

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

## **Forme abstraite du théorème de capacitabilité**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 9 (1959), p. 83-89

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1959\\_\\_9\\_\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__83_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# FORME ABSTRAITE DU THÉORÈME DE CAPACITABILITÉ,

par **Gustave CHOQUET**, Paris.

---

Le théorème établissant la capacitabilité des ensembles boréliens et analytiques semble à première vue ne pas pouvoir prendre une forme abstraite (c'est-à-dire ne faisant pas appel à la topologie) puisque les ensembles analytiques sont définis comme images continues de certains ensembles; et en fait la démonstration utilise <sup>(1)</sup> les notions de produit d'espaces topologiques et de compacité.

Cependant nous allons voir qu'on peut donner à ce théorème une forme et une démonstration purement abstraites. On y gagnera en généralité et en simplicité.

Le passage de ce théorème abstrait au théorème antérieur s'obtient grâce à un théorème reliant les notions d'ensemble  $\mathfrak{K}$ -analytique et d'ensemble  $\mathfrak{K}$ -souslinien <sup>(2)</sup>.

A côté de l'énoncé général, nous en donnerons un autre qui, sous des conditions plus faibles, fournit la capacitabilité d'ensembles qui sont, dans notre cadre abstrait, l'équivalent des  $K_{\sigma\delta}$ .

## 1. Théorème de base.

**DÉFINITION 1.** — Soit  $E$  un ensemble; soit  $\mathfrak{H}$  une partie de  $\mathfrak{P}(E)$ , stable par réunion finie et intersection dénombrable, et telle que  $\emptyset \in \mathfrak{H}$ .

<sup>(1)</sup> CHOQUET, *Theory of capacities*, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 5, 1953, ch. 6, pp. 221-224.

<sup>(2)</sup> CHOQUET, *Ensembles  $\mathfrak{K}$ -analytiques et  $\mathfrak{K}$ -sousliniens. Cas général et cas métrique*, dans ce même fascicule.

On appelle *capacité abstraite sur*  $(E, \mathcal{H})$  toute application croissante  $f$  de  $\mathfrak{P}(E)$  dans  $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ , telle que :

1) Pour toute suite décroissante  $(H_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}$ , on ait

$$(1) \quad f\left(\bigcap H_n\right) = \lim f(H_n).$$

2) Pour toute suite croissante  $(X_n)$  de parties de  $E$ , on ait

$$(2) \quad f\left(\bigcup X_n\right) = \lim f(X_n).$$

*Exemples.* — 1)  $\mathcal{H}$  est un  $\sigma$ -corps de parties de  $E$ ;  $f$  est la mesure extérieure associée à une mesure positive finie et dénombrablement additive sur  $\mathcal{H}$ .

2)  $E$  est l'espace  $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ ;  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des compacts de  $E$ ;  $f$  est la capacité extérieure associée au noyau de Riesz  $r^{\alpha-n} (0 < \alpha \leq 2)$ .

**DÉFINITION 2.** — Une partie  $X$  de  $E$  est dite  $(f, \mathcal{H})$ -capacitable (ou plus simplement *capacitable*) si

$$f(X) = \sup_{\substack{H \subset X \\ H \in \mathcal{H}}} f(H)$$

Évidemment, pour toute suite croissante  $(X_n)$  d'ensembles capacitables, la réunion des  $X_n$  est capacitable; en particulier comme tout  $X \in \mathcal{H}$  est capacitable, toute réunion dénombrable d'éléments de  $\mathcal{H}$  l'est aussi. Le problème consiste maintenant à trouver une vaste classe d'autres ensembles capacitables.

Il est évident que si l'on compose  $f$  avec une application continue  $\varphi$  strictement croissante de  $\bar{\mathbb{R}}$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , les théories relatives à  $f$  et  $\varphi(f)$  sont isomorphes. Nous en profiterons pour supposer dans la démonstration qui suit, que  $f$  est bornée.

Nous allons utiliser ici des propriétés de l'opération (A); nous renvoyons à un travail antérieur <sup>(2)</sup> pour la terminologie, les notations et le rappel de ces propriétés.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $f$  une capacité abstraite sur  $(E, \mathcal{H})$ . Tout ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien de  $E$  (donc en particulier tout ensemble  $\mathcal{H}$ -borélien) est  $(f, \mathcal{H})$  capacitable.

