Laurent Schwartz

Théorie des distributions à valeurs vectorielles. II

Annales de l'institut Fourier, tome 8 (1958), p. 1-209
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1958__8__1_0>

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES (*)

par **Laurent SCHWARTZ**

RÉSUMÉ DU CHAPITRE II

§ 1. Introduction.

L'introduction pose le problème qui sera l'objet essentiel du chapitre. Si $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ sont 3 espaces de distributions, et si $\cup$ est une application bilinéaire : $(S, T) \to S \cup T$, séparément continue de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ (produit scalaire, multiplication, convolution); si E, F, G, sont des espaces vectoriels topologiques, θ une application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G, peut-on définir de façon naturelle une application bilinéaire : $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} \cup_\theta \vec{T}$, de $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{L}(G)$, telle que

$$S\vec{e} \cup_\theta T\vec{f} = (S \cup T)\theta(\vec{e}, \vec{f}), \qquad \text{pour} \qquad S \in \mathcal{H}, \quad T \in \mathcal{K}, \quad \vec{e} \in E, \quad \vec{f} \in F?$$

Il s'agit là d'un problème délicat, auquel on ne peut donner de réponse affirmative que moyennant des conditions assez restrictives, mais inévitables.

On définit à la page 9 les applications bilinéaires $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinues, et les produits tensoriels topologiques qui leur sont associés. En particulier, on introduira constamment, sur les produits tensoriels, 5 topologies remarquables, notées ι, γ, β, π, ε (p. 12). Il y a lieu de leur associer la notion de λ-parties d'un espace vectoriel, et de parties σ-τ-décomposables d'un produit tensoriel quasi-complété (p. 15); la proposition 1 (p. 16) donne les exemples fondamentaux de parties σ-τ-décomposables, tandis que la proposition 1 *bis* (p. 17) montre que $\mathcal{D}_{x,y} = \mathcal{D}_x \hat{\otimes}_\iota \mathcal{D}_y$.

§ 2. Les théorèmes de croisement.

La proposition 2 (p. 18) donne le théorème fondamental de croisement, et l'application $\Gamma_{\mu,\lambda}$ de $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$. Ce théorème est la clef de tous les produits de distributions à valeurs vectorielles. Cependant son énoncé est « abstrait », et ne contient pas d'espaces de distributions;

(*) La première partie de ce mémoire a paru dans le tome VII des *Annales de l'Institut Fourier*, pp. 1-141.

d'autre part, il ne donnera que les produits « élémentaires », correspondant aux hypothèses les plus fortes, mais qui seront, en fait, les plus utiles. La démonstration de la proposition 2 est longue; elle va jusqu'à la page 32. Ensuite on étudie (p. 34) un croisement plus général (application $\Gamma_{\varphi,\chi;\psi,\omega}$ et $\Delta_{\varphi,\chi;\psi,\omega}$); en fait, on le déduit du précédent, et cette étude, d'ailleurs incomplète, est d'un intérêt limité, au moins dans l'état actuel des choses.

La proposition 3 (p. 37) donne l'application générale aux distributions, annoncée dans l'introduction : en prenant successivement pour $\cup$ le produit scalaire, la multiplication, la convolution, on aura tous les produits désirés pour les distributions à valeurs vectorielles.

§ 3. Produit « scalaire » de deux distributions à valeurs vectorielles. Étude élémentaire.

Le produit « scalaire » de $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathrm{E})$ et de $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$ est celui qui, pour $\vec{\varphi} = \psi\vec{e}$, $\vec{\mathrm{T}} = \mathrm{S}\vec{f}$, est égal à $(\psi \cdot \mathrm{S})\vec{e} \otimes \vec{f}$; nous le considérerons comme élément de $\mathrm{E} \widehat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$. La proposition 4 (p. 41) donne des conditions générales d'existence d'un produit scalaire de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{E} \widehat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$; c'est une conséquence immédiate de la proposition 3. Le produit $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} \in \mathrm{E} \widehat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ est indépendant de $\mathcal{H}$ dans les conditions fixées par la proposition 5 (p. 43) il est nul si les supports de $\vec{\varphi}$ et de $\vec{\mathrm{T}}$ ont une intersection vide, proposition 6 (p. 45); on peut le calculer par une intégrale usuelle $\int_{\mathrm{R}^n} (\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}(x)) dx$ dans les conditions fixées par la proposition 7 (p. 49), si $\vec{\varphi}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ sont des fonctions. Enfin la proposition 8 (p. 59) relie le produit scalaire aux résultats du chapitre I, dans lequel, comme nous l'avons vu, n'intervenaient jamais que des produits d'une distribution scalaire et d'une distribution vectorielle.

§ 4. Produit « scalaire ». Étude générale.

Les résultats du paragraphe 3 sont suffisants dans des cas très généraux; néanmoins il faut parfois aller plus loin, et étudier un produit scalaire à valeur dans $\mathrm{E} \widehat{\otimes}_\iota \mathrm{F}$ ou $\mathrm{E} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}} \mathrm{F}$. Il faut alors des hypothèses bien plus restrictives sur $\vec{\varphi}$ ou $\vec{\mathrm{T}}$, et des démonstrations plus délicates. Le § 4 est indépendant du § 3 (et même du § 2), dont il est une généralisation; nous avons cependant écrit le § 3 à cause de son caractère plus élémentaire, et le lecteur aura tout avantage à se borner au § 3, s'il n'a pas un besoin indispensable du § 4.

Le produit « scalaire » général $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$, de $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$ et de $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$, relativement à une application Λ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$, est défini à la proposition 10 (p. 57). La démonstration est compliquée, et va jusqu'à la page 67.

La proposition 11 (p. 67) est une variante particulière de la proposition 10, ainsi que la proposition 17 (p. 77).

Le produit scalaire est continu en $\vec{\mathrm{T}}$ pour $\vec{\varphi}$ fixée, dans les conditions indiquées à la proposition 12 (p. 70), d'où l'on déduit la caractérisation de ce produit donnée à la proposition 13 (p. 72); il est continu en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée, dans les conditions indiquées à la proposition 14 (p. 74), d'où la caractérisation donnée à la proposition 15 (p. 75). Il est continu par rapport à l'ensemble des variables $\vec{\varphi}$, $\vec{T}$, dans les conditions énoncées à la proposition 18 (p. 80). La proposition 20 (p. 83) indique dans quelles conditions le produit scalaire de $\vec{\varphi}$ et de $\vec{T}$ ne dépend que de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$ et non des espaces $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ utilisés, et traite des problèmes de supports. La proposition 20 *bis* (p. 86) étudie le cas particulier $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, $\Lambda =$ identité. Enfin, le produit scalaire se calcule par une intégrale usuelle dans les conditions indiquées par les propositions 21 (p. 87), 21 *bis* (p. 93), 21 *ter* (p. 94), et leurs corollaires. La fin du paragraphe traite de diverses questions particulières, et donne des exemples. L'exemple 1 (p. 99) est celui où $E = \mathcal{L}(F; G)$; il a été utilisé par BRUHAT dans [1]. L'exemple 2 (p. 101) donne le dual de $\mathcal{H}(E)$ et le produit scalaire entre $\mathcal{H}(E)$ et son dual (proposition 22, p. 103, et ses corollaires). L'exemple 3 (p. 105) est celui du produit scalaire de $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E) \times \mathcal{D}_c'^m(F)$ dans $E \hat{\otimes}_\iota F$, proposition 24 (p. 119); il est précédé de lemmes, qui peuvent être utiles en eux-mêmes, sur la décomposition de δ en sommes de dérivées de fonctions (lemme, p. 105), ou sur les opérateurs de convolution nucléaires (proposition 23, p. 107).

§ 5. Produit multiplicatif.

Si $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, on peut définir leur produit multiplicatif $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$. La proposition 25 (p. 120) fixe des conditions générales d'existence d'un produit multiplicatif de $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$; c'est une conséquence immédiate de la proposition 3. Ce produit est associatif (proposition 25 *bis*, p. 122) (¹), le support de $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi$ est contenu dans l'intersection des supports de $\vec{\alpha}$ et $\vec{T}$ (proposition 27, p. 124), on a la formule de dérivation du produit (proposition 28, p. 125). Si $\vec{\alpha}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions, le produit est la fonction $\vec{\alpha}(\hat{x}) \hat{\otimes}_\pi \vec{T}(\hat{x})$ (proposition 29, p. 125); moyennant des conditions convenables, le produit scalaire de la proposition 4 s'exprime comme intégrale d'un produit multiplicatif: $\varphi \cdot_\pi T = \int_{R^n} (\vec{\varphi}\vec{T})_\pi$, formule (II, 5; 7), proposition 31 (p. 126). On en déduit la légitimité des notations fonctionnelles, $\vec{\alpha}(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{T}(\hat{x})$ pour le produit multiplicatif (p. 125), et $\int_{R^n} (\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{T}(x))\, dx$ pour le produit scalaire (p. 127).

Il existe, à côté du produit multiplicatif élémentaire précédent, un produit multiplicatif général $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\iota F)$; il est au produit élémentaire ce qu'est le produit scalaire général du § 4 au produit scalaire élémentaire du § 3, et à son sujet on peut faire les mêmes remarques. Il est étudié à partir de la page 127. On le définit à la proposition 32 (p. 127). qui s'appuie sur la propo-

(¹) Les questions de commutativité ne seront étudiées que pour la convolution (p. 152).

sition 10. Les cas les plus importants sont énumérés au corollaire 1 (p. 133). On en donne ensuite des exemples intéressants : produit multiplicatif, sur $X^m \times Y^n$, d'une distribution semi-régulière en x et d'une distribution intégralement semi-régulière en y (exemple 1, p. 138); sections-distributions des espaces fibrés à fibre vectorielle topologique (exemple 2, p. 140).

§ 6. Produit tensoriel.

Si $\vec{S}_x \in \mathcal{D}'_x(E)$, $\vec{T}_y \in \mathcal{D}'_y(F)$ leur produit tensoriel $\vec{S}_x \otimes\otimes_\iota \vec{T}_y \in \mathcal{D}'_{x,y}(E \hat{\otimes}_\iota F)$ est défini à la proposition 33 (p. 145). Sa valeur sur $\varphi \in \mathcal{D}_{x,y}$ se calcule par la règle de Fubini, formule (II, 6; 2). Si $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions, le produit tensoriel est la fonction $\vec{S}(\hat{x}) \otimes \vec{T}(\hat{y})$, dans les conditions énoncées à la proposition 33 *bis* (p. 149). Le produit tensoriel sera utilisé dans la convolution (proposition 39).

§ 7. Convolution.

Pour $\vec{S} \in \mathcal{E}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, on peut définir un produit de convolution $\vec{S} *_\pi \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$. La proposition 34 (p. 151) fixe des conditions générales d'existence d'une convolution de $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$; c'est une conséquence immédiate de la proposition 3. Cette convolution est associative (p. 152), commutative (p. 152); $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ ne dépend pas de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ dans les conditions fixées à la proposition 35 (p. 155). Si les supports de $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont A et B, celui de $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ est contenu dans $\overline{A + B}$ (proposition 36, p. 155). La proposition 37 (p. 156) donne la relation entre produit scalaire et produit de convolution, et son corollaire 1 (p. 158) traite de la régularisation.

A côté du produit de convolution élémentaire que nous venons de voir, il y a un produit de convolution général $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\iota F)$, qui est au produit élémentaire ce qu'est le produit scalaire général du § 4 au produit scalaire élémentaire du § 3, et sur lequel on peut faire les mêmes remarques. Il est donné à la proposition 38 (p. 159), conséquence de la proposition 10, et à la proposition 39 (p. 167), à partir du produit tensoriel. De nombreux exemples sont donnés. La proposition 39 fait tout de même du produit de convolution général un produit différent des autres, il y a intérêt à la connaître même pour des non-spécialistes, à côté des produits élémentaires.

Si $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions, à quelle condition leur produit de convolution peut-il se calculer par l'intégrale usuelle $\int_{R^n} \big(\vec{S}(\hat{x} - t) \otimes \vec{T}(t)\big)\, dt$? C'est là un problème difficile à traiter dans sa généralité. On en donne une solution valable à la proposition 40 (p. 179). Plus généralement, si $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont des distributions, la distribution $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes\otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})$ existe toujours; quand le produit de convolution en est-il l'intégrale partielle en t, au sens du § 5 du chapitre I (p. 130)? C'est ce qu'indique la proposition 41 (p. 184).

Les propositons 42 (p. 185) et 42 *bis* (p. 186) relient la multiplication et la convolution par la transformation de Fourier, la proposition 43 (p. 186) les relie par la transformation de Laplace. Ces propositions sont essentielles pour les applications.

§ 8. Étude de trois contre-exemples.

Souvent dans cet ouvrage, les théorèmes n'ont été énoncés que moyennant, des conditions très restrictives. Le présent paragraphe montre, par des contre-exemples, que de telles restrictions sont nécessaires (voir § 1, Introduction). Ce paragraphe n'est donc pas indispensable à la compréhension du reste ni à son utilisation pratique. Néanmoins les restrictions indiquées dans les énoncés étaient toujours considérables, le caractère nucléaire des espaces ou des applications était essentiel, et il n'est pas mauvais de constater que les 3 contre-exemples de ce paragraphe n'ont rien de tératologique et que des opérations qu'on croirait, naïvement, possibles sur des distributions vectorielles, ne le sont en aucune manière.

L'exemple 1 (p. 188) donne une fonction indéfiniment dérivable $\vec{\alpha} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$ et une distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, dont le produit de convolution $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\iota F)$ est une distribution d'ordre infini, et non une fonction indéfiniment dérivable, comme on pourrait s'y attendre.

L'exemple 2 (p. 190) donne une fonction continue $\vec{\alpha} \in \overline{\mathcal{D}^0}(E)$ et une mesure $\vec{\mu} \in \mathcal{D}_c'^0(F)$ (E, F, espaces de Banach), dont le produit de convolution $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu}$ n'est pas une fonction, mais seulement une mesure.

Le troisième exemple (p. 194) donne deux mesures à supports compacts à valeurs dans des espaces de Banach, dont le produit de convolution est une distribution d'ordre $\geqslant 1$.

CHAPITRE II

Rappelons que, sauf mention expresse du contraire, tous les espaces vectoriels localement convexes considérés sont séparés quasi-complets.

§ 1. Introduction.

Position du problème.

Dans le chapitre I, nous avons étudié le produit T. φ, le produit multiplicatif αT, le produit de convolution S$*$T, lorsque l'un des deux facteurs du produit est à valeurs vectorielles, l'autre à valeurs scalaires. Le but de ce chapitre est d'étudier le cas où les 2 facteurs sont à valeurs vectorielles. Soient par exemple $\vec{\mathrm{S}}$, $\vec{\mathrm{T}}$, 2 distributions sur R^n, à valeurs dans E et F respectivement. Peut-on définir un produit de convolution $\vec{\mathrm{S}} * \vec{\mathrm{T}}$? On devra naturellement supposer d'abord que les supports de $\vec{\mathrm{S}}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ vérifient certaines conditions restrictives, ou que le comportement de $\vec{\mathrm{S}}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ à l'infini sur R^n satisfait à certaines conditions. On devra d'autre part se donner une application bilinéaire θ de E $\times$ F dans un troisième espace vectoriel G, et définir le produit $\mathrm{S} *_\theta \mathrm{T}$ relativement à θ, qui sera une distribution sur R^n à valeurs dans G; si par exemple $\vec{\mathrm{S}}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ sont des produits tensoriels $\mathrm{S} \otimes \vec{e}$, $\mathrm{T} \otimes \vec{f}$, S et T dans $\mathcal{D}'$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$, $\vec{\mathrm{S}} *_\theta \vec{\mathrm{T}}$ devra être égal à $(\mathrm{S} * \mathrm{T})\theta(\vec{e}, \vec{f}) \in \mathcal{D}'(\mathrm{G})$. Dans les applications pratiques, θ sera donnée une fois pour toutes (par exemple E, F, G, seront confondus, et l'espace vectoriel considéré sera une algèbre); on pourra alors ne pas l'écrire, et noter simplement $\vec{S} * \vec{T}$ au lieu de $S *_\theta T$.

On pourra aussi supposer qu'aucune application θ n'est donnée, mais que le produit est à valeurs dans un produit tensoriel topologique quasi-complété de E et F.

Par exemple, si $\vec{S} * \vec{T}$ est à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\pi F$ (resp. $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$), et si ensuite θ est une application bilinéaire continue (resp. ε-continue [1]) de $E \times F$ dans G, donc définit une application continue $\bar{\theta}$ de $E \hat{\otimes}_\pi F$ (resp. $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$) dans G, et par suite une application $I \otimes \bar{\theta}$ de $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$ (resp. $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\varepsilon F)$) dans $\mathcal{D}'(G)$, alors $\vec{S} *_\theta \vec{T}$ ne sera autre que $(I \otimes \bar{\theta})(\vec{S} * \vec{T})$. On voit qu'il peut y avoir intérêt à traiter la question sous cet angle, et à chercher dans quel produit tensoriel topologique quasi-complété $\vec{S} * \vec{T}$ prend ses valeurs, de façon à savoir quelles applications bilinéaires θ pourront être utilisées.

Selon que $\vec{S} * \vec{T}$ prend ses valeurs dans $E \hat{\otimes}_\pi F$, $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, on le notera $\vec{S} *_\pi \vec{T}$, $\vec{S} *_\varepsilon \vec{T}$, etc.; naturellement, si $\vec{S} * \vec{T}$ est susceptible d'être à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\pi F$, il sera à fortiori susceptible d'être à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, et $\vec{S} *_\varepsilon \vec{T}$ sera l'image de $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ par l'application $I \otimes \bar{\theta}$ de $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\varepsilon F)$, où $\bar{\theta}$ est l'application canonique de $E \hat{\otimes}_\pi F$ dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ associée à l'application bilinéaire continue θ de $E \times F$ dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$; rappelons que cette application $\bar{\theta}$ n'est pas nécessairement injective (du moins la question n'est-elle pas résolue), aussi $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ et $\vec{S} *_\varepsilon \vec{T}$ devront-ils être distingués avec soin.

Naturellement ce cas général que nous venons de traiter, et qui a comme corollaire le cas d'une application θ donnée de $E \times F$ dans G, est aussi un cas particulier de ce corollaire : $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ (resp. $\vec{S} *_\varepsilon \vec{T}$) n'est autre que $\vec{S} *_\theta \vec{T}$, lorsque θ est l'application canonique de $E \times F$ dans $G = E \hat{\otimes}_\pi F$ (resp. $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$).

[1] Une application bilinéaire de $E \times F$ dans G est dite ε-continue si l'application qu'elle définit de $E \otimes F$ dans G est continue quand on munit $E \otimes F$ de la topologie ε. Si G est le corps des scalaires, celà revient à dire que cette forme bilinéaire est intégrale (Grothendieck [4], page 124). Pour des *formes* multilinéaires sur un produit d'espaces, il n'y a pas d'inconvénient à employer le mot « intégrale », parce que toute forme linéaire continue sur *un seul* espace E est ε-continue et est bien intégrale; mais pour des *applications* multilinéaires dans G, il y aurait confusion car toute application linéaire continue d'*un seul* espace E dans G est ε-continue et n'est pas une application linéaire intégrale au sens de Grothendieck.

Si $\vec{S} = S \otimes \vec{e}$, $\vec{T} = T \otimes \vec{f}$, alors $\vec{S} * \vec{T}$ prendra même ses valeurs dans $E \otimes F$ non quasi-complété, car on aura

$$\vec{S} * \vec{T}.\varphi = (S * T.\varphi)\,\vec{e} \otimes \vec{f} \in E \otimes F;$$

mais c'est là une circonstance très particulière.

Nous venons de traiter l'exemple du produit de convolution. La convolution $*$ est une application bilinéaire hypocontinue de $\mathcal{D}' \times \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}'$; on peut s'attendre à ce que, pour $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{E}'(F)$, $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ ait un sens. Nous verrons qu'il en est bien ainsi (Proposition 34) : on peut définir une convolution $*$, application bilinéaire, hypocontinue par rapport aux parties bornées, de $\mathcal{D}'(E) \times \mathcal{E}'(F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$. Dans les applications pratiques, on considèrera un produit déterminé, la convolution $*$ par exemple. Mais il peut y avoir intérêt à introduire 3 espaces de distributions $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, non nécessairement sur le même espace euclidien, et à considérer une application bilinéaire u : $(S, T) \rightarrow S \,\mathsf{u}\, T$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$, hypocontinue par rapport aux parties compactes par exemple. On pourra alors essayer de définir une application bilinéaire $(\vec{S}, \vec{T}) \rightarrow S \,\mathsf{u}_\pi\, T$ de $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, et chercher si cette application est hypocontinue par rapport aux parties compactes. Le cas de la convolution examiné ci-dessus correspond à $\mathsf{u} = *$, $\mathcal{H} = \mathcal{D}'$, $\mathcal{K} = \mathcal{E}'$, $\mathcal{L} = \mathcal{D}'$, espaces de distributions sur le même espace euclidien R^n.

Mais alors on pourra considérer à la fois toutes les applications bilinéaires telles que u en introduisant un produit tensoriel topologique quasi-complété de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. Appelons γ (1) la topologie localement convexe la plus fine sur $U \otimes V$, pour laquelle l'application canonique $(U, V) \rightarrow U \otimes_\gamma V$ soit hypocontinue par rapport aux parties compactes. Alors on cherchera à montrer l'existence d'une application bilinéaire canonique de $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ dans $(\mathcal{H} \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{K})(E \hat{\otimes}_\pi F)$, que nous noterons $\Gamma_{\gamma,\pi}$. Alors si u est une application bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$, hypocontinue par rapport aux parties compactes, elle définit une application linéaire continue $\bar{\mathsf{u}}$

(1) Ne pas confondre la topologie γ sur un produit tensoriel $U \otimes V$ avec la topologie γ sur un espace localement convexe quelconque L, définie page 17 au chapitre I, identique à $(L'_c)'_c$.

de $\mathcal{H} \widehat{\otimes}_\gamma \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$, donc une application linéaire continue $\bar{u} \otimes I$ de $(\mathcal{H} \widehat{\otimes}_\gamma \mathcal{K})(E \widehat{\otimes}_\pi F)$ dans $\mathcal{L}(E \widehat{\otimes}_\pi F)$, et l'on aura

$$\vec{S} \, u_\pi \vec{T} = (\bar{u} \otimes I)\Gamma_{\gamma,\pi}(\vec{S}, \vec{T}).$$

Si ensuite on se donne une application bilinéaire continue θ de $E \times F$ dans G, on aura

$$\text{(II, 1; 1)} \quad \vec{S} \, u_\theta \vec{T} = \big((I \otimes \bar{\theta}) \circ (\bar{u} \otimes I)\big)\big(\Gamma_{\gamma,\pi}(\vec{S}, \vec{T})\big) \in \mathcal{L}(G),$$

qu'on pourra aussi écrire

$$\text{(II, 1; 2)} \qquad \vec{S} \, u_\theta \vec{T} = (\bar{u} \otimes \bar{\theta})\big(\Gamma_{\gamma,\pi}(\vec{S}, \vec{T})\big).$$

Inversement d'ailleurs le cas général sera un cas particulier: $\Gamma_{\gamma,\pi}(\vec{S}, \vec{T})$ n'est autre que $\vec{S} \, u_\theta \vec{T}$ lorsque u est l'application bilinéaire hypocontinue canonique de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L} = \mathcal{H} \widehat{\otimes}_\gamma \mathcal{K}$, et θ l'application bilinéaire continue canonique de $E \times F$ dans $G = E \widehat{\otimes}_\pi F$.

L'intervention des distributions et des espaces nucléaires est ici inévitable. Si $\mu \in \mathcal{D}'^0_c(E)$ est une mesure à valeurs dans un espace de Banach E, $\varphi \in \overline{\mathcal{D}}^0(F)$ une fonction continue à support compact à valeurs dans un espace de Banach F, on peut définir $\vec{\mu} \cdot \vec{\varphi} = \int_{\mathbf{R}^n} \vec{\varphi} \, d\vec{\mu}$ à valeurs dans $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ *mais non dans* $E \widehat{\otimes}_\pi F$; *si donc* θ *est une application bilinéaire continue, mais* ε*-discontinue, de* $E \times F$ *dans un espace de Banach* G (*par exemple si* θ *est une forme bilinéaire continue mais non intégrale sur* $E \times F$), $\vec{\mu} \cdot_\theta \vec{\varphi}$ *n'aura en général pas de sens.*

Il semble difficile de donner les théorèmes les plus généraux relatifs à cette théorie, il semble même difficile de faire rentrer les cas les plus importants de la pratique (produit scalaire, produit multiplicatif, produit tensoriel, produit de convolution) dans un seul grand théorème d'aspect agréable. C'est pourquoi, sans chercher la plus grande généralité, nous donnerons les théorèmes qui nous paraissent les plus utiles. La proposition 3 donne un cas général très important.

Applications bilinéaires $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinues.

Soient $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, deux familles saturées de parties de L, M respectivement (L, M, espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets). Nous dirons qu'une application bilinéaire de $L \times M$ dans un espace localement convexe séparé N (non nécessairement quasi-complet) est $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue, si ses restrictions à $A \times M$ et à $L \times B$ sont continues, pour toute $A \in \mathfrak{S}$ et toute $B \in \mathfrak{T}$. Si les parties $A \in \mathfrak{S}$ et $B \in \mathfrak{T}$ sont bornées, c'est bien équivalent à la définition usuelle (1).

Si $\mathfrak{S}$ est formée de toutes les parties de L, $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(L)$, et $\mathfrak{T}$ quelconque, ou si $\mathfrak{S}$ est quelconque et $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(M)$, $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue veut dire continue. Si $\mathfrak{T}$ est formée de toutes les parties bornées de dimension finie de M, on dira seulement $\mathfrak{S}$-hypocontinue; si $\mathfrak{S}$ (resp $\mathfrak{T}$) est la famille de toutes les parties bornées de dimension finie de L (resp M), $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue veut dire séparément continue. Rappelons que « hypocontinue », sans spécification de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$, veut dire hypocontinue par rapport aux parties bornées.

On a des définitions analogues pour les ensembles $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-équihypocontinus d'applications bilinéaires.

Produits tensoriels topologiques quasi-complétés.

On montre, par des méthodes analogues à celles qui sont utilisées pour la topologie π (2), qu'il existe sur $L \otimes M$ une topologie localement convexe et une seule, notée $L \otimes_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}} M$, telle que les applications linéaires continues, pour cette topologie, de $L \otimes M$ dans tout espace localement convexe N (non nécessairement quasi-complet), soient exactement celles qui sont définies par les applications bilinéaires $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinues de $L \times M$ dans N. Dans ces conditions $L \otimes_{\mathfrak{S}} M$ veut dire $L \otimes_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}} M$, lorsque $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des parties bornées de dimension finie de M. On a de plus les propriétés suivantes :

1° Les ensembles équicontinus d'application linéaires de $L \otimes_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}} M$ dans N sont exactement ceux qui sont définis par les ensembles $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-équihypocontinus d'applications bilinéaires de $L \times M$ dans N.

2° Un système fondamental de voisinage de 0 de $L \otimes_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}} M$ s'obtient en prenant, dans la dualité entre $L \otimes M$ et l'espace

(1) Bourbaki [2], chapitre III, § 4, n° 2, proposition 4, page 39. La $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinuité, lorsque les parties de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ ne sont pas nécessairement bornées, paraît avoir été employée pour la première fois par F. Bruhat dans [1].

Rappelons qu'une application ne peut être appelée hypocontinue par rapport à une famille de parties de l'un des deux espaces L, M, que si elle est séparément continue sur $L \times M$.

(2) En ce qui concerne la méthode utilisée pour la topologie π, voir Grothendieck [4], § 1, et Schwartz [2], exposé 1.

des formes bilinéaires sur $L \times M$, les polaires des ensembles $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-équihypocontinus de formes bilinéaires.

3° $L \otimes_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} M$ est la topologie localement convexe la plus fine sur $L \otimes M$, qui rende l'application bilinéaire canonique de $L \times M$ dans $L \otimes M$ $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue.

4° Soient L_1, M_1, L_2, M_2, quatre espaces localement convexes séparés (non nécessairement quasi-complets), u (resp. v) une application linéaire continue de L_1 (resp M_1) dans L_2 (resp. M_2). Soient d'autre part $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{T}_2$, des familles saturées de parties de L_1, M_1, L_2, M_2, respectivement.

Supposons que pour tout $A_1 \in \mathfrak{S}_1$, $u(A_1)$ *soit dans* $\mathfrak{S}_2$, *et que, pour toute* $B_1 \in \mathfrak{T}_1$, $v(B_1)$ *soit dans* $\mathfrak{T}_2$. Alors $u \otimes v$ est continue de $L_1 \otimes_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M_1$ dans $L_2 \otimes_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M_2$.

Supposons maintenant que u parcoure un ensemble équicontinu $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{L}(L_1; L_2)$, tel que, pour toute $A_1 \in \mathfrak{S}_1$, $\bigcup_{u \in \mathfrak{U}} u(A_1)$ soit dans $\mathfrak{S}_2$; et supposons de même que v parcoure un ensemble équicontinu $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{L}(M_1; M_2)$, tel que, pour toute $B_1 \in \mathfrak{T}_1$, $\bigcup_{v \in \mathfrak{V}} v(B_1)$ soit dans $\mathfrak{T}_2$.

Alors l'ensemble des $u \otimes v$, $u \in \mathfrak{U}$, $v \in \mathfrak{V}$, est une partie équicontinue de $\mathfrak{L}(L_1 \otimes_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M_1; L_2 \otimes_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M_2)$.

Considérons le cas particulier suivant. Si, sur l'espace localement convexe L (resp. M), l'ensemble de parties $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{T}_1$) est contenu dans l'ensemble de parties $\mathfrak{S}_2$ (resp. $\mathfrak{T}_2$), alors la topologie $L \otimes_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M$ est plus fine que la topologie $L \otimes_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M$: il suffit en effet d'appliquer ce qui précède à l'application identique u (resp. v) de $L_1 = L$ (resp. $M_1 = M$) dans $L_2 = L$ (resp. $M_2 = M$) et aux ensembles de parties $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{T}_2$, considérés.

5° Le quasi-complété (resp. complété) de $L \otimes_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} M$ sera noté $L \widetilde{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} M$ (resp. $L \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} M$). Si nous nous trouvons dans les conditions de 4°, $u \otimes v$ se prolonge en une application linéaire continue, encore notée $u \otimes v$ si aucune confusion n'est à craindre [1], de $L_1 \widetilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M_1$ (resp. $L_1 \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M_1$) dans $L_2 \widetilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M_2$ (resp. $L_2 \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M_2$).

[1] Il faudrait en effet théoriquement une notation où figurent non seulement u et v mais $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{T}_2$. Par exemple, plus bas, l'application canonique de $L \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M$ dans $L \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M$ n'est que bien peu définie par le symbole $I \otimes I$, surtout si l'on se rappelle que cette application canonique n'est pas nécessairement injective (voir page 12) !

En particulier, si dans L(resp. M), l'ensemble de parties $\mathfrak{S}_1$(resp. $\mathfrak{T}_1$) est contenu dans l'ensemble de parties $\mathfrak{S}_2$ (resp. $\mathfrak{T}_2$), alors l'application identique de $L \otimes M$ se prolonge en une application linéaire continue de $L \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M$ (resp. $L \widetilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M$) dans $L \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M$ (resp. $L \widetilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M$). *Il ne faudrait pas croire que cette application soit nécessairement injective* ([1]).

Si maintenant on a 3 couples d'espaces L_1, M_1, L_2, M_2, L_3, M_3, des applications linéaires continues avec des diagrammes de commutativité

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & L_2 \arrow[dl] \\ L_3 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & M_2, \arrow[dl] \\ M_3 & \end{tikzcd}$$

et des familles de parties $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{T}_3$, satisfaisant aux conditions voulues (indiquées page 7, 4° dans le cas de deux couples), alors le diagramme de commutativité

$$\begin{tikzcd} L_1 \otimes M_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & L_2 \otimes M_2 \arrow[dl] \\ L_3 \otimes M_3 & \end{tikzcd}$$

donne le diagramme de commutativité

$$\text{(II, 1; 3)} \qquad \begin{tikzcd} L_1 \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1} M_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & L_2 \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T}_2} M_2 \arrow[dl] \\ L_3 \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_3, \mathfrak{T}_3} M_3 & \end{tikzcd}$$

et un autre analogue, où $\widehat{\otimes}$ est remplacé partout par $\widetilde{\otimes}$.

Les topologies λ sur un produit tensoriel.

Les cas les plus importants dans la pratique sont les suivants :

1° $\mathfrak{S}$ ou $\mathfrak{T}$ est formé de toutes les parties. On note $L \otimes_\pi M$ la topologie correspondante sur $L \otimes M$.

2° $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ sont constituées par toute les parties bornées. On notera $L \otimes_\beta M$ la topologie correspondante.

3° $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ sont constituées par toutes les parties contenues dans des parties convexes équilibrées compactes. On notera $L \otimes_\gamma M$ la topologie correspondante.

4° $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ sont constituées par toutes les parties bornées

([1]) On doit du moins considérer comme peu probable qu'elle soit injective, mais il n'y a pas de contre-exemple connu.

de dimension finie. On notera $L \otimes_{\iota} M$ [1] la topologie correspondante.

La topologie ε sur $L \otimes M$ ne rentre pas dans les catégories précédentes. Désormais λ, μ, etc... seront des lettres choisies parmi les 5 lettres ε, π, β, γ, ι. On a, par ordre de finesse croissante pour les topologies sur $L \otimes M$: ε, π, β, γ, ι. Aussi établirons-nous sur l'ensemble de ces 5 lettres la relation d'ordre $\varepsilon \leqslant \pi \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \iota$.

Si L et M sont tous deux métrisables, l'un d'eux étant complet, ou tous deux des duals d'espaces de Fréchet distingués, les topologies π, β, γ, ι, sont identiques sur $L \otimes M$; s'ils sont tous deux des espaces DF, les topologies π, β, sont identiques; s'ils sont tous deux tonnelés, les topologies β, γ, ι, sont identiques [2]. Si L ou M est nucléaire, les topologies ε et π sont identiques, et nous noterons $L \mathbin{\hat{\otimes}} M$ (resp. $L \mathbin{\widehat{\otimes}} M$), sans autre indication, le produit tensoriel quasi-complété (resp. complété) pour cette topologie ε ou π. Nous dirons d'une application bilinéaire de $L \times M$ dans N qu'elle est λ-continue, si l'application qu'elle définit de $L \otimes M$ dans N est continue lorsque $L \otimes M$ est muni de la topologie λ.

Si $\lambda = \varepsilon$, et si L et M sont des duals, $L = U'_c$, $M = V'_c$, il ne faut pas confondre « ε-continue » (c'est-à-dire telle que l'application correspondante de $L \otimes_{\varepsilon} M$ dans N soit continue) avec « ε-hypocontinue » (c'est-à-dire hypocontinue, sur $U'_c \times V'_c$, par rapport aux parties équicontinues de U' et V' ; chapitre I, page 18).

D'autre part, nous définirons plus loin (page 15) les λ-parties. Il ne faut pas confondre « λ-continue » avec « $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue » pour $\mathfrak{S} = \mathfrak{T} =$ ensemble des λ-parties, c'est-à-dire « hypocontinue par rapport aux λ-parties »; pour $\lambda = \pi$, « π-continue » veut dire continue, alors que « hypocontinue par rapport aux π-parties » veut dire « hypocontinue par rapport aux parties bornées ».

En conclusion, les expressions « λ-continue », « λ-hypocontinue » (pour $\lambda = \varepsilon$, $L = U'$, $M = V'$), « $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue » ou « hypocontinue par rapport aux parties appartenant à $\mathfrak{S}$ ou $\mathfrak{T}$ » (lorsque $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ sont l'ensemble des λ-parties) doivent être soigneusement distinguées.

[1] $L \otimes_{\iota} M$ est ce que GROTHENDIECK appelle le produit tensoriel inductif (GROTHENDIECK [4], § 3, page 73).

[2] BOURBAKI [2], chapitre III, § 4, n° 2, proposition 2 page 38, proposition 6 page 40; GROTHENDIECK [2], théorème 2 page 64, et théorème 7 page 73.

Examinons de plus près la relation d'ordre dans l'ensemble des 5 lettres ε, π, β, γ, ι.

$\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ exprime simplement que la topologie $L \otimes_{\lambda_1} M$ est plus fine que la topologie $L \otimes_{\lambda_2} M$; il existe alors une application continue canonique (non nécessairement injective) de $L \hat{\otimes}_{\lambda_1} M$ (resp. $L \widehat{\otimes}_{\lambda_1} M$) dans $L \hat{\otimes}_{\lambda_2} M$ (resp. $L \widehat{\otimes}_{\lambda_2} M$), prolongeant l'application identique de $L \otimes M$. Si enfin L_1, M_1, L_2, M_2, sont quatre espaces, si u (resp. v) est une application linéaire continue de L_1 (resp. M_1) dans L_2 (resp. M_2), et si $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, les propriétés 4° page 11 montrent que $u \otimes v$ est continue de $L_1 \otimes_{\lambda_1} M_1$ dans $L_2 \otimes_{\lambda_2} M_2$, et se prolonge en une application linéaire continue, encore notée $u \otimes v$ si aucune confusion n'est à craindre, de $L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} M_1$ (resp. $L_1 \widehat{\otimes}_{\lambda_1} M_1$) dans $L_2 \hat{\otimes}_{\lambda} M_2$ (resp. $L_2 \widehat{\otimes}_{\lambda_2} M_2$) (pour pouvoir appliquer le résultat 4° page 11, il faut que $\lambda_2 \geqslant \pi$ et il faut alors vérifier que l'image par u (resp. v) d'une λ_1-partie de L_1 (resp. M_1) est une λ_2-partie de L_2 (resp. M_2). Mais c'est automatiquement vrai en vertu de la continuité de u et v et de l'inégalité $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. Pour $\lambda_2 = \varepsilon$, la propriété énoncée ne résulte pas de 4° page 11 puisque la topologie $\otimes_\varepsilon$ n'est pas une topologie du type $\otimes_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}}$, mais résulte de la proposition 1 du chapitre I).

Supposons maintenant que u (resp. v) parcoure un ensemble équicontinu $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) d'opérateurs de L_1 dans L_2 (resp. de M_1 dans M_2), et qu'en outre la réunion des images par $u \in \mathcal{U}$ (resp. $v \in \mathcal{V}$) de toute λ_1-partie de L_1 (resp. M_1) soit une λ_2-partie de L_2 (resp. M_2) (La 2^e condition résulte automatiquement de la 1^re pour $\lambda_2 = \beta$, π ou ε (1)).

Alors les $u \otimes v$, pour $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{V}$, forment un ensemble équicontinu d'opérateurs de $L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} M_1$ (resp. $L_1 \widehat{\otimes}_{\lambda_1} M_1$) dans $L_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} M_2$ (resp. $L_2 \widehat{\otimes}_{\lambda_2} M_2$) (cela résulte de 4° page 11 si $\lambda_2 \geqslant \pi$; de la proposition 1 du chapitre I pour $\lambda_2 = \varepsilon$).

Si on a 3 couples d'espaces, L_1, M_1, L_2, M_2, L_3, M_3, 3 lettres $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, et des applications continues avec des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & L_2 \arrow[dl] \\ L_3 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & M_2, \arrow[dl] \\ M_3 & \end{tikzcd}$$

(1) BOURBAKI [2], chapitre III, § 3, n° 6, proposition 7, page 26.

alors d'après (II, 1; 3) on a le diagramme commutatif

$$\text{(II, 1; 4)}\qquad \begin{tikzcd} L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} M_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & L_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} M_2 \arrow[dl] \\ L_3 \hat{\otimes}_{\lambda_3} M_3 & \end{tikzcd}$$

et un autre où $\hat{\otimes}$ est remplacé par $\widehat{\otimes}$.

Les λ-parties et les parties σ-τ-décomposables des produits tensoriels quasi-complétés.

Nous appellerons *λ-partie* d'un espace vectoriel localement convexe (non nécessairement quasi-complet) une partie bornée contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, pour $\lambda = \iota$; une partie ayant une enveloppe compacte pour $\lambda = \gamma$; une partie bornée pour $\lambda = \beta$, π, ou ε.

