J. WEIER

Sur des invariants intégraux de champs enlacés

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 179-183
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__179_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 179-183.

SUR DES INVARIANTS INTÉGRAUX DE CHAMPS ENLACÉS

par Joseph WEIER (Fribourg Br.)

Étant donnés V une variété différentiable, f un champ de r-plans tangents et g un champ de s-plans tangents à V avec $r \geq s$, nous dirons que f et g sont « *enlacés* » s'il est impossible de déformer les champs f, g en des champs f', g' de manière que $g(p) \subset f(p)$ pour tous les points $p \in$ V. A quelles conditions les champs f et g sont-ils enlacés? C'est cette question que traite notre note. M. le Professeur R. Thom a bien voulu lire une première version de mon manuscrit et m'a suggéré différentes généralisations. Je lui en exprime ma très vive gratitude.

1. Un premier système invariant. — Soient R un espace numérique et r, n des entiers avec $1 \leq r < n$, V une n-variété différentiable compacte orientée plongée dans R, f un champ de r-plans tangents orientés et g un champ de directions tangentes à V.

On peut supposer : l'ensemble, A, de tous les points $p \in$ V satisfaisant $g(p) \subset f(p)$ est un r-polyèdre fini; l'ensemble, B, de tous $p \in$ V où $g(p)$ est orthogonal à $f(p)$ est un $(n\text{-}r)$-polyèdre fini. Par (A, f, g) est déterminé (voir la deuxième section) un r-cycle, z, à coefficients entiers, par (B, f, g) un $(n - r)$-cycle, ζ, de même à coefficients entiers. Si $z \not\sim 0$, alors les champs f et g sont sûrement enlacés. Il est donc impossible de déformer g en un champ g' tel que $g'(p) \subset f(p)$ pour tout point p.

Alors soit $z \sim 0$. Deux $(r+1)$-chaînes, x_1 et x_2, de V avec $\partial x_1 = \partial x_2 = z$ seront dites appartenir à la même classe d'équivalence par rapport à z si $x_1 - x_2 \sim 0$. Soient X_1, X_2, ... les classes d'équivalence obtenues de cette manière. Alors toute paire (X_i, ζ) définit, univoquement modulo les cycles homologues à zéro, un 1-cycle d'intersection, $S(i)$.

Si maintenant $\omega_1, \omega_2 \ldots$, forment une base des 1-formes différentielles closes sur V, alors les nombres

$$\omega_{ij} = \int_{S(i)} \omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots,$$

sont univoquement déterminés par les classes d'homotopie de f et g au sens suivant : Si l'on déforme f, g en des champs f', g' et si ω'_{ij} sont des nombres appartenant à (f', g') qui correspondent aux ω_{ij}, alors on peut supposer les ω'_{ij} munies d'indices de façon que $\omega_{ij} = \omega'_{ij}$ pour toute paire (i, j) avec $i \leq m$ et que $\omega_{ij} = 0$, $\omega'_{ij} = 0$ pour $i > m$.

2. Une caractérisation numérique de l'enlacement. — Au lieu des classes d'homotopie de champs de directions envisagées ci-dessus, on peut aussi prendre pour base des classes d'homologies : Soient g, g' deux champs de direction tangents à V. Alors il existe une homotopie $\{g^\tau\}$ de g en g' telle que chacun des champs g^τ possède au plus un nombre fini de singularités et que l'ensemble de toutes les paires (p, τ), où p est singularité de g^τ, représente un 1-polyèdre fini, P. Ce dernier polyèdre est donc situé dans le cylindre ouvert $V \times (0,1)$. Soient s_i les 1-simplexes orientés d'une décomposition simpliciale de P, s_j un des s_i et t un n-simplexe situé en $V \times (0,1)$ orthogonal à s_j et orienté par $V \times (0,1)$ et s_j. Alors $g^\tau(p)$ est, pour tout point $(p\ \tau)$ de la $(n-1)$-sphère ∂t, un demi-rayon tangent à V. On obtient donc une transformation de la $(n-1)$-sphère ∂t dans la $(n-1)$-sphère de direction au point p. Soit b_j le degré de cette transformation. Alors $\Sigma b_i s_i$ est un 1-cycle. S'il existe une homotopie de g en g', dont le 1-cycle ainsi construit est homologue à zéro, alors nous dirons que g et g' appartiennent à la même classe d'homologie.

Pour définir le cycle z de la première section, soient de nouveau s_i les r-simplexes orientés d'une décomposition simpliciale de A, s_j un des s_i et t un petit $(n-r)$-simplexe en V orthogonal à s_j et orienté par (V, s_j). Pour tout $p \in V$, soit $f^*(p)$ le $(n - r)$-plan orthogonal à $f(p)$ et tangent à V au point p. Soit $f^*(p)$ orienté par la paire $(V, f(p))$. Alors $g(p)$ est, pour tout $p \in \partial t$, non orthogonal à $f^*(p)$. C'est pourquoi la projection orthogonale, $g^*(p)$, de $g(p)$ sur $f^*(p)$ est un demi-rayon en $f^*(p)$, non pas un point. Le simplexe t étant suffisamment petit, on peut supposer que tous les plans $f(p)$ avec $p \in t$ sont parallèles l'un à l'autre. Par suite, $g^*|\partial t$ détermine une transformation de la $(n - r - 1)$-sphère ∂t dans une $(n - r - 1)$-sphère de vecteurs. Soit de nouveau b_j le degré de cette transformation. Alors on a $z = \Sigma b_i s_i$.