*Démonstration.* — Soit  $(H_i)$  un système déterminant sur  $\mathcal{H}$ , et soit  $A$  son noyau.

Pour tout  $s \in S$ , posons :

$$A_s = \bigcup_{s' \prec s} H_{s'} \quad \text{puis} \quad B_s = \bigcup_{s' \leq s} A_{s'}.$$

On a les relations :

$$A = \bigcup_n A_n \quad \text{et} \quad A_s = \bigcup_n A_{s,n}^{(3)},$$

d'où

$$(3) \quad B_s = \bigcup_{\substack{s' \leq s \\ n}} A_{s',n}.$$

Donnons nous un nombre  $\varepsilon > 0$ .

De  $A = \bigcup_n A_n$  et de la relation (2) résulte qu'il existe un entier  $a_1$  tel que

$$f(B_{a_1}) > f(A) - \varepsilon/2.$$

Supposons définis les entiers  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ . Des relations (2) et (3) résulte qu'il existe un entier  $a_p$  tel que

$$f(B_{a_1, a_2, \dots, a_p}) > f(B_{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}}) - \varepsilon/2^p.$$

Par addition, ces inégalités donnent

$$(4) \quad f(B_{a_1, a_2, \dots, a_p}) > f(A) - \varepsilon.$$

Posons 
$$L_s = \bigcup_{s' \leq s} H_{s'};$$

pour tout  $s$ , on a  $A_s \subset H_s$ , d'où  $B_s \subset L_s$ .

La relation (4) donne donc

$$(5) \quad f(L_{a_1, a_2, \dots, a_p}) > f(A) - \varepsilon.$$

Or la suite  $(L(p) = L_{a_1, \dots, a_p})$  est une suite décroissante d'éléments de  $\mathcal{H}$ . Posons  $L = \bigcap_p L(p)$ ; c'est un élément de  $\mathcal{H}$ . La relation (5) donne :

$$f(L) = \lim f(L(p)) > f(A) - \varepsilon.$$

Donc si l'on peut montrer que  $L \subset A$ , on aura bien montré que  $A$  est capacitable.

(3) Nous désignerons par  $(s, n)$  la suite finie formée en prolongeant la suite  $s$  par l'élément  $n$ .

Désignons par  $\alpha$  la suite infinie  $(a_1, a_2, \dots)$  et par  $\alpha_p$  la suite finie  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ ; on a :

$$L = \bigcap_p L(p) = \bigcap_p \left( \bigcup_{s \leq \alpha_p} H_s \right) = \bigcup_{\sigma \leq \alpha} H_\sigma \subset \bigcup H_\sigma = A.$$

De ces relations, la seule non évidente est l'égalité du milieu; c'est une relation algébrique connue qui se démontre facilement en utilisant le fait que, pour tout  $p$ , les  $s$  qui sont  $\leq \alpha_p$  sont en nombre fini.

## 2. Capacitabilité individuelle.

**DÉFINITION 3.** — Soit  $E$  un ensemble et soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathfrak{B}(E)$ , stable par intersection dénombrable.

Soit  $f$  une application croissante de  $\mathfrak{B}(E)$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , vérifiant la condition (1) de la définition 1.

On appelle suite privilégiée toute suite croissante  $(H_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}$  telle que, pour tout  $X \subset E$ , on ait :

$$(2') \quad f\left(\bigcup (X \cap H_n)\right) = \lim f(X \cap H_n).$$

On désigne par  $\mathcal{H}'_\sigma$  l'ensemble des parties de  $E$  qui sont réunion d'une telle suite et par  $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$  l'ensemble des  $A \subset E$  de la forme  $A = \bigcap_n A_n$  où  $A_n \in \mathcal{H}'_\sigma$ .

**THÉORÈME.** — Avec les notations de la définition 3, tout élément de  $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$  est  $(f, \mathcal{H})$ -capacitable.