Soit ensuite $L \hat{\otimes}_\lambda M$ (ou $L \widehat{\otimes}_\lambda M$) un produit tensoriel topologique quasi-complété (ou complété), L et M non nécessairement quasi-complets. Nous appellerons *partie σ-τ-décomposable* de cet espace, une partie *bornée* [1] Ξ ayant la propriété suivante :

a) Si $\sigma = \iota$, γ, ou β, et si $\tau = \iota$, γ, ou β (σ et τ non nécessairement identiques), Ξ est contenu dans l'enveloppe du produit tensoriel d'une σ-partie de L et d'une τ-partie de M.

b) Si $\sigma = \pi$ ou ε, $\tau = \iota$, γ, ou β, alors, quel que soit le voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0 dans L, il existe une τ-partie $\mathcal{M}$ de M telle que l'image canonique $\Xi^\bullet$ de Ξ dans $\hat{L}_{\mathcal{U}} \hat{\otimes}_\lambda M$ soit contenue dans l'enveloppe de $\mathcal{U}^\bullet \otimes \mathcal{M}$, $\mathcal{U}^\bullet$ étant la boule unité de $L_{\mathcal{U}}$ ou encore l'image de $\mathcal{U}$ dans $L_{\mathcal{U}}$. En d'autres termes, quel que soit $\mathcal{U}$, l'image $\Xi^\bullet$ de Ξ dans $\hat{L}_{\mathcal{U}} \hat{\otimes}_\lambda M$ est β-τ-décomposable. Ou encore : quelle que soit l'application continue $L \to L_1$ de L dans un espace de Banach L_1, l'image de Ξ dans $L_1 \hat{\otimes}_\lambda M$ est β-τ-décomposable.

c) Si $\sigma = \iota$, γ, ou β, et $\tau = \pi$ ou ε, quel que soit le voisinage disqué $\mathcal{M}$ de 0 dans M, l'image de Ξ dans $L \hat{\otimes}_\lambda \hat{M}_{\mathcal{M}}$ est σ-β-décomposable.

d) Si $\sigma = \pi$ ou ε, $\tau = \pi$ ou ε, Ξ est bornée quelconque.

La proposition suivante résume les principaux critères

[1] Il semble désirable qu'une partie σ-τ-décomposable soit toujours bornée, or une condition telle que *b*) ou *c*) ne semble pas à elle seule l'impliquer.

connus, permettant d'affirmer que certaines parties de $L \hat{\otimes}_\lambda M$ sont σ-τ-décomposables (L et M quasi-complets) :

Proposition 1. — 1° *Si* $\sigma = \pi$ *ou* ε, *et* $\tau = \pi$ ou ε, *toute partie bornée de* $L \hat{\otimes}_\lambda M$ *est* σ-τ-*décomposable.*

2° *Si* L *et* M *sont des espaces de Fréchet, toute partie relativement compacte de* $L \hat{\otimes}_\lambda M$ *est* γ-γ-*décomposable, pour* $\lambda = \iota, \gamma, \beta$ *ou* π.

3° *Si* L *et* M *sont des espaces* (DF), *toute partie bornée de* $L \hat{\otimes}_\lambda M$ *est* β-β-*décomposable, pour* $\lambda = \beta$ *ou* π (*et* $\lambda = \iota, \gamma, \beta, \pi$ *si* L *et* M *sont en outre tonnelés*).

4° *Si* L'_c *est nucléaire, toute partie compacte* (*et toute partie bornée si* $L'_c = L'_b$) *de* $L\varepsilon M = L \hat{\otimes}_\varepsilon M$ *est* γ-π-*décomposable.*

Si L *et* M *sont des espaces de Fréchet, et si* L *est nucléaire, toute partie bornée de* $L \hat{\otimes} M$ *est* γ-β-*décomposable.*

Les affirmations 1°, 2°, 3°, résultent de la définition ou de critères connus [1]; démontrons donc 4°.

Pour la première affirmation, on peut supposer que M est un Banach.

Par ailleurs, pour la deuxième, si L est un Fréchet nucléaire, $L'_c = L'_b$ est nucléaire [2].

Tout revient donc à montrer que si L et M sont des espaces de Fréchet, L nucléaire, ou si L est quelconque mais L'_c nucléaire et M un espace de Banach, toute partie Ξ compacte (ou seulement bornée si $L'_c = L'_b$) de $L\varepsilon M$ est γ-β-décomposable. Dans chacun de ces cas, son image $\tilde{\Xi}$ dans $\mathcal{L}(L'_c; M)$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(L'_c; M)$ (chapitre I, proposition 4, donc équibornée [3]).

(1) Grothendieck [4], corollaire 1 du théorème 1, page 52, pour l'affirmation 2°) (compte tenu de ce que nous avons dit page 13 sur l'identité des topologies $\iota, \gamma, \beta, \pi$ dans ce cas) Grothendieck [4], proposition 5, 2°), page 43, pour l'affirmation 3°) (compte tenu de ce qui est dit ici page 13 pour l'identité des topologies β et π).

(2) Le dual d'un Fréchet nucléaire est nucléaire : Grothendieck [5], théorème 7, page 40, ou Schwartz [2], exposé 18, théorème page 3. Si un espace quasi-complet quelconque L est nucléaire, toute partie bornée est relativement compacte, donc $L'_c = L'_b$: Grothendieck [5], corollaire 1 du théorème 6, page 38, ou Schwartz [2], exposé 17, proposition 3, page 5.

(3) Tout ensemble équicontinu H de $\mathcal{L}(L'_c; M)$ est évidemment équiborné si M est un Banach; il en est de même si L et M sont des espaces de Fréchet, L nucléaire, car alors $L'_c = L'_b$ (note (2)), et alors H définit un ensemble équihypo-continu de formes bilinéaires sur $L'_b \times M'_b$, donc équicontinu (Grothendieck [2], théorème 2 page 64), ce qui revient à dire que H est une partie équibornée de $\mathcal{L}(L'_b; M)$.

Alors (¹) il existe une partie $\mathcal{L}$ de $(L'_c)'_c = L$, équicontinue sur L'_c donc relativement compacte dans L, et une partie bornée $\mathcal{M}$ de M, telles que tout $\xi \in \Xi$ puisse s'écrire :

$$\xi = \sum_\nu \lambda_\nu (l_\nu \otimes m_\nu), \qquad l_\nu \in \mathcal{L},\ m_\nu \in \mathcal{M}, \qquad \sum_\nu |\lambda_\nu| \leqslant 1.$$

Alors Ξ est dans l'enveloppe de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$, donc γ-β-décomposable.

Voici enfin une propriété dont nous aurons souvent besoin :

Proposition 1 bis. — *Soient* X^l, Y^m, *des espaces euclidiens.* $\mathfrak{D}_{x,y}$ *est identique à* $\mathfrak{D}_x \hat{\otimes}_\iota \mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_x \hat{\otimes}_\iota \mathfrak{D}_y$, *et toute partie bornée de* $\mathfrak{D}_{x,y}$ *est* γ-γ-*décomposable.*

En effet, toute application linéaire continue de $\mathfrak{D}_{x,y}$ dans un espace localement convexe séparé (non nécessairement quasi-complet) E induit une application bilinéaire séparément continue de $\mathfrak{D}_x \times \mathfrak{D}_y$ dans E. Réciproquement, une telle application bilinéaire est hypocontinue par rapport aux parties bornées puisque $\mathfrak{D}$ est tonnelé (²), donc se prolonge en une application linéaire continue de $\mathfrak{D}_{x,y}$ dans $\hat{E}$ (voir chapitre I, page 125 en bas; cela résulte du théorème des noyaux qui dit que $\mathfrak{D}'_{x,y} = \mathfrak{D}'_x \varepsilon \mathfrak{D}'_y$). Cela signifie que la topologie induite par $\mathfrak{D}_{x,y}$ sur $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$ est précisément la topologie ι (identique d'ailleurs à γ ou β); comme $\mathfrak{D}_{x,y}$ est complet et que $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$ est strictement dense dans $\mathfrak{D}_{x,y}$, celà montre bien qu'on peut identifier $\mathfrak{D}_{x,y}$, à $\mathfrak{D}_x \hat{\otimes}_\lambda \mathfrak{D}_y$ ou $\mathfrak{D}_x \hat{\otimes}_\lambda \mathfrak{D}_y$, pour $\lambda = \iota$, γ, ou β.

Quant au fait que toute partie bornée de $\mathfrak{D}_{x,y}$ est dans l'enveloppe d'un produit tensoriel de parties bornées de $\mathfrak{D}_x$ et de $\mathfrak{D}_y$, nous nous en sommes servis pour démontrer le théorème des noyaux, c'est équivalent à l'identité des topologies de $\mathfrak{D}'_{x,y}$ et $\mathfrak{D}'_x \varepsilon \mathfrak{D}'_y$.

Corollaire. — *Toute partie* H *de* $\mathfrak{D}'_{x,y}$ (E), *bornée sur tout élément de* $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$, *est bornée dans* $\mathfrak{D}'_{x,y}$(E). *Tout filtre de* $\mathfrak{D}'_{x,y}$ (E), *ayant une base de filtre bornée ou dénombrable, convergeant vers* 0 *en tout point de* $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$, *converge vers* 0 *dans* $\mathfrak{D}'_{x,y}$ (E).

(¹) Schwartz [2], exposé 19, théorème 1 ter, page 2.

(²) Voir note (²), page 13. $\mathfrak{D}$ est tonnelé, comme limite inductive d'espaces (de Fréchet) tonnelés (Bourbaki [2], chapitre III, § 1, nº 1, corollaire de la proposition 1, et nº 2, corollaire 2 de la proposition 2).

En effet, si H est simplement bornée sur $\mathfrak{D}_x \times \mathfrak{D}_y$, elle est séparément équicontinue puisque $\mathfrak{D}$ est tonnelé [1], donc équicontinue sur $\mathfrak{D}_{x,y} = \mathfrak{D}_x \hat{\otimes}_\iota \mathfrak{D}_y$, et par suite bornée dans $\mathfrak{D}'_{x,y}$ (E). Si un filtre $\mathcal{F}$ sur H converge vers 0 simplement sur $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$, il converge vers 0 uniformément sur toute partie compacte de $\mathfrak{D}_{x,y}$, donc dans $\mathfrak{D}'_{x,y}(\mathrm{E})$, d'après Ascoli [2]. Soit maintenant $\mathcal{F}$ un filtre à base dénombrable, convergeant simplement vers 0 sur $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$; s'il ne convergeait pas vers 0 dans $\mathfrak{D}_{x,y}$, on pourrait trouver une suite plus fine que $\mathcal{F}$ qui n'y convergerait pas vers 0; comme une suite convergeant vers 0 simplement sur $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$ est bornée simplement sur $\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$, ce serait contradictoire.

On en déduira que *toute fonction sur un espace euclidien* Z^n *à valeurs dans* $\mathfrak{D}'_{x,y}(\mathrm{E})$, *m fois continuement différentiable quand on munit* $\mathfrak{D}'_{x,y}(\mathrm{E})$ *de la topologie* $\mathcal{L}_s(\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y;\ \mathrm{E})$, *est aussi m fois continuement différentiable pour la topologie* $\mathfrak{D}'_{x,y}(\mathrm{E})$.

§ 2. Les théorèmes de croisement.

Proposition 2. — *Soient* L, M, U, V, *des espaces localement convexes séparés (non nécessairement quasi-complets). Il existe une application bilinéaire canonique* $\Gamma_{\mu,\lambda} : (\xi,\ \eta) \to \Gamma_{\mu,\lambda}(\xi,\ \eta)$ de $(\mathrm{L} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{U}) \times (\mathrm{M}\varepsilon\mathrm{V})$ *dans* $(\mathrm{L} \hat{\otimes}_\mu \mathrm{M})\, \varepsilon\, (\mathrm{U} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{V})$, *pour* λ *et* $\mu \leqslant \gamma$. *Elle coïncide sur* $(\mathrm{L} \otimes \mathrm{U}) \times (\mathrm{M} \otimes \mathrm{V})$ *avec l'application bilinéaire canonique de cet espace dans* $(\mathrm{L} \otimes \mathrm{M}) \otimes (\mathrm{U} \otimes \mathrm{V})$; *elle applique* $(\mathrm{L} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{U}) \times (\mathrm{M} \otimes \mathrm{V})_0$ $\big((\mathrm{M} \otimes \mathrm{V})_0 =$ *adhérence stricte de* $\mathrm{M} \otimes \mathrm{V}$ *dans* $\mathrm{M}\varepsilon\mathrm{V}\big)$ *dans* $(\mathrm{L} \hat{\otimes}_\mu \mathrm{M}) \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathrm{U} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{V})$, *et c'est la seule application du premier espace dans le second qui, sur* $(\mathrm{L} \otimes \mathrm{U}) \times (\mathrm{M} \otimes \mathrm{V})$, *soit l'application bilinéaire canonique dans* $(\mathrm{L} \otimes \mathrm{M}) \otimes (\mathrm{U} \otimes \mathrm{V})$, *et soit en outre continue en* ξ *sur* $\mathrm{L} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{U}$ *pour* $\eta \in (\mathrm{M} \otimes \mathrm{V})_0$ *fixé, et continue en* η *sur* $(\mathrm{M} \otimes \mathrm{V})_0$ *pour* $\xi \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{U}$ *fixé. Les applications* $\Gamma_{\mu,\lambda}$ *sont compatibles avec les applications linéaires continues de* L, M, U, V, *et avec le raffinement des topologies* λ *et* μ.

1° *Si* L, M, U, V, *sont quasi-complets, si* ξ *converge vers* 0 *dans* $\mathrm{L} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{U}$, *et que* η *parcoure une* ν*-partie de* $\mathrm{M}\varepsilon\mathrm{V}(\nu = \sup(\lambda,\ \mu))$, $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi,\ \eta)$ *converge vers* 0.

(1) Voir note (2), page 17, et Bourbaki [2], chapitre III, § 3, n° 6, théorème 2.
(2) Bourbaki, chapitre III, § 3, n° 5, proposition 5.

2° *Si* η *converge vers* 0 *dans* $M\varepsilon V$, *et que* ξ *parcoure une partie* μ-λ-*décomposable de* $L \hat{\otimes}_\lambda U$, $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta)$ *converge vers* 0.

3° *Si* λ *et* $\mu \leqslant \pi$, $\Gamma_{\mu,\lambda}$ *est continue.*

4° $\Gamma_{\varepsilon,\varepsilon}$ *est* ε-*continue, c'est la restriction de l'application bilinéaire canonique de* $(\hat{L}\varepsilon\hat{U}) \times (M\varepsilon V) \subset (\hat{L}\varepsilon\hat{U}) \times (\hat{M}\varepsilon\hat{V})$ *dans* $(\hat{L}\varepsilon\hat{M})\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$.

5° *Si* L, M, U, V, *sont quasi-complets,* $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$ *est* μ-*continue,* $\Gamma_{\varepsilon,\lambda}$ *est* λ-*continue.*

On a des résultats analogues aux précédents, en remplaçant partout $\frown$ *par* $\wedge$, $\tilde{\otimes}$ *par* $\hat{\otimes}$, *adhérence stricte par adhérence.*

D'une façon générale, si u est une forme bilinéaire séparément continue sur un produit $H \times K$ d'espaces vectoriels topologiques, nous appellerons $\tilde{u}$ (resp. ${}^t\tilde{u}$) l'application linéaire qu'elle définit de H dans K′ (resp. de K dans H′). De même si $\eta \in M\varepsilon V$, nous appellerons [1] $\tilde{\eta}$ (resp. ${}^t\tilde{\eta}$) l'application linéaire qu'elle définit de M′ dans V (resp. de V′ dans M).

1° L'application trilinéaire $\Gamma_{\mu,\lambda}$ de $L \times U \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\lambda V)$.

Soient $l \in L$, $u \in U$, $\eta \in M\varepsilon V$. A ces éléments nous allons faire correspondre un élément $\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$ de $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon(U \hat{\otimes}_\lambda V)$, c'est-à-dire une forme bilinéaire ε-hypocontinue sur

$$(L \hat{\otimes}_\mu M)'_c \times (U \hat{\otimes}_\lambda V)'_c.$$

Le dual de $L \hat{\otimes}_\mu M$ (resp. $U \hat{\otimes}_\lambda V$) est l'espace des formes bilinéaires μ-continues (resp. λ-continues) sur $L \times M$ (resp. $U \times V$).

Soit α (resp. β) un élément de ce dual. Pour définir $\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$, nous devons définir sa valeur $(\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta))(\alpha, \beta)$ sur l'élément (α, β) de $(L \hat{\otimes}_\mu M)' \times (U \hat{\otimes}_\lambda V)'$. Nous poserons

$$\text{(II, 2; 1)} \qquad \Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)(\alpha, \beta) = \eta\big(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)\big),$$

expression qui a bien un sens puisque $\tilde{\alpha}(l) \in M'$, $\tilde{\beta}(u) \in V'$, et que η est une forme bilinéaire sur $M' \times V'$; on peut ici prendre $\mu = \iota, \gamma, \beta, \pi$, ou ε, et $\lambda = \iota, \gamma, \beta, \pi$, ou ε.

Pour que $\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$ appartienne à $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\lambda V)$, il faut que la forme bilinéaire qu'il définit sur $(L \hat{\otimes}_\mu M)'_c \times (U \hat{\otimes}_\lambda V)'_c$ soit ε-hypocontinue.

[1] Au § 1 du chapitre I, nous avons appelé u_X l'élément de $\mathcal{L}(L'_c; M)$ associé à $X \in L\varepsilon M$.

a) Supposons que α parcoure une partie équicontinue de $(L \hat{\otimes}_\mu M)'$; cela veut dire qu'il parcourt un ensemble μ-équicontinu de formes bilinéaires sur $L \times M$; alors, pour l fixé, $\tilde{\alpha}(l)$ parcourt une partie équicontinue de M'. Supposons d'autre part que β converge vers 0 dans $(U \hat{\otimes}_\lambda V)'_c$; comme le produit tensoriel d'une partie réduite à un point de U par un compact de V est compact dans $U \hat{\otimes}_\lambda V$, $\tilde{\beta}(u)$ converge vers 0 dans V'_c. Comme alors η est ε-hypocontinue sur $M'_c \times V'_c$, $\eta\big(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)\big)$ convergera vers 0.

b) On démontre exactement de la même manière que, si α converge vers 0 dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)'_c$, et que β parcoure une partie équicontinue de $(U \hat{\otimes}_\lambda V)'$, $\eta\big(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)\big)$ converge vers 0.

Donc $\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$ est bien un élément de $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$.

Naturellement $\Gamma_{\mu,\lambda}$ définit une application bilinéaire, que nous noterons encore $\Gamma_{\mu,\lambda}$ de $(L \otimes U) \times (M \varepsilon V)$ dans

$$(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V).$$

Soient $l \in L$, $u \in U$, $m \in M$, $v \in V$; posons $\eta = m \otimes v$.

Alors $\eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)) = \langle m, \tilde{\alpha}(l)\rangle \langle v, \tilde{\beta}(u)\rangle = \alpha(l, m)\,\beta(u, v)$, ce qui prouve que $\Gamma_{\mu,\lambda}(l \otimes u, m \otimes v) = (l \otimes m) \otimes (u \otimes v)$: sur $(L \otimes U) \times (M \otimes V)$, $\Gamma_{\mu,\lambda}$ se réduit à l'application bilinéaire canonique de cet espace dans $(L \otimes M) \otimes (U \otimes V)$.

2° L'application bilinéaire $\Gamma_{\mu,\lambda}$ de $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$. Désormais λ et μ sont $\leqslant \gamma$.

Nous allons montrer que l'application trilinéaire $\Gamma_{\mu,\lambda}$ définit, pour η fixé dans $M \varepsilon V$, une application bilinéaire $(l, u) \rightarrow \Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$ de $L \times U$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$, λ-continue.

Cela revient à dire que, si $\mathcal{A}'$ (resp. $\mathcal{B}'$) est une partie équicontinue de $(L \hat{\otimes}_\mu M)'$ (resp. $U \hat{\otimes}_\lambda V)'$, c'est-à-dire un ensemble μ-équicontinu (resp. λ-équicontinu) de formes bilinéaires sur $L \times M$ (resp. $U \times V$), l'ensemble des formes bilinéaires $(l, u) \rightarrow (\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta))\,(\alpha, \beta)$, pour η fixé, $\alpha \in \mathcal{A}'$, β (1) $\in \mathcal{B}'$, est λ-équicontinu.

(1) La même lettre β désigne une forme bilinéaire sur $U \times V$ et l'une des 5 topologies λ considérées sur un produit tensoriel; aucune confusion ne risque d'être faite ici. Ainsi β est employé dans les deux sens, en haut avec $\lambda \geqslant \beta$ dans le deuxième sens, en bas dans $\tilde{\beta}(u)$ dans le premier sens.

a) Supposons, pour $\lambda \geqslant \beta$, que l converge vers 0 dans L, et que u parcoure une λ-partie $\mathcal{U}$ de U. Alors, $\mathcal{A}'$ étant μ-équicontinue donc γ-équicontinue puisque $\mu \leqslant \gamma$, $\tilde{\alpha}(l)$ converge vers 0 dans M'_c, uniformément pour $\alpha \in \mathcal{A}'$. Ensuite, $\mathcal{B}'$ étant λ-équicontinue, $\tilde{\beta}(u)$ parcourt une partie équicontinue de V' lorsque β parcourt $\mathcal{B}'$ et que u parcourt $\mathcal{U}$. Comme enfin η est ε-hypocontinue, $\eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u))$ converge bien vers 0, uniformément pour $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\beta \in \mathcal{B}'$ $u \in \mathcal{U}$, quand l converge vers 0.

a') Supposons, toujours pour $\lambda \geqslant \beta$, que l parcoure une λ-partie $\mathcal{L}$ de L, et que u converge vers 0 dans U.

Si $\lambda = \gamma$, il n'y a aucune difficulté. Car alors $\tilde{\alpha}(l)$ parcourt une partie équicontinue de M' pour $l \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathcal{A}'$ puisque $\mathcal{A}'$ est μ-équicontinue donc γ-équicontinue; $\tilde{\beta}(u)$ converge vers 0 dans V'_c, uniformément pour $\beta \in \mathcal{B}'$; donc $\eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u))$ converge encore uniformément vers 0.

Pour $\lambda = \beta$, la chose est un peu plus délicate à voir. L'ensemble $\mathcal{A}'$ est alors borné sur tout produit d'une partie bornée de L par une partie convexe équilibrée compacte de M, puisque $\mathcal{A}'$ est γ-équicontinue; donc l'ensemble des $\tilde{\alpha}(l)$ est borné dans M'_c pour $\alpha \in \mathcal{A}'$, $l \in \mathcal{L}$. Ensuite $\tilde{\beta}(u)$ converge vers 0 uniformément sur toute partie bornée de V, autrement dit dans V'_b, et non seulement dans V'_c, uniformément pour $\beta \in \mathcal{B}'$.

Nous pouvons enfin écrire

$$\text{(II, 2; 2)} \quad (\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta))(\alpha, \beta) = \eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)) = \langle \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l)), \tilde{\beta}(u) \rangle,$$

produit scalaire pour la dualité entre V et V' ; $\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))$ est borné dans V pour $\alpha \in \mathcal{A}'$, $l \in \mathcal{L}$, et $\tilde{\beta}(u)$ converge vers 0 dans V'_b uniformément pour $\beta \in \mathcal{B}'$; donc ce produit scalaire converge bien vers 0 uniformément pour $\alpha \in \mathcal{A}'$ $\beta \in \mathcal{B}'$, $l \in \mathcal{L}$, quand u converge vers 0.

a et *a'* montrent bien que, pour η fixe, $(l, u) \to \Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$ est λ-continue sur $L \times U$, pour $\lambda \geqslant \beta$.

b) Soit $\lambda = \pi$, et supposons que l et u convergent vers 0 dans L et U respectivement.

Comme $\mathcal{A}'$ est γ-équicontinue, $\tilde{\alpha}(l)$ converge vers 0 dans M'_c, uniformément pour $\alpha \in \mathcal{A}'$; donc $\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))$ converge vers 0 dans V, uniformément pour $\alpha \in \mathcal{A}'$.

Comme alors $\mathcal{B}'$ est équicontinu sur $U \times V$, et que

$$\text{(II, 2; 3)} \quad (\Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta))(\alpha, \beta) = \eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)) \\ = \langle {}^t\eta(\tilde{\alpha}(l)), \tilde{\beta}(u)\rangle = \beta(u, {}^t\eta(\tilde{\alpha}(l))),$$

cette expression converge bien vers 0, uniformément pour $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\beta \in \mathcal{B}'$.

Ceci montre que $(l, u) \to \Gamma_{\mu,\pi}(l, u, \eta)$ est continue sur $L \times U$.

c) $\lambda = \varepsilon$. Nous allons directement montrer que l'application bilinéaire $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$ de $(L \otimes U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$ se prolonge en une application, bilinéaire, que nous appellerons $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$, de $(L\varepsilon U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$, séparément continue, ce qui entraînera la conclusion cherchée. Soient en effet $\xi \in L\varepsilon U$, $\eta \in M\varepsilon V$. ξ et η définissent des applications linéaires continues ${}^t\xi$ et ${}^t\eta$ respectivement de U'_c dans L et de V'_c dans M. Alors ils définissent une application bilinéaire $(u', v') \to {}^t\xi(u') \otimes {}^t\eta(v')$ de $U'_c \times V'_c$ dans $L \otimes M$; notons ${}^t\xi \otimes {}^t\eta$ cette application. Si u' converge vers 0 dans U'_c, et que v' parcoure une partie équicontinue convexe équilibrée faiblement fermée de V', ${}^t\xi(u')$ converge vers 0 dans L et ${}^t\eta(v')$ parcourt une partie convexe équilibrée compacte de M. Comme $\mu \leqslant \gamma$, l'application bilinéaire canonique de $L \times M$ dans $L \otimes_\mu M$ est hypocontinue par rapport aux parties convexes équilibrées compactes, donc ${}^t\xi(u') \otimes {}^t\eta(v')$ converge vers 0 dans $L \otimes_\mu M$ donc a fortiori dans $L \hat{\otimes}_\mu M$. On voit donc, en raisonnant de même dans le cas où les rôles de u et v sont échangés, que ${}^t\xi \otimes {}^t\eta$ est une application bilinéaire ε-hypocontinue de $U'_c \times V'_c$ dans $L \hat{\otimes}_\mu M$; c'est donc un élément de $\varepsilon(U, V; L \hat{\otimes}_\mu M)$, et comme cet espace est un sous-espace de $\varepsilon(\hat{U}, \hat{V}; L \hat{\otimes}_\mu M)$ et que ce dernier peut être identifié à $\varepsilon(\hat{U}, \hat{V}, L \hat{\otimes}_\mu M)$ (corollaire 1 de la proposition 4 du chapitre I) donc à $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$ (proposition 7 du chapitre I), on peut identifier ${}^t\xi \otimes {}^t\eta$ à un élément $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}(\xi, \eta)$ de $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$.

Montrons maintenant que cette application générale est séparément continue.

Soit η fixé. Si ξ converge vers 0 dans $L\varepsilon U$, ${}^t\xi(u')$ converge vers 0 uniformément lorsque u' parcourt une partie équicontinue $\mathcal{U}'$ de U' ou $(\hat{U})'$. D'autre part, si $\mathcal{V}'$ est un partie équicontinue convexe équilibrée faiblement fermée de V', ${}^t\tilde{\eta}(\mathcal{V}')$ est une partie convexe équilibrée compacte de M. Comme alors l'application canonique de $L \times M$ dans $L \otimes_\mu M$ est toujours γ-continue, pour $\mu \leqslant \gamma$, ${}^t\xi(u') \otimes {}^t\tilde{\eta}(v')$ converge vers 0 dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)$, uniformément pour $u' \in \mathcal{U}'$, $v' \in \mathcal{V}'$. Donc $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}(\xi, \eta)$ converge vers 0 dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$, quand ξ converge vers 0 pour η fixé; comme ici ξ et η jouent le même rôle, $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$ est bien séparément continue [Remarquons que $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$ peut se définir même pour $\mu = \iota$, si U'_c et V'_c sont tonnelés. Car ${}^t\xi \otimes {}^t\tilde{\eta}$ est de toute façon séparément continue de $U'_c \times V'_c$ dans $L \hat{\otimes}_\iota M$; comme U'_c et V'_c sont tonnelés, elle est hypocontinue par rapport aux parties bornées (voir note 2, page 13); elle est alors ε-hypocontinue d'où le résultat. Mais $\Gamma^0_{\iota,\varepsilon}$ ainsi définie n'est pas séparément continue de $(L\varepsilon U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\iota M)\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$].

Montrons maintenant que cette nouvelle application $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$, restreinte à $(L \otimes U) \times (M\,\varepsilon\,V)$, coïncide avec l'application $\Gamma_{\mu,\lambda}$ définie antérieurement, pour $\lambda = \varepsilon$. Soient $l \in L$, $u \in U$, $\eta \in M\varepsilon V$, $\xi = l \otimes u \in L \otimes U$. Avec la nouvelle définition, $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}(\xi, \eta)$ est l'élément de $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon(\hat{U}\,\varepsilon\,\hat{V}) \approx \varepsilon(\hat{U},\ \hat{V};\ L \hat{\otimes}_\mu M)$ définissant l'application bilinéaire ε-hypocontinue

$$(u', v') \to {}^t\xi(u') \otimes {}^t\tilde{\eta}(v') = \langle u', u\rangle\, l \otimes {}^t\tilde{\eta}(v')$$

de $(\hat{U})'_c \times (\hat{V})'_c$ dans $L \hat{\otimes}_\mu M$. Donc $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}\ (\xi, \eta)$ définit la forme trilinéaire ε-hypocontinue sur $(L \hat{\otimes}_\mu M)'_c \times (\hat{U})'_c \times (\hat{V})'_c$:

$$\begin{aligned}(\alpha, u', v') &\to \langle u', u\rangle \alpha(l, {}^t\tilde{\eta}(v'))\\ &= \langle u', u\rangle \langle \tilde{\alpha}(l), {}^t\tilde{\eta}(v')\rangle = \langle u', u\rangle \langle \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l)), v'\rangle;\end{aligned}$$

il définit donc l'application linéaire continue de $(L \hat{\otimes}_\mu M)'_c$ dans $U \otimes_\varepsilon V \subset \hat{U}\varepsilon\hat{V}$: $\alpha \to u \otimes \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))$. Cela prouve d'abord que $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$ applique $(L \otimes U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon(U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$. Si alors $\beta \in (U \hat{\otimes}_\varepsilon V)'$, $(\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}(\xi,\eta))(\alpha, \beta) = \beta\big(u,\ \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))\big)$, ce qui est identique à l'ancienne définition $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$ d'après (II, 2; 3).

Nous venons donc de montrer que, dans tous les cas, pour η fixé, l'application $(l,\ u) \to \Gamma_{\mu,\lambda}(l,\ u,\ \eta)$ de $L \times U$ dans

$$(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\lambda V),$$

espace quasi-complet, est λ-continue (pour μ et $\lambda \leqslant \gamma$). Elle se prolonge donc, de manière unique, en une application linéaire continue, que nous noterons $\xi \to \Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta)$, de $L \hat{\otimes}_\lambda U$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$, avec $\Gamma_{\mu,\lambda}(l \otimes u, \eta) = \Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta)$. Ainsi $\Gamma_{\mu,\lambda} : (\xi, \eta) \to \Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta)$ est bien une application bilinéaire de $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$; elle est toujours séparément continue en ξ pour η fixé.

Remarque. — Si L, U, ne sont pas quasi-complets, il importe de ne pas confondre $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$, application de $(L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\, \varepsilon\, (U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$, avec $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$, application de $(L\varepsilon U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$; car $L \hat{\otimes}_\varepsilon U$ et $L\, \varepsilon\, U$ n'ont pas de relation d'inclusion. Mais si L et U sont quasi-complets, $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$ est un prolongement de $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$, et on pourra, par abus de langage, le noter encore $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$. D'autre part, si L ou U à la propriété d'approximation stricte, $L \hat{\otimes}_\varepsilon U \supset L\varepsilon U$ (proposition 11 du chapitre I), alors c'est $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$ qui prolonge $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$. Pour $\mu = \iota$, $\Gamma^0_{\iota,\varepsilon}$ a été défini, mais non $\Gamma_{\iota,\varepsilon}$.

3° Compatibilité de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ avec les applications linéaires continues et le changement des topologies λ et μ.

Soient 2 systèmes de 4 espaces, et des applications linéaires continues $L_1 \to L_2$, $M_1 \to M_2$, $U_1 \to U_2$, $V_1 \to V_2$; et soient 4 lettres, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, $\mu_1 \geqslant \mu_2$ (avec $\lambda_1 \leqslant \gamma$, $\mu_1 \leqslant \gamma$). Nous devons démontrer la commutativité du diagramme :

$$\text{(II, 2; 4)} \qquad \begin{array}{ccc} (L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} U_1) \times (M_1\varepsilon V_1) & \longrightarrow & (L_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} U_2) \times (M_2\varepsilon V_2) \\ \downarrow \Gamma_{\mu_1,\lambda_1} & & \downarrow \Gamma_{\mu_2,\lambda_2} \\ (L_1 \hat{\otimes}_{\mu_1} M_1)\, \varepsilon\, (U_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} V_1) & \longrightarrow & (L_2 \hat{\otimes}_{\mu_2} M_2)\, \varepsilon\, (U_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} V_2) \end{array}$$

Il suffit naturellement de montrer la même formule, dans laquelle $L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} U_1$ et $L_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} U_2$ sont remplacés par $L_1 \times U_1$ et $L_2 \times U_2$; car alors $\rightarrow\downarrow$ et $\downarrow\rightarrow$ seront, pour $\eta_1 \in M_1\varepsilon V_1$ fixé, deux applications linéaires continues (voir 2°) de $L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} U_1$ dans $(L_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} M_2)\, \varepsilon\, (U_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} V_2)$, qui coïncideront sur le sous-espace dense $L_1 \otimes U_1$. donc sur $L_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} U_1$.

Soient alors $l_1 \in L_1$, $u_1 \in U_1$, $\eta_1 \in M_1\varepsilon V_1$, et soient $l_2 \in L_2$, $u_2 \in U_2$ $\eta_2 \in M_2\varepsilon V_2$ leurs images. Soient d'autre part $\alpha_2 \in (L_2 \hat{\otimes}_{\mu_2} M_2)'$, $\beta_2 \in (U_2 \hat{\otimes}_{\lambda_2} V_2)'$; comme $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ et $\mu_1 \geqslant \mu_2$, leurs images réciproques sont des éléments $\alpha_1 \in (L_1 \hat{\otimes}_{\mu_1} M_1)'$, $\beta_1 \in (U_1 \hat{\otimes}_{\lambda_1} V_1)'$. Il faut alors montrer la formule :

$$\text{(II, 2; 5)} \qquad \eta_2(\tilde{\alpha}_2(l_2), \tilde{\beta}_2(u_2)) = \eta_1(\tilde{\alpha}_1(l_1), \tilde{\beta}_1(u_1)),$$

ce qui résulte de la définition de l_2, u_2, η_2, α_1, β_1, à partir de l_1, u_1, η_1, α_2, β_2.

Dans le cas spécial $\lambda = \varepsilon$, nous laissons au lecteur le soin de montrer que $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$, application de $(L \varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V})$, est compatible avec les applications linéaires continues et le changement de μ.

4° Continuité partielle de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ par rapport à ξ; L, M, U, V, quasi-complets.

a) Soit $\mu = \gamma$. Une partie relativement compacte $\mathfrak{N}$ de $M \varepsilon V$ est aussi ε-équihypocontinue sur $M'_c \times V'_c$ (proposition 2 du chapitre I); si η parcourt une telle partie, $\tilde{\eta}$ parcourt une partie équicontinue de $\mathfrak{L}(M'_c; V)$, donc aussi bornée dans $\mathfrak{L}_e(M'_c; V)$ [1]; toutes les convergences démontrées dans le 2°) sont donc uniforme pour $\eta \in \mathfrak{N}$, de sorte que les applications $(l, u) \to \Gamma_{\gamma,\lambda}(l, u, \eta)$ forment un ensemble λ-équicontinu sur $L \times U$ pour $\eta \in \mathfrak{N}$, et que par conséquent les applications $\xi \to \Gamma_{\gamma,\lambda}(\xi, \eta)$ forment un ensemble équicontinu sur $L \hat{\otimes}_\lambda U$ pour $\eta \in \mathfrak{N}$; donc $\Gamma_{\gamma,\lambda}(\xi, \eta)$ converge vers 0 si ξ converge vers 0, uniformément lorsque η parcourt une γ-partie de $M \varepsilon V$.

[On voit même qu'on peut seulement supposer que $\tilde{\eta}$ parcourt une partie équicontinue de $\mathfrak{L}(M'_c; V)$, donc, si M'_c est tonnelé, que $\tilde{\eta}$ parcourt une partie bornée de $\mathfrak{L}_\varepsilon(M'_c; V)$, ou η une partie bornée de $M \varepsilon V$].

En réalité, il faut une mention spéciale pour le cas $\lambda = \varepsilon$. Montrons dans ce cas que, si ξ converge vers 0 dans $L\varepsilon U$, et que η parcourt une partie relativement compacte $\mathfrak{N}$ de $M\varepsilon V$, $\Gamma^0_{\gamma,\varepsilon}(\xi, \eta)$ converge vers 0 dans $(L \hat{\otimes}_\gamma M) \varepsilon (U\varepsilon V)$. Or, si $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{V}'$ sont des parties équicontinues de U' et V', ${}^t\xi(u')$ converge vers 0, uniformément pour $u' \in \mathfrak{U}'$, ${}^t\tilde{\eta}(\mathfrak{V}')$ parcourt une partie relativement compacte de M (corollaire 1 de la proposition 4 du chapitre I), donc ${}^t\xi(u') \otimes {}^t\tilde{\eta}(v')$ converge bien vers 0 dans $L \hat{\otimes}_\gamma M$, uniformément pour $\eta \in \mathfrak{N}$, $u' \in \mathfrak{U}'$, $v' \in \mathfrak{V}'$; alors $\Gamma^0_{\gamma,\varepsilon}(\xi, \eta)$ converge vers 0 dans $(L \hat{\otimes}_\gamma M) \varepsilon (U\varepsilon V)$ quand ξ tend vers 0, uniformément pour $\eta \in \mathfrak{N}$.

La symétrie entre les rôles de ξ et η montre alors que $\Gamma^0_{\gamma,\varepsilon}$, donc a fortiori $\Gamma_{\gamma,\varepsilon}$, est γ-continue.

[1] BOURBAKI [2], chapitre III, § 3, n° 6, proposition 7 page 26.

b) Soit $\mu = \beta$. La compatibilité de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ avec le raffinement de μ (3°) montre que $\Gamma_{\beta,\lambda}$ est composé de $\Gamma_{\gamma,\lambda}$ et de l'application canonique $(L \hat{\otimes}_\gamma M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V) \to (L \hat{\otimes}_\beta M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$. On est donc au moins sûr que $\Gamma_{\beta,\lambda}(\xi, \eta)$ converge vers 0 si ξ converge vers 0 et que η parcoure une partie relativement compacte de $M \varepsilon V$. Pour $\lambda = \gamma$, il ne semble pas qu'on puisse obtenir mieux.

Mais supposons $\lambda \leqslant \beta$. Nous allons montrer que dans ce cas, si ξ converge vers 0 et que η parcoure une partie *bornée* $\mathfrak{N}$ de $M \varepsilon V$, $\Gamma_{\beta,\lambda}(\xi, \eta)$ converge vers 0. Nous reprendrons pour cela toutes les convergences démontrées dans 2°, et montrerons qu'elles sont uniformes pour $\eta \in \mathfrak{N}$. Cela entraînera, comme dans 4° *a*), la conclusion cherchée. Reprenons les hypothèses 2° *a*) pour $\lambda = \beta$: l converge vers 0 dans L, u parcourt une partie bornée $\mathfrak{U}$ de U, η une partie bornée de $\mathfrak{N}$ de $M \varepsilon V$. Comme $\mathfrak{A}'$ est β-équicontinu, $\tilde{\alpha}(l)$ converge vers a dans M'_b, uniformément pour $\alpha \in \mathfrak{A}'$; comme $\mathfrak{B}'$ est β-équicontinu, $\tilde{\beta}(u)$ parcourt une partie équicontinue de V' lorsque β parcourt $\mathfrak{B}'$ et que u parcourt $\mathfrak{U}$; et comme une partie bornée de $M \varepsilon V$ est ε-équihypocontinue sur $M'_b \times V'_b$ (proposition 7 *bis* du chapitre I), $\eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u))$ converge bien vers 0, uniformément pour $\alpha \in \mathfrak{A}'$, $\beta \in \mathfrak{B}'$, $u \in \mathfrak{U}$, $\eta \in \mathfrak{N}$.

