen.

Wir betrachten zunächst die Projektion $p : \times^n E \rightarrow \times^n E/\rho$. Wie man leicht sieht, besitzt jeder Kantenweg w in $\times^n E/\rho$ ein Urbild $\tilde{w}$ bezüglich p. Ist w ein geschlossener Kantenweg in $\times^n E/\rho$ mit dem Anfangspunkt in der Diagonale Δ von $\times^n E/\rho$ ($= p$-Bild der Diagonale von $\times^n E$), dann ist jedes Urbild $\tilde{w}$ von w ebenfalls geschlossen, denn über Δ ist p umkehrbar eindeutig. Da man sich bei der Bildung von π_1 auf Kantenwege beschränken kann, ist demnach

$$p_* : \pi_1(\times^n E) \rightarrow \pi_1(\times^n E/\rho)$$

ein Epimorphismus.

Die n natürlichen Injektionen $i^\nu : E \rightarrow \times^n E$ (nach Auswahl eine Grundpunktes in E) induzieren einen Isomorphismus $\pi_1(\times^n E) \cong \pi_1(E) \oplus \pi_1(E) \oplus \cdots$ (s. [29], 17. 8), und ρ permutiert diese Summanden transitiv. Daher ist schon $i_* = p_* i^\nu_* :$ $\pi_1(E) \rightarrow \pi_1(\times^n E/\rho)$ ein Epimorphismus.

Seien nun $x_1,\ x_2 \in \pi_1(\times^n E/\rho)$ und etwa

$$x_\nu = i_*(y_\nu) = p_*(i^\nu_*(y_\nu)), \qquad \nu = 1, 2.$$

Dann ist $i^1_*(y_1) . i^2_*(y_2) = i^2_*(y_2) . i^1_*(y_1)$, also nach Anwenden von p_* $x_1 . x_2 = x_2 . x_1$. Also ist $\pi_1(\times^n E/\rho)$ eine abelsche Gruppe.

Betrachten wir nun das kommutative Diagramm

$$
(12.33) \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(E) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(\times^n E/\rho) \\ \Phi\downarrow & & \downarrow\Phi \\ H_1(E) & \xrightarrow[H_1(i)]{} & H_1(\times^n E/\rho) \end{array}
$$

(Φ der Hurewiczhomomorphismus). $H_1(i)$ ist monomorph (s. [9], 9), also ist der Kern von $H_1(i) \circ \Phi$ die Kommutatorgruppe von $\pi_1(E)$. Der Kern von i_* kann also nicht größer sein, aber auch nicht kleiner, weil $\pi_1(\times^n E/\rho)$ abelsch ist, qed.

LITERATUR

[1] J. F. Adams, On the cobar construction, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, 42 (1956), 409-412.

[2] W. D. Barcus-J. P. Meyer, The suspension of a loop space, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 895-920.

[3] N. Bourbaki, *Séminaire*, Exposé 170, de A. Dold, Dezember, 1958, Paris.

[4] D. Buchsbaum, Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 1-34.

[5] H. Cartan, Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie, *Séminaire*, H. Cartan, 7 (1954-1955), Paris.

[6] H. Cartan, Quelques questions de topologie, *Séminaire*, H. Cartan, 9 (1956-1957), Paris.

[7] H. Cartan-S. Eilenberg, Homological Algebra, *Princeton University Press*, Princeton, N.J. 1956.

[8] C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, *Academic Press Inc.*, New York, 1956.

[9] A. Dold, Homology of symmetric products and other functors of complexes, *Ann. of Math.* 68 (1958), 54-80.

[10] A. Dold, Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe, *Math. Annalen*, 140 (1960), 278-298.

[11] A. Dold-D. Puppe, Non-additive functors, their derived functors, and the suspension homomorphism, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, 44 (1958), 1065-1068.

[12] S. Eilenberg-S. MacLane, On the groups H(π, n) I, *Ann. of Math.*, 58 (1953), 55-106.

[13] S. Eilenberg-S. MacLane, On the groups H(π, n) II, *Ann. of Math.*, 60 (1954), 49-139.

[14] S. Eilenberg-J. A. Zilber, On products of complexes, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 200-204.

[15] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, *Act. Sci. Ind.*, 1252, Hermann, Paris, 1958.

[16] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9 (1957), 119-121.

[17] D. M. KAN, Abstract Homotopy II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42 (1956), 255-258.

[18] D. M. KAN, Functors involving css-complexes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), 330-346.

[19] D. M. KAN, On the homotopy relation for css-maps, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (1957), 75-81.

[20] S. MACLANE, Simplicial topology I, Lecture notes by J. Yao, *University of Chicago*, 1959.

[21] J. MILNOR, The construction FK, Mimeographed notes, *Princeton University*, 1956.

[22] J. C. MOORE, Semi-simplicial complexes, Mimeographed notes, *Princeton University*, 1955-1956.

[23] M. NAKAOKA, Decomposition theorems for homology groups of symmetric groups, *Ann. of Math.*, 71 (1960), 16-42.

[24] D. PUPPE, Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen I, *Math. Zeitschr.*, 68 (1958), 367-406.

[25] D. PUPPE, Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen II, *Math. Zeitschr.*, 68 (1958), 407-421.

[26] J. P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 425-505.

[27] P. A. SMITH, Manifolds with abelian fundamental groups, *Ann. of Math.*, 37 (1936), 526-533.

[28] E. SPANIER, Infinite symmetric products, functions spaces, and duality, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 142-148.

[29] N. E. STEENROD, The topology of fibre bundles, *Princeton University Press*, Princeton N.J. 1951.

[30] N. E. STEENROD, Cohomology operations derived from the symmetric group, *Comment. Math. Helv.*, 31 (1957), 195-218.

[31] G. W. WHITEHEAD, On the homology suspension, *Ann. of Math.*, 62 (1955), 254-268.

[32] A. DOLD-R. THOM, Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, *Ann. of Math,*, 67 (1958), 239-281.

d. 8-12-1960 16-1-61

D. PUPPE A. DOLD