*Démonstration.* — Elle est calquée sur une démonstration antérieure (Choquet, *loc. cit.*):

Soit  $A \in \mathcal{H}'_{\sigma\delta}$ . On peut écrire  $A = \bigcap A_n$  avec  $A_n = \bigcup_p A_n^p$ , où la suite  $p \rightarrow A_n^p$  est pour tout  $n$  une suite privilégiée.

Soit  $\varepsilon$  un nombre  $> 0$ .

Posons  $a_i^p = A \cap A_i^p$ ; d'après (2)' on a :

$$f(A) = f\left(\bigcup a_i^p\right) = \lim f(a_i^p).$$

Donc il existe  $p_1$  tel que

$$f(A) - f(a_1^{p_1}) < \varepsilon/2.$$

Supposons défini  $a_n^{p_n} \subset A$ .

Posons  $a_{n+1}^{p_{n+1}} = a_n^{p_n} \cap A_{n+1}^{p_{n+1}}$ ; d'après (2)' il existe  $p_{n+1}$  tel que

$$f(a_n^{p_n}) - f(a_{n+1}^{p_{n+1}}) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Ajoutons les  $n$  premières inégalités ainsi obtenues; on obtient :

$$f(A) - f(a_n^{p_n}) < \varepsilon.$$

La suite  $(a_n^{p_n})$  est décroissante; posons  $a_\varepsilon = \bigcap a_n^{p_n}$ ;

d'où 
$$a_\varepsilon = A \cap \left[ \bigcap A_n^{p_n} \right].$$

Or  $A_n^{p_n} \subset A_n$ , d'où  $\bigcap A_n^{p_n} \subset A$ , d'où  $a_\varepsilon = \bigcap A_n^{p_n}$ .

Ainsi, d'une part  $a_\varepsilon \in \mathcal{H}$ ; d'autre part, si on pose  $B_n = \bigcap_1^n A_n^{p_n}$  la relation  $a_\varepsilon = \bigcap B_n$  entraîne d'après (1) que

$$f(a_\varepsilon) = \lim f(B_n) \geq \lim f(a_n^{p_n}) > f(A) - \varepsilon.$$

Donc 
$$f(A) = \sup_{\substack{H \subset A \\ H \in \mathcal{H}}} f(H),$$

ce qui démontre le théorème.

*Application.* — Nous montrerons dans un autre travail que si  $E$  est un espace compact,  $N$  une application de  $E \times E$  dans  $[0, +\infty]$ , semi-continue inférieurement, et continue hors de la diagonale de  $E \times E$ , et si  $f$  désigne la  $N$ -capacité extérieure associée à ce noyau  $N$ , on peut appliquer à  $f$  le théorème 2.

Plus précisément, si on prend pour  $\mathcal{H}$  l'ensemble des compacts de  $E$ , on montre que toute suite  $(H_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}$  qui est *régulièrement croissante* (\*) est *privilegiée*. En particulier, si tout ouvert de  $E$  est un  $F_\sigma$ , tout  $G_\delta$  de  $E$  appartient à  $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$ ; il en résulte que tout  $G_\delta$  et tout  $F_\sigma$  de  $E$  sont capacitables.

Ce résultat suffit aux besoins de la théorie du potentiel.

### 3. Extensions du théorème 1.

Le théorème 1 ne couvre pas l'ensemble des cas dans lesquels on a besoin d'un théorème de capacitabilité. Il est peu

(\*) La suite  $(H_n)$  est dite *régulièrement croissante* si elle est croissante et si tout  $H_n$  possède un voisinage  $V_n$  tel que  $V_n \cap H_p$  soit constant à partir d'un certain  $p$

commode d'énoncer un théorème contenant toutes les variantes possibles; il vaut mieux, dans chaque cas particulier, essayer d'adapter la démonstration du théorème 1. Nous ne donnerons ici que les indications pour quelques extensions possibles; nous n'envisagerons pas le cas des capacités à valeurs vectorielles ou à valeurs dans un ensemble ordonné.

1) La capacité  $f$  peut n'être définie que sur une partie de  $\mathfrak{P}(E)$ . Plus précisément, soit  $E$  un ensemble et soient  $\mathcal{H} \subset \mathcal{C} \subset \mathfrak{P}(E)$ .