Reprenons ensuite les hypothèses 2° *a'*) pour $\lambda = \beta$: l parcourt une partie bornée $\mathfrak{L}$ de L, u converge vers 0 dans U, η parcourt une partie bornée $\mathfrak{N}$ de $M \varepsilon V$. Alors $\tilde{\alpha}(l)$ parcourt une partie équicontinue de M' pour $\alpha \in \mathfrak{A}'$, $l \in \mathfrak{L}$; $\tilde{\beta}(u)$ converge vers 0 dans V'_b, uniformément pour $\beta \in \mathfrak{B}'$; et $\mathfrak{N}$ est ε-équihypocontinue sur $M'_b \times V'_b$, d'où la conclusion.

Reprenons maintenant les hypothèses 2° *b*) pour $\lambda = \pi$; l et u convergent vers 0, η parcourt une partie bornée $\mathfrak{N}$ de $M \varepsilon V$. Alors $\tilde{\alpha}(l)$ converge vers 0 dans M'_b, uniformément pour $\alpha \in \mathfrak{A}'$; comme η parcourt une partie $\mathfrak{N}$ ε-équihypocontinue sur $M'_b \times V'_b$ (proposition 2 *bis* du chapitre I), $\tilde{\eta}$ parcourt une partie équicontinue de $\mathfrak{L}(M'_b ; V)$, donc $\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))$ converge vers 0 dans V, uniformément pour $\alpha \in \mathfrak{A}'$, $\eta \in \mathfrak{N}$; comme $\mathfrak{B}'$ est équicontinue sur $U \times V$, la formule (II, 2 ; 3) prouve que $\Gamma_{\beta,\pi}(l, u, \eta)$ converge vers 0, uniformément pour $\eta \in \mathfrak{N}$.

Enfin pour $\lambda = \varepsilon$, nous allons directement montrer que, si ξ converge vers 0 dans $L \varepsilon U$, et que η parcoure une partie bornée $\mathcal{N}$ de $M\varepsilon V$, $\Gamma^0_{\beta,\varepsilon}(\xi,\eta)$ converge vers 0 dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon(U\varepsilon V)$. Soient $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$ des parties équicontinues de U' et V'. Alors ${}^t\xi(u')$ converge vers 0, uniformément pour $u' \in \mathcal{U}'$; $\tilde{\mathcal{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}_\varepsilon(V'_c;\, M)$, donc ${}^t\tilde{\eta}(\mathcal{V}')$ reste dans une partie bornée de M pour $\eta \in \mathcal{N}$; alors ${}^t\xi(u') \otimes {}^t\tilde{\eta}(v')$ converge vers 0 dans $L \hat{\otimes}_\beta M$, uniformément pour $u' \in \mathcal{U}'$, $v' \in \mathcal{V}'$, $\eta \in \mathcal{N}$; d'où la conclusion.

La symétrie des rôles de ξ et η, pour $\lambda = \varepsilon$, montre même que $\Gamma^0_{\beta,\varepsilon}$, donc a fortiori $\Gamma_{\beta,\varepsilon}$, est β-continue. On voit aussi que, si L, M, U, V, ne sont pas quasi-complets, $\Gamma^0_{\beta,\varepsilon}$ est toujours β-continue de $(L\varepsilon U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(\hat{U}\varepsilon\hat{V})$; mais il n'est pas certain que $\Gamma_{\beta,\varepsilon}$ soit aussi β-continue, car il n'y a plus ici de symétrie entre les rôles de ξ et de η.

c) Soit $\mu = \pi$. Si $\lambda = \gamma$, on peut seulement dire que, si ξ converge vers 0 et que η parcoure une partie relativement compacte de $M\varepsilon V$, $\Gamma_{\pi,\gamma}(\xi,\eta)$ converge vers 0. Si $\lambda = \beta$, on peut seulement dire que, si ξ converge vers 0 et que η parcoure une partie bornée de $M\varepsilon V$, $\Gamma_{\pi,\beta}(\xi,\eta)$ converge vers 0. Mais supposons $\lambda \leqslant \pi$. Nous allons montrer que $\Gamma_{\pi,\lambda}$ est continue même si L, M, U, V, ne sont pas quasi-complets. Soit d'abord $\lambda = \pi$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 dans $(L \hat{\otimes}_\pi M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\pi V)$, qu'on peut supposer défini comme l'ensemble des formes bilinéaires ε-hypocontinues sur $(L \hat{\otimes}_\pi M)'_c \times (U \hat{\otimes}_\pi V)'_c$ majorées en module par 1 sur $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$, où $\mathcal{A}'$ (resp. $\mathcal{B}'$) est une partie équicontinue de $(L \hat{\otimes}_\pi M)'$ (resp. $(U \hat{\otimes}_\pi V)'$). Comme $\mathcal{A}'$ est un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $L \times M$, il existe un voisinage $\mathcal{L}$ de 0 dans L tel que $\tilde{\alpha}(\mathcal{L})$ parcoure une partie équicontinue de M', pour $\alpha \in \mathcal{A}'$. Pour la même raison, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans U tel que $\tilde{\beta}(\mathcal{U})$ parcoure une partie équicontinue de V', pour $\beta \in \mathcal{B}'$. D'après la définition de la topologie de $M\varepsilon V$, topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de M' et V', il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de 0 dans $M\varepsilon V$ tel que $\left|\eta\big(\tilde{\alpha}(l),\ \tilde{\beta}(u)\big)\right| \leqslant 1$ pour $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\beta \in \mathcal{B}'$, $\eta \in \mathcal{N}$, $l \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{U}$. Celà revient à dire que

$$\Gamma_{\pi,\pi}(l,\ u,\ \eta) \in \mathcal{W}$$

pour $l \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{U}$, $\eta \in \mathcal{N}$. Par passage à la limite, $\mathcal{W}$ étant disqué, on en déduit que $\Gamma_{\pi,\pi}(\xi,\eta) \in \mathcal{W}$, pour ξ dans l'enveloppe de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{U}$ dans $L \hat{\otimes}_\pi U$ et $\eta \in \mathcal{N}$; comme cette enveloppe est un voisinage de 0 dans $L \hat{\otimes}_\pi U$ [1], $\Gamma_{\pi,\pi}$ est bien continue. Enfin, pour $\lambda = \varepsilon$, nous allons voir que $\Gamma^0_{\pi,\varepsilon}$ est continue de $(L \varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\pi M) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V})$. Soient en effet $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}'$, des parties équicontinues de U', V' respectivement. Si ξ converge vers 0 dans $L \varepsilon U$, ${}^t\xi(u')$ converge vers 0 dans L, uniformément pour $u' \in \mathcal{U}'$; si η converge vers 0 dans $M \varepsilon V$, ${}^t\eta(v')$ converge vers 0 dans M, uniformément pour $v' \in \mathcal{V}'$; donc ${}^t\xi(u') \otimes {}^t\eta(v')$ converge vers 0, dans $L \hat{\otimes}_\pi M$, uniformément pour $u' \in \mathcal{U}'$, $v' \in \mathcal{V}'$, donc $\Gamma^0_{\pi,\varepsilon}$ est bien continue de $(L \varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\pi M) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V})$; alors $\Gamma_{\pi,\varepsilon}$ est continue de

$$(L \otimes_\varepsilon U) \times (M \varepsilon V) \quad \text{dans} \quad (L \hat{\otimes}_\pi M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V),$$

donc, par prolongement, de

$$(L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \times (M \varepsilon V) \quad \text{dans} \quad (L \hat{\otimes}_\pi M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V).$$

d) Soit enfin $\mu = \varepsilon$; L, M, U, V, non nécessairement quasi-complets. Si $\lambda \geqslant \pi$, on peut seulement avoir les mêmes conclusions que pour $\mu = \pi$.

Mais, pour $\lambda = \mu = \varepsilon$, $\Gamma^0_{\varepsilon,\varepsilon}$ est ε-continue de

$$(L \varepsilon U) \times (M \varepsilon V) \quad \text{dans} \quad (L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V}),$$

et c'est l'application bilinéaire canonique de cet espace dans $(L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V})$.

Soient en effet $\xi \in L \varepsilon U$, $\eta \in M \varepsilon V$. $\Gamma^0_{\varepsilon,\varepsilon}(\xi, \eta)$ définit une application de $U'_c \times V'_c$ dans $L \hat{\otimes}_\varepsilon M \subset \hat{L} \varepsilon \hat{M}$, qui est définie par $(u', v') \to {}^t\xi(u') \otimes {}^t\eta(v')$; donc, si l'on identifie $(\hat{L} \varepsilon \hat{M}) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V})$ à $\varepsilon(\hat{L}, \hat{M}, \hat{U}, \hat{V})$, il définit la forme quadrilinéaire sur $L' \times M' \times U' \times V'$:

$$(l', m', u', v') \to \langle l', {}^t\xi(u') \rangle \langle m', {}^t\eta(v') \rangle = \xi(l', u') \eta(m', v');$$

or c'est aussi la même forme que définit l'élément $\xi \otimes \eta$ de $(\hat{L} \varepsilon \hat{U}) \varepsilon (\hat{M} \varepsilon \hat{V})$, identifié à $\varepsilon(\hat{L}, \hat{M}, \hat{U}, \hat{V})$, ce qui prouve notre affirmation.

Alors $\Gamma_{\varepsilon,\varepsilon}$ est ε-continue de $(L \otimes_\varepsilon M) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$, donc, en prolongeant par continuité, de $(L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$.

En conclusion: si L, M, U, V, sont quasi-complets, $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi,\eta)$ converge vers 0 si ξ converge vers 0 et que η parcoure une

[1] GROTHENDIECK [4], proposition 2, page 30; SCHWARTZ [2], exposé 1, proposition 1, page 2.

partie relativement compacte de $M\varepsilon V$, λ et μ quelconques $\leqslant \gamma$; si ξ converge vers 0 et que η parcoure une partie bornée de $M\varepsilon V$, pour λ et $\mu \leqslant \beta$. Même si L, M, U, V, ne sont pas quasi-complets, $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta)$ converge vers 0 si ξ et η convergent vers 0 (autrement dit $\Gamma_{\mu,\lambda}$ est continue) pour λ et $\mu \leqslant \pi$; $\Gamma_{\mu,\lambda}$ est ε-continue pour $\lambda = \mu = \varepsilon$. C'est bien ce qui est indiqué dans l'énoncé (1°, 2°, 3°). De plus, si L, M, U, V, sont quasi-complets, $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$ est μ-continue, ce qui est la moitié de 5°.

5° Continuité partielle de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ par rapport à η; L, M, U, V, non nécessairement quasi-complets.

D'après 4° *c* et *d*, il n'y a pas lieu de considérer les cas où λ et μ sont $\leqslant \pi$.

Soit alors Ξ une partie μ-λ-décomposable de $L \hat{\otimes}_\lambda U$; montrons que, si ξ parcoure Ξ et que η converge vers 0 dans $M\varepsilon V$, $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta)$ converge vers 0. Soit donc $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 de $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon(U \hat{\otimes}_\lambda V)$, défini comme l'ensemble des formes bilinéaires ε-hypocontinues sur $(L \hat{\otimes}_\mu M)'_c \times (U \hat{\otimes}_\lambda V)'_c$, majorées en module par 1 sur $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$, où $\mathcal{A}'$ (resp. $\mathcal{B}'$) est un ensemble μ-équicontinu (resp. λ-équicontinu) de formes bilinéaires sur $L \times M$ (resp. $U \times V$).

a) Soient λ et $\mu \geqslant \beta$.

Il existe alors une μ-partie $\mathcal{L}$ de L une λ-partie $\mathcal{U}$ de U telles que Ξ soit dans l'enveloppe de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{U}$. Alors $\tilde{\alpha}(\mathcal{L})$ reste dans une partie équicontinue $\mathcal{M}'$ de M' pour $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\tilde{\beta}(\mathcal{U})$ dans une partie équicontinue $\mathcal{V}'$ de V' pour $\beta \in \mathcal{B}'$.

Si alors $\mathcal{N}$ est le voisinage de 0 de $M\varepsilon V$, formé des η tels que $|(\eta(m', v'))| \leqslant 1$ pour $m' \in \mathcal{M}'$, $v' \in \mathcal{V}'$, on a $|\eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u))| \leqslant 1$ pour $l \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathcal{A}'$, $u \in \mathcal{U}$, $\beta \in \mathcal{B}'$, $\eta \in \mathcal{N}$, donc $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}$ pour $\xi \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{U}$, $\eta \otimes \mathcal{N}$; et comme $\Gamma_{\mu,\lambda}$ est séparément continue en ξ pour η fixé, et que $\mathcal{W}$ est disqué, on a aussi $\Gamma_{\mu,\lambda}(\Xi, \mathcal{N}) \subset \mathcal{W}$, et notre assertion est démontrée.

b) Soient $\mu \geqslant \beta$, $\lambda \leqslant \pi$.

Comme $\mathcal{B}'$ est λ-équicontinu sur $U \times V$, $\lambda = \pi$ ou ε, il existe (1)

(1) Pour $\lambda = \pi$, c'est trivial : si $\mathcal{B}'$ est équicontinu sur $U \times V$, il existe un voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0 dans U et un voisinage disqué $\mathcal{V}$ de O dans V tels que $\mathcal{B}'$ soit majoré par 1 sur $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$; alors chaque $\beta \in \mathcal{B}'$ provient d'une forme bilinéaire continue de norme $\leqslant 1$ sur $U_{\mathcal{U}} \times V_{\mathcal{V}}$ donc prolongeable en une forme bilinéaire continue de norme $\leqslant 1$ sur $(U_{\mathcal{U}})^\frown \times (V_{\mathcal{V}})^\frown$. Pour $\lambda = \varepsilon$, voir GROTHENDIECK [4], lemme 13, page 130,

un voisinage de 0 disque $\mathcal{U}$ de U tels que $\mathcal{B}'$ soit l'image réciproque de $\mathcal{B}'_0$, ensemble λ-équicontinu de formes bilinéaires sur $(U_{\mathcal{U}})^\frown \times V$, par l'application canonique $U \to (U_{\mathcal{U}})^\frown$. Si donc $\mathcal{W}_0$ est le voisinage de 0 sur $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon ((U_{\mathcal{U}})^\frown \hat{\otimes}_\lambda V)$ défini par les ensembles équicontinus $\mathcal{A}' \subset (L \hat{\otimes}_\mu M)'$, $\mathcal{B}'_0 \subset ((U_{\mathcal{U}})^\frown \hat{\otimes}_\lambda V)'$, la relation $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}$ est équivalente à la relation $(\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta))^\bullet \in \mathcal{W}_0$, où $(\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta))^\bullet$ est l'image de $\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta)$ par $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V) \to (L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon ((U_{\mathcal{U}})^\frown \hat{\otimes}_\lambda V)$.

Mais d'après la compatibilité de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ avec les applications linéaires continues, $(\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, \eta))^\bullet = \Gamma_{\mu,\lambda}(\xi^\bullet, \eta)$, où $\xi^\bullet$ est l'image de ξ par l'application canonique $L \hat{\otimes}_\lambda U \to L \hat{\otimes}_\lambda (U_{\mathcal{U}})^\frown$, le dernier $\Gamma_{\mu,\lambda}$ étant relatif aux 4 espaces L, M, $(U_{\mathcal{U}})^\frown$, V.

Comme Ξ est supposée μ-λ-décomposable, étant donné $\mathcal{U}$ il existe une μ-partie $\mathcal{L}$ de L, telle que l'image $\Xi^\bullet$ de Ξ dans $L \hat{\otimes}_\lambda (U_{\mathcal{U}})^\frown$ soit contenue dans l'enveloppe de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{U}^\bullet$, $\mathcal{U}^\bullet$ étant la boule unité de $U_{\mathcal{U}}$.

Comme $\mathcal{A}'$ est μ-équicontinue sur $L \times M$, $\tilde{\alpha}(\mathcal{L})$ parcourt une partie équicontinue $\mathcal{M}'$ de M' pour $\alpha \in \mathcal{A}'$; comme $\mathcal{B}'_0$ est équicontinue sur $\hat{U}_{\mathcal{U}} \otimes V$, $\tilde{\beta}(\mathcal{U}) = \tilde{\beta}_0(\mathcal{U}^\bullet)$ parcourt une partie équicontinue $\mathcal{V}'$ de V' pour $\beta \in \mathcal{B}'$; si alors $\mathcal{N}$ est le voisinage de 0 de $M \varepsilon V$ constitué par les formes bilinéaires ε-hypocontinues sur $M'_c \times V'_c$ majorées par 1 en module sur $\mathcal{M}' \times \mathcal{V}'$, on a bien $\Gamma_{\mu,\lambda}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{U}^\bullet, \mathcal{N}) \subset \mathcal{W}_0$, donc $(\Gamma_{\mu,\lambda}(\Xi, \mathcal{N}))^\bullet = \Gamma_{\mu,\lambda}(\Xi^\bullet, \mathcal{N}) \subset \mathcal{W}_0$, d'où $\Gamma_{\mu,\lambda}(\Xi, \mathcal{N}) \subset \mathcal{W}$, et notre assertion est démontrée.

c) Soient $\lambda \geqslant \beta$, $\mu \leqslant \pi$.

Démonstration analogue à celle de *b*).

Ceci achève ce qui est indiqué dans l'énoncé II de la proposition 2.

6° Restriction de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ à $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \otimes V)_0$ (1) (L, M, U, V, non nécessairement quasi-complets).

Cette restriction est bien séparément continue en ξ pour η fixé, séparément continue en η pour ξ fixé dans $L \otimes U$; elle coïncide sur $(L \otimes U) \times (M \otimes V)$ avec l'application canonique de cet espace dans $(L \otimes M) \otimes (U \otimes V)$; alors l'image de $(L \otimes U) \times (M \otimes V)_0$, par continuité, est dans

$$((L \otimes_\mu M) \otimes_\varepsilon (U \otimes_\lambda V))^\frown \subset (L \hat{\otimes}_\mu M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V),$$

(1) Voir page 18 : $(M \otimes V)_0$ désigne l'adhérence stricte de $M \otimes V$ dans $M \varepsilon V$.

et par suite il en est encore ainsi de l'image de $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \otimes V)_0$.

Cette application bilinéaire de $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \otimes V)_0$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$ est la seule à posséder ces propriétés, car une application qui la possède coincide avec $\Gamma_{\mu,\lambda}$ sur $(L \otimes U) \times (M \otimes V)$, donc par continuité, sur

$$(L \otimes U) \times (M \otimes V)_0,$$

puis sur $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \otimes V)_0$. Cela donne une *caractérisation* de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ *indépendante de tout procédé particulier de définition.*

Dans le cas $\lambda = \varepsilon$, $\Gamma^0_{\mu,\varepsilon}$ applique $(L \otimes U)_0 \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$ (page 22); comme ξ et η jouent des rôles symétriques, elle applique aussi $(L \varepsilon U) \times (M \otimes V)_0$ dans

$$(L \hat{\otimes}_\mu M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V);$$

et nous venons de voir qu'elle applique $(L \otimes U)_0 \times (M \otimes V)_0$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\varepsilon V)$.

7° λ-continuité de $\Gamma_{\varepsilon,\lambda}$ (L, M, U, V, quasi-complets).

Nous avons vu dans 4°) la μ-continuité de $\Gamma_{\mu,\varepsilon}$.

Nous allons voir ici que $\Gamma_{\varepsilon,\lambda}$ peut se calculer par l'intermédiaire d'un $\Gamma_{\lambda,\varepsilon}$ d'où résultera sa λ-continuité.

$(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \varepsilon V)$ est isomorphe à $(V \varepsilon M) \times (U \hat{\otimes}_\lambda L)$; celui-ci a une application continue canonique dans $(V \varepsilon M) \times (U \hat{\otimes}_\varepsilon L)$; alors $\Gamma^0_{\lambda,\varepsilon}$ applique cet espace dans $(V \hat{\otimes}_\lambda U) \varepsilon (M \hat{\otimes}_\varepsilon L)$ (d'après 6°), isomorphe à $(L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$. Nous définissons ainsi une application $\Delta_{\varepsilon,\lambda}$ de $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$, λ-continue; on peut même dire plus: $\Delta_{\varepsilon,\lambda}$ se factorise en $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \varepsilon V) \to (L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ suivie d'une application λ-continue de cet espace dans $(L \hat{\otimes}_\varepsilon M) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$.

Nous allons voir que $\Gamma_{\varepsilon,\lambda} = \Delta_{\varepsilon,\lambda}$.

Pour η fixé dans $M \varepsilon V$, $\xi \to \Gamma_{\varepsilon,\lambda}(\xi,\eta)$ et $\xi \to \Delta_{\varepsilon,\lambda}(\xi,\eta)$ sont toutes deux continues sur $L \hat{\otimes}_\lambda U$. Il suffit donc de montrer que $\Gamma_{\varepsilon,\lambda}$ et $\Delta_{\varepsilon,\lambda}$ coincident sur $(L \otimes U) \times (M \varepsilon V)$.

Soient donc $l \in L$, $u \in U$, $\eta \in M \varepsilon V$.

Soient d'autre part $\alpha \in (L \otimes_\varepsilon M)'$, $\beta \in (U \hat{\otimes}_\lambda V)'$. D'une part on a $(\Gamma_{\varepsilon,\lambda}(l \otimes u, \eta))\ (\alpha, \beta) = \eta(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u))$. D'autre part, d'après ce qui a été vu page 22 (en échangeant les rôles des divers espaces), $\Delta_{\varepsilon,\lambda}\ (l \otimes u, \eta)$, considéré comme application linéaire continue de $(U \hat{\otimes}_\lambda V)'_c$ dans $L \hat{\otimes}_\varepsilon M$, est $\beta \to l \otimes {}^t\tilde{\eta}\big(\tilde{\beta}(u)\big)$; donc $(\Delta_{\varepsilon,\lambda}(l \otimes u, \eta))(\alpha, \beta) = \alpha\big(l, {}^t\tilde{\eta}(\tilde{\beta}(u))\big) = \big\langle \tilde{\alpha}(l), {}^t\tilde{\eta}\big(\tilde{\beta}(u)\big)\big\rangle = \eta\big(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)\big)$; ce qui prouve bien notre assertion.

Remarquons que, si L, M, U, V, ne sont pas quasi-complets, on peut toujours définir une application $\Delta^0_{\varepsilon,\lambda}$, symétrique de $\Gamma^0_{\lambda,\varepsilon}$, de $(L\varepsilon U) \times (M\varepsilon V)$ dans $(\hat{L}\varepsilon\hat{M})\varepsilon(U \hat{\otimes}_\lambda V)$; cette application est λ-continue, si $\lambda \leqslant \beta$. Mais $L \hat{\otimes}_\lambda U$ ne s'applique pas dans $L\varepsilon U$; il n'y a pas de relation simple entre $\Delta^0_{\varepsilon,\lambda}$ et $\Gamma_{\varepsilon,\lambda}$.

Hypocontinuité de $\Gamma_{\mu,\lambda}$(L, M, U, V, quasi-complets).

Une partie réduite à un point de $L \hat{\otimes}_\lambda U$ n'est pas nécessairement μ-λ-décomposable, donc nous ne pouvons pas affirmer que $\Gamma_{\mu,\lambda}$ soit séparément continue (sauf pour $\mu \leqslant \pi$, $\lambda \leqslant \pi$, ou pour $\mu = \varepsilon$, ou pour $\lambda = \varepsilon$). Mais *si elle l'est*, alors les résultats I, II, III, IV de l'énoncé montrent que $\Gamma_{\mu,\lambda}$ *est hypocontinue* [1] *par rapport aux parties* μ-λ-*décomposables de* $L \hat{\otimes}_\lambda U$ *et aux* ν-*parties* ($\nu = sup\ (\lambda, \mu)$) de $M\varepsilon V$.

Dans ce cas la restriction de $\Gamma_{\mu,\lambda}$ *à* $(L \hat{\otimes}_\lambda U) \times (M \hat{\otimes}_\varepsilon V)$ *est la seule application bilinéaire de cet espace dans* $(L \hat{\otimes}_\mu M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\lambda V)$, *qui soit séparément continue, et qui se réduise, sur* $(L\otimes U) \times (M \otimes V)$, *à l'application bilinéaire canonique dans* $(L \otimes M) \otimes (U \otimes V)$.

Cas où certains des espaces sont identiques au corps des scalaires. Nouvelles formules.

Soit $U = C$, corps des scalaires. Alors $\Gamma_{\mu,\lambda}$ est une application de $L \times (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon V$, indépendante de λ; nous l'appellerons Γ_μ. Cette application est μ-continue, si L, M, V, sont quasi-complets, comme on le voit en appliquant la proposition 2, V, pour $\lambda = \varepsilon$. Elle définit donc une application linéaire continue $\overline{\Gamma_\mu}$ de $L \hat{\otimes}_\mu (M\varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon V$.

Explicitons Γ_μ. Soient $l \in L$, $\eta \in M\varepsilon V$. D'après la formule générale (II, 2; 1), si α est une forme bilinéaire μ-continue sur $L \times M$, et si $\beta = v'$ est une forme linéaire continue sur V, on a

$$\text{(II, 2; 6)} \quad \begin{cases} \Gamma_\mu(l, \eta)(\alpha, v') = \eta(\tilde{\alpha}(l), v') = \big\langle \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l)), v' \big\rangle \\ \qquad = \big\langle \tilde{\alpha}(l), {}^t\tilde{\eta}(v') \big\rangle = \alpha(l, {}^t\tilde{\eta}(v')), \end{cases}$$

[1] Rappelons que « hypocontinu » implique d'abord « séparément continu ».

ce qui montre que :

$$(\text{II, 2; } 6^{bis}) \quad \begin{cases} [\Gamma_\mu(l, \eta)]^\sim(\alpha) = \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l)) \in V, \\ {}^t[\Gamma_\mu(l, \eta)]^\sim(v') = l \otimes {}^t\tilde{\eta}(v') \in L \otimes M. \end{cases}$$

On peut aussi interpréter ces formules comme suit. L'application $M_{\mu, l}$: $m \rightarrow l \otimes m$, est linéaire continue de M dans $L \hat{\otimes}_\mu M$; elle définit donc une application linéaire continue $M_{\mu, l} \otimes I$ de $M\varepsilon V$ dans $(L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon V$; on a justement

$$\Gamma_\mu(l, \eta) = (M_{\mu, l} \otimes I)(\eta).$$

La première égalité (II, 2; 6) coïncide en effet avec celle qui définit $M_{\mu, l} \otimes I$, soit (I, 1; 1), compte tenu de ce que ${}^tM_{\mu, l}(\alpha) = \tilde{\alpha}(l)$.

Si maintenant on fait $U = V = C$, $\Gamma_{\mu, \lambda}$ est une application bilinéaire de $L \times M$ dans $L \hat{\otimes}_\mu M$, qui n'est autre que l'application canonique, puisque sa restriction à

$$(L \otimes C = L) \times (M \otimes C = M)$$

a cette propriété.

Si maintenant nous revenons au cas général, l'application trilinéaire $\Gamma_{\mu, \lambda}$ de la formule (II, 2; 1) peut s'exprimer comme composé d'une Γ_μ et d'une Γ_λ. Si $l \in L$, $u \in U$, $\eta \in M\varepsilon V$, on peut considérer d'abord les 3 espaces L, M, V, et construire $\zeta = \Gamma_\mu(l, \eta) \in (L \hat{\otimes}_\mu M)\varepsilon V$; identifions ce dernier espace à $V\varepsilon(L \hat{\otimes}_\mu M)$. On peut ensuite considérer les 3 espaces U, V, $L \hat{\otimes}_\mu M$, et construire $\Gamma_\lambda(u, \zeta) \in (U \hat{\otimes}_\lambda V)\,\varepsilon\,(L \hat{\otimes}_\mu M)$; si ce dernier espace est identifié à $(L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\lambda V)$, on a

$$(\text{II, 2; 7}) \quad \Gamma_{\mu, \lambda}(l, u, \eta) = \Gamma_\lambda(u, \zeta) = \Gamma_\lambda(u, \Gamma_\mu(l, \eta)).$$

On a en effet, d'après (II, 2,6), pour $\alpha \in (L \hat{\otimes}_\mu M)'$, $\beta \in (U \otimes_\lambda V)'$:

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda(u, \Gamma_\mu(l, \eta))(\alpha, \beta) &= \Gamma_\mu(l, \eta)\big(\alpha, \tilde{\beta}(u)\big) \\ &= \eta\big(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)\big) = \Gamma_{\mu, \lambda}(l, u, \eta)(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Il existe naturellement une formule symétrique; à partir de U, V, M, on peut construire $\theta = \Gamma_\lambda(u, \eta) \in (U \hat{\otimes}_\lambda V)\varepsilon M$ identifié à $M\varepsilon(U \hat{\otimes}_\lambda V)$; à partir de L, M, $U \hat{\otimes}_\lambda V$, on peut construire $\Gamma_\mu(l, \theta) \in (L \hat{\otimes}_\mu M)\,\varepsilon\,(U \hat{\otimes}_\lambda V)$.

On a encore

$$\text{(II, 2; 7}^{bis}\text{)} \quad \Gamma_{\mu,\lambda}(l, u, \eta) = \Gamma_\mu(l, \theta) = \Gamma_\mu(l, \Gamma_\lambda(u, \eta)).$$

Les formules (II, 2; 1, 2, 3) nous ont donné diverses expressions de $(\Gamma_{\lambda,\mu}(l \otimes u, \eta))(\alpha, \beta)$; il en existe d'autres. On a

$$\begin{aligned}\text{(II, 2; 7}^{ter}\text{)} \quad (\Gamma_{\mu,\lambda}(l \otimes u, \eta))(\alpha, \beta) &= \eta\big(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u)\big) \\ &= \big\langle \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l)), \tilde{\beta}(u)\big\rangle = \big\langle \tilde{\alpha}(l), {}^t\tilde{\eta}\big(\tilde{\beta}(u)\big)\big\rangle \\ &= \big\langle {}^t\tilde{\beta}\big(\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))\big), u\big\rangle = \big\langle l, {}^t\tilde{\alpha}\big({}^t\tilde{\eta}\big(\tilde{\beta}(u)\big)\big)\big\rangle \\ &= \alpha\big(l, {}^t\tilde{\eta}\big(\tilde{\beta}(u)\big)\big) = \beta\big(u, \tilde{\eta}(\tilde{\alpha}(l))\big).\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\xi \in L \hat{\otimes}_\lambda U$, et $\eta = m \otimes \nu \in M \otimes V$. Alors ξ a une image ξ_0 dans $L \hat{\otimes}_\varepsilon U$, et on a les formules suivantes, vraies si $\xi \in L \otimes U$ donc par continuité si $\xi \in L \hat{\otimes}_\lambda U$:

$$\begin{aligned}\text{(II, 2; 7}^{quarto}\text{)} \quad (\Gamma_{\mu,\lambda}(\xi, m \otimes \nu))(\alpha, \beta) &= \xi_0\big({}^t\tilde{\alpha}(m), {}^t\tilde{\beta}(\nu)\big) \\ &= \big\langle \tilde{\xi}_0({}^t\tilde{\alpha}(m)), {}^t\tilde{\beta}(\nu)\big\rangle = \big\langle {}^t\tilde{\alpha}(m), {}^t\tilde{\xi}_0{}^t\tilde{\beta}(\nu)\big\rangle \\ &= \big\langle \tilde{\beta}\big(\tilde{\xi}_0({}^t\tilde{\alpha}(m))\big), \nu\big\rangle = \big\langle m, \tilde{\alpha}\big({}^t\tilde{\xi}_0({}^t\tilde{\beta}(\nu))\big)\big\rangle \\ &= \alpha\big({}^t\tilde{\xi}_0({}^t\tilde{\beta}(\nu)), m\big) = \beta\big(\tilde{\xi}_0({}^t\tilde{\alpha}(m)), \nu\big).\end{aligned}$$

Les applications $\Gamma_{\varphi,\chi;\psi,\omega}$ et $\Delta_{\varphi,\chi;\psi,\omega}$; L, M, U, V, quasi-complets.

Soient φ, χ, ψ, ω, 4 lettres parmi les lettres γ, β, π, ε. On peut former plusieurs applications bilinéaires de $(L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\omega V)$, en appliquant la proposition 2.

a) On applique d'abord

$$(L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V) \qquad \text{dans} \qquad (L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \hat{\otimes}_\varepsilon V);$$

autrement dit, dans ce cas, la valeur de χ n'interviendra plus. On applique ensuite le dernier espace dans $(L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\omega V)$ par l'une des 2 applications définies par le diagramme commutatif, *valable si $\varphi \geqslant \omega$:*

$$\begin{array}{ccc}(L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \hat{\otimes}_\varepsilon V) & \longrightarrow & (L \hat{\otimes}_\omega U) \times (M \hat{\otimes}_\varepsilon V) \\ \Big\downarrow \Gamma_{\psi,\varphi} & & \Big\downarrow \Gamma_{\psi,\omega} \\ (L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\varphi V) & \longrightarrow & (L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\omega V).\end{array}$$

a') On commence de la même manière, mais on continue par l'une des deux applications définies par le diagramme commutatif, *valable si* $\varphi \geqslant \psi$:

$$\begin{tikzcd}
(L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \hat{\otimes}_\varepsilon V) \arrow[d] & \\
(U \hat{\otimes}_\varphi L) \times (V \hat{\otimes}_\varepsilon M) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_{\omega,\varphi}"] & (U \hat{\otimes}_\psi L) \times (V \hat{\otimes}_\varepsilon M) \arrow[d, "\Gamma_{\omega,\psi}"] \\
(U \hat{\otimes}_\omega V) \hat{\otimes}_\varepsilon (L \hat{\otimes}_\varphi M) \arrow[r] & (U \hat{\otimes}_\omega V) \hat{\otimes}_\varepsilon (L \hat{\otimes}_\psi M) \arrow[d] \\
& (L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\omega V).
\end{tikzcd}$$

Les deux applications définies par *a*) et *a'*) coïncident si elles sont toutes deux définies, c'est-à-dire pour $\varphi \geqslant \psi$, $\varphi \geqslant \omega$; en effet, pour $l \in L$, $u \in U$, $\eta \in (M \hat{\otimes}_\chi V)$ d'image η_0 dans $M \hat{\otimes}_\varepsilon V$, $\alpha \in (L \hat{\otimes}_\psi M)'$, $\beta \in (U \hat{\otimes}_\omega V)'$, l'image, par ces 2 applications, de $((l \otimes u), \eta)$, prend pour valeur sur (α, β) le même nombre $\eta_0(\tilde{\alpha}(l), \tilde{\beta}(u))$; les deux applications coincident donc sur $(L \otimes U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V)$, et elles sont toutes deux continues en ξ sur $L \hat{\otimes}_\varphi U$ pour $\eta \in M \hat{\otimes}_\chi V$ fixé.

Il n'y aura donc pas d'inconvénient à désigner les applications définies par *a*) et *a'*) par le même symbole $\Gamma_{\varphi,\chi;\psi,\omega}$, défini pour $\varphi \geqslant \psi$ ou $\varphi \geqslant \omega$.

b) $(L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V)$ s'applique canoniquement dans $(L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V)$, lui-même isomorphe à $(M \hat{\otimes}_\chi V) \times (L \hat{\otimes}_\varepsilon U)$; désormais la valeur de φ n'interviendra plus.

On définira ensuite l'une des 2 applications du diagramme commutatif, *valable si* $\chi \geqslant \omega$:

$$\begin{tikzcd}
(M \hat{\otimes}_\chi V) \times (L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_{\psi,\chi}"] & (M \hat{\otimes}_\omega V) \times (L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \arrow[d, "\Gamma_{\psi,\omega}"] \\
(M \hat{\otimes}_\psi L) \hat{\otimes}_\varepsilon (V \hat{\otimes}_\chi U) \arrow[r] & (M \hat{\otimes}_\psi L) \hat{\otimes}_\varepsilon (V \hat{\otimes}_\omega U) \arrow[d] \\
& (L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\omega V).
\end{tikzcd}$$

b') On commence de la même manière, mais on utilise ensuite l'une des 2 applications définies par le diagramme commutatif, *valable si* $\chi \geqslant \psi$*:*

$$\begin{tikzcd}
(M \hat{\otimes}_\chi V) \times (L \hat{\otimes}_\varepsilon U) \arrow[d] & \\
(V \hat{\otimes}_\chi M) \times (U \hat{\otimes}_\varepsilon L) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_{\omega, \chi}"] & (V \hat{\otimes}_\psi M) \times (U \hat{\otimes}_\varepsilon L) \arrow[d, "\Gamma_{\omega, \psi}"] \\
(V \hat{\otimes}_\omega U) \hat{\otimes}_\varepsilon (M \hat{\otimes}_\chi L) \arrow[r] & (V \hat{\otimes}_\omega U) \hat{\otimes}_\varepsilon (M \hat{\otimes}_\psi L) \arrow[d] \\
& (L \hat{\otimes}_\psi M) \hat{\otimes}_\varepsilon (U \hat{\otimes}_\omega V).
\end{tikzcd}$$

Ici encore, si l'on a à la fois $\chi \geqslant \omega$ et $\chi \geqslant \psi$, les deux applications b) et b') sont définies et coïncident. On désignera donc par le même symbole, $\Delta_{\varphi, \chi; \psi, \omega}$, l'application définie par b) ou b'), pour $\chi \geqslant \psi$, ou $\chi \geqslant \omega$.

L'application $\Gamma_{\mu, \lambda}$ de la proposition 2 n'est autre que $\Gamma_{\lambda, \varepsilon; \mu, \lambda}$. L'application $\Delta_{\varepsilon, \lambda} = \Gamma_{\varepsilon, \lambda}$ de la page 31 n'est autre que $\Delta_{\lambda, \varepsilon; \varepsilon, \lambda}$ définie par le procédé b').

Il ne paraît pas certain que $\Gamma_{\varphi, \chi; \psi, \omega}$ et $\Delta_{\varphi, \chi; \psi, \omega}$ coïncident toujours, lorsqu'elles sont toutes les deux définies. *Elles coïncident toujours si l'une d'elles est séparément continue.* Supposons par exemple Δ séparément continue; Γ et Δ coïncident sur $(L \otimes U) \times (M \otimes V)$; toutes deux sont séparément continues en η pour ξ fixé dans $L \otimes U$, donc elles coïncident sur $(L \otimes U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V)$; toutes deux sont séparément continues en ξ pour η fixé dans $(M \hat{\otimes}_\chi V)$, donc elles coïncident partout. Inversement d'ailleurs, si Γ et Δ coïncident, elles sont séparément continues et même ν-continues, $\nu = \sup(\psi, \omega)$, puisqu'elles ont à la fois les propriétés de continuité de Γ et Δ.

Remarquons que l'une au moins des deux applications Γ, Δ, existe si $\sup(\varphi, \chi) \geqslant \inf(\psi, \omega)$, et que les deux existent si $\inf(\varphi, \chi) \geqslant \inf(\psi, \omega)$.

Remarquons aussi que Γ et Δ conïcident toujours sur $(L \hat{\otimes}_\varphi U) \times (M \otimes V)$ et sur $(L \otimes U) \times (M \hat{\otimes}_\chi V)$, comme le montrent les formules (II, 2; 6 et 7) pour Γ et les formules identiques qu'on trouve aisément pour Δ.

Il nous semble certain que l'étude que nous venons de faire du théorème de croisement (proposition 2) et les résultats de ces dernières pages n'épuisent absolument pas le problème.

Applications aux distributions.