Le cycle ζ se définit de façon analogue.

3. Sur la structure plus fine de la situation mutuelle. — Comme plus haut, soient V une n-variété différentiable compacte orientée plongée dans un espace numérique, r un entier positif $< n$, f un r-champ orienté et g un 1-champ orienté tangent à V. Soient à nouveau l'ensemble de tous les points $p \in V$ avec $g(p) \subset f(p)$ un r-polyèdre, A, et l'ensemble de tous $p \in V$ satisfaisant $g(p) \perp f(p)$ un $(n - r)$-polyèdre, B. Comme plus haut, soient z le cycle défini par (A, f, g) et ζ celui déterminé par (B, f, g).

Soient $A_1, A_2, \ldots$ les composantes connexes du polyèdre A et z_h^* le cycle $z|A_h$. Deux z_h^*, désignés par z_i^* et z_j^*, seront dits appartenir à la même « *composante d'homotopie* » au sens de M. J. Nielsen (voir par exemple [2] et [3]) s'il existe un ensemble, W, ouvert par rapport à V satisfaisant à

$$A_i \cup A_j \subset W \qquad \text{et} \qquad (A_h \cup B) \cap \overline{W} = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \neq i, j$$

tel que l'on peut, sans changement sur $V - W$, déformer f, g en des champs f', g' qui jouissent de la propriété : l'ensemble de tous les points $p \in W$ avec $g'(p) \subset f'(p)$ est un polyèdre fini connexe.

Soient $z_1, z_2, \ldots$ les composantes d'homotopie de z et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, les composantes d'homotopie de ζ. Soient $z'_1, z'_2, \ldots$ celles des z_i homologues à zéro. Rangeons deux $(r + 1)$-chaînes, x_1 et x_2, à coefficients entiers satisfaisant $\partial x_1 = \partial x_2 = z'_h$ dans la même classe d'équivalence par rapport à z'_h si $x_1 - x_2 \sim 0$. De cette manière, les $(r + 1)$-chaînes x avec $\partial x = z'_h$ se décomposent en des classes d'équivalence, X_{h1}, X_{h2}, ..., relativement à z'_h. Toute paire

$$(X_{hi}, \zeta_j)$$

définit, à des chaînes homologues à zéro près, un 1-cycle d'intersection, $S(h, i, j)$.

Soient ω_1, ω_2, ... les formes différentielles définies en la première section. Alors le système des nombres

$$\omega_{hijk} = \int_{S(h,i,j)} \omega_k,$$

$h = 1, 2, ..., i = 1, 2, ..., j = 1, 2, ..., k = 1, 2, ...$, est univoquement défini par les classes d'homotopie de f et g au sens suivant :

Si f' est homotope à f et g' homotope à g et si les ω'_{hijk} forment un système appartenant à (f', g'), alors on peut supposer les ω'_{hijk} munies d'indices tels que l'on a : $\omega'_{hijk} = \omega_{hijk}$ *pour tout quadruple* (h, i, j, k) *de façon que* ω_{hijk} *et* ω'_{hijk} *est définie,* $\omega_{hijk} = 0$ si ω'_{hijk} n'est pas définie, $\omega'_{hijk} = 0$ si ω_{hijk} n'est pas définie.

De plus soient α_h une forme différentielle duale à z_h au sens du théorème d'isoporphisme de M. G. DE RHAM [1] et β_i une telle duale à ζ_i. Alors les nombres

$$\Omega_{hi} = \int_V \alpha_h \wedge \beta_i$$

sont uniquement déterminés au sens suivant : les Ω'_{hi} étant des nombres d'espèce analogue appartenant à (f', g'), alors le système des Ω'_{hi} est, à des zéros et des permutations près, égal au système des Ω_{hi}.

Les champs f et g sont sûrement enlacés si $\omega_{hijk} \neq 0$ *pour au moins un quadruple* (h, i, j, k) *ou si* $\Omega_{hi} \neq 0$ *pour au moins une paire* (h, i).

Dans le cas général où g est un s-champ, on obtient, au lieu des cycles z et ζ définis plus haut, des cycles à coefficients locaux pris dans des groupes d'homotopie de variétés grassmanniennes (voir par exemple [4]). L'application du théorème d'isomorphisme de M. G. DE RHAM n'est plus possible maintenant sans constructions auxiliaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. V. D. HODGE, The theory and applications of harmonic integrals, *Cambridge*, 87-101 (1952).

[2] J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie zweiseitiger Flächen I, II, *Acta Mathem.* 50, 189-358 (1927), 53, 1-76 (1929).

[3] J. NIELSEN, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Kgl. Dänische Akad. Wiss.* 21, 1-89 (1944).

[4] N. E. STEENROD, The topology of fibre bundles, *Princeton Mathem. Series* 12 (1957).