On suppose que  $\mathcal{H}$  est stable par réunion finie et intersection dénombrable et que  $\mathcal{C}$  contient la réunion de toute suite croissante d'éléments de  $\mathcal{C}$ .

Une capacité abstraite sur  $(E, \mathcal{C}, \mathcal{H})$  est une application croissante  $f$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  vérifiant les conditions (1) et (2) de la définition 1 (dans (2) on suppose en outre que  $X_n \in \mathcal{C}$ ).

La capacitabilité d'un élément de  $\mathcal{C}$  se définit comme dans la définition 2.

Suivant les cas, deux voies sont possibles :

a) Si  $\mathcal{C}$  est stable par intersection dénombrable, on étend  $f$  à  $\mathfrak{P}(E)$  en posant, pour tout  $X \subset E$  :

$$f(X) = \inf_{\substack{X \subset G \\ G \in \mathcal{C}}} f(G).$$

On vérifie que  $f$  est alors une capacité abstraite sur  $(E, \mathcal{H})$  et l'on peut appliquer le théorème 1.

b) Si  $\mathcal{C}$  contient tout ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien, on peut reprendre mot pour mot la démonstration du théorème 1 et montrer que tout ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien est capacitabile.

*Application.* — Soit  $A$  un ensemble et  $\mathcal{C}_0$  l'ensemble des applications de  $A$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ; on désigne par  $\mathcal{H}_0$  une partie de  $\mathcal{C}_0$  stable par les opérations « enveloppe supérieure finie » et « enveloppe inférieure dénombrable » (par exemple les fonctions semi-continues inférieurement lorsque  $A$  est topologique).

Soit  $f_0$  une application croissante de  $\mathcal{C}_0$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  telle que, pour toute suite décroissante  $(\varphi_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}_0$  (resp. croissante d'éléments de  $\mathcal{C}_0$ ), on ait

$$f_0(\lim \varphi_n) = \lim f_0(\varphi_n).$$

Pour étudier la capacitabilité associée à  $f$ , on se ramène au schéma ensembliste suivant : On pose  $E = A \times \bar{R}$ ; on appelle  $\mathcal{C}$  l'ensemble des parties  $X$  de  $E$  qui sont réunion de demi-droites  $x \times [-\infty, a]$  ou  $x \times [-\infty, a[$ ; il existe une application canonique  $X \rightarrow \varphi_X$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}_0$ ; on appelle  $\mathcal{H}$  l'ensemble des  $X$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\varphi_X \in \mathcal{H}_0$ .

Si l'on pose enfin :  $f(X) = f_0(\varphi_X)$ , la fonction  $f$  est une capacité abstraite sur  $(E, \mathcal{C}, \mathcal{H})$  et on vérifie immédiatement qu'on est ici à la fois dans les cas  $a)$  et  $b)$ .

2) On peut donner au théorème 1 une formulation plus abstraite en supposant que la capacité  $f$  n'est plus définie sur  $\mathfrak{B}(E)$  mais sur un ensemble ordonné :

Soient  $P$  un ensemble ordonné (pour la relation  $\prec$ ),  $\mathcal{H}$  une partie de  $P$  et  $f$  une application croissante de  $P$  dans  $\bar{R}$ . On dit que l'élément  $a$  de  $P$  est capacitabile si

$$f(a) = \sup_{\substack{x \prec a \\ x \in \mathcal{H}}} f(x).$$

On suppose définies sur  $P$  une notion de suite croissante (resp. décroissante) convergente; et en outre une application  $(a, x) \rightarrow (a \frown x)$  de  $P \times \mathcal{H}$  dans  $P$ .

Si ces diverses notions satisfont à quelques conditions destinées à remplacer les conditions (1) et (2) de la définition (1), on montre que tout  $x \in \mathcal{H}_{\delta}$  est capacitabile (c'est-à-dire un  $x$  qui est limite d'une suite décroissante de limites de suites croissantes d'éléments de  $\mathcal{H}$ ).

Si on suppose en outre que  $P$  est réticulé, dénombrablement vers le bas, de façon complète vers le haut, avec une distributivité convenable, on peut définir une notion d'éléments  $\mathcal{H}$ -sousliniens de  $P$ , et montrer leur capacitabilité.