Nous énonçons la proposition suivante comme elle se présente dans la pratique avec $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, espaces de distributions. Mais la proposition n'a rien à voir avec les distributions, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ peuvent être des espaces localement convexes (séparés quasi-complets) quelconques, alors $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ désigne $\mathcal{H} \,\varepsilon\, \mathrm{E}$.

Proposition 3. — *Soient* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, 3 *espaces de distributions,* E, F, *deux espaces localement convexes séparés* (E *et* F *n'étant pas nécessairement quasi-complets*). *On suppose de plus que* $\mathcal{H}$ *est nucléaire et de dual fort nucléaire, et qu'il a la propriété d'approximation stricte.*

Soit u *une application bilinéaire,* $(\mathrm{S}, \mathrm{T}) \rightarrow \mathrm{S} \,\mathrm{u}\, \mathrm{T}$, *de* $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{L}$, μ *continue,* $\mu \leqslant \gamma$. *Il existe une application bilinéaire,* $(\vec{\mathrm{S}}, \vec{\mathrm{T}}) \rightarrow \vec{\mathrm{S}} \,\mathrm{u}_\pi\, \vec{\mathrm{T}}$, *de* $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{K}(\mathrm{F})$ *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{F})$ (*et une seule si* $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation*), *séparément continue et vérifiant* $(\mathrm{S}\vec{e}) \,\mathrm{u}_\pi\, (\mathrm{T}\vec{f}) = (\mathrm{S} \,\mathrm{u}\, \mathrm{T})\, \vec{e} \otimes \vec{f}$, *pour* $\mathrm{S} \in \mathcal{H}$, $\mathrm{T} \in \mathcal{K}$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$.

Cette application est alors hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}(\mathrm{E})$, *et aux* μ*-parties de* $\mathcal{K}(\mathrm{F})$; *elle est continue si* $\mu \leqslant \pi$.

Supposons d'abord E et F quasi-complets. Il existe d'après la proposition 2 une application $\Gamma_{\mu,\pi}$ de $(\mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{E}) \times (\mathcal{K} \varepsilon \mathrm{F})$ dans $(\mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\mu\, \mathcal{K}) \,\varepsilon\, (\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{F})$. Mais, $\mathcal{H}$ étant nucléaire, $\mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{E} = \mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\varepsilon\, \mathrm{E}$, et comme $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation stricte, $\mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\varepsilon\, \mathrm{E} = \mathcal{H}(\mathrm{E})$ (corollaire 1 de la proposition 11 du chapitre I), donc $\Gamma_{\mu,\pi}$ est une application bilinéaire de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{K}(\mathrm{F})$ dans $(\mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\mu\, \mathcal{K}) \,\varepsilon\, (\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{F})$. Comme u est μ-continue, elle définit une application continue $\bar{\mathrm{u}}$ de $\mathcal{H} \,\hat{\otimes}_\mu\, \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$, donc $(\bar{\mathrm{u}} \otimes \mathrm{I}) \circ \Gamma_{\mu,\pi}$ est une application bilinéaire de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{K}(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{F})$.

Comme $\mathcal{H}'_c = \mathcal{H}'_b$ est nucléaire [1], toute partie bornée de $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ est μ-π-décomposable (proposition 1), donc cette application est séparément continue; elle est alors hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}(\mathrm{E})$, et par rapport aux μ-parties de $\mathcal{K}(\mathrm{F})$, et elle est continue pour $\mu \leqslant \pi$ (proposition 2). Elle coïncide bien sur $(\mathcal{H} \otimes \mathrm{E}) \times (\mathcal{K} \otimes \mathrm{F})$, avec l'application $(\mathrm{S} \otimes \vec{e}, \mathrm{T} \otimes \vec{f}) \rightarrow (\mathrm{S} \,\mathrm{u}\, \mathrm{T}) \otimes (\vec{e} \otimes \vec{f})$; et elle est la seule à posséder

[1] Comme $\mathcal{H}$ est nucléaire, $\mathcal{H}'_c = \mathcal{H}'_b$ (voir note [2], page 16).

cette propriété, puisqu'elle est séparément continue, que $\mathcal{H} \otimes \mathrm{E}$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathrm{E})$, et que $\mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathrm{F})$, si on suppose que $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation (chapitre I, proposition 11).

Si maintenant E et F ne sont pas quasi-complets, on remarquera que $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$ est a fortiori dans $\mathcal{H}(\hat{\mathrm{E}})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{K}(\mathrm{F})$ est dans $\mathcal{K}(\hat{\mathrm{F}})$; on peut alors définir $\vec{\mathrm{S}} \cup_\pi \vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}(\hat{\mathrm{E}} \hat{\otimes}_\pi \hat{\mathrm{F}})$; mais $\hat{\mathrm{E}} \hat{\otimes}_\pi \hat{\mathrm{F}} = \mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$, donc $\vec{\mathrm{S}} \cup_\pi \vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$, et les conclusions subsistent.

Corollaire. — *Avec les mêmes hypothèses, si θ est une application bilinéaire continue de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ dans G quasi-complet, il existe une application bilinéaire (et une seule si $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation) : $(\vec{\mathrm{S}}, \vec{\mathrm{T}}) \to \vec{\mathrm{S}} \cup_\theta \vec{\mathrm{T}}$, de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{K}(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{G})$, hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ et aux μ-parties de $\mathcal{K}(\mathrm{F})$, continue pour $\mu \leqslant \pi$, et telle que* $(\mathrm{S} \otimes \vec{e}) \cup_\theta (\mathrm{T} \otimes \vec{f}) = (\mathrm{S} \cup \mathrm{T}) \otimes \theta(\vec{e}, \vec{f})$, pour $\mathrm{S} \in \mathcal{H}$, $\mathrm{T} \in \mathcal{K}$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$.

Remarques. — 1° Si $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, G, sont tous complets, la proposition et son corollaire subsistent, en remplaçant $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ par $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$, sans qu'il soit nécessaire de supposer que $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation stricte; il a toujours la propriété d'approximation, puisqu'il est nucléaire.

2° Si, au lieu de $\mathcal{H}$, c'est $\mathcal{K}$ qui est supposé nucléaire et de dual nucléaire avec la propriété d'approximation stricte, on peut aussi définir $\vec{\mathrm{S}} \cup_\pi \vec{\mathrm{T}}$.

Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ ont tous deux les propriétés voulues, on peut définir deux produits $\vec{\mathrm{S}} \cup_\pi \vec{\mathrm{T}}$, mais ils coïncident sur $(\mathcal{H} \otimes \mathrm{E}) \times (\mathcal{K} \otimes \mathrm{F})$, et sont tous deux séparément continus, donc, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ ayant alors tous deux la propriété d'approximation, ils coïncident toujours.

On peut donner d'autres formules remarquables relatives à la proposition 3 et à son corollaire.

Pour $\mathrm{S} \in \mathcal{H}$, $\mathrm{T} \to \mathrm{S} \cup \mathrm{T}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$. On peut la noter $\cup_{(\mathrm{S})}$. Alors $\cup_{(\mathrm{S})} \otimes \mathrm{I}_\mathrm{F}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{K}(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{F})$; pour $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{K}(\mathrm{F})$, $(\cup_{(\mathrm{S})} \otimes \mathrm{I}_\mathrm{F})(\vec{\mathrm{T}})$ est aussi l'élément de $\mathcal{L}(\mathrm{F})$ qu'on pourra noter

$S \circ T$, cas particulier de $\vec{S} \circ_\pi \vec{T}$ lorsque E est le corps des scalaires; mais dans ce cas l'opération $(S, \vec{T}) \to S \circ \vec{T}$ est élémentaire (et ne nécessite d'ailleurs aucune hypothèse spéciale sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$), une seule des deux distributions étant vectorielle, et nous en avons étudié plusieurs cas au chapitre I (multiplication, page 69, et convolution, page 72). Comme alors on sait (page 32) qu'il existe une application bilinéaire Γ_π de $E \times (\mathcal{L}\,\varepsilon\, F)$ dans $\mathcal{L}\,\varepsilon\,(E \hat{\otimes}_\pi F)$, on voit que, pour $S \in \mathcal{H}$, $\vec{e} \in E$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, $\Gamma_\pi(\vec{e}, S \circ \vec{T})$ est un élément de $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$; montrons que c'est justement $S\vec{e} \circ_\pi \vec{T}$. D'après ce que nous avons vu à la formule (II, 2; 7), on a $\Gamma_{\mu,\pi}(S\vec{e}, \vec{T}) = \Gamma_\pi(\vec{e}, \Gamma_\mu(S, \vec{T})) = \Gamma_\pi(\vec{e}, \vec{\zeta})$. D'après la définition même de $S\vec{e} \circ_\pi \vec{T}$, il est l'image de $\Gamma_{\mu,\pi}(S\vec{e}, \vec{T})$ par l'application canonique $\bar{\mathrm{U}} \otimes \mathrm{I}$:

$$(\mathcal{H} \hat{\otimes}_\mu \mathcal{K})\,\varepsilon\,(E \hat{\otimes}_\pi F) \to \mathcal{L}\,\varepsilon\,(E \hat{\otimes}_\pi F);$$

on peut donc dire que $S\vec{e} \circ_\pi \vec{T}$ résulte de $\vec{e}$ et $\vec{\zeta} = \Gamma_\mu(\vec{S}, \vec{T})$ par les opérations:

$$\begin{array}{l} E \times [(\mathcal{H} \hat{\otimes}_\mu \mathcal{K})\,\varepsilon\, F] \\ \quad\downarrow \Gamma_\pi \\ (\mathcal{H} \hat{\otimes}_\mu \mathcal{K})\,\varepsilon\,(E \hat{\otimes}_\pi F) \xrightarrow[\mathrm{U}]{} \mathcal{L}\,\varepsilon\,(E \hat{\otimes}_\pi F). \end{array}$$

D'un autre côté $S \circ \vec{T}$ n'est autre, d'après la relation $\langle S \circ \vec{T}, \overleftarrow{f'} \rangle = S \circ \langle \vec{T}, \overleftarrow{f'} \rangle$, pour tout $\overleftarrow{f'} \in F'$, et la 2e formule (II, 2; 6^{bis}), que l'élément $(\bar{\mathrm{U}} \otimes \mathrm{I_F})\,\Gamma_\mu(S, \vec{T}) = (\bar{\mathrm{U}} \otimes \mathrm{I_F})(\vec{\zeta})$:

$$\begin{aligned} \langle S \circ \vec{T}, \overleftarrow{f'} \rangle = S \circ \langle \vec{T}, \overleftarrow{f'} \rangle &= \bar{\mathrm{U}}\,(S \otimes \langle \vec{T}, \overleftarrow{f'} \rangle) \\ &= \bar{\mathrm{U}}\,[{}^t(\Gamma_\mu(S, \vec{T}))^{\sim}(\overleftarrow{f'})] \\ &= \langle (\bar{\mathrm{U}} \otimes \mathrm{I_F})\,\Gamma_\mu(S, \vec{T}), \overleftarrow{f'} \rangle. \end{aligned}$$

Alors $\Gamma_\pi(\vec{e}, S \circ \vec{T})$ provient de $\vec{e}$, $\vec{\zeta}$, par les opérations:

$$\begin{array}{r} E \times [(\mathcal{H} \hat{\otimes}_\mu \mathcal{K})\,\varepsilon\, F] \xrightarrow{\mathrm{U}} E \times (\mathcal{L}\varepsilon F) \\ \downarrow \Gamma_\pi \quad \\ \mathcal{L}\,\varepsilon\,(E \hat{\otimes}_\pi F). \end{array}$$

Alors l'identité de $S\vec{e} \cup_\pi T$ et de $\Gamma_\pi\left(\vec{e}, S \cup \vec{T}\right)$ résulte simplement de la commutativité du diagramme (formule (II, 2; 4) relative à Γ_π) :

$$\begin{array}{ccc} E \times \left[(\mathcal{H} \hat{\otimes}_\mu \mathcal{K}) \,\varepsilon\, F\right] & \xrightarrow{\ \cup\ } & E \times (\mathfrak{L} \varepsilon F) \\ \downarrow \Gamma_\pi & & \downarrow \Gamma_\pi \\ (\mathcal{H} \hat{\otimes}_\mu \mathcal{K}) \,\varepsilon\, (E \hat{\otimes}_\pi F) & \xrightarrow[\cup]{} & \mathfrak{L} \,\varepsilon\, (E \hat{\otimes}_\pi F) \end{array}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'établir d'autres formules du même type; nous les résumons toutes ici :

$$\text{(II, 2; 8)} \qquad \begin{cases} S\vec{e} \cup_\pi \vec{T} = \Gamma_\pi\left(\vec{e}, S \cup \vec{T}\right) \\ S\vec{e} \cup_\pi \vec{T} = S \cup \Gamma_\pi\left(\vec{e}, \vec{T}\right) \\ \vec{S} \cup_\pi T\vec{f} = \Gamma_\pi\left(\vec{S} \cup T, \vec{f}\right) \\ \vec{S} \cup_\pi T\vec{f} = \Gamma_\pi\left(\vec{S}, \vec{f}\right) \cup T. \end{cases}$$

Si maintenant θ est une application linéaire continue de $E \times F$ dans G, on en déduira, puisque $\vec{S} \cup_\theta \vec{T} = \left(I_{\mathfrak{L}} \otimes \bar{\theta}\right)\left(\vec{S} \cup_\pi \vec{T}\right)$, les formules que nous laissons au lecteur le soin d'établir :

$$\text{(II, 2; 9)} \qquad \begin{cases} S\vec{e} \cup_\theta \vec{T} = \left(I_{\mathfrak{L}} \otimes \tilde{\theta}(e)\right)\left(S \cup \vec{T}\right) \\ S\vec{e} \cup_\theta \vec{T} = S \cup \left(I_{\mathcal{K}} \otimes \bar{\theta}\right) \Gamma_\pi\left(\vec{e}, \vec{T}\right) \\ \vec{S} \cup_\theta T\vec{f} = \left(I_{\mathfrak{L}} \otimes {}^t\tilde{\theta}(\vec{f})\right)\left(\vec{S} \cup T\right) \\ \vec{S} \cup_\theta T\vec{f} = \left(I_{\mathcal{H}} \otimes \bar{\theta}\right) \Gamma_\pi\left(\vec{S}, \vec{f}\right) \cup T, \end{cases}$$

où $\tilde{\theta}(\vec{e})$ est l'élément de $\mathfrak{L}(F; G)$ défini par $\vec{f} \to \theta(\vec{e}, \vec{f})$, et ${}^t\tilde{\theta}(\vec{f})$ l'élément de $\mathfrak{L}(E; G)$ défini par $\vec{e} \to \theta(\vec{e}, \vec{f})$.

Comme $\mathcal{H}$, supposé nucléaire, a la propriété d'approximation, on voit que $\vec{S} \to \vec{S} \cup_\pi \vec{T}$ (resp. $\vec{S} \cup_\theta \vec{T}$) est la seule application linéaire continue de $\mathcal{H}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$ (resp. $\mathfrak{L}(G)$) qui vérifie les 2 premières formules (II, 2; 8) (resp. (II. 2; 9)). Si $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation, $\vec{T} \to \vec{S} \cup_\pi \vec{T}$ (resp. $\vec{S} \cup_\theta \vec{T}$) est la seule application linéaire continue de $\mathcal{K}(F)$ dans $\mathfrak{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$ (resp. $\mathfrak{L}(G)$) qui vérifie les 2 dernières formules (II, 2; 8) (resp. (II, 2; 9)).

§ 3. Produit « scalaire » de deux distributions à valeurs vectorielles. Étude élémentaire.

Dans l'énoncé de la proposition 4, nous supposerons $\mathcal{H}$ espace de distributions normal, pour que $\mathcal{H}'$ soit un espace de distributions. Mais en réalité la proposition n'a rien à voir avec les distributions; $\mathcal{H}$ peut être un espace vectoriel localement convexe abstrait, ayant les propriétés énoncées dans la proposition, et $\mathcal{H}'$ est son dual; $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{H}'(\mathrm{F})$ désignent $\mathcal{H}\,\varepsilon\,\mathrm{E}$ et $\mathcal{H}'\,\varepsilon\,\mathrm{F}$.

Proposition 4. — *Soit $\mathcal{H}$ un espace de distributions (quasi-complet) normal, nucléaire, ayant la topologie γ et la propriété d'approximation stricte, et de dual fort $\mathcal{H}'$ quasi-complet et nucléaire. Soient* E, F, *des espaces localement convexes séparés non nécessairement quasi-complets. Il existe une application bilinéaire et une seule $(\vec{\varphi}, \vec{\mathrm{T}}) \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$ de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ dans* $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$, *qui soit séparément continue et telle que*

$$(\text{II}, 3; 1) \qquad \psi\vec{e} \cdot_\pi \mathrm{S}\vec{f} = (\psi . \mathrm{S})\vec{e} \otimes \vec{f},$$

pour $\psi \in \mathcal{H}$, $S \in \mathcal{H}'$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$, $\psi . \mathrm{S} = \langle \psi, \mathrm{S} \rangle$ (1) *étant le produit scalaire défini par la dualité entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.*

L'application ainsi définie est hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ et par rapport aux parties compactes de $\mathcal{H}'(\mathrm{F})$; elle est hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}'(\mathrm{F})$ si $\mathcal{H}$ est tonnelé.

Soit $\mathcal{K}$ un espace ayant les mêmes propriétés que $\mathcal{H}$, u une application linéaire continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$, ${}^t u$ sa transposée, application linéaire continue de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{K}'$. Alors

$$(\text{II}, 3; 2) \qquad u\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = \vec{\varphi} \cdot_\pi {}^t u\vec{\mathrm{T}} \quad \textit{pour} \quad \vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E}), \quad \vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'(\mathrm{F}).$$

Comme $\mathcal{H}$ est quasi-complet nucléaire, $\mathcal{H}'_c = \mathcal{H}'_b$ (2), que

(1) Nous emploierons toujours la notation $\psi . \mathrm{S}$ pour désigner le produit scalaire de $\psi \in \mathcal{H}$ et de $\mathrm{S} \in \mathcal{H}'$, gardant le symbole $\langle\, ,\rangle$ pour le produit scalaire $\langle \vec{e}, \overleftarrow{e}' \rangle$ de $\vec{e} \in \mathrm{E}$ et de $\overleftarrow{e}' \in \mathrm{E}'$.

(2) Voir note (2), page 16.

nous noterons $\mathcal{H}'$; comme $\mathcal{H}$ est normal, $\mathcal{H}'$ est un espace de distributions. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3 à l'application $u : (\psi, S) \to \psi \cdot S = \langle \psi, S \rangle$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ dans C, corps des complexes; elle est applicable, puisque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont quasi-complets ainsi que E et F, que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont nucléaires, que $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation stricte, et que $\mathcal{H}'$, nucléaire, a la propriété d'approximation (1); on peut prendre $\mu = \gamma$, et $\mu = \beta$ si $\mathcal{H}$ est tonnelé, parce que u est hypocontinue, d'une part par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}$, et d'autre part par rapport aux parties équicontinues de $\mathcal{H}'$, donc par rapport aux parties compactes de $\mathcal{H}'$ puisque $\mathcal{H}$ a la topologie γ, et par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}'$ si $\mathcal{H}$ est tonnelé.

La formule (II; 3, 2) résulte de ce que les 2 membres sont égaux pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K} \otimes E$, $\vec{T} \in \mathcal{H}' \otimes F$, et représentent des applications bilinéaires séparément continues de $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'(F)$ dans $E \hat{\otimes}_\pi F$.

Remarque. — $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_c$ a les mêmes propriétés que $\mathcal{H}$: il est normal, quasi-complet, nucléaire, a la propriété d'approximation stricte (préliminaires, proposition 4), et la topologie γ, ainsi que son dual fort $(\mathcal{H}'_c)'_c = \mathcal{H}$ (ces conditions entraînent donc aussi que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ soient tonnelés (2)). La proposition 4 est donc entièrement symétrique, et peut avantageusement être énoncée pour un couple d'espaces réflexifs en dualité, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$.

Exemples. — On peut définir $\varphi \cdot_\pi T$ pour :

$$\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E), \qquad \vec{T} \in \mathcal{D}'(F);$$
$$\vec{\varphi} \in \mathcal{E}(E), \qquad \vec{T} \in \mathcal{E}'(F);$$
$$\vec{\varphi} \in \mathcal{S}(E), \qquad \vec{T} \in \mathcal{S}'(F);$$

et dans les cas obtenus en inversant les rôles de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$.

On peut prendre pour u la dérivation D^p, la multiplication $\vec{\varphi} \to \alpha \vec{\varphi}$, α convenable, la convolution $\vec{\varphi} \to S * \vec{\varphi}$, S convenable, etc...

(1) Schwartz [2], exposé 17, proposition 4, page 5.
(2) Bourbaki [2], chapitre iv, § 3, n° 3, proposition 4.

Indépendance de $\vec{\varphi} \cdot_{\pi} \vec{T}$ par rapport à l'espace $\mathcal{H}$.

Supposons que $\mathcal{K}$ soit un sous-espace de $\mathcal{H}$, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite; alors $\mathcal{H}'$ est un sous-espace de $\mathcal{K}'$, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite. Prenons pour u l'injection canonique de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$. Alors (II, 3; 2) montre que, si $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\pi} \vec{T}$ a la même valeur, que l'on considère $\vec{\varphi}$ comme élément de $\mathcal{K}(E)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{K}'(F)$, ou $\vec{\varphi}$ comme élément de $\mathcal{H}(E)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{H}'(F)$.

Soit alors $\mathcal{H}$ un espace ayant les propriétés énoncées dans la proposition 4, et ayant en outre la propriété d'approximation par troncature et régularisation. On sait qu'alors $\mathcal{H}(E)$ a la même propriété d'approximation (page 73 du chapitre I). Soit alors (α_ν) une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, convergeant vers 1 dans $\mathcal{E}$ pour $\nu \to \infty$ et bornée dans $\mathcal{B}$, et soit (ρ_μ) une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, $\geqslant 0$, de supports tendant vers l'origine pour $\mu \to \infty$, $\int_{R^n} \rho_\mu(x)\,dx = +1$; on a, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$:

$$\text{(II, 3; 3)} \quad \begin{cases} \vec{\varphi} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \left[\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha_\nu (\vec{\varphi} * \rho_\mu) \right] & \text{dans} \quad \mathcal{H}(E), \\ \text{donc} & \\ \vec{\varphi} \cdot_{\pi} \vec{T} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \left[\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha_\nu (\vec{\varphi} * \rho_\mu) \cdot_{\pi} \vec{T} \right] & \text{dans} \quad E \hat{\otimes}_{\pi} F. \end{cases}$$

Mais, comme nous l'avons vu ci-dessus, on connaît $\alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu) \cdot_{\pi} \vec{T}$ dès qu'on connaît $\vec{\varphi}$, $\vec{T}$, α_ν, ρ_μ, indépendamment de l'espace $\mathcal{H}$, car on peut le calculer en considérant $\alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu)$ comme élément de $\mathcal{D}(E)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{D}'(F)$; la formule (II, 3; 3) donne donc un procédé de calcul de $\vec{\varphi} \cdot_{\pi} \vec{T}$ qui est indépendant de l'espace $\mathcal{H}$. Ainsi, si $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, pourvu qu'il existe au moins un espace $\mathcal{H}$ ayant les propriétés voulues, et tel que $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$, la valeur de $\vec{\varphi} \cdot_{\pi} \vec{T}$ est indépendante de cet espace $\mathcal{H}$.

On peut donc énoncer :

Proposition 5. — *L'élément $\vec{\varphi} \cdot_{\pi} \vec{T}$ défini à la proposition 4 ne dépend que de $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'(E)$ et de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ et non de $\mathcal{H}$, pourvu que $\mathcal{H}$ ait la propriété d'approximation par troncature et régularisation.*

Problèmes de supports.

Dans tous les cas usuels, la dualité entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ est telle que $\psi \cdot S$ soit nul si les supports de $\psi \in \mathcal{H}$ et $S \in \mathcal{H}'$ sont sans point commun (C'est ce qui se produira en particulier si $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation par troncature. En effet, soit d'abord ψ à support compact; comme $\mathcal{H}$ est normal, il existe des $\psi_j \in \mathcal{D}$ qui convergent vers ψ; si $\alpha \in \mathcal{D}$ est égale à 1 sur un voisinage du support de ψ, sans point commun avec le support de S, $\alpha\psi_j \in \mathcal{D}$ converge vers $\alpha\psi = \psi$ dans $\mathcal{H}$; mais $\alpha\psi_j \cdot S = 0$, donc $\psi . S = 0$. Si le support de ψ est quelconque, on considérera une suite $(\alpha_\nu)_{\nu=1,2,\dots}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ convergeant pour $\nu \to \infty$ vers 1 dans $\mathcal{E}$ en restant bornée dans $\mathcal{B}$, alors $\alpha_\nu\psi$ converge pour $\nu \to \infty$ vers ψ dans $\mathcal{H}$, et $\alpha_\nu\psi \cdot S = 0$, donc $\psi \cdot S = 0$).

Alors on a aussi $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \vec{0}$, si les supports de $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$ sont sans point commun.

Appelons en effet $\mathcal{H}_A$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des distributions à support dans A, sous-ensemble fermé de R^n; munissons-le de la topologie induite par $\mathcal{H}$. Définissons de même $\mathcal{H}'_B$. Alors $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ est séparément continue de $\mathcal{H}_A(E) \times \mathcal{H}'_B(F)$ dans $E \hat{\otimes}_\pi F$; elle est nulle sur le produit $(\mathcal{H}_A \otimes E) \times (\mathcal{H}'_B \otimes F)$, si $A \cap B = \emptyset$; mais $\mathcal{H}_A \otimes E$ est dense dans $\mathcal{H}_A(E)$ (parce que $\mathcal{H}_A$, sous-espace d'un espace nucléaire, est nucléaire, donc vérifie la propriété d'approximation (¹); voir alors la proposition 11 du chapitre I) et $\mathcal{H}'_B \otimes F$ est dense dans $\mathcal{H}'_B(F)$, donc $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \vec{0}$ pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}_A(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_B(F)$; enfin $\mathcal{H}_A(E)$ (resp. $\mathcal{H}'_B(F)$) n'est autre que le sous-espace des distributions de $\mathcal{H}(E)$ (resp. $\mathcal{H}'(F)$) de support dans A (resp. B) (car $\mathcal{H}_A(E) \approx \mathcal{L}(E'_c; \mathcal{H}_A)$, $\mathcal{H}(E) \approx \mathcal{L}(E'_c; \mathcal{H})$; donc une distribution $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ appartient à $\mathcal{H}_A(E)$ si et seulement si ${}^t\vec{\varphi}(E') \subset \mathcal{H}_A$, c'est-à-dire si elle a scalairement son support dans A, c'est-à-dire si elle a son support dans A; voir chapitre I, page 61). On peut aller plus loin. Prenons $\mathcal{H} = \mathcal{D}$. Si $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ est nulle ainsi que toutes ses dérivées sur le support de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, alors $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ est nul. Soit en effet B le support de T; appelons $\mathcal{N}_B$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ formé des fonctions nulles ainsi que toutes leurs dérivées sur B. Munis-

(¹) Voir note (¹), page 58 et GROTHENDIECK [5], théorème 9, résultat 1, page 47, ou SCHWARTZ [2], exposé 19, proposition 4.

sons-le de la topologie induite par $\mathcal{D}$. Alors $\vec{\varphi} \in \mathcal{N}_B(E)$, espace dans lequel $\mathcal{N}_B \otimes E$ est dense puisque $\mathcal{N}_B$, sous-espace d'un espace nucléaire, est nucléaire donc vérifie la propriété d'approximation. L'application $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ est hypocontinue par rapport aux parties bornées sur $\mathcal{N}_B(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$, nulle sur $(\mathcal{N}_B \otimes E) \times (\mathcal{D}'_B \otimes F)$ (1), donc identiquement nulle.

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 6. — *Si $\mathcal{H}$ vérifie les conditions de l'énoncé de la proposition 4, et si $\psi . S = 0$ toutes les fois que les supports de $\psi \in \mathcal{H}$ et $S \in \mathcal{H}'$ sont sans point commun, alors $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \vec{0}$ toutes les fois que les supports de $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$ sont sans point commun. Pour $\mathcal{H} = \mathcal{D}$, $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \vec{0}$ toutes les fois que $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ est nulle ainsi que toutes ses dérivées sur le support de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$.*

Considérons ensuite la situation suivante. Soient $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}(E)$, $T \in \mathcal{D}'(F)$, de supports A et B ayant une intersection compacte; montrons qu'on peut donner une définition naturelle de $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} \in E \hat{\otimes}_\pi F$. Il suffira pour cela d'appliquer la proposition 3 (modifiée suivant la remarque page 38) à $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{D}'_B$, et à la forme bilinéaire $(\psi, S) \to \psi \cdot S$, hypocontinue par rapport aux parties bornées sur $\mathcal{E}_A \times \mathcal{D}'_B$ (2) [$\mathcal{E}_A$ est complet nucléaire, comme sous-espace fermé d'un espace nucléaire, et comme c'est un espace de Fréchet nucléaire, son dual est nucléaire (3)]. On peut donc définir une application bilinéaire $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ de $\mathcal{E}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ dans $E \hat{\otimes}_\pi F$, hypocontinue par rapport aux parties bornées; elle coïncide sur $\mathcal{D}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ avec l'application déjà définie sur $\mathcal{D}(E) \times \mathcal{D}'(F)$ [car ces deux applications sont séparément continues, et coïncident sur $(\mathcal{D}_A \otimes E) \times (\mathcal{D}'_B \otimes F)$], et elle coïncide sur $\mathcal{E}_A(E) \times \mathcal{E}'_B(F)$ avec l'application déjà définie sur $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}'(F)$. Soit alors $\alpha \in \mathcal{D}$, égale à 1 sur un voisinage de $A \cap B$. On a $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \alpha\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \vec{\varphi} \cdot_\pi \alpha\vec{T}$, le deuxième membre ayant un sens puisque $\alpha\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, le troisième puisque $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}(E)$, $\alpha\vec{T} \in \mathcal{E}'(F)$. Cette égalité résulte

(1) Schwartz [4], chapitre III, théorème XXXIII.

(2) Schwartz [4], chapitre III, § 7, dualité entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$; première édition, page 90, ligne 18, deuxième édition page 90, ligne 22.

(3) Grothendieck [5], théorème 7, page 40, ou Schwartz [2], exposé 18, théorème page 3.

de ce que les 3 membres sont égaux sur $(\mathcal{E}_A \otimes E) \times (\mathcal{D}'_B \otimes F)$ et définissent des applications bilinéaires hypocontinues sur $\mathcal{E}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$. Cette égalité montre en outre que $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ est non seulement dans $E \widehat{\otimes}_\pi F$, mais dans $E \hat{\otimes}_\pi F$.

Calcul de $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ par intégration usuelle.

Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini muni d'une mesure $\mu \geqslant 0$, E un espace localement convexe séparé (non nécessairement quasi-complet). Pour toute fonction $\vec{f}$ sur X à valeurs dans E, et toute semi-norme continue Q sur E, posons [1]

$$\text{(II, 3; 4)} \quad N_{Q,p}(\vec{f}) = \left(\int_X^* (Q(f(x)))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Fixons p une fois pour toutes. Sur le sous-espace vectoriel $\Lambda^p(E)$ des fonctions $\vec{f}$ pour lesquelles tous les $N_{Q,p}(\vec{f})$ sont finis, les $N_{Q,p}$ sont des semi-normes; ces semi-normes définissent donc un espace vectoriel topologique localement convexe $\Lambda^p(E)$; on appelle $\Lambda^p_0(E)$ l'adhérence dans $\Lambda^p(E)$ de l'espace des fonctions continues à support compact; c'est l'espace des fonctions de puissance p-ième sommable à valeurs dans E. Cet espace n'est pas séparé. L'espace séparé associé sera noté $\overline{L^p}(E)$ [2], espace des classes de fonctions de puissance p-ième sommable. La classe de $\vec{f} \in \Lambda^p_0(E)$ sera notée $\vec{f}^{\bullet} \in \overline{L^p}(E)$; mais fréquemment, quand aucune confusion ne sera possible, nous écrirons, par abus de langage, $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$. Si K est un compact de X, $\vec{f}_K$ la restriction d'une fonction $\vec{f}$ définie sur X au compact K, μ_K la restriction de μ à K, nous

(1) Nous étendons ici à E localement convexe séparé quelconque les définitions données pour E espace de Banach dans BOURBAKI [6], chapitre IV, § 3; voir par exemple n° 2, définition 1 (les semi-normes N_p) et n° 4, définition 2 (les fonctions de puissance p-ième intégrable). Nos notations sont différentes de celles de BOURBAKI, notamment $\mathcal{L}^p$ a des significations très différentes dans BOURBAKI et ici. Nous énonçons ici les propriétés de $\overline{L^p}(E)$ sans démonstration (ni référence); à notre connaissance ces propriétés ne sont démontrées nulle part. Notons que, même si E est complet, $\overline{L^p}(E)$ n'est pas nécessairement complet (mais il est complet si E est un espace de Fréchet).

(2) Nous écrivons $\overline{L^p}(E)$, parce que $L^p(E)$ signifierait $L^p \varepsilon E$, avec les notations adoptées dans ce travail. On a $\overline{L^p}(E) \subset L^p(\hat{E})$, avec une topologie plus fine que la topologie induite.

écrirons $\vec{f}^{\bullet}_{K} \in \overline{L^p_K}(E)$, ou, par abus de langage, $\vec{f} \in \overline{L^p_K}(E)$, si $\vec{f}_K$ est de puissance p-ième sommable par rapport à μ_K.

Une fonction $\vec{f}$ telle que $\vec{f}^{\bullet} \in L^p(E)$ n'est pas nécessairement mesurable. Elle est mesurable si E est métrisable. Si $E \rightarrow E_1$ est une application linéaire continue de E dans un espace E_1, l'image $\vec{f}_1$ de $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$ est dans $\overline{L^p}(E_1)$, donc mesurable si E_1 est métrisable; en particulier toute $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$ est scalairement dans L^p et scalairement mesurable.

Pour que $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$, il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0 dans E, son image $\pi_{\mathcal{U}} \circ \vec{f}$ par $\pi_{\mathcal{U}} : E \rightarrow E_{\mathcal{U}}$ soit dans $\overline{L^p}(E_{\mathcal{U}})$. Pour que la classe $\vec{f}^{\bullet}$ de $\vec{f}$ dans $\overline{L^p}(E)$ soit nulle, il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0 dans E, l'image de $\vec{f}$ par $E \rightarrow E_{\mathcal{U}}$ soit presque partout nulle. Celà entraîne que $\vec{f}$ soit scalairement presque partout nulle; donc que $\vec{f}$ soit presque partout nulle si E est métrisable (puisqu'alors $\vec{f}$ est mesurable) ou si E′ contient une partie dénombrable faiblement dense (voir chapitre I, page 66). Si $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$ prend ses valeurs dans un sous-espace vectoriel F de E, elle appartient à $\overline{L^p}(F)$. C'est classique si E est normé, parce que $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$ si et seulement si d'une part elle est mesurable, d'autre part $\int^*_X \|f(x)\|^p \, d\mu(x) < \infty$ [1]. C'est encore vrai pour E quelconque. Soit en effet $\mathcal{V}$ un voisinage disqué de 0 dans F; on peut se borner au cas où $\mathcal{V} = F \cap \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ voisinage disqué de 0 dans E; alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & E \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{U}}"] & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{V}}"'] & & E_{\mathcal{U}}, \\ & F_{\mathcal{V}} \arrow[ur, "\pi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}"'] & \end{tikzcd}$$

l'application $\pi_{\mathcal{V},\mathcal{U}} : F_{\mathcal{V}} \rightarrow E_{\mathcal{U}}$ étant injective, et faisant de $F_{\mathcal{V}}$ un sous-espace topologique de $E_{\mathcal{U}}$; l'image $\pi_{\mathcal{U}} \circ \vec{f}$ de $\vec{f} \in \overline{L^p}(E)$ par $E \rightarrow E_{\mathcal{U}}$ est dans $\overline{L^p}(E_{\mathcal{U}})$; mais comme $\vec{f}$ prend ses valeurs dans F, cette image coïncide avec $\pi_{\mathcal{V},\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{V}} \circ \vec{f}$, et comme $F_{\mathcal{V}}$ est sous-

[1] Bourbaki [6], chapitre IV, § 5, n° 6, théorème V.

espace de $E_{\mathfrak{U}}$ normé, celà prouve que $\pi_{\mathfrak{V}} \circ f$ appartient à $\overline{L^p}(F_{\mathfrak{V}})$; ceci étant vrai pour tout $\mathfrak{V}$, $\vec{f}$ est bien dans $\overline{L^p}(F)$.

Soit $\vec{f}$ une fonction à valeurs dans E. Nous dirons qu'elle est localement de puissance p-ième sommable si, pour tout compact K de X, $\vec{f}^{\bullet}_K \in \overline{L^p_K}(E)$.

Le quotient de l'espace de ces fonctions par le sous-espace de celles dont l'image dans $L^p_K(E)$ est nulle pour tout K, est noté $\overline{\mathfrak{L}^p}(E)$ ou $\overline{L^p_{\text{loc}}}(E)$; bien qu'il s'agisse d'un espace de classes de fonctions, nous écrirons encore, par abus de langage, $\vec{f} \in \overline{\mathfrak{L}^p}(E)$, si $\vec{f}$ appartient à une classe de $\overline{\mathfrak{L}^p}(E)$, c'est-à-dire si, pour tout compact K de X, $\vec{f}^{\bullet}_K$ appartient à $\overline{L^p_K}(E)$. Si alors Q est une semi-norme continue sur E,

$$\vec{f} \to N_{Q,p;K}(\vec{f}) = \left(\int_K Q(\vec{f}(x))^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une semi-norme sur $\overline{\mathfrak{L}^p}(E)$; la famille de ces semi-normes fait de $\overline{\mathfrak{L}^p}(E)$ un espace localement convexe séparé, dans lequel les classes des fonctions continues à support compact sont denses. On a $\overline{\mathfrak{L}^p}(E) \subset \overline{\mathfrak{L}^q}(E)$ pour $p \geqslant q$, avec une topologie plus fine que la topologie induite.

Pour $p = \infty$, nous appellerons $\Lambda_0^\infty(E)$ l'espace des fonctions $\vec{f}$ sur X à valeurs dans E, telles que, pour tout voisinage disqué $\mathfrak{U}$ de 0 dans E, l'image de $\vec{f}$ par $E \to E_{\mathfrak{U}}$ soit μ-mesurable et bornée.

On le munira de la famille de semi-normes

$$N_{Q,\infty}(\vec{f}) = \operatorname*{Sup.\,Ess.}_{x \in X} Q(\vec{f}(x)) \text{ [1]}.$$

L'espace séparé associé sera $\overline{L^\infty}(E)$. Nous définirons de même $\overline{L^\infty_K}(E)$, $\overline{\mathfrak{L}^\infty}(E)$ avec les mêmes abus de langage que pour p fini.

Si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, si $\vec{e}(\hat{x}) \in \overline{L^p}(E)$, $\vec{f}(\hat{x}) \in \overline{L^{p'}}(F)$, le produit tensoriel $\vec{e}(\hat{x}) \otimes \vec{f}(\hat{x})$, à valeurs dans $E \otimes_\pi F$ et que nous noterons pour cette raison $\vec{e}(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{f}(\hat{x})$ ou $\vec{e} \otimes_\pi \vec{f}$, appartient à

[1] Rappelons que, si g est une fonction numérique μ-mesurable sur X, $M = \operatorname*{Sup.\,Ess.}_{x \in X} g(x)$ est le plus petit nombre tel que $g(x) \leqslant M$ presque partout pour μ.

$\overline{L^1}(E \otimes_\pi F)$ [1]. Sa classe ne dépend que des classes de e et f, et $(\vec{e}, \vec{f}) \to \vec{e} \otimes_\pi \vec{f}$ permet de définir une application bilinéaire continue de $\overline{L^p}(E) \times \overline{L^{p'}}(F)$ dans $\overline{L^1}(E \otimes_\pi F)$. Si $\vec{e} \in \overline{\mathfrak{L}^p}(E)$, $\vec{f} \in \overline{\mathfrak{L}^{p'}}(F)$, alors $\vec{e} \otimes_\pi \vec{f} \in \overline{\mathfrak{L}^1}(E \otimes_\pi F)$, et on définit ainsi une application bilinéaire continue de $\overline{\mathfrak{L}^p}(E) \times \overline{\mathfrak{L}^{p'}}(F)$ dans $\overline{\mathfrak{L}^1}(E \otimes_\pi F)$.

Si $\vec{f} \in L^1(E)$, on peut définir son intégrale $\int_X \vec{f}(x)\, d\mu(x) \in \hat{E}$; $\vec{f} \to \int_X \vec{f}(x)\, d\mu(x)$ est une application linéaire continue de $\overline{L^1}(E)$ dans $\hat{E}$.

Dans la suite, nous supposerons que $X = R^n$, et que μ est la mesure de Lebesgue dx. Alors $\overline{\mathfrak{L}^1}(E)$ est un espace de distributions sur R^n à valeurs dans $\hat{E}$.

En effet, pour $\vec{f} \in \overline{\mathfrak{L}^1}(E)$ et $\varphi \in \mathfrak{D}$, on peut poser:

$$\text{(II, 3; 5)} \qquad \vec{f}(\varphi) = \int_{R^n} \vec{f}(x)\, \varphi(x)\, dx \in \hat{E}.$$

Ceci permet de faire correspondre à $\vec{f} \in \overline{\mathfrak{L}^1}(E)$ une distribution; si cette distribution est nulle, l'image $\vec{f}_1$ de $\vec{f}$ par toute application linéaire continue $E \to E_1$ de E dans un espace de Banach est presque partout nulle (parce que mesurable et scalairement presque partout nulle), donc la classe de $\vec{f}$ dans $\overline{\mathfrak{L}^1}(E)$ est nulle, et la correspondance précédente permet bien d'identifier $\overline{\mathfrak{L}^1}(E)$ à un sous-espace de $\mathfrak{D}'(\hat{E})$, et l'injection de $\overline{\mathfrak{L}^1}(E)$ dans $\mathfrak{D}'(\hat{E})$ est trivialement continue.

Revenons alors à notre étude de $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$. On a le résultat suivant:

Proposition 7. — *Supposons que $\mathcal{H}$ soit un espace de distributions normal sur* R^n, *vérifiant les conditions de l'énoncé de la proposition 4. Nous supposerons en outre ce qui suit:*

a) $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation par troncature et régularisation;

b) $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ est définie par une fonction appartenant à $\overline{\mathfrak{L}^p}(E)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$;

[1] On le voit en utilisant le fait que, pour toute semi-norme continue R sur $E \otimes_\pi F$, il existe des semi-normes continues P et Q sur E et F telles que $R(\vec{e} \otimes \vec{f}) \leqslant P(\vec{e})Q(\vec{f})$. Voir Grothendieck [4], proposition 2, résultat n° 2, page 31; Schwartz [2], exposé n° 2, proposition 1, formule (2).

c) $\mathrm{T} \in \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ *est définie par une fonction appartenant à* $\overline{\mathcal{L}^{p'}}(\mathrm{F})\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$;

d) $\vec{\varphi} \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}$ *est scalairement intégrable. Alors* $\int_{\mathrm{R}^n}\left(\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}(x)\right) dx$, *a priori dans le complété faible* $(\mathrm{E} \otimes_\pi \mathrm{F})'^*$, *est dans* $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$, *et est égal à* $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$:

$$\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{R}^n}\left(\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}(x)\right) dx. \tag{II, 3; 6}$$

Nous ne donnerons pas la démonstration ici, car nous en donnerons une plus générale à la proposition 21 ter. Remarquons que *b)* et *c)* impliquent que $\vec{\varphi} \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}$ soit dans $\overline{\mathcal{L}^1}(\mathrm{E} \otimes_\pi \mathrm{F})$, donc scalairement localement intégrable; elle vérifie donc automatiquement *d)* si elle est à support compact. Remarquons aussi que *b, c, d,* sont trivialement vérifiées si $\vec{\varphi}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ sont des fonctions continues, l'une d'elles étant à support compact.

La formule (II, 3; 6) a une grande utilité pratique. Prenons par exemple $\mathcal{H} = \mathcal{D}$, $\mathcal{H}' = \mathcal{D}'$, E et F étant des espaces de Banach. Alors $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathrm{E}) = \overline{\mathcal{D}}(\mathrm{E})$ [1] a un support compact. D'autre part $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$ est égale dans un voisinage du support de $\vec{\varphi}$ (et c'est la seule chose qui importe d'après la proposition 6) à une somme de dérivées de fonctions continues sur R^n: $\vec{\mathrm{T}} = \sum_p \mathrm{D}^p \vec{f}_p$ (voir chapitre I, corollaire 2 de la proposition 24). Alors $\mathrm{D}^p\vec{\varphi} \otimes \vec{f}_p$, fonction continue à support compact à valeurs dans $\mathrm{E} \otimes_\pi \mathrm{F}$, est bien scalairement intégrable. Comme $\mathcal{D}$ a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, on peut appliquer (II, 3; 6) au calcul des $\mathrm{D}^p\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{f}_p$; alors, d'après (II, 3; 2) appliquée à la dérivation D^p continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} &= \sum_p (-1)^{|p|} \mathrm{D}^p\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{f}_p \\ &= \sum_p (-1)^{|p|} \int_{\mathrm{R}^n}\left(\mathrm{D}^p\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{f}_p(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{II, 3; 7}$$

La même formule est valable pour $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ [ici $\mathrm{D}^p\varphi$ n'a plus un support compact, mais la décomposition $\vec{\mathrm{T}} = \sum_p \mathrm{D}^p \vec{f}_p$ est

[1] SCHWARTZ [1], proposition 9, page 108, ou ici, chapitre I, page 62.

globale sur R^n, $T \in \mathcal{E}'(F) = \overline{\mathcal{E}'}(F)$ ayant un support compact [1])] et pour $\mathcal{H} = \mathcal{S}$ (ici la norme $||D^p\vec{\varphi}||_E$ est une fonction numérique $\geqslant 0$ à décroissance rapide à l'infini; nous laissons au lecteur le soin de montrer que, F étant un Banach, $\vec{T} = \sum\limits_p D^p\vec{f}_p$, où les $\vec{f}_p$ sont des fonctions continues à croissance lente: $||\vec{f}_p(x)||_F \leqslant C(1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}}$ [2]); alors chaque fonction $D^p\vec{\varphi} \otimes \vec{f}_p$ est continue sur R^n et sa norme $||D^p\vec{\varphi} \otimes \vec{f}_p||_{E \otimes_\pi F}$ est à décroissance rapide donc sommable, alors $D^p\vec{\varphi} \otimes \vec{f}_p$ est bien scalairement intégrable). Dans tous ces exemples $D^p\vec{\varphi} \otimes \vec{f}_p$ est non seulement scalairement intégrable, mais intégrable (c'est-à-dire appartient à $\overline{L^1}$ $(E \otimes_\pi F)$).

Ces formules nous suggèrent, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'(F)$ quelconques, la notation.

$$\text{(II, 3; 8)} \quad \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \int_{R^n} \big(\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{T}(x)\big) dx.$$

Nous justifierons plus longuement cette notation au §5 (voir proposition 31).

Convolutions.

Bornons-nous, pour simplifier, au cas $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$. Soit $S \in \mathcal{E}'$. On a :

$$\text{(II, 3; 9)} \quad \vec{\varphi} \cdot_\pi (S * \vec{T}) = (\vec{\varphi} * \check{S}) \cdot_\pi T = \vec{\varphi}(\xi + \eta) \cdot_\pi (S_\xi \otimes T_\eta)$$

(le dernier membre signifie ceci: $S_\xi \otimes \vec{T}_\eta$ est une distribution sin $R^n \times R^n$ à valeurs dans F; $\vec{\varphi}(\hat{\xi} + \hat{\eta})$ est une fonction appartenant à $\mathcal{E}$ sur $R^n \times R^n$; l'intersection de leurs supports est compacte, donc il n'y a aucune difficulté à définir leur produit scalaire à l'aide des résultats de la page 45).

Les 3 membres sont en effet, pour S fixée, des fonctions bilinéaires séparément continues sur $\mathcal{D}(E) \times \mathcal{D}'(F)$, égales sur $(\mathcal{D} \otimes E) \times (\mathcal{D}' \otimes F)$, donc identiques. La première égalité résulte d'ailleurs de (II, 3; 2) (voir exemples page 42).

[1] Voir chapitre I, page 62.

[2] La démonstration est identique à celle de SCHWARTZ [5], chapitre VII, théorème VI.

Liaison avec des résultats du chapitre I.

Considérons $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$ comme définissant une application linéaire continue $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$ de $\mathcal{H}'$ dans E. Alors $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}} \otimes \mathrm{I}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}' \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$; mais $\mathcal{H}' \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F} = \mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{F}$ (puisque $\mathcal{H}'$ est nucléaire) $= \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ (car, $\mathcal{H}$ ayant la topologie γ et la propriété d'approximation stricte, $\mathcal{H}'$ a aussi la propriété d'approximation stricte, voir préliminaires, proposition 4). D'où une application bilinéaire $(\vec{\varphi}, \vec{\mathrm{T}}) \to (\mathrm{L}_{\vec{\varphi}} \otimes \mathrm{I})(\vec{\mathrm{T}})$ de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$.

Cette application est trivialement séparément continue sur $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ (la continuité séparée en $\vec{\mathrm{T}}$ pour $\vec{\varphi}$ fixé est évidente, la continuité séparée en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{\mathrm{T}}$ fixé résulte du corollaire 3 de la proposition 2 du chapitre I : si $\vec{\varphi}$ converge vers $\vec{0}$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{E})$, $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$ converge vers $\vec{0}$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}'; \mathrm{E})$ donc $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}} \otimes \mathrm{I}$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}' \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}; \mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$, donc $(\mathrm{L}_{\vec{\varphi}} \otimes \mathrm{I})(\vec{\mathrm{T}})$ converge vers 0 dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ pour $\vec{\mathrm{T}}$ fixée).

Comme cette application coïncide avec $(\vec{\varphi}, \vec{\mathrm{T}}) \to \varphi \cdot_\pi \mathrm{T}$ sur $(\mathcal{H} \otimes \mathrm{E}) \times (\mathcal{H}' \otimes \mathrm{F})$, elle lui est identique. On a donc

$$\text{(II, 3; 10)} \qquad \varphi \cdot_\pi \mathrm{T} = (\mathrm{L}_{\vec{\varphi}} \otimes \mathrm{I})(\vec{\mathrm{T}}).$$

On a, pour la même raison :

$$\text{(II, 3; 11)} \qquad \varphi \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = (\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}} \otimes \mathrm{I})(\vec{\varphi}).$$

L'application $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$ (resp. $\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}$) n'est autre que l'application $\mathrm{T} \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \mathrm{T}$ (resp. $\varphi \to \varphi \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$) lorsque F (resp. E) est le corps des scalaires. Elle est de nature élémentaire, et son étude a été faite au chapitre I. Nous voyons qu'elle sert directement à définir $\varphi \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$ pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'(\mathrm{F})$. On peut donc énoncer la proposition suivante (qui permettrait de retrouver directement toute la proposition 4) :

PROPOSITION 8. — *$\mathcal{H}$ vérifiant les conditions de l'énoncé de la proposition 4, $\vec{\mathrm{T}} \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$ est, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$, la seule application linéaire continue de $\mathcal{H}'(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ qui vérifie*

$$\text{(II, 3; 12)} \qquad \varphi \cdot_\pi \mathrm{S}\vec{f} = \mathrm{L}_{\vec{\varphi}}(\mathrm{S}) \otimes \vec{f}$$

pour $\mathrm{S} \in \mathcal{H}'$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$.

De même $\vec{\varphi} \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$ *est, pour* $\mathrm{T} \in \mathcal{H}'(\mathrm{F})$, *la seule application linéaire continue de* $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ *qui vérifie*

$$\psi\vec{e} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = \vec{e} \otimes \mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}(\psi) \tag{II, 3; 13}$$

pour $\psi \in \mathcal{H}$, $e \in \mathrm{E}$.

On a de plus

$$\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = (\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}} \otimes \mathrm{I})\vec{\varphi}, \tag{II, 3; 10}$$

$$\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = (\mathrm{L}_{\vec{\varphi}} \otimes \mathrm{I})\vec{\mathrm{T}}. \tag{II, 3; 11}$$

§ 4. Produit « scalaire ». Étude générale.

Dans tout ce paragraphe, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ seront des ensembles saturées de parties *bornées* de E et F.

Parties du type $\mathfrak{S}$, parties $\mathfrak{T}$-équibornées; applications sous-nucléaires et sous-intégrales.

Les résultats précédents ne sont vraiment utiles que si E et F sont des espaces de Banach; sinon, en effet, les applications bilinéaires qu'on trouve dans la pratique sont seulement hypocontinues, et non continues; il faut donc pouvoir remplacer $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ par $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\lambda \mathrm{F}$, $\lambda = \iota, \gamma$, ou β. Cela nécessite alors certaines hypothèses restrictives sur $\vec{\varphi}$ ou $\vec{\mathrm{T}}$.

Dans la suite $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ ne seront pas nécessairement des espaces de distributions; mais comme ils le seront dans la plupart des applications, nous emploierons les mêmes notations que s'ils l'étaient. Ainsi $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ voudra dire $\mathcal{K}\varepsilon\mathrm{E}$; si $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$, $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$ sera l'application $\tilde{\vec{\varphi}}$ de $\mathcal{K}'$ dans E. $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$ sera $\mathcal{H}'_c\varepsilon\mathrm{F}$; si $\vec{\mathrm{T}}\varepsilon\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$, $\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}$ sera l'application $\tilde{\vec{\mathrm{T}}}$ de $\mathcal{H}$ dans F. Si $\mathcal{H}$ est un espace de distributions, mais non normal, $\mathcal{H}'_c$ n'est pas un espace de distributions.

Soit $\vec{\varphi} \in \mathrm{K}(\mathrm{E})$, et soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties *bornées* de E. On dira que $\vec{\varphi}$ est du type $\mathfrak{S}$ si $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$ applique toute partie équicontinue de $\mathcal{K}'$ dans une partie de E appartenant à $\mathfrak{S}$; une partie $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ sera du type $\mathfrak{S}$ si la réunion des images par les $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$, $\vec{\varphi} \in \mathfrak{A}$, de toute partie équicontinue de $\mathcal{K}'$ est une partie de E appartenant à $\mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E, toute $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$ est du type $\mathfrak{S}$ et les parties du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{K}(\mathrm{E}) \approx \mathfrak{L}_\varepsilon(\mathcal{K}'_c;\ \mathrm{E})$ sont simplement les parties bornées. Nous appellerons $\mathcal{K}(\mathrm{E}_{\mathfrak{S}})$ l'espace des éléments du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{K}(\mathrm{E})$; *nous le munirons toujours de la topologie induite par* $\mathcal{K}(\mathrm{E})$.

Si maintenant $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$, et si $\mathfrak{T}$ est un ensemble de parties bornées de F, on dira que $\vec{\mathrm{T}}$ est $\mathfrak{T}$-bornée s'il existe un voisinage de 0 de $\mathcal{H}$ dont l'image par $\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}$ appartient à $\mathfrak{T}$. On dira qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$ est $\mathfrak{T}$-équibornée, s'il existe un voisinage de 0 de $\mathcal{H}$ tel que la réunion de ses images par les $\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{B}$, appartienne à $\mathfrak{T}$.

Nous dirons bornée, équibornée, sans spécifier $\mathfrak{T}$, si $\mathfrak{T}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de F. Dans le cas où $\mathcal{H} = \mathfrak{D}$, ces définitions sont conformes à celles du chapitre I page 84. Nous appellerons $\mathcal{H}'(\mathrm{F};\ \mathfrak{T})$ l'espace des éléments $\mathfrak{T}$-bornés de $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$; la notation $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F},\ \mathfrak{T})$ exprimera qu'il est muni de la topologie induite par $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$. Nous écrirons $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F},\ \beta)$ si $\mathfrak{T}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de F [1].

Dans les définitions ci-dessus, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, E, F, ne sont pas nécessairement quasi-complets.

Toutefois, si F n'est pas quasi-complet, nous supposerons en général que $\mathfrak{T}$ est un ensemble de parties bornées *complétantes* de F. L'ensemble de toutes les parties bornées ne vérifie pas cette conditions. Nous emploierons la lettre β_0 au lieu de β pour désigner l'ensemble (non nécessairement saturé) de toutes les parties bornées complétantes de F [2].

Enfin on dira qu'une application linéaire Λ d'un espace localement convexe $\mathcal{K}$ dans un autre $\mathcal{H}$ est *sous-nucléaire* (resp. *sous-intégrale*) si, pour tout voisinage disqué $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{H}$, il existe un voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{K}$ tel que

[1] La présente notation est regrettable. Il aurait mieux valu appeler $\mathcal{M}(\mathrm{F};\ \mathfrak{T})$ l'espace des $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}(\mathrm{F})$ telles qu'il existe un voisinage de O de $\mathcal{M}'_c$ dont l'image par $\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}} \in \mathfrak{L}(\mathcal{M}'_c;\ \mathrm{F})$ appartienne à $\mathfrak{T}$. Pour $\mathcal{M} = \mathcal{H}'_c$, on retrouverait l'espace $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\ \mathfrak{T})$ défini ici, seulement si $(\mathcal{H}'_c)'_c = \mathcal{H}$, c'est-à-dire si $\mathcal{H}$ a la topologie γ. Dans la notation introduite ici, $\mathcal{M}(\mathrm{F};\ \mathfrak{T})$ n'est défini que si $\mathcal{M}$ est donné comme un dual $\mathcal{H}'_c$. Nous nous sommes aperçus de ce défaut trop tard pour le modifier.

[2] Toutes ces distinctions introduisent des subtilités d'un intérêt pratique douteux. En pratique, F est toujours quasi-complet, $\mathfrak{T}$ toujours saturé. Nous traiterons la proposition 10 dans le cas le plus général, avec F non nécessairement quasi-complet, et $\mathfrak{T} = \beta_0$ ensemble non nécessairement saturé de parties bornées. Mais nous ne nous gênerons pas, dans les propositions qui suivent, pour supposer $\mathfrak{T}$ saturé et F quasi-complet, si c'est plus commode pour la démonstration.

$\Lambda(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, et que l'application $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, définie par passage au quotient et prolongement par continuité, soit nucléaire (resp. intégrale). Cela revient à dire que, quel que soit le voisinage disqué $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{H}$, l'application composée $\mathcal{K} \to \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ de Λ par l'application canonique de $\mathcal{H}$ dans $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ est nucléaire (resp. intégrale).

L'application identique de $\mathcal{H}$ dans lui-même est sous-nucléaire ou sous-intégrale si et seulement si l'espace $\mathcal{H}$ est nucléaire (1).

Il arrivera dans certaines applications importantes (voir page 99) que nous ayons à considérer $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ pour E non nécessairement quasi-complet. L'espace $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ est toujours très précisément défini comme étant $\mathcal{K} \varepsilon \mathrm{E} \approx \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}'_c;\ \mathrm{E}(\approx \mathcal{L}_\varepsilon(\mathrm{E}'_c;\ \mathcal{K})$. Mais il peut être délicat à caractériser de façon analytique simple. Étudions par exemple l'espace $\mathcal{E}^m(\mathrm{E})$ (m fini ou infini) (2), distinct de l'espace $\mathcal{E}^m_g(\mathrm{E})$ des fonctions m fois continuement différentiables sur R^n à valeurs dans E. Si $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(\mathrm{E})$, à fortiori $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(\hat{\mathrm{E}})$, donc $\vec{\varphi}$ est une fonction m-fois continuement différentiable à valeurs dans $\hat{\mathrm{E}}$; mais $(\mathrm{D}^p\vec{\varphi})(x)$, $|p| \leqslant m$, est l'image de $(-1)^{|p|}\mathrm{D}^p(\varepsilon(x)) \in \mathcal{E}'^m$ par $\mathrm{L}_{\vec{\varphi}}$, donc elle est dans E lui-même, et par suite $\vec{\varphi}$ est m-fois continuement différentiable à valeurs dans E lui-même, $\mathcal{E}^m(\mathrm{E}) \subset \mathcal{E}^m_g(\mathrm{E})$. Mais cette condition n'est nullement suffisante. Lorsque x décrit un compact K de R^n, $\mathrm{D}^p\vec{\varphi}(x)$ décrit un compact $\Phi_{p,\mathrm{K}}$ de E. A priori l'enveloppe de $\Phi_{p,\mathrm{K}}$ dans E n'est pas nécessairement compacte, puisque E n'est pas quasi-complet; comme elle est précompacte (3), elle est compacte

(1) Grothendieck [5], théorème 6 *c*, page 34; Schwartz [2], exposé 12, définition 2, page 4, puis exposé 17, théorème 1, 4°, page 3 et page 4 en bas.

(2) Dans Schwartz [1], nous avons *toujours* supposé E quasi-complet (voir page 92-93). Nous avons *défini* $\mathcal{E}^m(\mathrm{E})$ (page 93) comme l'espace des fonctions m fois continuement différentiables sur R^n à valeurs dans E (quasi-complet). Nous avons alors démontré que $\mathcal{E}^m(\mathrm{E})$ était identique à $\mathcal{E}^m \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{E}$ (proposition 10, page 109), ce qui, puisque $\mathcal{E}^m$ à la propriété d'approximation stricte (voir ici préliminaires, corollaire de la proposition 3, et chapitre I, corollaire 1 de la proposition 11), revient à dire qu'il est identique à $\mathcal{E}^m \varepsilon \mathrm{E}$.

Dans le présent travail, nous sommes liés par nos principes généraux de notation : même si E n'est pas quasi-complet, $\mathcal{E}^m(\mathrm{E})$ veut dire, *par définition*, $\mathcal{E}^m \varepsilon \mathrm{E}$. Mais alors il n'est plus nécessairement l'espace des fonctions m fois continuement différentiables sur R^n à valeurs dans E, que nous noterons $\mathcal{E}^m_g(\mathrm{E})$: $\mathcal{E}^m(\mathrm{E}) \subset \mathcal{E}^m_g(\mathrm{E}) \subset \mathcal{E}^m(\hat{\mathrm{E}})$. La lettre g est l'initiale de général; un élément de $\mathcal{E}^m_g(\mathrm{E})$ est un objet plus général qu'un élément de $\mathcal{E}^m(\mathrm{E})$.

(3) Bourbaki [1], chapitre II, § 4, n° 1, proposition 2.

si et seulement si elle est complète; remarquons aussi que l'enveloppe $\widehat{\Phi}_{p,K}$ de $\Phi_{p,K}$ dans $\hat{E}$ est compacte, et que l'enveloppe dans E est donc compacte si et seulement si $\widehat{\Phi}_{p,K} \subset E$. Nous allons montrer que l'hypothèse $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$ entraîne que $\Phi_{p,K}$ soit compacte. Un élément de $\widehat{\Phi}_{p,K}$ peut en effet toujours s'écrire $\int_K D^p\vec{\varphi}(x)\,d\mu(x)$, où μ est une mesure portée par K (1); autrement dit cet élément est $L_{D^p\vec{\varphi}}(\mu)$, ou $(-1)^{|p|} L_{\vec{\varphi}}(D^p\mu)$ (2), et comme $L_{\vec{\varphi}}$ applique $\mathcal{E}'^m$ dans E, $\widehat{\Phi}_{p,K}$ est bien dans E lui-même. Réciproquement, soit $\vec{\varphi}$ une fonction m fois continuement différentiable à valeurs dans E, $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m_g(E)$, vérifiant la condition Φ_m :

Φ_m) *Pour tout compact* K *de* R^n, *et tout indice de dérivation p d'ordre* $\leqslant m$, *l'ensemble* $\Phi_{p,K} = \bigcup_{x\in K} D^p\vec{\varphi}(x)$ *a dans E une enveloppe complète.*

Alors nous allons montrer que $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$. Nous savons déjà que $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(\hat{E})$. Elle définit une application linéaire continue $L_{\vec{\varphi}}$ de $\mathcal{E}'^m_c$ dans $\hat{E}$; elle appartiendra à $\mathcal{E}^m(E)$ si et seulement si $L_{\vec{\varphi}}(\mathcal{E}'^m) \subset E$. Soit donc $S \in \mathcal{E}'^m$, on a $S = \sum_p D^p\mu_p$, μ_p mesures à supports contenus dans un compact K de R^n. Alors $L_{\vec{\varphi}}(S) = \sum_{|p|\leqslant m} (-1)^{|p|} \int_K D^p\vec{\varphi}(x)\,d\mu_p(x)$; l'ensemble $\bigcup_{x\in K} D^p\vec{\varphi}(x)$ est un compact $\Phi_{p,K}$ de E, dont nous savons que l'enveloppe $\widehat{\Phi}_{p,K}$ dans $\hat{E}$ appartient à E. Si $\int_K |d\mu_p| \leqslant M$, alors $\int_K D^p\vec{\varphi}(x)\,d\mu_p(x) \in M\widehat{\Phi}_{p,K} \subset E$ et $L_{\vec{\varphi}}(S)$ sera bien dans E lui-même. En outre, si toutes les parties $\Phi_{p,K}$ appartiennent à un ensemble saturé $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$ sera du type $\mathfrak{S}$, car si S parcourt une partie équicontinue de $\mathcal{E}'^m$, on peut, dans l'intégrale ci-dessus, choisir m et M fixes, ainsi que le compact K de R^n, alors $L_{\vec{\varphi}}(S)$ reste dans une partie $M\widehat{\Phi}_{p,K} \in \mathfrak{S}$. La réciproque est évidente.

Nous avons donc démontré la propriété :

Proposition 9. — *Si* E *est un espace localement convexe séparé, non nécessairement quasi-complet, l'espace* $\mathcal{E}^m(E) = \mathcal{E}^m \varepsilon E$

(1) Bourbaki [6], chapitre III, § 4, n° 3, proposition 7.

(2) Schwartz [1], n° 3, page 116.

est l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$ *m fois continuement différentiables sur* R^n *à valeurs dans* E, *vérifiant la condition:*

Φ_m) *Pour tout compact* K *de* R^n, *et tout indice de dérivation p d'ordre* $\leqslant m$, *l'ensemble* $\Phi_{p,K} = \bigcup_{x \in K} D^p \vec{\varphi}(x)$ *a une enveloppe complète.*

L'espace $\mathcal{E}^m$ $(E_{\mathfrak{S}})$ *est le sous-espace des fonctions* φ *pour lesquelles tous les* $\Phi_{p,K}$ *appartiennent à* $\mathfrak{S}$.

Une partie $\mathfrak{A}$ *de* $\mathcal{E}^m$ (E) *est du type* $\mathfrak{S}$, *si et seulement si, pour tout p d'ordre* $\leqslant m$, $\bigcup_{\vec{\varphi} \in \mathfrak{A}} \Phi_{p,K}$ *appartient à* $\mathfrak{S}$.

Nous appellerons toujours $\overline{\mathcal{D}^m}$(E) (qui n'avait été défini que pour E quasi-complet, chapitre I, page 63) le sous-espace des fonctions à support compact de $\mathcal{E}^m$(E); il sera muni de la topologie limite inductive des $\mathcal{D}^m_K$(E), K compacts de R^n. *C'est l'espace des fonctions* $\vec{\varphi}$, *m fois continuement différentiables à support compact sur* R^n *à valeurs dans* E, *vérifiant:*

Φ'_m) *Pour tout indice de dérivation p d'ordre* $\leqslant m$, $\Phi_p = \bigcup_{x \in R^n} \mathcal{D}^p \vec{\varphi}(x)$ *est un compact de* E *dont l'enveloppe est complète.*

Le produit scalaire $\varphi \cdot_\iota$ T.

Proposition 10. — *Soient* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, *deux espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets; on supposera ou bien que* $\mathcal{K}$ *a un système fondamental de voisinages disqués* $\mathcal{U}$ *de* 0 *tels que* $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0}$ *ait la propriété d'approximation, ou bien que* $\mathcal{H}$ *a un système fondamental de voisinages disqués* $\mathcal{V}$ *de* 0 *tels que* $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ *ait la propriété d'approximation. Soit* Λ *un opérateur sous-nucléaire de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$. *Soient* E, F, *des espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On peut définir une application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ (*notée aussi* $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ *si aucune confusion n'est à craindre*), *de* $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$ *dans* $E \hat{\otimes}_\iota F$. *Elle vérifie*

$$\text{(II, 4; 1)} \qquad \psi\vec{e} \cdot_{\iota;\Lambda} S\vec{f} = (\Lambda\psi \cdot S)\vec{e} \otimes \vec{f}$$

pour $\psi \in \mathcal{K}$, $S = \mathcal{H}'$, $\vec{e} \in E$, $\vec{f} \in F$.

La forme bilinéaire $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ *est compatible avec les applications linéaires continues de* E et F, *et avec les applications* *linéaires continues de* $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$. *L'image par cette application du produit d'une partie bornée de* $\mathcal{K}(E)$ *par une partie* β_0*-équibornée de* $\mathcal{H}'_c(F)$ *est une partie bornée de* $E \otimes_\iota F$.

Rappelons d'abord que, si $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0}$, dual de $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}}$, a la propriété d'approximation, il en est de même de $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}}$ lui-même donc de $\mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$; donc de $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{K}$ est un espace nucléaire, il possède toutes ces propriétés (avec même $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}}$ et $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0}$ hilbertiens) (1). Si $\mathcal{K}$ est un espace de Banach, cette propriété revient à dire que $\mathcal{K}'$ a la propriété d'approximation.

Nous démontrerons cette proposition en plusieurs étapes. Le fait que l'image de $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\, I} \vec{T}$ dans $E \otimes_\pi F$ soit l'élément $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ défini à la proposition 4 ne sera démontré que plus loin, corollaire de la proposition 19.

Existence de $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\, \Lambda} T$.

Soit $\vec{T}$ une application β_0-bornée de $\mathcal{H}$ dans F, et soit $\mathfrak{V}$ un voisinage disqué de 0 dans $\mathcal{H}$, tel que $L_{\vec{T}}(\mathfrak{V})$ soit contenu dans une partie bornée disquée complétante B de F; alors $L_{\vec{T}}$ définit par passage au quotient une application linéaire continue $L_{\vec{T}, \mathfrak{V}, B}$ de $\mathcal{H}_{\mathfrak{V}}$ dans F_B, donc de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ dans F_B puisque F_B est complet, donc une application linéaire continue $L_{\vec{T}, \mathfrak{V}}$ de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ dans F.

Il existe alors un voisinage disqué $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathcal{K}$ tel que l'application $\Lambda_{\mathfrak{U}, \mathfrak{V}} : \hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$, soit nucléaire. Soit $\mathfrak{U}^0$ le polaire de $\mathfrak{U}$. Alors $L_{\vec{\varphi}}$, application linéaire continue de $\mathcal{K}'_c$ dans E, définit une application linéaire continue $L_{\vec{\varphi}, \mathfrak{U}^0}$ de $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0}$, dual de $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}}$, dans E.

L'application nucléaire $\Lambda_{\mathfrak{U}, \mathfrak{V}}$ peut être définie par un élément ζ de $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0} \hat{\otimes}_\pi \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$. Cet élément est unique si $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0}$ ou $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ a la propriété d'approximation (2); on suppose justement qu'il existe un système fondamental de voisinages $\mathfrak{U}$ ou $\mathfrak{V}$

(1) Grothendieck [4], proposition 36, 1, page 167, et lemme 19, page 169; [5], lemme 3, page 37. Voir aussi Schwartz [2], exposé 14, corollaire page 9, exposé 15; théorème 7 page 6; théorème 8, page 7; théorème 9, page 7; exposé 17, proposition 4, page 5.

(2) Grothendieck [4], corollaire page 168, n° 3, où E est remplacé par E′ : si E′ ou F à la propriété d'approximation, l'application canonique de $E' \hat{\otimes}_\pi F$ dans $\mathcal{L}(E; F)$ est biunivoque. Voir aussi Schwartz [2], exposé 14, théorème 3, B_2, page 7, et proposition, B'_2 page 8.

pour lesquels il en soit ainsi ; nous supposons, au moins provisoirement, cette condition vérifiée pour $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ}$ ou $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$.

Alors, $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ} \hat{\otimes}_\pi \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ étant identique à $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ puisqu'il s'agit d'espaces de Banach,

$$\text{(II, 4; 2)} \qquad \xi = (L_{\vec{\varphi},\mathfrak{U}^\circ} \otimes L_{\vec{T},\mathfrak{V}})\,(\zeta)$$

est un élément de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, que nous noterons provisoirement $\vec{\varphi} \cdot_{\varepsilon;\Lambda;\mathfrak{U},\mathfrak{V}} \vec{T}$.

Montrons maintenant que cet élément est indépendant du choix de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$; et qu'en outre il n'est nullement nécessaire de supposer que $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ}$ vérifie la propriété d'approximations, s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 de $\mathcal{K}$ pour lesquels il en est ainsi ; si l'hypothèse d'approximation est faite sur $\mathcal{H}$ nous supposerons *toujours que* $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ à la propriété d'approximation.

Soient donc $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, et $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$, deux choix de tels voisinages.

Appelons $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, un troisième choix avec $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$, tel que $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ}$ ou $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ ait la propriété d'approximation, et que $\Lambda_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} : \hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ soit nucléaire.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ} \arrow[dr, "L_{\vec{\varphi},\mathfrak{U}^\circ}"] & \\
\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}_1^\circ} \arrow[ur] \arrow[rr, "L_{\vec{\varphi},\mathfrak{U}_1^\circ}"'] & & E
\end{tikzcd}$$

On en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1} \arrow[dr, "L_{\vec{\varphi},\mathfrak{U}^\circ} \otimes L_{\vec{T},\mathfrak{V}_1}"] & \\
\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}_1^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1} \arrow[ur] \arrow[rr, "L_{\vec{\varphi},\mathfrak{U}_1^\circ} \otimes L_{\vec{T},\mathfrak{V}_1}"'] & & E \hat{\otimes}_\varepsilon F
\end{tikzcd}$$

Désignons par $\tilde{\zeta}$ l'élément *unique* de $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$ qui définit l'opération nucléaire $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$ (élément unique, puisque $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ}$ ou $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$ à la propriété d'approximation) ; comme $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$ se factorise en $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}_1} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$, $\tilde{\zeta}$ est l'image de *tout* élément $\tilde{\zeta}_1$ de $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}_1^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$ définissant l'opération nucléaire $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}_1} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$, par l'application canonique $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}_1^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1} \to \mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^\circ} \hat{\otimes}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}_1}$. Le dernier diagramme commutatif signifie que l'élément $\xi = (L_{\vec{\varphi},\mathfrak{U}^\circ} \otimes L_{\vec{T},\mathfrak{V}_1})(\tilde{\zeta})$, associé au choix $(\mathcal{U}, \mathcal{V}_1)$ de voisinages, coïncide avec l'élément $\xi_1 = (L_{\vec{\varphi}, \mathcal{U}_1^0} \otimes L_{\vec{T}, \mathcal{V}_1})(\zeta_1)$ associé au choix $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \zeta_1)$.

On a maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}_1} \arrow[dr, "L_{\vec{T}, \mathcal{V}_1}"] & \\ \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} \arrow[ur] \arrow[rr, "L_{\vec{T}, \mathcal{V}}"'] & & F \end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}_1} \arrow[dr, "L_{\vec{\varphi}, \mathcal{U}^0} \otimes L_{\vec{T}, \mathcal{V}_1}"] & \\ \mathcal{K}'_{\mathcal{U}_0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} \arrow[ur] \arrow[rr, "L_{\vec{\varphi}, \mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota L_{\vec{T}, \mathcal{V}}"'] & & E \hat{\otimes}_\iota F \end{tikzcd}$$

Comme $\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}_1}$ se factorise en $\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}_1}$, l'élément $\tilde{\zeta}$ est image de l'élément ζ de $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ définissant l'opération nucléaire $\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, par l'application canonique $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} \to \mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}_1}$. Alors ξ coïncide avec

$$\xi = (L_{\vec{\varphi}, \mathcal{U}^0} \otimes L_{\vec{T}, \mathcal{V}})(\zeta)$$

associé au choix $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Cela prouve donc que $\xi = \xi_1$, et comme on peut montrer de la même manière que $\xi = \xi_2$, on a bien $\xi_1 = \xi_2$, et cela quels que soient les choix de ζ_1 et ζ_2, ce qui prouve bien l'indépendance de ξ par rapport au choix des voisinages.

On peut donc appeler $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$, ou $\varphi \cdot_\iota \vec{T}$ si aucune confusion n'est à craindre, l'élément ξ obtenu indépendamment du choix de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ζ. Soit A l'image $L_{\vec{\varphi}}(\mathcal{U}^0)$; c'est une partie convexe équilibrée compacte de E. L'image $L_{\vec{T}}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$ est contenue dans une partie bornée disquée complétante B de F. Alors $L_{\vec{\varphi}, \mathcal{U}^0, A}$ est continue de $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0}$ dans E_A, $L_{\vec{T}, \mathcal{V}, B}$ est continue de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ dans l'espace de Banach F_B. L'élément $(L_{\vec{\varphi}, \mathcal{U}^0, A} \otimes L_{\vec{T}, \mathcal{V}, B})(\zeta)$ appartient à $E_A \hat{\otimes}_\iota F_B = E_A \hat{\otimes}_\pi F_B$ (voir page 13); et $\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} T$ est son image dans $E \hat{\otimes}_\iota F$. *Ainsi* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ *appartient à l'image dans* $E \hat{\otimes}_\iota F$ *d'un élément d'un* $E_A \hat{\otimes}_\pi F_B$, A *convexe équilibrée compacte*, B *bornée disquée complétante.* Si de plus $\vec{\varphi}$ parcourt une partie bornée de $\mathcal{K}(E)$, T une partie β_0-équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ peuvent être choisis indépendamment de $\vec{\varphi}$

et $\vec{T}$, donc aussi ζ; en outre, A reste dans une même partie disquée bornée A_1 de E, B dans une même partie disquée bornée complétante B_1 de F; comme ζ est contenu dans l'enveloppe de k $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{V}^\bullet$, $k > 0$ convenable, $\mathcal{V}^\bullet$ image de $\mathcal{V}$ dans $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, son image dans $E_{A_1} \hat{\otimes}_\pi F_{B_1}$ est dans l'enveloppe de $k\, A_1 \otimes B_1$, donc reste bornée, et par suite $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ reste borné dans $E \hat{\otimes}_\iota F$.

Si maintenant θ est une application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G quasi-complet, elle se prolonge en une application linéaire continue $\bar{\theta}$ de $E \hat{\otimes}_\iota F$ dans G, et on peut définir $\vec{\varphi} \cdot_\theta \vec{T} = \bar{\theta}\, (\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T})$. Naturellement si $\mathfrak{S}$(resp. $\mathfrak{T}$) est une famille saturée de parties bornées de E (resp. F), on peut définir $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}} T$, qui est l'image de $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ par l'application canonique de $E \hat{\otimes}_\iota F$ dans $E \hat{\otimes}_{\iota\, \mathfrak{S},\mathfrak{T}} F$.

Compatibilité avec les applications linéaires continues de E et F :

Si l'on a des applications linéaires continues $E_1 \to E_2$, $F_1 \to F_2$, on en déduit des applications linéaires continues $\vec{\varphi}_1 \to \vec{\varphi}_2$ de $\mathcal{K}\,(E_1)$ dans $\mathcal{K}(E_2)$, $\vec{T}_1 \to \vec{T}_2$ de $\mathcal{H}'_c(F_1)$ dans $\mathcal{H}'_c(F_2)$, cette dernière appliquant $\mathcal{H}'_c\,(F_1;\, \beta_0)$ dans $\mathcal{H}'_c\,(F_2;\, \beta_0)$ parce que l'image, par une application linéaire continue, d'une partie bornée complétante est bornée complétante. Alors $\vec{\varphi}_2 \cdot_\iota \vec{T}_2$ est trivialement l'image de $\vec{\varphi}_1 \cdot_\iota \vec{T}_1$ par $E_1 \hat{\otimes}_\iota F_1 \to E_2 \hat{\otimes}_\iota F_2$. Considérons en particulier l'élément $\vec{\delta}$ de $\mathcal{K}\,(\mathcal{K}'_c)$ qui définit l'application identique de $\mathcal{K}'_c$ dans $\mathcal{K}'_c$; soit $\vec{\delta}_{\mathcal{V}}$ l'élément de $\mathcal{H}'_c(\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}};\, \beta_0)$ qui définit l'application canonique $\mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$; $\mathcal{V}$ est supposé choisi de manière que $L_{\vec{T}}$ l'applique dans une partie bornée disquée complétante B de F. Ces données définissent un élément $\vec{\delta} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{\delta}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{K}'_c \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$. Alors l'image de cet élément par $L_{\vec{\varphi}} \otimes L_{\vec{T},\mathcal{V}}$ est un élément de $E \hat{\otimes}_\iota F$, qui n'est autre que $L_{\vec{\varphi}}(\vec{\delta}) \cdot_{\iota;\Lambda} L_{\vec{T},\mathcal{V}}(\vec{\delta}_{\mathcal{V}}) = \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$.

On peut aussi remarquer ceci. Soient $\mathcal{V}$ et B tels que $L_{\vec{T}}$ applique $\mathcal{V}$ dans B, donc que $L_{\vec{T},\mathcal{V},B}$ applique $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ dans le Banach F_B. Alors $\vec{T}_B : \mathcal{H} \to F_B$ est une application bornée de $\mathcal{H}$ dans F_B, $\vec{T}$ est son image par $F_B \to F$; $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T} \in E \hat{\otimes}_\iota F$ est l'image de $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}_B \in E \hat{\otimes}_\iota F_B$ par $F_B \to F$. On peut donc toujours passer par un intermédiaire où F est remplacé par un espace de Banach.

Image de $\varphi \cdot_\iota T$ dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$. La formule (II, 4; 1).

Comme $\zeta \in \mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ définit l'application $\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, $\xi = \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} T$ définit l'appplication composée

$$E'_c \xrightarrow{{}^t L_{\vec{\varphi}}, \mathcal{U}^0} \hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}} \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} \xrightarrow{L_{\vec{T}}, \mathcal{V}} F;$$

autrement dit l'image ξ_0 de ξ dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est tel que l'application ξ_0 de E'_c dans F soit définie par $L_{\vec{T}} \circ \Lambda \circ {}^t L_{\vec{\varphi}}$:

$$E'_c \xrightarrow{{}^t L_{\vec{\varphi}}} \mathcal{K} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{H} \xrightarrow{L_{\vec{T}}} F.$$

De même l'élément ${}^t\xi_0$ est l'application de F'_c dans E définie par $L_{\vec{\varphi}} \circ {}^t\Lambda \circ {}^t L_{\vec{T}}$:

$$F'_c \xrightarrow{{}^t L_{\vec{T}}} \mathcal{H}'_c \xrightarrow{{}^t\Lambda} \mathcal{K}'_c \xrightarrow{L_{\vec{\varphi}}} E.$$

Ceci montre que l'image ξ_0 de ξ dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ n'est autre que l'image par $L_{\vec{\varphi}} \otimes L_{\vec{T}}$ de l'élément de $\mathcal{K}'_c \,\varepsilon\, \mathcal{H}$ qui représente l'application Λ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$, ce que l'on pouvait aussi voir directement.

Supposons que F soit le corps des scalaires. Alors $E \hat{\otimes}_\iota F = E \hat{\otimes}_\varepsilon F = E$, $\xi_0 = \xi$, donc si $S \in \mathcal{H}'$, $\xi = \vec{\varphi} \cdot_{\iota,\Lambda} S$ n'est autre que l'élément:

$$\text{(II, 4; 3)} \qquad \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} S = L_{\vec{\varphi}}({}^t\Lambda(S)) \in E.$$

Si maintenant F est quelconque, et si $\vec{f} \in F$, $\vec{f}$ définit l'application continue $z \to z\vec{f}$ de C dans F, donc ce que nous avons vu page 61 montre que $\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} (S \otimes \vec{f})$ n'est autre que

$$\text{(II, 4; 4)} \qquad \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} (S \otimes \vec{f}) = \left(L_{\vec{\varphi}}({}^t\Lambda(S))\right) \otimes \vec{f}.$$

Si alors $\vec{\varphi} = \psi \otimes \vec{e}$, on trouve bien (II, 4; 1), car $L_{\psi\vec{e}}({}^t\Lambda(S)) = (\psi \,.\, {}^t\Lambda(S))\vec{e} = (\Lambda\psi \,.\, S)\vec{e}$. Bien entendu, on voit de la même manière que si E est le corps des scalaires, si $\psi \in \mathcal{K}$, et $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F;\, \beta_0)$,

$$\text{(II, 4; 5)} \qquad \psi \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T} = L_{\vec{T}}(\Lambda\psi) \in F,$$

et que, si E est quelconque, et si $\psi \in \mathcal{K}$, $\vec{e} \in E$:

$$\text{(II, 4; 6)} \qquad \psi\vec{e} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T} = \vec{e} \otimes L_{\vec{T}}(\Lambda\psi).$$

On voit ainsi que les images, par $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$, de $(\mathcal{K} \otimes E) \times (\mathcal{H}'_c(F; \beta_0))$ et de $\mathcal{K}(E) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$ sont dans $E \otimes F$, produit tensoriel non complété.

La formule qui donne ξ_0, image de ξ dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, montre aussi que ξ_0 est connu quand $\vec{\psi} = \Lambda\, \vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$ sont connues, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'espace $\mathcal{K}$, l'application Λ, et l'élément $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{K}(E)$ tel que $\vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi}$.

Si en effet $\vec{\varphi}_1 \in \mathcal{K}_1(E)$, $\vec{\varphi}_2 \in \mathcal{K}_2(E)$, si Λ_1 et Λ_2 sont des applications sous-nucléaires de $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ dans $\mathcal{H}$, et si $\Lambda_1(\vec{\varphi}_1) = \Lambda_2(\vec{\varphi}_2) \in \mathcal{H}(E)$, alors les applications $\Lambda_1 \circ {}^t L_{\vec{\varphi}_1}$ et $\Lambda_2 \circ {}^t L_{\vec{\varphi}_2}$ de E'_c dans $\mathcal{H}$ coïncident, donc les éléments ξ_0 associés à $\vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota;\Lambda_1} \vec{T}$ et $\vec{\varphi}_2 \cdot_{\iota;\Lambda_2} \vec{T}$ coïncident. Il serait intéressant de savoir si ξ lui aussi dépend seulement de $\vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi}$ et de $\vec{T}$, et non de $\mathcal{K}$, Λ, $\vec{\varphi}$ ou seulement de $\vec{\varphi}$ et de $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T}$, et non de $\mathcal{H}$, Λ, $\vec{T}$; nous ignorons s'il en est ainsi. Voir d'autres développements sur ce sujet page 65 (formule II, 4; 11 bis et 11 ter) et page 83.

Compatibilité avec les applications linéaires continues de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{H}$. La formule fondamentale (II, 4; 7).

Soient $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{H}_1$, et $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{H}_2$, deux couples d'espaces; chaque couple est supposé vérifier les conditions d'application de la proposition 10 ([1]), relativement à une application sous-nucléaire, $\Lambda_1 : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{H}_1$ pour le 1er couple, $\Lambda_2 : \mathcal{K}_2 \to \mathcal{H}_2$ pour le 2e couple. Soient en outre $u : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$, et $v : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, des applications linéaires continues, telles que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}_2 \arrow[dr, "\Lambda_2"] & \\
\mathcal{K}_1 \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "\Lambda_1"'] & & \mathcal{H}_2 \\
 & \mathcal{H}_1 \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

L'image $(u \otimes I)\vec{\varphi}_1 = u\vec{\varphi}_1$ de $\vec{\varphi}_1 \in \mathcal{K}_1(E)$ appartient à $\mathcal{K}_2(E)$, l'image $({}^t v \otimes I)\ \vec{T}_2 = {}^t v\vec{T}_2$ de $\vec{T}_2 \in (\mathcal{H}_2)'_c\ (F;\ \beta_0)$ appartient à $(\mathcal{H}_1)'_c\ (F;\ \beta_0)$. On a alors :

$$\text{(II, 4; 7)} \qquad u\vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota;\Lambda_2} T_2 = \vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota;\Lambda_1} {}^t v(\vec{T}_2).$$

([1]) Nous n'imposons pas la même propriété dans les deux cas : on peut la supposer pour $\mathcal{K}_1$ dans le 1er couple, pour $\mathcal{H}_2$ dans le 2e.

Soient en effet $\mathcal{V}_2$ un voisinage disqué de 0 dans $\mathcal{H}_2$, tel que $L_{\vec{T}_2}(\mathcal{V}_2)$ soit bornée complétante dans F, $\mathcal{U}_2$ un voisinage disqué de 0 dans $\mathcal{K}_2$ tel que $\Lambda_2(\mathcal{U}_2) \subset \mathcal{V}_2$, et que $(\Lambda_2)_{\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2}$: $(\mathcal{K}_2)\hat{}_{\mathcal{U}_2} \to (\mathcal{H}_2)\hat{}_{\mathcal{V}_2}$ soit nucléaire, $\mathcal{U}_1$ un voisinage disqué de 0 dans $\mathcal{K}_1$ tel que $u(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$; on supposera en outre ces voisinages choisis de telle manière que la propriété d'approximation requise dans la proposition 10 soit vérifiée. Soit ζ_2 un élément de $(\mathcal{K}_2)'_{\mathcal{U}_2^0} \hat{\otimes}_\iota (\mathcal{H}_2)\hat{}_{\mathcal{V}_2}$ définissant l'opérateur nucléaire $(\Lambda_2)_{\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2}$; alors

$$\text{(II, 4; 8)} \qquad u\vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota; \Lambda_2} \vec{T}_2 = (L_{u\vec{\varphi}_1, \mathcal{U}_2^0} \otimes L_{\vec{T}_2, \mathcal{V}_2})(\zeta_2).$$

Mais $L_{u\vec{\varphi}_1} = L_{\vec{\varphi}_1} \circ {}^t u$; de $u(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$, on tire ${}^t u(\mathcal{U}_2^0) \subset \mathcal{U}_1^0$, et $L_{u\vec{\varphi}_1, \mathcal{U}_2^0} = L_{\vec{\varphi}_1, \mathcal{U}_1^0} \circ {}^t u_{\mathcal{U}_2^0, \mathcal{U}_1^0}$, en notant ${}^t u_{\mathcal{U}_2^0, \mathcal{U}_1^0}$ l'opérateur de $(\mathcal{K}_2)'_{\mathcal{U}_2^0}$ dans $(\mathcal{K}_1)'_{\mathcal{U}_1^0}$ défini par ${}^t u$. Alors

$$\text{(II, 4; 9)} \qquad u\vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota; \Lambda_2} \vec{T}_2 = (L_{\vec{\varphi}_1, \mathcal{U}_1^0} \otimes L_{\vec{T}_2, \mathcal{V}_2})({}^t u_{\mathcal{U}_2^0, \mathcal{U}_1^0} \otimes I)(\zeta_2).$$

Mais $({}^t u_{\mathcal{U}_2^0, \mathcal{U}_1^0} \otimes I)(\zeta_2)$ est un élément η_1 de $(\mathcal{K}_1)'_{\mathcal{U}_1^0} \hat{\otimes}_\iota (\mathcal{H}_2)\hat{}_{\mathcal{V}_2}$ définissant l'opérateur nucléaire factorisé par

$$(\mathcal{K}_1)\hat{}_{\mathcal{U}_1} \to (\mathcal{K}_2)\hat{}_{\mathcal{U}_2} \to (\mathcal{H}_2)\hat{}_{\mathcal{V}_2}$$

et alors $(L_{\vec{\varphi}_1, \mathcal{U}_1^0} \otimes L_{\vec{T}_2, \mathcal{V}_2})(\eta_1)$ n'est autre que $\varphi \cdot_{\iota; (\Lambda_2 \circ u)} \vec{T}_2$. Donc

$$\text{(II, 4; 10)} \qquad u\vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota; \Lambda_2} T_2 = \varphi_1 \cdot_{\iota; (\Lambda_2 \circ u)} T_2.$$

De la même manière, en partant d'un voisinage disqué $\mathcal{V}_2$ de 0 dans $\mathcal{H}_2$ tel que $L_{\vec{T}_2}(\mathcal{V}_2)$ soit bornée complétante dans F, d'un voisinage disqué $\mathcal{V}_1$ de 0 dans $\mathcal{H}_1$ tel que $v(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}_2$, et d'un voisinage disqué $\mathcal{U}_1$ de 0 dans $\mathcal{K}_1$ tel que $\Lambda_1(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{V}_1$, et que $(\Lambda_1)_{\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1}$: $(\mathcal{K}_1)\hat{}_{\mathcal{U}_1} \to (\mathcal{H}_1)\hat{}_{\mathcal{V}_1}$ soit nucléaire, et de manière que les propriétés d'approximation requises soient vérifiées, on verra que

$$\text{(II, 4; 11)} \qquad \vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota; \Lambda_1} {}^t v \vec{T}_2 = \vec{\varphi}_1 \cdot_{\iota; (v \circ \Lambda_1)} \vec{T}_2.$$

Mais le diagramme de compatibilité exprime précisément que $\Lambda_2 \circ u = v \circ \Lambda_1$, d'où l'égalité cherchée.

Donnons quelques applications de (II, 4; 7):

A) Supposons que $\mathcal{K}$ soit un espace de distributions normal sur R^n; alors $\mathcal{K}'_c$ est un espace de distributions. Supposons que $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$ soit un élément de $\mathcal{D}(E)$, ayant son support dans une partie fermée A de R^n (éventuellement $A = R^n$). Appelons $\mathcal{D}_A$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ formé des fonctions ayant leur support dans A; munissons-le de la topologie induite par $\mathfrak{D}$. Alors ${}^t L_{\vec\varphi}(E') \subset \mathfrak{D}_A$, donc ${}^t L_{\vec\varphi} \in \mathcal{L}(E'_c;\ \mathfrak{D}_A)$ donc $\vec\varphi \in \mathfrak{D}_A(E)$. Alors $\vec S = {}^t\Lambda \vec T \in \mathcal{K}'_c(F;\ \beta_0) \subset \mathfrak{D}'_c(F;\ \beta_0)$ est une distribution β_0-bornée à valeurs dans F; soit $\vec S_A$ l'élément de $(\mathfrak{D}_A)'_c(F;\ \beta_0)$ tel que $L_{\vec S_A}$ soit la restriction de $L_{\vec S} \in \mathcal{L}(\mathfrak{D};\ F)$ à $\mathfrak{D}_A$ ($\vec S_A$ est l'image de $\vec S$ par l'application canonique $\mathfrak{D}' \to (\mathfrak{D}_A)'$ transportée de l'injection $\mathfrak{D}_A \to \mathfrak{D}$). *Alors* $\vec\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} \vec T$ *est connu dès qu'on connaît* $\vec\varphi \in \mathfrak{D}_A(E)$, $\vec S_A \in (\mathfrak{D}_A)'_c(F;\ \beta_0)$, *sans qu'il soit nécessaire de connaître les espaces* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, *l'application* Λ *de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$, *la distribution* $\vec T$ *ni même la distribution* $\vec S$. On a, plus précisément :

$$\vec\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} \vec T = \vec\varphi *_{\iota;I} \vec S_A, \tag{II, 4; 11 bis}$$

le second membre étant appliqué à $\varphi \in \mathfrak{D}_A(E)$, $S_A \in (\mathfrak{D}_A)'_c(F;\ \beta_0)$, $I =$ identité (l'identité est bien une application sous-nucléaire de $\mathfrak{D}_A$ dans $\mathfrak{D}_A$, parce que $\mathfrak{D}_A$, comme sous-espace de $\mathfrak{D}$ nucléaire, est nucléaire; il a bien alors la propriété d'approximation requise dans l'énoncé de la proposition 10, voir page 58). Pour montrer notre assertion, il suffit d'appliquer (II, 4; 7) au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K} \arrow[dr, "\Lambda"] & \\
\mathfrak{D}_A \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "I"'] & & \mathcal{H} \\
 & \mathfrak{D}_A \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

où u est l'injection de $\mathfrak{D}_A$ dans $\mathcal{K}$, et $v = \Lambda \circ u$. Alors ${}^t v = {}^t u \circ {}^t\Lambda$, où ${}^t u$ est l'application canonique de $\mathcal{K}'$ dans $(\mathfrak{D}_A)'$.

En particulier, si nous prenons $A = R^n$, nous voyons que, si $\vec\varphi \in \mathfrak{D}(E)$, $\vec\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} \vec T$ est toujours égal à $\vec\varphi \cdot_{\iota;I} {}^t\Lambda \vec T$, $\vec\varphi \in \mathfrak{D}(E)$, ${}^t\Lambda\vec T \in \mathfrak{D}'(F;\ \beta_0)$, $\Lambda =$ identité de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}$.

B) De la même manière, soit $\mathcal{H}$ un espace de distributions normal sur R^n, de sorte que $\mathcal{H}'_c$ est aussi un espace de distributions normal. Soit $\vec T \in \mathfrak{D}(F;\ \beta_0)$ [1] $= (\mathfrak{D}'_c)'_c(F;\ \beta_0) \subset \mathcal{H}'_c(F;\ \beta_0)$. Supposons que $\vec T$ ait son support dans une partie fermée A de R^n. Comme $L_{\vec T}$ est dans $(\mathfrak{D}')'_c(F;\ \beta_0)$, il existe une partie disquée bornée B de F dont l'image réciproque $(L_{\vec T})^{-1}(B)$ est un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{D}'$. Le dual $(\mathfrak{D}_A)'$ de $\mathfrak{D}_A$ peut être identifié

[1] Voir note [1], page 54.

algébriquement au quotient $\mathcal{D}'/(\mathcal{D}_A)^0$ de $\mathcal{D}'$ par l'orthogonal $(\mathcal{D}_A)^0$ de $\mathcal{D}_A$ dans $\mathcal{D}'$.

Comme ${}^t L_{\vec{T}}(F') \subset \mathcal{D}_A$, ${}^t L_{\vec{T}} \in \mathcal{L}(F'_c;\ \mathcal{D}_A)$, donc $L_{\vec{T}} \in \mathcal{L}((\mathcal{D}_A)'_c;\ F)$, donc $L_{\vec{T}}$ est continue de $\sigma((\mathcal{D}_A)', \mathcal{D}_A)$ ou $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D}_A)$ dans $\sigma(F, F')$ [1]; alors $\mathcal{V}$ est disqué dans $\sigma((\mathcal{D}_A)',\ \mathcal{D}_A)$, et absorbant puisque voisinage de 0 dans $\mathcal{D}'$, donc il est voisinage de 0 dans $(\mathcal{D}_A)'$ fort $= (\mathcal{D}_A)'_c$ [2]; donc $\vec{T}$ appartient à $((\mathcal{D}_A)'_c)'_c\,(F,\ \beta_0)$.

D'autre part, $\vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi}$ appartient à $\mathcal{H}(E) \subset \mathcal{D}'(E)$; soit $\vec{\psi}_A$ l'image de $\vec{\psi}$ par l'application canonique $\mathcal{D}' \to (\mathcal{D}_A)'_c$, de sorte que $L_{\vec{\psi}_A}$ est la restriction de $L_{\vec{\psi}} \in \mathcal{L}(\mathcal{D};\ E)$ à $\mathcal{D}_A$. *Alors* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ *est connu dès que l'on connaît* $\vec{\psi}_A \in (\mathcal{D}_A)'_c(E)$ *et* $\vec{T} \in \mathcal{D}(F)$, *sans qu'il soit nécessaire de connaître* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, Λ, $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$. Plus précisément, on a :

$$\text{(II, 4; 11}^{ter}\text{)} \qquad \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T} = \vec{\psi}_A \cdot_{\iota;I} \vec{T},$$

le deuxième membre étant relatif à

$$\vec{\psi}_A \in (\mathcal{D}_A)'_c(E), \qquad \vec{T} \in ((\mathcal{D}_A)'_c)'_c(F;\ \beta_0),$$

I identité (I est sous-nucléaire, si $(\mathcal{D}_A)'_c$ est nucléaire; or la topologie de $(\mathcal{D}_A)'$ est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}_A$, donc sur les parties bornées des $\mathcal{D}_K$, K compactes $\subset A$; donc cette topologie est la limite projective de celle des $(\mathcal{D}_K)'$; comme les $\mathcal{D}_K$ sont des espaces de Fréchet nucléaires, les $(\mathcal{D}_K)'$ sont nucléaires, donc $(\mathcal{D}_A)'_c$ est bien nucléaire [3]).

On utilisera, pour le voir, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{D}_A)'_c \arrow[dr, "I"] & \\
\mathcal{K} \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & (\mathcal{D}_A)'_c \\
 & \mathcal{H} \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

où v est l'application factorisée $\mathcal{H} \to \mathcal{D}' \to (\mathcal{D}_A)'_c$, et $u = v \circ \Lambda$; alors ${}^t v$ est l'injection de $\mathcal{D}_A$ dans $\mathcal{H}'_c$.

(1) BOURBAKI [2], chapitre IV, § 4, n° 2, proposition 6, implication $a \to b$.

(2) $\mathcal{V}$ étant faiblement disqué, est le polaire D^0 d'une partie de $\mathcal{D}_B$; $\mathcal{V}$ étant absorbant, D est faiblement borné, donc borné (BOURBAKI [2], corollaire du théorème de MACKEY, chapitre IV, § 2, n° 4), et par suite $\mathcal{V} = D^0$ est un voisinage fort de 0.

(3) Voir note (3), page 45; voir ensuite GROTHENDIECK [5], corollaire 2 du théorème 9, page 48, et SCHWARTZ [2], exposé 17, corollaire 1, page 3.

C) Plaçons-nous dans un autre cas. Supposons que $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, soient des espaces de distributions normaux sur le même espace R^n (les deux couples $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{H}_1$, et $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{H}_2$, vérifiant toujours la propriété d'approximation requise pour l'application de la proposition 10).

Supposons qu'on ait des inclusion $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{H}_2$, $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, les injections correspondantes étant continues, et les injections $\Lambda_1 : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{H}_1$ et $\Lambda_2 : \mathcal{K}_2 \to \mathcal{H}_2$ étant sous-nucléaires.

Alors pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}_1(E)$ et $\vec{T} \in (\mathcal{H}_2)'_c$ (F; β_0), les deux éléments $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_1} \vec{T}$ et $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_2} \vec{T}$, où le premier est défini à partir de $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}_1(E)$ et $\vec{T} \in (\mathcal{H}_1)'_c$ (F; β_0), et le deuxième à partir de $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}_2(E)$ et $\vec{T} \in (\mathcal{H}_2)'_c$ (F; β_0), coïncident.

Si maintenant $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{H}_3$, sont trois couples d'espaces ayant les propriétés de la proposition 10, et si l'on a des inclusions $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_3 \subset \mathcal{H}_3$, $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_3$, $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_3 \subset \mathcal{H}_3$, $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_3$, les injections correspondantes étant sous-nucléaires, alors, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}_1(E) \cap \mathcal{K}_2(E)$, et $\vec{T} \in (\mathcal{H}_1)'_c(F;\ \beta_0) \cap (\mathcal{H}_2)'_c(F;\ \beta_0)$, les éléments $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ définis à partir des injections $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{H}_1$ et $\mathcal{K}_2 \to \mathcal{H}_2$ coïncident, puisqu'ils coïncident tous deux avec $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ défini à partir de l'injection $\mathcal{K}_3 \to \mathcal{H}_3$.

D) Si on a seulement les inclusions $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{H}_2$, et si les injections correspondantes Λ_1 et Λ_2 sont sous-nucléaires, si d'autre part la dérivation partielle D^p, ou la multiplication par $\alpha \in \mathcal{E}$, ou la convolution avec $S \in \mathcal{E}'$, opèrent continuement de $\mathcal{K}_1$ dans $\mathcal{K}_2$ et de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$, donc de $(\mathcal{K}_2)'_c$ dans $(\mathcal{K}_1)'_c$ et de $(\mathcal{H}_2)'_c$ dans $(\mathcal{H}_1)'_c$, on a, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}_1(E)$ et $\vec{T} \in (\mathcal{H}_2)'_c(F;\ \beta_0)$:

$$(\text{II, 4; 12}) \qquad \begin{cases} D^p\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T} = (-1)^{|p|}\vec{\varphi} \cdot_\iota D^p\vec{T} \\ \alpha\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T} = \vec{\varphi} \cdot_\iota \alpha\vec{T} \\ (S * \vec{\varphi}) \cdot_\iota \vec{T} = \vec{\varphi} \check{\cdot}_\iota (S * \vec{T}) \end{cases}$$

Cas où l'application est Λ nucléaire.

Lorsque Λ est non seulement sous-nucléaire mais nucléaire, il n'est pas nécessaire de supposer $\vec{T}$ bornée :

Proposition 11. — *Soient $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, deux espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets; on supposera ou bien que $\mathcal{K}$ a un système fondamental de voisinages* *disqués* $\mathcal{U}$ *de* 0 *tels que* $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0}$ *ait la propriété d'approximation, ou bien que* $\mathcal{H}$ *a un système fondamental de parties convexes équilibrées compactes* H *telles que* $\mathcal{H}_H$ *ait la propriété d'approximation. Soit* Λ *un opérateur nucléaire de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$. *Soient* E, F, *des espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On peut définir* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T} \in E \hat{\otimes}_\iota F$ *pour* $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F)$ (*et plus généralement pour* $L_{\vec{T}}$ *application de* $\mathcal{H}$ *dans* F *transformant toute partie convexe équilibrée compacte de* $\mathcal{H}$ *en une partie bornée de* F). *On à la formule* (II, 4; 1). *L'application bilinéaire ainsi définie coïncide avec celle de la proposition* 10 *si cette dernière a un sens; elle est compatible avec les applications linéaires continues de* E *et de* F, *et avec les applications linéaires continues de* $\mathcal{K}$ *et de* $\mathcal{H}$. *Si* $\vec{\varphi}$ *reste dans une partie bornée de* $\mathcal{K}(E)$, *et si* $\vec{T}$ *reste dans une partie de* $\mathcal{H}'_c(F)$ *telle que, pour toute partie convexe équilibrée compacte* H *de* $\mathcal{H}$, $L_{\vec{T}}(H)$ *reste dans une partie bornée complétante de* F, *alors* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ *reste dans une partie bornée de* $E \hat{\otimes}_\iota F$.

Remarquons d'abord que $\mathcal{H}$ vérifie sûrement la propriété d'approximation requise si $\mathcal{H}'_c$ est nucléaire, puisqu'alors les parties telles que H sont des parties $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{U}$ voisinages disqués de 0 dans $\mathcal{H}'_c$ (voir note (¹) page 58).

Puisque Λ est nucléaire, il existe une partie convexe équilibrée compacte H_0 de $\mathcal{H}$ tel que Λ se factorise en $\mathcal{K} \xrightarrow{\Lambda_{H_0}} \mathcal{H}_{H_0} \to \mathcal{H}$, Λ_{H_0} nucléaire [1].

Si les hypothèses d'approximation sont relatives à $\mathcal{H}$, il existe une partie convexe équilibrée compacte H contenant H_0, telle que $\mathcal{H}_H$ ait la propriété d'approximation; et Λ_H : $\mathcal{K} \to \mathcal{H}_H$ est a fortiori nucléaire. Si les hypothèses d'approximation sont relatives à $\mathcal{K}$, nous prendrons $H = H_0$. Mais si $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F)$, la restriction de $L_{\vec{T}}$ à $\mathcal{H}_H$ définit un élément $\vec{T}_H$ de $(\mathcal{H}_H)'_c(F)$ (image de $\vec{T}$ par l'application $\mathcal{H}'_c \to (\mathcal{H}_H)'_c$, transposée de l'injection $\mathcal{H}_H \to \mathcal{H}$). Mais $\mathcal{H}_H$ est complet, donc toute application continue de $((\mathcal{H}_H)'_c)'_c = \mathcal{H}_H$ dans F est bornée, et l'image de la boule unité H, partie complétante de $\mathcal{H}_H$, est complétante dans F. Donc $\vec{T}_H \in (\mathcal{H}_H)'_c(F\,;\beta_0)$. La même conclusion subsiste si

[1] Grothendieck [4], définit 4, 3. page 80, et page 82; Schwartz [2], exposé 12, proposition 3, page 4.

on part simplement d'une application linéaire $L_{\vec{T}}$ de $\mathcal{H}$ dans E transformant toute partie convexe équilibrée compacte H de $\mathcal{H}$ en une partie bornée de F (nécessairement complétante puisque H est complétante). Alors à partir de $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T}_H \in (\mathcal{H}_H)'_c(F\,;\beta_0)$, $\Lambda_H : \mathcal{K} \to \mathcal{H}_H$ nucléaire, et compte tenu des propriétés d'approximation supposées vérifiées par $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{H}_H$, on peut d'après la proposition 10, définir un élément $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_H} \vec{T}_H$ de $E \hat{\otimes}_\iota F$.

Montrons que cet élément est indépendant du choix de H. Soient H_1 et H_2 deux tels choix. Soit H_0 l'enveloppe de $H_1 \cup H_2$; elle est équilibrée compacte [1], et $\mathcal{K} \to \mathcal{H}_{H_0}$ est nucléaire, puisqu'elle se factorise en $\mathcal{K} \to \mathcal{H}_{H_1} \to \mathcal{H}_{H_0}$. Choisissons H à partir de H_0 comme ci-dessus. Alors H_1, H_2, H, sont 3 choix possibles. Mais la compatibilité avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ (formule (II; 4; 7), relative au diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{K} \arrow[dr, "\Lambda_H"] & \\ \mathcal{K} \arrow[ur] \arrow[dr, "\Lambda_{H_1}"'] & & \mathcal{H}_H \\ & \mathcal{H}_{H_1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et à la proposition 10) montre que le choix H et le choix H_1 donnent le même élément de $E \hat{\otimes}_\iota F$: $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_H} \vec{T}_H = \vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_{H_1}} \vec{T}_{H_1}$. Mais alors H et H_2 donnent aussi le même élément, donc H_1 et H_2 donnent le même élément, que l'on peut donc noter $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T} \in E \hat{\otimes}_\iota F$.

Supposons que $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, Λ, $\vec{T}$, vérifient à la fois les conditions d'application des propositions 10 et 11. Alors les éléments $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ définies par ces deux propositions coïncident. Soit en effet H une partie convexe équilibrée compacte de $\mathcal{H}$ utilisée pour la définition de $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ d'après la proposition 11 : le $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ de la proposition 11 est le $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_H} \vec{T}_H$ de la proposition 10. Mais la compatibilité avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ (formule (II; 4: 7) relativement au diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{K} \arrow[dr, "\Lambda"] & \\ \mathcal{K} \arrow[ur] \arrow[dr, "\Lambda_H"'] & & \mathcal{H} \\ & \mathcal{H}_H \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et à la proposition 10) montre que le $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_H} {}_H\vec{T}$ de la proposition

[1] Bourbaki [1], chapitre II, § 4, n° 1, proposition 1.

10 est égal à $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ de cette même proposition 10, ce qui prouve notre assertion. Nous laissons au lecteur le soin de montrer la compatibilité avec les applications linéaires continues de E et de F, ou de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{H}$.

Si $\vec{T}$ reste dans une partie de $\mathcal{H}'_c(F)$ telle que, pour toute partie convexe équilibrée compacte H de $\mathcal{H}$, $L_{\vec{T}}(H)$ reste dans une partie bornée complétante de F, alors $\vec{T}_H$, définie précédemment, reste dans une partie β_0-équibornée de $(\mathcal{H}_H)'_c$ (F). Si alors $\vec{\varphi}$ reste dans une partie bornée de $\mathcal{K}(E)$, la proposition 10 nous montre que $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda_H} \vec{T}_H$ reste dans une partie bornée de $E \hat{\otimes}_\iota F$, donc il en est de même de $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$.

La plupart des propriétés que nous démontrerons dans la suite pour le $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ défini à la proposition 10 sont valables pour le $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ défini à la proposition 11. Pour ne pas rendre fastidieux un ouvrage qui ne l'est déjà que trop, nous nous contenterons en général d'énoncer et de démontrer les propriétés relatives à la proposition 10, qui semblent d'un intérêt plus général.

Continuité séparée en $\vec{T}$ pour $\vec{\varphi}$ fixée.

Il ne semble pas que l'application bilinéaire $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \rightarrow \vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ soit séparément continue. Mais on peut énoncer ce qui suit :

Proposition 12. — *Soient* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, E, F, *des espaces vérifiant les conditions énoncées dans la proposition* 10, Λ *une application sous-nucléaire de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$. *Soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble saturé de parties bornées de* E, *et soit* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T}$ *l'image de* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$, *pour* $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F;\ \beta_0)$. *Lorsque* $\vec{\varphi}$ *parcourt une partie du type* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathcal{K}(E)$, *et que* $\vec{T}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{H}'_c(F;\ \beta_0)$, *en restant dans une partie* β_0*-équibornée,* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T}$ *converge uniformément vers* 0. *Si* Λ *est non seulement sous-nucléaire mais nucléaire, il est inutile de contraindre* $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F;\beta_0)$ *à rester dans une partie* β_0*-équibornée.*

Il existe en effet un même voisinage $\mathfrak{V}$ disqué de 0 dans $\mathcal{H}$, tel que $L_{\vec{T},\mathfrak{V}}$ parcoure une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}};\ F)$. Mais puisque $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}'_c(F)$, $L_{\vec{T},\mathfrak{V}}$ converge vers 0 simplement sur un sous-espace dense de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$, donc uniformément sur toute partie compacte de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$([1]). Choisissons alors $\mathfrak{U}$ tel que $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ soit nucléaire; l'image de $L_{\vec{\varphi}}(\mathfrak{U}^0)$ reste contenue dans une partie fixe $A \in \mathfrak{S}$, pour toutes les $\vec{\varphi}$ considérées qui forment une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{K}(E)$. Supposons en outre $\mathfrak{U}$ ou $\mathfrak{V}$ choisi de façon à vérifier la propriété d'approximation requise dans l'énoncé de la proposition 10. Il existe un compact de H de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ tel que ζ soit contenu dans l'enveloppe de $\mathfrak{U}^0 \otimes H$ dans $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$([2]); $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ est donc contenu dans l'enveloppe de $A \otimes L_{\vec{T}, \mathfrak{V}}(H)$ dans $E \hat{\otimes}_\iota F$, et par suite $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ est contenu dans l'enveloppe de $A \otimes L_{\vec{T}, \mathfrak{V}}(H)$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$, donc converge vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$, puisque $A \in \mathfrak{S}$ et que $L_{\vec{T}, \mathfrak{V}}(H)$ converge vers 0 dans F.

Supposons maintenant Λ *nucléaire* (en nous plaçant toujours dans les conditions de la proposition 10). $\mathfrak{V}$ étant choisi comme plus haut, on choisira une partie convexe équilibrée compacte H_1 de $\mathcal{H}$ et un voisinage disqué $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathcal{K}$ tels que $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \mathcal{H}_{H_1}$ soit nucléaire ([3]). Alors, si ζ_1 est un élément de $\mathcal{K}'_{\mathfrak{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \mathcal{H}_{H_1}$ qui définit cette application, l'unique élément ζ qui définit l'application $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ est image de ζ_1 par l'application $\mathcal{H}_{H_1} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$. En modifiant au besoin H_1 par homothétie, on peut toujours supposer que ζ_1 est contenu dans l'enveloppe de $\mathfrak{U}^0 \otimes H_1$; alors on peut prendre pour H (voir ci-dessus) l'image de H_1 dans $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$. Alors $L_{\vec{T}, \mathfrak{V}}(H) = L_{\vec{T}}(H_1)$ convergera vers 0 dans F, quand $\vec{T}$ convergera vers 0 dans $\mathcal{H}'_c(F)$, sans rester nécessairement dans une partie équibornée.

REMARQUE. — *Si $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ vérifient les conditions de la proposition* 11, *et si Λ est nucléaire, alors $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}; \Lambda} \vec{T}$ est défini pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F)$; alors si $\vec{\varphi}$ parcourt une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{K}(E)$ et que $\vec{T}$ converge vers* 0 *dans $\mathcal{H}'_c(F)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ (défini par la proposition* 11) *converge vers* 0.

(1) BOURBAKI [2], chapitre III, § 3, n° 5, proposition 5.

(2) GROTHENDIECK [4], corollaire 1 du théorème 1, page 52, ou SCHWARTZ [2], exposé 6, corollaire D, page 4.

(3) GROTHENDIECK [4], définition 4, 3. page 80, et page 82 ; SCHWARTZ [2], exposé 12, proposition 3, page 4.

La démonstration se fait comme ci-dessus. On choisit $\mathcal{U}$, voisinage disqué de 0 dans $\mathcal{K}$, et H partie convexe équilibrée compacte de $\mathcal{H}$, tels que $\Lambda_{\mathcal{U},H} : \hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{H}_H$ soit nucléaire, que $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0}$ ou $\mathcal{H}_H$ ait la propriété d'approximation, et que l'élément ζ de $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \mathcal{H}_H$ qui définit $\Lambda_{\mathcal{U},H}$ soit dans l'enveloppe de $\mathcal{U}^0 \otimes H$. Alors $L_{\vec{\varphi}}(\mathcal{U}^0)$ reste dans une partie $A \in \mathfrak{S}$, $L_{\vec{T}}(H)$ converge vers 0, donc $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T} = (L_{\vec{\varphi},\mathcal{U}^0} \otimes L_{\vec{T},H})(\zeta)$, qui est dans l'enveloppe de $A \otimes L_{\vec{T}}(H)$, converge vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$.

Revenons au cas de la proposition 10. Si $\vec{T}$ est fixé dans $\mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, et que $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(E)$ ou $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}})$, on ne peut pas affirmer que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ converge vers 0; donc $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ ne semble pas séparément continue. Toutefois bien évidemment, en vertu de (II, 4; 4), si $\vec{T}$ est fixé *dans* $\mathcal{H}' \otimes F$ et que $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ et même $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ converge vers 0.

On en déduit la caractérisation suivante :

PROPOSITION 13.

a) Supposons que $\mathcal{H}$ *ait un système fondamental de voisinages disqués* $\mathcal{V}$ *de* 0 *tels que* $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ *ait la propriété d'approximation métrique, et soit* $\Lambda : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ *une application sous-nucléaire. Alors* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T}$, *où* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble saturé de parties bornées de* E, *est la seule application bilinéaire de* $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}}) \times \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$, *qui vérifie* (II, 4; 4) *et soit continue en* $\vec{T}$ *sur les parties* β_0*-équibornées pour* $\vec{\varphi}$ *fixée.*

b) Si en outre $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation, cette application bilinéaire est la seule qui vérifie* (II, 4; 1), *et soit continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée dans* $\mathcal{H}' \otimes F$, *et continue en* $\vec{T}$ *sur toute partie* β_0*-équibornée pour* $\vec{\varphi}$ *fixée dans* $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}})$.

Rappelons que tout espace de Hilbert a la propriété d'approximation métrique; donc, si $\mathcal{H}$ est nucléaire, il a la propriété ci-dessus [1]. Remarquons d'autre part que l'hypothèse faite sur $\mathcal{H}$ entraîne les conditions requises pour appliquer la proposition 10, donc il existe bien une application bilinéaire ayant les propriétés énoncées. Il n'en existe qu'une, car dans *a*), elle est connue sur $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}}) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$; dans *b*), elle est connue sur $(\mathcal{K} \otimes E) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$, donc aussi sur $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}}) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$, à cause de la continuité séparée en $\vec{\varphi}$ pour

[1] GROTHENDIECK [4], corollaire 2, page 181; et [5], lemme 3, page 37.

$\vec{T}$ fixée dans $\mathcal{H}' \otimes F$ et du fait que, $\mathcal{K}$ ayant la propriété d'approximation, $\mathcal{K} \otimes E$ est dense dans $\mathcal{K}(E_{\circledS})$ (chapitre I, proposition 11). Alors elle sera connue sur $\mathcal{K}(E_{\circledS}) \times \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, (ce qui démontrera la proposition), en vertu de la continuité en $\vec{T}$ sur les parties β_0-équibornées pour $\vec{\varphi}$ fixée dans $\mathcal{K}(E_{\circledS})$, si nous montrons la propriété d'approximation suivante, que nous énoncerons en lemme :

Lemme. — *Si $\mathcal{H}$ a un système fondamental de voisinages disqués $\mathcal{V}$ de 0 tels que $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ ait la propriété d'approximation métrique (en particulier si $\mathcal{H}$ est nucléaire), et si $\mathcal{G}$ est un ensemble (non nécessairement saturé) de parties bornées de* F, *tout élément $\vec{T}$ $\mathcal{G}$-borné de $\mathcal{H}'_c(F)$ est adhérent dans $\mathcal{H}'_c(F)$ à une partie $\mathcal{G}$-équibornée, contenue dans $\mathcal{H}' \otimes F$.*

Démontrons donc ce lemme.

Remarquons d'abord que, si $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ a la propriété d'approximation métrique, il en est de même de $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ ([1]). Alors, si $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathcal{G})$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ disqué de 0 dans $\mathcal{H}$ et une partie disquée bornée $B \in \mathcal{G}$ tels que $L_{\vec{T}, \mathcal{V}, B}$ soit continue de $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ dans F_B. On peut choisir $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ ait la propriété d'approximation métrique. Alors $L_{\vec{T}, \mathcal{V}, B}$ est adhérente, dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}_{\mathcal{V}}; F_B)$, à une partie équicontinue contenue dans $(\mathcal{H}_{\mathcal{V}})' \otimes F_B$. Cette partie définit une partie $\mathcal{G}$-équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, contenue dans $\mathcal{H}' \otimes F$, et $\vec{T}$ lui est adhérente dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F) \subset \mathcal{H}'_c(F)$.

Continuité séparée par rapport à $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée.

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble *saturé* de parties bornées *complétantes* de F. Supposons que $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(E)$, et que $\vec{T}$ par-

([1]) D'après l'hypothèse faite sur $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, il existe une constante $N > 0$ telle que I soit adhérente, dans $\mathcal{L}_c(\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$, à l'intersection de $(\mathcal{H}_{\mathcal{V}})' \otimes \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ avec la boule de rayon N de $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$. Soit $0 < \varepsilon \leqslant 1$, et soit K un compact de $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$. Il existe $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{V}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$, $\|u\| \leqslant N$, $u = \sum_{\nu=1}^{l} h'_\nu \otimes h''_\nu$, $h'_\nu \in (\mathcal{H}_{\mathcal{V}})'$, $h''_\nu \in \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, telle que $\|(I - u)\, K\| \leqslant \varepsilon$. Posons $h = \sup_{\substack{\nu = 1, 2, \dots l \\ k \in K}} (|\langle h'_\nu, k\rangle|; \|h'_\nu\|)$. Il existe des $h_\nu \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ tels que $\|h''_\nu - h_\nu\| \leqslant \frac{\varepsilon}{lh}$. Posons $v = \sum_{\nu=1}^{l} h'_\nu \otimes h_\nu$; on a $v \in (\mathcal{H}_{\mathcal{V}})' \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{V}}$, $\|v\| \leqslant N + \varepsilon \leqslant N + 1$, $\|(I - v)\, K\| \leqslant 2\varepsilon$. Donc I est bien adhérente, dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}_{\mathcal{V}}; \mathcal{H}_{\mathcal{V}})$, à l'intersection de $(\mathcal{H}_{\mathcal{V}})' \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ et de la boule de rayon N + 1 de $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}_{\mathcal{V}}; \mathcal{H}_{\mathcal{V}})$.

coure une partie $\mathfrak{T}$-équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$. Nous allons montrer que, si les conditions d'application de la proposition 10 sont satisfaites, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T}$ converge uniformément vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. Il existe en effet un même voisinage disqué $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{H}$ tel que $L_{\vec{T}}(\mathcal{V})$ soit contenu dans une partie disquée $B \in \mathfrak{T}$, pour toutes les $\vec{T}$ considérées. Choisissons $\mathcal{U}$ tel que $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$: $\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ soit nucléaire; $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{V}$ est en outre choisi de façon que $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0}$ ou $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ ait la propriété d'approximation, et que l'élément ζ de $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ qui définit $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ soit dans l'enveloppe de $\mathcal{U}^0 \otimes \overline{\mathcal{V}}^\bullet$, $\overline{\mathcal{V}}^\bullet$ étant la boule unité de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ (ce qu'on peut toujours réaliser en transformant au besoin $\mathcal{U}$ par homothétie). Alors l'image $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T}$ de $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T} = (L_{\vec{\varphi},\mathcal{U}^0} \otimes L_{\vec{T},\mathcal{V}})$ (ζ) dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$ est dans l'enveloppe de $L_{\vec{\varphi}}(\mathcal{U}^0) \otimes B$; comme $B \in \mathfrak{T}$ et que $L_{\vec{\varphi}}(\mathcal{U}^0)$ converge vers 0 dans E, cet élément converge bien vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. Ainsi :

PROPOSITION 14. — *Soient* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, E, F, *des espaces vérifiant les conditions énoncées dans la proposition* 10, Λ *une application sous-nucléaire de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$. *Soit* $\mathfrak{T}$ *un ensemble saturé de parties bornées complétantes de* F, *et soit* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T}$ *l'image de* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, *pour* $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$. *Lorsque* $\vec{T}$ *parcourt une partie* $\mathfrak{T}$*-équibornée de* $\mathcal{H}'_c(F)$, *et que* $\vec{\varphi}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{K}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T}$ *converge uniformément vers* 0.

REMARQUE. — *Si* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, *vérifient les conditions énoncées dans la proposition* 11, *et que* Λ *soit nucléaire, alors si* $\vec{T}$ *parcourt une partie du type* $\mathfrak{T}$ *de* $\mathcal{H}'_c(F)$, $\mathfrak{T}$ *étant un ensemble saturé quelconque de parties bornées de* F, *et que* $\vec{\varphi}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{K}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T}$ *converge uniformément vers* 0.

Si en effet $\vec{T}$ parcourt une partie du type $\mathfrak{T}$, l'image par $L_{\vec{T}}$ de toute partie équicontinue de $(\mathcal{H}'_c)'$, c'est-à-dire de toute partie convexe équilibrée compacte H de $\mathcal{H}$, reste dans une partie bornée de F. On peut alors employer la même démonstration que ci-dessus, en remplaçant partout $\mathcal{V}$ par H, $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ par $\mathcal{H}_H$. Si maintenant $\vec{\varphi}$ est fixée dans $\mathcal{K}(E)$, et que $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$, même en restant dans une partie $\mathfrak{T}$-équibornée, il n'est pas certain que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T}$ converge vers 0; l'application bilinéaire $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ ne semble pas séparément continue. Mais bien entendu si $\vec{\varphi}$ est fixée *dans* $\mathcal{K} \otimes E$, et si $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}'_c(F)$, même sans rester dans une partie $\mathfrak{G}$-équibornée, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} T$ et même $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ converge vers 0, en vertu de (II, 4; 6). Alors :

PROPOSITION 15. — *Supposons vérifiées les conditions requises pour l'application de la proposition* 10.

a) *Si* $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation*, $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$, *où* $\mathfrak{G}$ *est un ensemble saturé de parties bornées complétantes de* F, *est la seule application bilinéaire de* $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{G}} F$, *qui vérifie* (II, 4; 6) *et soit continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée.*

b) *Si en outre* $\mathcal{H}'_c$ *a la propriété d'approximation, c'est la seule application bilinéaire qui vérifie* (II, 4 : 1), *et soit continue en* $\vec{T}$ *pour* $\vec{\varphi}$ *fixée dans* $\mathcal{K} \otimes E$, *et continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée dans* $\mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$.

Dans *a*), l'application est connue sur $(\mathcal{K} \otimes E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$; dans *b*) elle est connue sur $(\mathcal{K} \otimes E) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$, donc sur $(\mathcal{K} \otimes E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$, à cause de la continuité en $\vec{T}$ pour $\vec{\varphi}$ fixée dans $\mathcal{K} \otimes E$, et du fait que $\mathcal{H}'_c$ a la propriété d'approximation (chapitre I, proposition 11). Ensuite elle est connue sur $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$ à cause de la continuité en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée et du fait que $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation.

Calcul de $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} T$ lorsque Λ est seulement sous-intégrale.

PROPOSITION 16. — *Soient* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, E *des espaces localement convexes séparés non nécessairement quasi-complets*, Λ *une application sous-intégrale de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$. *L'application canonique* $\Lambda \otimes I : \mathcal{K} \otimes E \to \mathcal{H} \otimes E$ *est continue de* $\mathcal{K} \otimes_\varepsilon E$ *dans* $\mathcal{H} \otimes_\pi E$.

Soit $\mathcal{B}(\mathcal{K}, E)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{K} \times E$; nous le munirons de la topologie $\mathcal{B}_\sigma(\mathcal{K}, E)$ de la convergence simple sur $\mathcal{K} \times E$, topologie qui n'est autre que $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{K}, E), \mathcal{K} \otimes E)$. Un système fondamental de voisinages de 0 de $\mathcal{K} \otimes_\varepsilon E$ est constitué par les polaires $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^0$ des produits tensoriels de parties équicontinues $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{E}^0$, de $\mathcal{K}'$, E'. Mais $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^0$ est aussi le polaire $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^{000}$ de $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^{00}$, enveloppe de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0$ dans $\mathcal{B}_\sigma(\mathcal{K}, \mathrm{E})$ [1]; une partie contenue dans une partie telle que $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^{00}$ est appelée un ensemble équi-intégral de formes bilinéaires sur $\mathcal{K} \times \mathrm{E}$, et la topologie de $\mathcal{K} \otimes_\varepsilon \mathrm{E}$ est donc celle de la convergence uniforme sur les parties équi-intégrales de $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathrm{E})$.

Par ailleurs un système fondamental de voisinages de 0 de $\mathcal{H} \otimes_\pi \mathrm{E}$ est constitué par les polaires des parties équicontinues de $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathrm{E})$. *Tout revient donc à montrer que, si* $\mathfrak{M}$ *est une partie équicontinue de* $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathrm{E})$, *son image réciproque par* $\Lambda \otimes \mathrm{I}$ *est une partie équi-intégrale de* $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathrm{E})$. Comme $\mathfrak{M}$ est équicontinue, il existe des voisinages disqués $\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}$ de 0 dans $\mathcal{H}$ et E tels que toute forme β appartenant à $\mathfrak{M}$ soit majorée par 1 sur $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$; alors chacune de ces formes β définit une forme bilinéaire continue $\beta_{\mathcal{V}}$ sur $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} \times \mathrm{E}$, majorée par 1 sur $\overline{\mathcal{V}^\bullet} \times \mathcal{E}$, $\overline{\mathcal{V}^\bullet}$ étant la boule unité de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$, adhérence de l'image $\mathcal{V}^\bullet$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$; l'ensemble $\mathfrak{M}_{\mathcal{V}}$ des $\beta_{\mathcal{V}}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{B}\,(\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}; \mathrm{E})$.

Comme Λ est sous-intégrale, il existe un voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{K}$ tel que $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ soit intégrale, c'est-à-dire limite dans $\mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}\big)$, muni de la topologie $\mathcal{L}_\sigma\big(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}\big) = \sigma\big(\mathcal{L}(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}), \hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{V}^0}\big)$ de la convergence simple faible, d'un produit tensoriel d'une partie équicontinue de $\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^0}$ par une partie bornée de $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$[2]; en changeant au besoin $\mathcal{U}$ par homothétie, on pourra supposer que $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est dans l'enveloppe de $\mathcal{U}^0 \otimes \overline{\mathcal{V}^\bullet}$, ou encore de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{V}^\bullet$.

Soit $\beta \in \mathfrak{M}$. Son image réciproque $\Lambda^*\beta$ par $\Lambda \otimes \mathrm{I}$ est la forme bilinéaire $(k, e) \to \beta(\Lambda k, e) = \beta_{\mathcal{V}}((\Lambda k)^\bullet, e)$ (où $(\Lambda k)^\bullet$ est l'image de $\Lambda k \in \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$) $= \beta_{\mathcal{V}}(\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(k^\bullet), e)$ (où $k^\bullet$ est l'image de $k \in \mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$). Nous allons montrer que $\Lambda^*\beta$ est dans la partie équi-intégrale $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^{00}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathrm{E})$, pour $\beta \in \mathfrak{M}$, et cela prouvera notre proposition.

Ce serait trivial si Λ était de la forme $u' \otimes v$, $u' \in \mathcal{U}^0$, $v \in \mathcal{V}$; car alors on aurait $\Lambda^*\beta(k, e) = \langle u', k\rangle\, \beta(v, e) = \langle u', k\rangle \langle \vec{\beta}(v), e\rangle$ (notations de la page 19), donc $\Lambda^*\beta = u' \otimes \vec{\beta}(v)$; or $u' \in \mathcal{U}^0$, et $\vec{\beta}(v) \in \mathcal{E}^0$ puisque β est majorée par 1 sur $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$. Si maintenant Λ est de la forme $\sum\limits_\nu \lambda_\nu u'_\nu \otimes v_\nu$, avec $u'_\nu \in \mathcal{U}^0$, $v \in \mathcal{V}$, $\sum\limits_\nu |\lambda_\nu| \leqslant 1$,

(1) BOURBAKI [2], chapitre IV, § 1, n° 3, proposition 3.
(2) GROTHENDIECK [4], définition 7, 2, pages 126, 127.

auquel cas $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \sum\limits_{\nu} \lambda_\nu u'_\nu \otimes v^\bullet_\nu$ est dans l'enveloppe convexe équilibrée de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{V}^\bullet$, c'est encore évident, car alors $\Lambda^*\beta = \sum\limits_{\nu} \lambda_\nu u'_\nu \otimes \bar{\beta}(v_\nu)$ est dans l'enveloppe convexe équilibrée de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0$. Soit maintenant Λ quelconque, telle que $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ soit dans l'enveloppe de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{V}^\bullet$. Il existe alors un filtre de $(\Lambda_j)_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$, appartenant à l'enveloppe convexe équilibrée de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{V}^\bullet$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$, et qui converge vers $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$; $(\Lambda_j)_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est nécessairement de la forme $\sum\limits_{\nu} \lambda_{\nu,j} u'_{\nu,j} \otimes v^\bullet_{\nu,j}$, $\sum\limits_{\nu} |\lambda_\nu| \leqslant 1$, $u'_{\nu,j} \in \mathcal{U}^0$, $v_{\nu,j} \in \mathcal{V}$, donc on peut supposer que chaque $(\Lambda_j)_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ provient d'une application continue $\Lambda_j = \sum\limits_{\nu,j} \lambda_{\nu,j} u'_{\nu,j} \otimes v_{\nu,j}$ du type ci-dessus. On a vu que $\Lambda_j^*\beta$ est dans l'enveloppe convexe équilibrée de $\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0$; si donc nous démontrons que $\Lambda_j^*\beta$ converge vers $\Lambda^*\beta$ dans $\mathcal{B}_\sigma(\mathcal{K}, \mathrm{E})$, nous aurons bien démontré que $\Lambda^*\beta \in (\mathcal{U}_0 \otimes \mathcal{E}^0)^{00}$ pour $\beta \in \mathcal{M}$, et la démonstration sera terminée. D'après la définition même de la topologie $\mathcal{B}_\sigma(\mathcal{K}, \mathrm{E})$, nous devons montrer que, pour tout $k \in \mathcal{K}$, et tout $e \in \mathrm{E}$, $\lim\limits_{j} \Lambda_j^*\beta(k, e) = \Lambda^*\beta(k, e)$.

Or cela revient à écrire $\lim\limits_{j} \beta_{\mathcal{V}}((\Lambda_j)_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(k^\bullet), e) = \beta_{\mathcal{V}}(\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(k^\bullet), e)$, ou encore

$$\lim_j \left\langle (\Lambda_j)_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(k^\bullet), \quad {}^t\beta_{\mathcal{V}}(e) \right\rangle = \left\langle \Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(k^\bullet), \quad {}^t\beta_{\mathcal{V}}(e) \right\rangle,$$

ce qui résulte précisément de ce que $(\Lambda_j)_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ converge vers $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$, c.q.f.d.

Remarque. — La démonstration montre même que, si Λ varie de telle manière que $\Lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ reste définie et reste dans l'enveloppe de $\mathcal{U}^0 \otimes \overline{\mathcal{V}^\bullet}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{U}}; \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})$, alors $\Lambda^*\beta$ reste dans $(\mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{E}^0)^{00}$ pour $\beta \in \mathcal{M}$.

On en déduit que, *si* Λ *parcourt un ensemble équi-sous-intégral d'applications linéaires de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$ (ce qui signifie que, pour tout $\mathcal{V}$, on peut choisir le même $\mathcal{U}$ pour tous les Λ considérés), $\Lambda^*\beta$ parcourt une partie équi-intégrale quand β parcourt une partie équicontinue, donc Λ *parcourt une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes_\varepsilon \mathrm{E}; \mathcal{H} \otimes_\pi \mathrm{E})$.

Proposition 17. — *Soient* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, E, F, *des espaces localement convexes séparés* (*non nécessairement quasi-complets*); *suppo-*

sons que $\mathcal{K}$ ait la propriété d'approximation stricte. Soit Λ *une application sous-intégrale de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$. Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble saturé de parties bornées de* F. *Alors on peut définir une application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ *de* $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{G}} F$, *qui vérifie* (II, 4; 1), (II, 4; 4), (II, 4; 6). *Si* $\vec{T}$ *parcourt une partie $\mathfrak{G}$-équibornée de* $\mathcal{H}'_c(F)$, *et que* $\vec{\varphi}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{K}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ *converge vers* 0. *Cette application bilinéaire est compatible avec les applications linéaires continues de* E *et* F, *ou de* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{K}$ [1].

Cette application bilinéaire est la seule qui vérifie (II, 4; 6) *et soit séparément continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée; si en outre* $\mathcal{H}'_c$ *a la propriété d'approximation, c'est la seule qui vérifie* (II, 4; 1) *et soit continue en* $\vec{T}$ *pour* $\vec{\varphi}$ *fixée dans* $\mathcal{K} \otimes E$ *et continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée dans* $\mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$.

Si les conditions requises pour l'application de la proposition 10 (*ou de la proposition* 11) *et de la présente proposition sont simultanément vérifiées, les éléments* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ *définis par ces deux propositions coïncident.*

D'après la proposition 16, Λ applique continuement $\mathcal{K} \otimes_\varepsilon E$ dans $\mathcal{H} \otimes_\pi E$. Si $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$, il existe un voisinage disqué $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathcal{H}$ et une partie bornée disquée $B \in \mathfrak{G}$ tels que $L_{\vec{T}, \mathfrak{V}, B}$ soit continue de $\mathcal{H}_{\mathfrak{V}}$ dans F_B; alors $(L_{\vec{T}, \mathfrak{V}, B} \otimes I)$ applique continuement $\mathcal{H}_{\mathfrak{V}} \otimes_\pi E$ dans $F_B \otimes_\pi E$, donc a fortiori $\mathcal{H} \otimes_\pi E$ dans $F_B \otimes_\pi E$, que nous identifierons à $E \otimes_\pi F_B$. Mais l'application canonique de $E \otimes F_B$ dans $E \otimes F$ est continue de $E \otimes_\pi F_B$ dans $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$; si en effet $\mathfrak{W}$ est un voisinage disqué de 0 dans $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$, il existe un voisinage $\mathcal{E}$ de 0 dans E tel que $\mathcal{E} \otimes B \subset \mathfrak{W}$, puisque $B \in \mathfrak{G}$; alors l'enveloppe convexe équilibrée de $\mathcal{E} \otimes B$, qui est un voisinage de 0 de $E \otimes_\pi F_B$, est bien contenue dans $\mathfrak{W}$. Alors finalement l'application $L_{\vec{T}} \otimes I$: $\mathcal{H} \otimes E \to E \otimes F$ est continue de $\mathcal{H} \otimes_\pi E$ dans $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$, puisqu'elle se factorise en $\mathcal{H} \otimes_\pi E \to \mathcal{H}_{\mathfrak{V}} \otimes_\pi E \to E \otimes_\pi F_B \to E \otimes_{\mathfrak{G}} F$.

La composée $(L_{\vec{T}} \otimes I) \circ (\Lambda \otimes I) = ((L_{\vec{T}} \circ \Lambda) \otimes I)$ est donc continue de $\mathcal{K} \otimes_\varepsilon E$ dans $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$. Elle se prolonge en une

[1] Naturellement si $F_1 \to F_2$ est une telle application linéaire continue ν_1 et si $\mathfrak{G}_1$ (resp. $\mathfrak{G}_2$) est l'ensemble de parties bornées considéré dans F_1 (resp. F_2), on doit supposer que, pour toute $A_1 \in \mathfrak{G}_1$, $A_2 = \nu(A_1)$ appartient à $\mathfrak{G}_2$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette compatibilité.

application linéaire continue de $\mathcal{K} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E$ dans $E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$; comme $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation stricte, $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}\varepsilon E$ est contenu dans $\mathcal{K} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E$ (chapitre I, proposition 11), on a donc bien défini une application bilinéaire de $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$ dans $E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. On pourra noter $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ l'élément $((L_{\vec{T}} \circ \Lambda) \otimes I)(\vec{\varphi})$ ainsi obtenu. Si $\vec{T}$ parcourt une partie $\mathfrak{T}$-équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, on peut choisir $\mathfrak{V}$ et B fixes dans la démonstration précédente, donc les $((L_{\vec{T}} \circ \Lambda) \otimes I)$ parcourent une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes_{\varepsilon} E;\ E \otimes_{\mathfrak{T}} F)$, donc aussi de $\mathcal{L}(\mathcal{K}(E);\ E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F)$; si alors $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ convergera uniformément vers 0. D'après sa définition même, l'application bilinéaire vérifie (II, 4; 6), donc (II, 4; 1); elle est la seule à vérifiée (II, 4; 6) et à être séparément continue en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée, puisque $\mathcal{K} \otimes E$ est dense dans $\mathcal{K}(E)$. Cela prouve, d'après la proposition 15, qu'elle coïncide avec l'application définie par la proposition 10 si celle-ci existe. L'application vérifie aussi trivialement (II, 4; 4). Elle est la seule à vérifier (II, 4; 1) et à être séparément continue en $\vec{T}$ pour $\vec{\varphi}$ fixée dans $\mathcal{K} \otimes E$ et en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée dans $\mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$, lorsque $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}'_c$ ont la propriété d'approximation, puisqu'elle est alors connue sur $(\mathcal{K} \otimes E) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$, donc sur $(\mathcal{K} \otimes E) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$ donc partout (voir proposition 15).

Remarque. — 1° L'énoncé de la proposition 17 n'est ni plus fort ni plus faible que celui des propositions 10 ou 14; il suppose une propriété d'approximation sur $\mathcal{K}$ seulement (alors que la proposition 10 supposait ces propriétés sur tous les $\mathcal{K}'_{\mathfrak{N}_{L^0}}$ (ou les $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$)), mais c'est une propriété d'approximation *stricte* (alors qu'il ne s'agissait dans la proposition 10 que d'approximation simple); Λ est ici sous-intégrale, alors qu'elle devait être sous-nucléaire dans la proposition 10; mais nous ne définisssons $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ que si $\vec{T}$ est $\mathfrak{T}$-bornée, alors que la proposition 10 supposait seulement $\vec{T}$ β_0-bornée et définissait même $\vec{\varphi} \cdot_{\iota; \Lambda} \vec{T}$.

2° Bien entendu, si $\mathcal{K}$ *vérifie seulement la propriété d'approximation*, on aura seulement que $\mathcal{K}\varepsilon E$ est un sous-espace dense de $\mathcal{K} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E$, et la démonstration précédente, convenablement modifiée, montre qu'*on peut quand même définir un élément*

$\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C}; \Lambda} \vec{T}$; *mais il appartient seulement à* $E \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$; *les autres propriétés sont conservées.*

3° La formule (II, 4; 11 *bis*) est encore valable, avec la même démonstration. Cependant ici $\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C}; I} \vec{S}_A$ (avec $\vec{S}_A \in (\mathcal{D}_A)'_c(F; \mathcal{C})$ pour $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathcal{C})$) est seulement, a priori, un élément de $E \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$, car $\mathcal{D}_A$ a la propriété d'approximation, mais peut-être pas la propriété d'approximation stricte. C'est sans importance pour la démonstration, et finalement, puisqu'il est égal à $\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C}; \Lambda} \vec{T}$, il est dans $E \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$.

Continuité par rapport à l'ensemble des variables $\vec{\varphi}$, $\vec{T}$.

PROPOSITION 18. — *Supposons vérifiées les conditions énoncées dans la proposition* 10. *Soit* $\mathfrak{S}$ (*resp.* $\mathcal{C}$) *un ensemble saturé de parties bornées de* E (*resp. bornées complétantes de* F). *Alors l'application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}; \Lambda} \vec{T}$ *est continue* (*resp. uniformément continue*) *sur tout produit de* $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}})$ (*resp. d'une partie du type* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathcal{K}(E)$) *par une partie* $\mathcal{C}$*-équibornée de* $\mathcal{H}'_c(F)$.

Si F *est quasi-complet*, $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\beta; \Lambda} \vec{T} \in E \hat{\otimes}_{\beta} F$ *est continue* (*resp. uniformément continue*) *sur tout produit de* $\mathcal{K}(E)$ (*resp. d'une partie bornée de* $\mathcal{K}(E)$) *par une partie équibornée de* $\mathcal{H}'_c(F)$.

Si les conditions énoncées dans la proposition 11 *sont vérifiées, et si* $\mathfrak{S}$ (*resp.* $\mathcal{C}$) *est un ensemble saturé de parties bornées de* E (*resp.* F), *l'application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}; \Lambda} \vec{T}$ de $\mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}}) \times \mathcal{H}'_c(F_{\mathcal{C}})$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}} F$ *est hypocontinue par rapport aux parties du type* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathcal{K}(E)$ *et aux parties du type* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{H}'_c(F)$. *L'application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\beta; \Lambda} \vec{T}$ *de* $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{H}'_c(F)$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\beta} F$ *est hypocontinue par rapport aux parties bornées.*

Il suffit (en remarquant, comme toujours, que

$$\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}; \Lambda} \vec{T} - \vec{\varphi}_0 \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}; \Lambda} \vec{T}_0 = (\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_0) \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}; \Lambda} \vec{T} + \vec{\varphi}_0 \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}; \Lambda} (\vec{T} - \vec{T}_0))$$

d'appliquer successivement les propositions 14, 12 et les remarques qui les suivent.

Propriétés de $\vec{\varphi} \cdot_{\pi; \Lambda} \vec{T}$ pour Λ sous-intégrale.

PROPOSITION 19. — *Soient* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, E, F, *des espaces localement convexes séparés* (*non nécessairement quasi-complets*); *supposons que* $\mathcal{K}$ *ait la propriété d'approximation stricte. Soit* Λ *une* *application sous-intégrale de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$. *On peut définir une application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\pi;\Lambda} \vec{T}$ de $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F)$ *dans* $E \hat{\otimes}_\pi F$, *qui vérifie* (II, 4; 1), (II, 4; 4), (II, 4; 6). *Si* $L_{\vec{T}}$ *parcourt une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(\mathcal{H}; F)$, *et que* $\vec{\varphi}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{K}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\pi\Lambda} \vec{T}$ *converge vers* 0. *Cette application bilinéaire est la seule qui vérifie* (II, 4; 6) *et soit séparément continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée. Si en outre* $\mathcal{H}'_c$ *a la propriété d'approximation, c'est la seule qui vérifie* (II, 4; 1) *et soit continue en* $\vec{T}$ *pour* $\vec{\varphi}$ *fixée dans* $\mathcal{K} \otimes E$ *et continue en* $\vec{\varphi}$ *pour* $\vec{T}$ *fixée dans* $\mathcal{L}(\mathcal{H}; F)$. *Si* $\vec{T}$ *est* $\mathfrak{G}$-*bornée* $\vec{\varphi} \cdot_{\pi;\Lambda} \vec{T}$ *est l'image dans* $E \hat{\otimes}_\pi F$ *de l'élément* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ *de la proposition* 17.

Si les conditions requises pour l'application de la présente proposition et de la proposition 10 (*ou de la proposition* 11 *ou* 17) *sont simultanément vérifiées, les éléments* $\vec{\varphi} \cdot_{\pi;\Lambda} \vec{T}$ *définis par ces deux propositions coïncident.*

La démonstration est la même que celle de la proposition 17, mais plus simple : $(\Lambda \otimes I)$ applique continuement $\mathcal{K} \otimes_\varepsilon E$ dans $\mathcal{H} \otimes_\pi E$, $(L_{\vec{T}} \otimes I)$ applique continuement $\mathcal{H} \otimes_\pi E$ dans $F \otimes_\pi E$ identifié à $E \otimes_\pi F$, d'où le résultat.

Remarque. — *Si* $\vec{\varphi}$ *parcourt une partie* γ-π-*décomposable de* $\mathcal{K}(E)$, *ou plus généralement une partie dont l'image par* $\Lambda \otimes I$ *soit* γ-π-*décomposable dans* $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\pi E$, *et que* $\vec{T}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F)$, *alors* $\vec{\varphi} \cdot_{\pi;\Lambda} \vec{T}$ *converge vers* 0.

Nous laissons au lecteur le soin de le montrer. Bornons-nous au cas particulier où $\mathcal{H}$ a la topologie γ. Alors $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F) = \mathcal{H}'_c(F)$ (corollaire de la proposition 5 du chapitre I). L'application $\Gamma_{\gamma,\pi}$ (proposition 2) définit, à partir de $(\Lambda \otimes I)\vec{\varphi} \in \mathcal{H} \hat{\otimes}_\pi E$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c \varepsilon F$, un élément $\Gamma_{\gamma,\pi}((\Lambda \otimes I)\vec{\varphi}, \vec{T})$ de $(\mathcal{H} \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{H}'_c) \varepsilon (E \hat{\otimes}_\pi F)$. Soit υ la forme bilinéaire définissant la dualité entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'_c$; elle est hypocontinue par rapport aux parties convexes équilibrées compactes de $\mathcal{H}$, et aux parties équicontinues de $\mathcal{H}'$, donc par rapport aux parties convexes équilibrées compactes de $\mathcal{H}'_c$ puisque $\mathcal{H}$ a la topologie γ; alors elle définit une forme linéaire continue $\bar{\upsilon}$ sur $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{H}'_c$. Donc $(\bar{\upsilon} \otimes I)\,\Gamma_{\gamma,\pi}((\Lambda \otimes I)\vec{\varphi}, \vec{T})$ est un élément de $E \hat{\otimes}_\pi F$. Cet élément n'est autre que $\vec{\varphi} \cdot_{\pi;\Lambda} \vec{T}$; car les deux applications bilinéaires définies ainsi, l'une par la proposition 18, l'autre par la proposition 2, vérifient (II, 4; 6) [posons $l = \Lambda\psi$, $\psi \in \mathcal{K}$, $u = \vec{e}$, $\eta = \vec{T}$, $\alpha = \upsilon$ donc $\tilde{\alpha} = I$, β quelconque; $L = \mathcal{H}$, $M = \mathcal{H}'_c$, $U = E$, $V = F$; la formule de définition (II, 2; 1) donne

$$(\bar{\upsilon} \otimes \bar{\beta})\Gamma_{\gamma,\pi}\big((\Lambda \otimes I)(\psi \otimes \vec{e}), \vec{T}\big) = \vec{T}\big(\Lambda\psi, \beta(\vec{e})\big)$$
$$= \langle L_{\vec{T}}(\Lambda\psi), \beta(\vec{e})\rangle = \beta(\vec{e}, L_{\vec{T}}(\Lambda\psi));$$

comme c'est vrai pour β arbitraire, cela revient bien à dire que

$$(\bar{\upsilon} \otimes I)\Gamma_{\gamma,\pi}\big((\Lambda \otimes I)(\psi \otimes \vec{e}), \vec{T}\big) = \vec{e} \otimes L_{\vec{T}}(\Lambda\psi),$$

ce qui est (II, 4; 6)] et sont continues en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée. Alors la proposition 2 indique bien que, si $(\Lambda \otimes I)\vec{\varphi}$ parcourt une partie γ-π-décomposable de $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\pi E$, et que $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}'_c\varepsilon F$, $\Gamma_{\gamma,\pi}\big((\Lambda \otimes I)\vec{\varphi}, \vec{T}\big)$ converge vers 0, d'où le résultat. En particulier, la proposition 1 montre que, dans les conditions de la proposition 19, *si* $\mathcal{H}$ *et* E *ou* $\mathcal{K}$ *et* E *sont des espaces de Fréchet, ou si* $\mathcal{K}'_c$ *ou* $\mathcal{H}'_c$ *est nucléaire*, $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\pi;\Lambda} \vec{T}$ *est hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{K}(E)$ *et aux parties équicontinues de* $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F)$.

Corollaire. — *Soient* $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ *nucléaire*, $\Lambda = I$, *les conditions de la proposition* 4 *étant réalisées. Alors l'élément* $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ *défini à la proposition* 4 *coïncide avec celui qui est défini à la proposition* 19; *il coïncide avec ceux qui ont été définis aux propositions* 10 *ou* 11 *ou* 17 *si ces derniers existent.*

Les conditions de la proposition 4 entraînent celles de la proposition 19; comme $\mathcal{H}$ a la topologie γ, $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F) = \mathcal{H}'_c(F)$ (corollaire de la proposition 5 du chapitre I). Les applications bilinéaires définies aux propositions 4 et 19 coïncident alors sur $(\mathcal{H} \otimes E) \times (\mathcal{H}' \otimes F)$, et comme elles sont toutes deux séparément continues en $\vec{T}$ pour $\vec{\varphi}$ fixée dans $\mathcal{H} \otimes E$ et en $\vec{\varphi}$ pour $\vec{T}$ fixée dans $\mathcal{H}'_c(F)$, elles coïncident partout sur $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{H}'(F)$. Si en outre on peut appliquer, soit la proposition 10, soit la proposition 11, nous avons vu à la proposition 19 qu'on trouve nécessairement le même résultat.

Remarquons qu'en tout état de cause la proposition 19 est plus forte que la proposition 4. Nous aurions pu éviter d'écrire le § 3 et nous contenter du § 4; mais le § 3 est plus élémentaire, et c'est pour cette raison qu'il est écrit.

Indépendance de $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ et $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{C};\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ par rapport à l'application Λ et aux espaces $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$. Problèmes de supports.

Proposition 20. — *Supposons vérifiées les conditions de la proposition* 10 (*ou celles de la proposition* 17 *dans a*)). *Alors* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ *est connu dès que* $\vec{\varphi}$ *et* $\vec{\mathrm{S}} = {}^t\Lambda\vec{\mathrm{T}}$ *sont connus, sans qu'il soit nécessaire de connaître* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, Λ *ni même* $\vec{\mathrm{T}}$, *pourvu que* $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathrm{E})$ *et que* $\mathcal{K}$ *soit normal*; *de même il est connu dès que* $\vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ *sont connus, sans qu'il soit nécessaire de connaître* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, Λ, *ni même* $\vec{\varphi}$, *pourvu que* $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}(\mathrm{F};\ \beta_0)$, *et que* $\mathcal{H}$ *soit normal. D'autre part* :

a) *Si* $\mathcal{K}$ *est un espace de distributions normal sur* R^n, *ayant la propriété d'approximation par troncature et régularisation, si* $\mathfrak{C}$ *est un ensemble saturé de parties bornées complétantes de* F, *et si* $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\mathfrak{C})$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{C};\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ *est entièrement connu quand on connaît* $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{S}} = {}^t\Lambda\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$, *sans qu'il soit nécessaire de connaître* $\vec{\mathrm{T}}$ *elle-même, ni les espaces* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, *et l'application* Λ. *En outre* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{C};\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ *est nul si les supports de* $\vec{\varphi}$ *et de* $\vec{\mathrm{S}}$ *sont sans point commun.*

b) *Si* $\mathcal{H}$ *est un espace de distributions normal sur* R^n, *ayant la propriété d'approximation équicontinue par troncature et régularisation, si* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble saturé de parties bornées de* E, *et si* $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E}_{\mathfrak{S}})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\ \beta_0)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ *est entièrement connu quand on connaît* $\vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$, *sans qu'il soit nécessaire de connaître* $\vec{\varphi}$ *elle-même, ni les espaces* $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, *et l'application* Λ. *En outre* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ *est nul si les supports de* $\vec{\psi}$ *et de* $\vec{\mathrm{T}}$ *sont sans point commun.*

c) $\vec{\varphi} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{\mathrm{T}}$ *est nul si les supports de* $\vec{\varphi}$ *et de* $\vec{\mathrm{S}} = {}^t\Lambda\vec{\mathrm{T}}$ *sont sans point commun, et si* $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathrm{E})$; *ou si les supports de* $\vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi}$ *et de* $\vec{\mathrm{T}}$ *sont sans point commun, et si* $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}(\mathrm{F};\ \beta_0)$; *ou si* $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ *est normal nucléaire et a la propriété d'approximation par troncature et régularisation,* $\Lambda =$ *identité, et si les supports de* $\vec{\varphi}$ *et* $\vec{\mathrm{T}}$ *sont sans point commun.*

Ce qui est indiqué au début de l'énoncé n'est autre que ce que nous avons vu aux applications A (page 64) et B (page 65). Nous avons vu d'autres cas à l'application C (page 67).

Plaçons-nous maintenant dans la condition *a* (proposition 10 ou 17); $\mathcal{K}$ est normal, donc aussi $\mathcal{K}'_c$.

Alors $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T}$ est un élément de $\mathcal{D}'(F)$. On a, pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$:

$$(\text{II}, 4; 13) \quad \begin{cases} \vec{\varphi} = \lim\limits_{\nu \to \infty}\left[\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu)\right] \text{ dans } \mathcal{K}(E), \quad \text{donc} \\ \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T} = \lim\limits_{\nu \to \infty}\left[\lim\limits_{\mu \to \infty} (\alpha_\nu(\varphi * \rho_\mu)) \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}\right] \text{ dans } E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F, \end{cases}$$

en vertu du chapitre I, page 73, et de la proposition 14 ou 17. Alors, puisque $[\alpha_\nu(\varphi * \rho_\mu)] \in \mathcal{D}(E)$, $[\alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu)] \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}$ et même $[\alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu)] \cdot_\iota \vec{T}$ est connu dès qu'on connaît $\alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu) \in \mathcal{D}(E)$, et $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T} \in \mathcal{D}'(F; \mathfrak{T})$, sans qu'il soit nécessaire de connaître $\vec{T}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, Λ (page 65).

Alors $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ est lui-même connu, par passage à la limite, dès qu'on connaît $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'(E)$ et $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, sans qu'il soit nécessaire de connaître les espaces $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, l'application Λ et la distribution $\vec{T}$ tels que $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$, ${}^t\Lambda\vec{T} = \vec{S}$ (pourvu que ces espaces $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, cette application Λ et cette distribution $\vec{T}$ existent et possèdent les propriétés énoncées dans la proposition 10, et que $\mathcal{K}$ ait la propriété d'approximation par troncature et régularisation).

Si $\vec{\varphi}$ et $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T}$ ont des supports A et A′ sans point commun, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ est nul. En effet, soit d'abord $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$. On sait alors (formule II, 4; 11 *bis*) que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T} = \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; I} \vec{S}_A$.

Mais comme $\vec{S}$ a pour support A′, $L_{\vec{S}}$ est nulle sur $\mathcal{D}_A$, d'après la définition même du support de $\vec{S}$; donc $\vec{S}_A = 0$. Par suite $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ est nul.

Reprenons alors la formule (II, 4; 13); pour ν fixée, on peut affirmer que $\alpha_\nu(\vec{\varphi} * \rho_\mu) \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, et que, pour μ assez grand, son support et celui de $\vec{S}$ sont sans point commun; donc, pour ν fixé, $\alpha_\nu\,(\vec{\varphi} * \rho_\mu) \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T} = 0$ pour μ assez grand, donc $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T} = 0$.

Considérons maintenant la condition (*b*). Elle veut dire que, si $(\alpha_\nu)_{\nu=1,2..}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, tendant pour $\nu \to \infty$ vers 1 dans $\mathcal{E}$ en restant bornée dans $\mathcal{B}$, et si $(\rho_\mu)_{\mu=1,2..}$ est une suite de fonctions $\geqslant 0$ de $\mathcal{D}$, de supports tendant vers l'origine quand $\mu \to \infty$, tandis que $\lim\limits_{\mu \to \infty} \int \rho_\mu(x)\,dx = 1$, alors la suite d'opérateurs $\{\rho_\mu\}$, et la suite $[\alpha_\nu]$, sont *équicontinues* et convergent vers l'identité dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H};\mathcal{H})$. Cette propriété sera toujours vérifiée si $\mathcal{H}$ à la propriété d'approximation ordinaire par troncature et régularisation et s'il est tonnelé; en effet, la suite $\{\rho_\mu\}$ et la suite $[\alpha_\nu]$ seront alors équicontinues [1].

Alors, si $\vec{T}$ parcourt une partie équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, $\rho_\mu * \vec{T}$ parcourt une partie équibornée, parce que $L_{(\rho_\mu * \vec{T})} = L_{\vec{T}} \circ \{\check{\rho}_\mu\}$; pour toute $\vec{T}$, $L_{\rho_\mu * \vec{T}}$ converge pour $\mu \to \infty$ vers $L_{\vec{T}}$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H};F)$; donc $\rho_\mu * \vec{T}$ converge pour $\mu \to \infty$ vers $\vec{T}$ dans $\mathcal{H}'_c(F)$, en restant dans une partie équibornée si $\vec{T}$ reste dans une partie équibornée. On peut en dire autant pour les opérateurs $[\alpha_\nu]$.

Alors on a, pour $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F;\beta_0)$ et $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E_{\mathfrak{S}})$:

$$(\text{II},\ 4;\ 14)\quad \begin{cases} \vec{T} = \lim\limits_{\nu \to \infty}\left[\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha_\nu(\vec{T} * \rho_\mu)\right], & \text{donc} \\ \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T} = \lim\limits_{\nu \to \infty}\left[\lim\limits_{\mu \to \infty} \left(\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \alpha_\nu(\vec{T} * \rho_\mu)\right)\right], \end{cases}$$

d'après la proposition 12. Mais $\alpha_\nu(\vec{T} * \rho_\mu) \in (\mathcal{D}')'_c(F;\ \beta_0)$ (et cela même si on a seulement $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F;\ \beta_0)$; car $L_{\alpha_\nu(\vec{T} * \rho_\mu)} = L_{\vec{T}} \circ \{\check{\rho}_\mu\} \circ [\alpha_\nu]$, or $[\alpha_\nu]$ et $\{\check{\rho}_\mu\}$ sont continues respectivement de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}$, et $L_{\vec{T}}$ est β_0-bornée de $\mathcal{D}$ dans F). Alors $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \alpha_\nu(\vec{T} * \rho_\mu)$ est connu dès qu'on connaît $\Lambda\vec{\varphi} = \vec{\psi} \in \mathcal{D}'(E)$ et $\alpha_\nu(\vec{T} * \rho_\mu) \in (\mathcal{D}')'_c(F;\ \beta_0)$, sans qu'il soit nécessaire de connaître $\vec{\varphi}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, Λ (page 66); et $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T}$ lui-même sera connu par passage à la limite, dès qu'on connaîtra $\vec{\psi} \in \mathcal{D}'(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, sans qu'il soit nécessaire de connaître $\vec{\varphi}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, Λ. Quant au fait que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T}$ soit nul si les supports de $\vec{\psi}$ et $\vec{T}$ sont sans point commun, il résultera, par un raisonnement analogue à celui qui est fait plus haut, de la formule (II, 4; 11 *ter*).

Démontrons maintenant *c*). Les deux premiers cas résultent trivialement de (II, 4; 11 *bis*) et (II, 4; 11 *ter*). Supposons

[1] BOURBAKI [2], chapitre III, § 3, n° 6, théorème 2.

alors $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ normal nucléaire, $\Lambda =$ identité. Soit $\mathcal{H}_A$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des distributions de support dans A, muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$. Alors, si $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, on peut appeler $\vec{T}_A$ l'image de $\vec{T}$ dans $(\mathcal{H}_A)'_c(F; \beta_0)$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H} \arrow[dr, "\Lambda"] & \\ \mathcal{H}_A \arrow[ur] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & \mathcal{H} \\ & \mathcal{H}_A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et comme $\mathcal{H}_A$, sous-espace d'un espace nucléaire, est nucléaire, il vérifie les conditions requises dans la proposition 10. On a donc $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T} = \vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}_A$. Mais, si $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, le produit scalaire relatif à la dualité entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ est nul toutes les fois que l'intersection des supports est vide. Alors $\vec{T}_A = 0$ si $\vec{T}$ a son support dans $\complement A$ $\big($car, pour tout $\overleftarrow{f'} \in F'$, et $\varphi \in \mathcal{H}_A$, $\langle \vec{T}_A \cdot \varphi, \overleftarrow{f'} \rangle = \langle \vec{T}_A, \overleftarrow{f'} \rangle \cdot \varphi = 0$, donc $\vec{T}_A \cdot \varphi = 0\big)$ et alors $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T} = \vec{0}$.

Supposons en particulier $\mathcal{K} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$, $\Lambda =$ identité. Si $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, et si $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ est *localement β_0-bornée*, on pourra définir $\vec{\varphi} \cdot_\iota \alpha\vec{T} \in E \hat{\otimes}_\iota F$, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}$.

Cet élément est indépendant du choix de α, pourvu que α soit égale à 1 sur un voisinage du support de $\vec{\varphi}$. On pourra l'appeler $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 20 *bis*. — *Soient* E, F, *deux espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On peut définir un élément* $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ *de* $E \hat{\otimes}_\iota F$, *pour* $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ *localement β_0-bornée*; $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ *est nul si les supports de* $\vec{\varphi}$ *et* $\vec{T}$ *sont sans point commun; on a les égalités* (II; 4, 1), (II, 4; 4), (II, 4; 6), *avec $\Lambda =$ identité. La forme bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ *est compatible avec les applications linéaires continues de* E *et de* F. *Si* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble saturé de parties bornées de* E, $\mathcal{T}$ *un ensemble saturé de parties bornées complétantes de* F, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{T}} \vec{T}$ *converge vers* 0, *quand* $\vec{\varphi}$ *converge vers* 0 *dans* $\overline{\mathcal{D}}(E)$ *tandis que* $\vec{T}$ *reste dans une partie localement $\mathcal{T}$-équibornée de* $\mathcal{D}'(F)$; $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ *converge vers* 0, *quand* $\vec{\varphi}$ *reste dans une partie du type* $\mathfrak{S}$ *d'un* $\mathcal{D}_K(E)$, K *compact de* R^n, *tandis que* $\vec{T}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{D}'(F)$ *en restant dans une partie localement* β_0*-équibornée*; $(\varphi, T) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathcal{C}} \vec{T}$ *est la seule application bilinéaire définie pour* $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ *du type* $\mathfrak{S}$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ *localement* $\mathcal{C}$*-bornée, qui vérifie* (II, 4; 1) (*avec* $\Lambda =$ *identité*), *et qui soit continue par rapport à l'ensemble des variables* $\vec{\varphi}$, $\vec{T}$, *lorsque* $\vec{T}$ *parcourt une partie localement* $\mathcal{C}$*-équibornée de* $\mathcal{D}'(F)$.

La seule nouveauté ici, nécessitant une légère adaptation de la démonstration de la proposition 14, est la continuité par rapport à $\vec{\varphi}$ compte tenu de ce que $\overline{\mathcal{D}}(E)$ a la topologie limite inductive des $\mathcal{D}_K(E)$.

Soit donc $\mathcal{B}$ une partie localement $\mathcal{C}$-équibornée de $\mathcal{D}'(F)$, Nous devons montrer que, lorsque $\vec{T}$ parcourt $\mathcal{B}$, les applications linéaires continues $\vec{\varphi} \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C}} \vec{T}$ sont équicontinues de $\overline{\mathcal{D}}(E)$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$.

Comme $\overline{\mathcal{D}}(E)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}_K(E)$, il suffit de montrer que les restrictions de ces applications à $\mathcal{D}_K(E)$ sont équicontinues, ce qui résulte de la proposition 14, en remplaçant $\vec{T}$ par $\alpha\vec{T}$, $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de K.

Remarque. — Plus généralement, si $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ localement β_0-bornée, et si l'intersection des supports de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$ est compacte, on pourra définir $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ comme égal à $\vec{\varphi} \cdot_\iota \alpha\vec{T}$, $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de l'intersection des supports de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$; il sera nul si les supports sont sans point commun.

De la même manière, si $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{E}(F)$ localement β_0-bornée, ont des supports d'intersection compacte, on pourra définir $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ comme égal à $\vec{\varphi} \cdot_\iota \alpha\vec{T}$, $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de l'intersection des supports de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$; il sera nul si les supports sont sans point commun.

Calcul de $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}; \Lambda} \vec{T}$ et $\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C}; \Lambda} \vec{T}$ par une intégrale usuelle.

Proposition 21. — *Supposons vérifiées les conditions de la proposition* 10, *et en outre les conditions suivantes (où* $\mathcal{C}$ *est un ensemble saturé de parties bornées complétantes de* F) :

a) $\mathcal{K}$ *est un espace de distributions normal sur* R^n, *ayant la propriété d'approximation par troncature et régularisation*;

b) $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E)$ *est une fonction appartenant à* $\overline{\mathfrak{L}^p}(E)$ (*voir page* 48);

*c*₁) (*si* $p \neq 1$) : $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$, *et* $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T} \in \mathcal{K}'_c(F; \mathfrak{G})$ *est une fonction*; *pour tout compact* K *de* R^n, *il existe une partie disquée complétante* $B \in \mathfrak{G}$ *telle que* $\vec{S} \in \overline{L^{p'}_K}(F_B), \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

*c*₂) (*si* $p = 1$, $p' = \infty$) : $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{G})$, $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T}$ *est une fonction mesurable à valeurs dans* F; *pour tout compact* K *de* R^n, $\vec{S}(K) = \bigcup_{x \in K} \vec{S}(x)$ *est une partie de* F *appartenant à* $\mathfrak{G}$ ([1]).

d) *la fonction* $\vec{\varphi} \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S} : x \to \vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S}(x)$, *à valeurs dans* $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$, *est scalairement intégrable* (*condition toujours réalisée si elle est à support compact*).

Alors $\int_{R^n}^{\cdot} \big(\vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S}(x)\big)\, dx$, *a priori situé dans le complété faible* $(E \otimes_{\mathfrak{G}} F)'^*$ *de* $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$, *est dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{G}} F$, *et il est égal à* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$:

$$\text{(II, 4; 15)} \quad \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T} = \int_{R^n}^{\cdot} \big(\vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S}(x)\big)\, dx, \qquad \vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T}.$$

Cette propriété sera très importante dans les applications, puisqu'elle donne un procédé explicite de calcul de $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ par une intégrale usuelle. Nous savions déjà que, si $\mathcal{K}$ à la propriété d'approximation par troncature et régularisation, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{G};\Lambda} \vec{T}$ est connu dès que $\vec{\varphi}$ et $\vec{S}$ sont connus, sans qu'il soit nécessaire de connaître $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, Λ, $\vec{T}$ (proposition 20, *a*). Remarquons que les conditions *b*, *c*₂, *d*, sont trivialement satisfaites si $\vec{\varphi}$ et $\vec{S}$ sont des fonctions continues, l'une des deux au moins à support compact, et si, pour tout compact K de R^n, $\vec{S}(K) \in \mathfrak{G}$. Les conditions *b* et *c*₁ entraînent que $\vec{\varphi} \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S}$ soit dans $\overline{L_K}(E \otimes_\pi F_B)$ Mais $E \otimes_\pi F_B$ est aussi $E \otimes_{\mathfrak{G}_1} F_B$, où $\mathfrak{G}_1$ est la famille de toutes les parties bornées de F_B, et comme $B \in \mathfrak{G}$, l'application canonique $F_B \to F$ définit une application continue canonique

([1]) Mais nous ne supposons nullement l'existence d'une partie disquée $B \in \mathfrak{G}$ telle que $\vec{S}$ soit mesurable à valeur dans F_B, ce qu'entraînerait la condition $\vec{S} \in \overline{L^\infty_K}(F_B)$ de c_1 si l'on y ait faisait $p' = \infty$.

$E \otimes_{\mathfrak{G}_1} F_B \to E \otimes_{\mathfrak{G}} F$ (voir page 11), donc $\vec{\varphi} \otimes \vec{S} \in \overline{L^1_K}(E \otimes_{\mathfrak{G}} F)$, donc finalement $\vec{\varphi} \otimes \vec{S} \in \overline{\mathcal{L}^1}(E \otimes_{\mathfrak{G}} F)$. Cette fonction est en particulier scalairement localement intégrable à valeurs dans $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$.

Montrons que *b*) et c_2), pour $p = 1$, $p' = \infty$, entraînent la même conclusion. Soit G un espace normé, et considérons une application linéaire continue de $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$ dans G, définie par une application bilinéaire $\mathfrak{G}$-hypocontinue θ de $E \times F$ dans G. Nous allons montrer que $\theta(\vec{\varphi}(\hat{x}), \vec{S}(\hat{x}))$ est dans $\overline{\mathcal{L}^1}(G)$; en prenant en particulier pour G des espaces $(E \otimes_{\mathfrak{G}} F)_{\mathfrak{W}}$ associés aux voisinages disqués $\mathfrak{W}$ de 0 dans $E \otimes_{\mathfrak{G}} F$, on en déduira que $\vec{\varphi} \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S} \in \overline{\mathcal{L}^1}(E \otimes_{\mathfrak{G}} F)$.

Soit K un compact de R^n. Comme $\vec{S}(K)$ est contenu dans une partie disquée $B \in \mathfrak{G}$, il existe un voisinage disqué $\mathfrak{U}$ de 0 dans E tel que $\theta(\mathfrak{U}, B)$ soit dans la boule unité de G. Si P est, sur E, la semi-norme jauge de $\mathfrak{U}$, on a donc $\|\theta(\vec{\varphi}(x), \vec{S}(x))\|_G \leq P(\vec{\varphi}(x))$; alors de l'inégalité $\int_K^* P(\vec{\varphi}(x))\,dx < \infty$, on déduit l'inégalité $\int_K^* \|\theta(\vec{\varphi}(x), \vec{S}(x))\|\,dx < \infty$. Pour montrer que $\theta(\vec{\varphi}(\hat{x}), \vec{S}(\hat{x})) \in \overline{L^1_K}(G)$, il reste à montrer que cette fonction est mesurable sur K.

Soit $\vec{e}_{\mathfrak{U}}$ l'image canonique de $\vec{e} \in E$ dans $E_{\mathfrak{U}}$; et soit F_1 le sous-espace de F engendré par B, mais toujours muni de la topologie induite par F. On peut définir une application bilinéaire $\theta_{\mathfrak{U}}$ de $E_{\mathfrak{U}} \times F_1$ dans G, telle que $\theta_{\mathfrak{U}}(\vec{e}_{\mathfrak{U}}, \vec{f}_1) = \theta(\vec{e}, \vec{f}_1)$, pour tous $\vec{e} \in E$, $\vec{f}_1 \in F_1$. En outre $\theta_{\mathfrak{U}}$ est hypocontinue par rapport aux parties homothétiques de B dans F_1. Alors l'image $\vec{\varphi}_{\mathfrak{U}}$ de $\vec{\varphi}$ par $E \to E_{\mathfrak{U}}$ est mesurable sur K, puisque $E_{\mathfrak{U}}$ est normé; $\vec{S}$ est mesurable sur K à valeurs dans l'espace (non vectoriel) topologique $B \subset F_1$; $\theta_{\mathfrak{U}}$ est continue sur $E_{\mathfrak{U}} \times B$, donc la fonction composée $\theta_{\mathfrak{U}}(\vec{\varphi}_{\mathfrak{U}}(\hat{x}), \vec{S}(\hat{x})) = \theta(\vec{\varphi}(\hat{x}), \vec{S}(\hat{x}))$ est bien mesurable sur K (1). On a donc toujours finalement $\vec{\varphi} \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{S} \in \overline{\mathcal{L}^1}(E \otimes_{\mathfrak{G}} F)$. A fortiori cette fonction est scalairement localement intégrable; c'est pourquoi nous avons écrit que *d*) était automatiquement réalisée si $\vec{\varphi} \otimes \vec{S}$ était à support compact.

(1) Bourbaki [6], chapitre IV, § 5, n° 3, théorème 1 (appliqué pour $n = 1$).

a) Démontrons d'abord (II, 4; 15) pour $\vec{\varphi} = \psi\vec{e} \in \mathcal{D}\otimes E$. On a d'une part

$$\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C},\Lambda} \vec{T} = \vec{e} \otimes L_{\vec{T}}(\Lambda\psi) = e \otimes L_{\vec{S}}(\psi)$$

d'après (II, 4; 6); d'autre part

$$\int_{R_n}\big(\vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{S}(x)\big)\,dx = \int_{R_n}\big(\vec{e} \otimes \psi(x)\vec{S}(x)\big)\,dx$$
$$= \vec{e} \otimes \int_{R_n} \psi(x)\vec{S}(x)\,dx \text{ [1]} = \vec{e} \otimes L_{\vec{S}}(\psi).$$

b) Démontrons ensuite (II, 4; 15) si $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$. On peut trouver un filtre de fonctions $\vec{\varphi}_\nu \in \mathcal{D} \otimes E$, à supports contenus dans un compact fixe K de R^n, convergeant vers $\vec{\varphi}$ dans $\overline{\mathcal{D}}(E)$. Alors $\vec{\varphi}_\nu \cdot_{\mathcal{C},\Lambda} \vec{T}$ converge vers $\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C},\Lambda} \vec{T}$, en vertu de la proposition 1. D'autre part, si $p \neq 14$, $\vec{\varphi}_\nu$ converge vers $\vec{\varphi}$ dans $\overline{L^p}(E)$, et comme il existe $B \in \mathcal{C}$, telle que $\vec{S} \in \overline{L_K^{p'}}(F_B)$, $\vec{\varphi}_\nu \otimes \vec{S}$ converge vers $\vec{\varphi} \otimes \vec{S}$ dans $\overline{L_K^1}(E \otimes_\pi F_B)$, donc a fortiori dans $\overline{L_K^1}(E \otimes_{\mathcal{C}} F)$; par suite l'intégrale de $\vec{\varphi}_\nu \otimes_{\mathcal{C}} \vec{S}$ converge vers celle de $\vec{\varphi} \otimes_{\mathcal{C}} \vec{S}$ dans $E \widehat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$. Cette conclusion subsiste trivialement pour $p = 1$, $p' = \infty$, puisque $\vec{\varphi}_\nu$ converge uniformément vers $\vec{\varphi}$ et que $\vec{S}(K) \in \mathcal{C}$, donc que $\vec{\varphi}_\nu \otimes \vec{S}$ converge uniformément vers $\vec{\varphi}\otimes\vec{S}$. Notre résultat étant démontré pour les $\vec{\varphi}_\nu \in \mathcal{D} \otimes E$ l'est donc pour $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$.

c) Démontrons maintenant (II, 4; 15) pour

$$\vec{\varphi} \in \mathcal{K}(E) \cap \overline{L^p}(E) \cap \overline{\mathcal{E}'}(E).$$

Soit $(\rho_\nu)_{\nu=1,2}$ une suite de fonctions $\geqslant 0$ de $\mathcal{D}$, dont les supports, contenus dans la boule $|x| \leqslant 1$ tendent vers l'origine de R^n, avec $\int_{R^n} \rho_\nu(x)dx = 1$.

On a $\vec{\varphi}_\nu = \vec{\varphi} * \rho_\nu \in \overline{\mathcal{D}}(E)$. On a donc

$$\text{(II, 4; 16)} \qquad \vec{\varphi}_\nu \cdot_{\mathcal{C},\Lambda} \vec{T} = \int_{R^n} \vec{\varphi}_\nu(x) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{S}(x)\,dx.$$

Lorsque $\nu \to \infty$, $\vec{\varphi}_\nu$ converge vers $\vec{\varphi}$ dans $\mathcal{K}(E)$, puisque $\mathcal{K}$

[1] Cela résulte de Bourbaki [6], chapitre IV, § 4, n° 2, théorème 1 (au moins pour les espaces de Banach), appliqué à l'application linéaire continue $\vec{f} \to \vec{e}\otimes\vec{f}$ de F dans $E\widehat{\otimes}_{\mathcal{C}}F$.

a la propriété d'approximation par régularisation (chapitre I, page 73); alors le premier membre de (II, 4; 16) converge pour $\nu \to \infty$ vers $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}, \Lambda} \vec{T}$ d'après la proposition 14.

Soit d'abord $p \neq 1$. Soit K_0 le support de $\vec{\varphi}$, K l'ensemble des points de R^n dont la distance à K_0 est $\leqslant 1$, B la partie de F appartenant à $\mathfrak{T}$ telle que $\vec{S} \in \overline{L_K^{p'}}(F_B)$. Les $\vec{\varphi}_\nu$ convergent pour $\nu \to \infty$ vers $\vec{\varphi}$ dans $\overline{L^p}(E)$, si $p \neq \infty$, et leur support reste dans K; alors $\vec{\varphi}_\nu \otimes \vec{S}$ converge $\vec{\varphi} \otimes \vec{S}$ dans $\overline{L^1}(E \otimes_\pi F_B)$, donc à fortiori dans $\overline{L^1}(E \otimes_{\mathfrak{T}} F)$, et le second membre de (II, 4; 16) converge vers $\int_{R^n} (\vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathfrak{T}} \vec{S}(x))\, dx$ dans $E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. Les deux membres de (II, 4; 16) étant égaux pour tout ν, sont donc encore égaux lorsqu'on remplace $\vec{\varphi}_\nu$ par $\vec{\varphi}$, pourvu que $p \neq 1$, $p \neq \infty$, ce qui démontre donc (II, 4; 15) dans ce cas. Montrons que c'est encore vrai pour $p = \infty$ ($p' = 1$). Posons $\vec{S}_\nu = S * \check{\rho}_\nu$. On a, dans $E \widehat{\otimes}_\pi F_B$:

$$\text{(II, 4; 17)} \quad \int_K (\vec{\varphi}_\nu(x) \otimes \vec{S}(x))\, dx = \int_K \Big[\Big(\int_{K_0} \rho_\nu(x-\xi) \vec{\varphi}(\xi)\, d\xi \Big) \otimes \vec{S}(x) \Big]\, dx = \iint_{K_0 \times K} \rho_\nu(x-\xi) (\vec{\varphi}(\xi) \otimes \vec{S}(x))\, d\xi\, dx$$

(comme $\vec{\varphi}(\hat{\xi}) \in \overline{L^\infty}(E)$ a son support dans K_0, que $\vec{S}(\hat{x}) \in \overline{L_K^1}(F_B)$, et que ρ_ν est borné, cette intégrale double a un sens). Alors, d'après le théorème de Fubini usuel, ce dernier terme vaut

$$\text{(II, 4; 18)} \quad \int_{K_0} \Big[\vec{\varphi}(\xi) \otimes \Big(\int_K \rho_\nu(x-\xi) \vec{S}(x)\, dx \Big) \Big]\, d\xi = \int_{K_0} (\vec{\varphi}(\xi) \otimes \vec{S}_\nu(\xi))\, d\xi.$$

Comme le montre la définition de $\vec{S}_\nu$ par une intégrale, les valeurs de $\vec{S}_\nu$ sur K_0 ne dépendant que de celles de $\vec{S}$ sur K, et $\vec{S}_\nu \in \overline{L_{K_0}^{p'}}(F_B)$. Quand $\nu \to \infty$, $\vec{S}_\nu$ tend vers $\vec{S}$ dans $\overline{L_{K_0}^1}(F_B)$, donc $\varphi \otimes \vec{S}_\nu$ tend vers $\varphi \otimes \vec{S}$ dans $\overline{L_{K_0}^1}(E \otimes_\pi F_B)$ mais garde son support dans K_0, donc $\vec{\varphi} \otimes \vec{S}_\nu$ tend vers $\vec{\varphi} \otimes \vec{S}$ dans $\overline{L^1}(E \otimes_\pi F_B)$ et a fortiori dans $\overline{L^1}(E \otimes_{\mathfrak{T}} F)$; l'intégrale du dernier membre de (II, 4; 18) converge donc encore vers $\int_{R^n} (\vec{\varphi}(x) \otimes \vec{S}(x))\, dx$ dans $E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$.

Regardons enfin le cas $p = 1$ $(p' = \infty)$, et montrons qu'ici encore, à cause de c_2, $\vec{\varphi}_\nu \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}$ converge vers $\vec{\varphi} \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}$ dans $\overline{L^1_K}(E \otimes_{\mathcal{C}} F)$, ce qui entraînera encore (II, 4; 15) dans ce cas. Soit Q une semi-norme continue sur $E \otimes_{\mathcal{C}} F$; nous devons montrer que $\int_K Q[(\vec{\varphi}_\nu(x) - \vec{\varphi}(x)) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(x)]\, dx$ tend vers 0 pour $\nu \to \infty$. Or, comme $\vec{\vec{S}}(K) \in \mathcal{C}$, il existe une semi-norme continue P sur E telle que $Q[(\vec{\varphi}_\nu(x) - \vec{\varphi}(x)) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(x)] \leqslant P[\vec{\varphi}_\nu(x) - \vec{\varphi}(x)]$. Et $\int_K P[\vec{\varphi}_\nu(x) - \vec{\varphi}(x)]\, dx$ tend vers 0 pour $\nu \to \infty$, puisque φ_ν converge vers $\vec{\varphi}$ dans $L^1_K(E)$, d'où le résultat.

d) Il reste à prouver (II, 4; 15) dans le cas le plus général. Soit $(\alpha_\nu)_{\nu=1,2\ldots}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, tendant pour $\nu \to \infty$ vers 1 dans $\mathcal{E}$ en restant bornée dans $\mathcal{B}$. Alors, si nous posons $\vec{\varphi}_\nu = \alpha_\nu \vec{\varphi}$, on a encore (II, 4; 16).

Pour $\nu \to \infty$, $\vec{\varphi}_\nu$ converge vers $\vec{\varphi}$ dans $\mathcal{K}(E)$ puisque $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation par troncature, donc $\vec{\varphi}_\nu \cdot_{\mathcal{C};\Lambda} \vec{\vec{T}}$ tend vers $\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C};\Lambda} \vec{\vec{T}}$ d'après la proposition 14, dans $E \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$ donc dans $(E \otimes_{\mathcal{C}} F)'^*$. Mais, si $\overleftarrow{w'} \in (E \otimes_{\mathcal{C}} F)'$, comme $\vec{\varphi}(\hat{x}) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(\hat{x})$ est supposée scalairement intégrable, les fonctions $\langle \vec{\varphi}_\nu(\hat{x}) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(\hat{x}), \overleftarrow{w'} \rangle$ convergent simplement pour $\nu \to \infty$ vers la fonction $\langle \vec{\varphi}(\hat{x}) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(\hat{x}), \overleftarrow{w'} \rangle$, tandis que leur module reste borné par le module de cette fonction, à un facteur près; d'après le théorème de Lebesgue, $\int_{R^n} \langle (\vec{\varphi}_\nu(x) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(x)), \overleftarrow{w'} \rangle\, dx$ converge donc, pour $\nu \to \infty$, vers $\int_{R^n} \langle (\vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(x)), \overleftarrow{w'} \rangle\, dx$. D'après la définition même de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles scalairement intégrable, cela signifie que les intégrales $\int_{R^n} (\vec{\varphi}_\nu(x) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(x))\, dx$ convergent pour $\nu \to \infty$ vers l'intégrale $\int_{R^n} (\vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{\vec{S}}(x))\, dx$, dans $(E \otimes_{\mathcal{C}} F)'^*$ (toujours muni de la topologie $\sigma((E \otimes_{\mathcal{C}} F)'^*, (E \otimes_{\mathcal{C}} F)')$).

Cela démontre finalement (II, 4; 15) dans tous les cas.

Remarque. — Seule a été utilisée la proposition 14: $\vec{\varphi} \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C};\Lambda} \vec{\vec{T}}$ est continue de $\mathcal{K}(E)$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} F$. *On peut donc supposer réalisées, non les conditions de la proposition* 10, *mais celles de la proposition* 17, $\mathcal{C}$ *étant un ensemble saturé de parties bornées quelconques de* F, *et en outre a, b,* c_1 *ou* c_2, *d, et la conclusion subsiste.*

COROLLAIRE. — *Supposons vérifiées les conditions de la proposition* 10, *et en outre les conditions a, b, c_1 ou c_2 de la proposition* 21 ; *soit* θ *une application bilinéaire* $\mathfrak{T}$*-hypocontinue de* $E \times F$ *dans* G *quasi-complet,* $\overline{\theta}$ *l'application qu'elle définit de* $E \otimes_{\mathfrak{T}} F$ *dans* G, *et supposons vérifiée la condition:*

d_θ) $\theta(\vec{\varphi}, \vec{S}) : x \rightarrow \theta(\vec{\varphi}(x), \vec{S}(x))$ *est scalairement intégrable (à valeurs dans* G*).*

Alors $\int_{R^n} \theta(\vec{\varphi}(x), \vec{S}(x))\, dx$, *à priori dans le complété faible* G'^* *de* G, *est dans* G *et égale à* $\vec{\varphi} \cdot_{\theta;\Lambda} \vec{T} = \overline{\theta}(\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T};\Lambda} \vec{T})$:

$$\text{(II, 4; 18 } bis) \qquad \vec{\varphi} \cdot_{\theta;\Lambda} \vec{T} = \int_{R^n} \theta(\vec{\varphi}(x), \vec{S}(x))dx.$$

Il suffit de remarquer que, lorsque $\vec{\varphi}$ est à support compact, seules les conditions a, b, c_1 ou c_2 sont nécessaires. Le passage du support compact au support quelconque se fait par multiplication avec utilisation du théorème de Lebesgue (raisonnement d page 92) : on fera ce raisonnement directement sur $\theta(\vec{\varphi}, \vec{S})$ en utilisant d_θ au lieu de d.

PROPOSITION 21 *bis.* — *Supposons vérifiées les conditions de la proposition* 10, *et en outre les conditions suivantes, où* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble saturé de parties bornées de* E :

a') $\mathcal{H}$ *est un espace de distributions normal sur* R^n, *ayant la propriété d'approximation équicontinue par troncature et régularisation*;

b'_1) (*Si* $p \neq \infty$) : $\Lambda\vec{\varphi} = \vec{\psi} \in \mathcal{H}(E)$ *est une fonction, et, quel que soit le compact* K *de* R^n, *il existe une partie disquée* $A \in \mathfrak{S}$ *telle que* $\vec{\psi} \in \overline{L^p_K}(E_A)$;

b'_2) (*Si* $p = \infty$) $\Lambda\vec{\varphi} = \vec{\psi} \in \mathcal{H}(E)$ *est une fonction mesurable à valeurs dans* E ; *quelque soit le compact* K *de* R^n, $\vec{\psi}(K) = \bigcup_{x \in K} \vec{\psi}(x)$ *est une partie de* E *appartenant à* $\mathfrak{S}$;

c') $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F ; \beta_0)$ *est une fonction appartenant à* $\overline{\mathcal{L}^{p'}}(F)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

d') $\vec{\psi} \otimes_{\mathfrak{S}} \vec{T}$, *fonction à valeurs dans* $E \otimes_{\mathfrak{S}} F$, *est scalairement intégrable (condition toujours réalisée, si cette fonction est à support compact).*

Alors $\int_{R^n} (\vec{\psi}(x) \otimes_{\mathfrak{S}} \vec{T}(x))\, dx$, *a priori élément de* $(E \otimes_{\mathfrak{S}} F)'^*$, *complété faible de* $E \otimes_{\mathfrak{S}} F$, *est dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$, *et coïncide avec* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T}$:

$$(\text{II}, 4;\ 19)\qquad \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S};\Lambda} \vec{T} = \int_{\mathrm{R}^n} \big(\vec{\psi}(x) \otimes \vec{T}(x)\big)\, dx, \quad \vec{\psi} = \Lambda\vec{\varphi}.$$

La démonstration se calque exactement sur celle de la proposition 21, en échangeant les rôles de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$. Toutefois on applique la proposition 12 au lieu de la proposition 14, et on a alors besoin de $\vec{T}_\nu$ convergeant vers $\vec{T}$ *en restant dans une partie équibornée*. C'est ce qui se passera avec $\vec{T}_\nu = \vec{T} * \rho_\nu$ ou $\vec{T}_\nu = \alpha_\nu \vec{T}$, si $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation *équicontinue* par troncature et régularisation (voir page 85). De même, au début de la démonstration, si $\vec{T} \in \overline{\mathcal{D}}(F;\beta_0) = \overline{\mathcal{D}}(F) \cap (\mathcal{D}')'_c(F;\beta_0)$, $\vec{T}$ est la limite d'éléments $\vec{T}_\nu$ de $\mathcal{D} \otimes F$ (dont on peut supposer qu'ils gardent leur support dans un compact fixe) qui restent dans une partie équibornée de $\overline{\mathcal{D}}(F;\beta_0)$, parce que $\mathcal{D}'$ est nucléaire (lemme page 73).

Proposition 21 *ter*. — *Supposons réalisées les conditions de la proposition* 19, *et en outre les conditions a, b, d, de la proposition* 21 (*où* $\mathfrak{S}$ *est remplacé par* π), *et*

c'') $\vec{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H};\ F)$, *et* $\vec{S} = {}^t\Lambda\vec{T}$ *est une fonction appartenant à* $\overline{\mathcal{L}^{p'}}(F)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Alors $\int_{\mathrm{R}^n} \big(\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{S}(x)\big)\, dx$ *est dans* $E \hat{\otimes}_\pi F$, *et il est égal à* $\varphi \cdot_{\pi;\Lambda} T$.

Ceci contient la proposition 7 comme cas particulier. La proposition 21 *ter* se démontre comme la proposition 21.

Cas où E n'est pas quasi-complet.

On peut faire disparaître partiellement la difficulté signalée page 55 (proposition 9). Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble saturé de parties bornées complétantes de F. Appelons F_0 l'espace F muni de la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle les parties appartenant à $\mathfrak{S}$ soient encore bornées; F_0 est plus fine que F. Un ensemble convexe équilibré est voisinage de 0 dans F_0 si et seulement s'il absorbe toute partie $B \in \mathfrak{S}$. F_0 est aussi la limite inductive des F_B, pour les parties B disquées appartenant à $\mathfrak{S}$; les F_B sont des espaces normés donc bornologiques, donc F_0 est bornologique ([1]). Une application linéaire de F_0 dans G localement convexe est continue si et seulement si $u(B)$ est bornée, pour tout $B \in \mathfrak{T}$; une partie H de $\mathcal{L}(F_0; G)$ est équicontinue si et seulement si $\bigcup\limits_{u \in H} u(B)$ est bornée pour toute $B \in \mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}$ est encore une famille saturée de parties bornées complétantes de F_0.

Pour $\vec{f} \in F_0$ fixé, considérons l'application $\vec{e} \to \vec{e} \otimes \vec{f}$ de E dans $E \otimes_{\mathfrak{T}} F$; elle est continue, donc elle se prolonge en une application linéaire continue de $\hat{E}$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$; on définit donc ainsi une application bilinéaire η de $\hat{E} \times F_0$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. Montrons que cette application est $\mathfrak{T}$-hypocontinue ([2]). D'abord, si $\vec{f}$ parcourt $B \in \mathfrak{T}$, les applications $\vec{e} \to \vec{e} \otimes \vec{f}$ sont équicontinues sur E; donc leurs prolongements à $\hat{E}$ sont encore équicontinus. Ensuite soit $\vec{e}_0 \in \hat{E}$; et soient $\vec{e}_j$ des éléments de E convergeant, suivant un filtre $\mathcal{F}$, vers $\vec{e}_0$. Alors $\eta(\vec{e}_0, \vec{f})$ est limite des $\vec{e}_j \otimes \vec{f}$; les $\vec{e}_j$ formant un filtre de Cauchy de E, $\vec{e}_j - \vec{e}_k$ converge vers 0 suivant $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, donc $(\vec{e}_j - \vec{e}_k) \otimes \vec{f}$ converge vers 0 suivant $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ uniformément quand $\vec{f}$ parcourt $B \in \mathfrak{T}$, donc $\vec{e}_j \otimes \vec{f}$ converge vers $\eta(\vec{e}_0, \vec{f})$ uniformément pour $\vec{f} \in B$; alors les fonctions $\vec{f} \to \vec{e}_j \otimes \vec{f}$ convergent, suivant $\mathcal{F}$, vers la fonction $\vec{f} \to \eta(\vec{e}_0, \vec{f})$, uniformément sur B; donc cette dernière fonction, limite uniforme de fonctions continues, est continue sur B. A fortiori cette fonction linéaire est continue sur F_B, donc sur la limite inductive F_0. Et ceci montre bien que η est $\mathfrak{T}$-hypocontinue sur $\hat{E} \times F_0$. Donc η définit une application linéaire continue $\bar{\eta}$ de $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F_0$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F_0 \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{\eta}"'] & & \hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F \\
& E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où les applications autres que $\bar{\eta}$ sont les applications canoniques naturelles qui, rappelons-le, ne sont pas nécessairement injectives (comme les 3 applications sont continues, la commu-

([1]) Bourbaki [4].
([2]) Rappelons que l'hypocontinuité implique la continuité séparée.

tativité résulte de la commutativité des restrictions des applications à $E \otimes F_0$, dense dans $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F_0$).

Supposons alors que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ vérifient les conditions énoncées dans la proposition 10. Et soit $\vec{\varphi}$ une distribution de $\mathcal{K}(\hat{E})$, $\vec{T}$ une distribution $\mathfrak{T}$-bornée de $\mathcal{H}'_c(F)$. Elle définit donc aussi une distribution $\mathfrak{T}$-bornée $\vec{T}_0$ de $\mathcal{H}'_c(F_0)$. Il en résulte alors qu'on peut définir $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}_0 \in \hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F_0$. Son image par $\bar{\eta}$ est un élément $\vec{\varphi} \cdot_{\eta} \vec{T}_0$ de $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, dont l'image dans $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$ est $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}$. On voit donc que, si E n'est pas quasi-complet, ce procédé définit quand même une application bilinéaire de $\mathcal{K}(\hat{E}) \times \mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$.

Si $\vec{T}$ parcourt une partie $\mathfrak{T}$-équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, donc de $\mathcal{H}'_c(F_0)$, et que $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(\hat{E})$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}_0$ converge vers 0 dans $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F_0$ (proposition 14), donc $\vec{\varphi} \cdot_{\eta} \vec{T}_0$ converge vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$.

Tous ces résultats vont donc plus loin que ceux que nous avions obtenus avant, valables seulement pour $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T} \in \hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. Nous les appliquerons page 99.

Il peut arriver que F_0 soit identique à F (par exemple si $\mathfrak{T}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de F quasi-complet, et si F est bornologique). Alors l'existence de $\bar{\eta} : \hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F \to E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, prolongeant l'identité $E \otimes F \to E \otimes F$, montre que $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F = E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$. Dans ce cas, ces espaces sont en outre identiques à $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de $\hat{E}$ [car l'application η définie plus haut est telle que $\eta(A, B)$ soit bornée pour A bornée dans $\hat{E}$ et $B \in \mathfrak{T}$, donc l'ensemble H des applications $u_{\vec{e}} : \vec{f} \to \eta(\vec{e}, \vec{f})$, pour $\vec{e} \in A$, est tel que $\bigcup_{u_{\vec{e}} \in H} u_{\vec{e}}(B)$ soit une partie bornée de $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$; donc, $F = F_0$ étant bornologique, H est équicontinue, et η est $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue. Elle définit donc une application continue $\bar{\eta} : \hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F \to E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, prolongeant l'identité $E \otimes F \to E \otimes F$; comme il existe aussi une application continue $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F \to \hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$ prolongeant l'identité $E \otimes F \to E \otimes F$, les deux espaces $\hat{E} \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$ et $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$ sont bien confondus]. Dans ce cas, évidemment, toute difficulté disparaît, on peut définir $\vec{\varphi}\cdot_{\otimes\,\mathfrak{T}}\vec{T} \in E \otimes_{\mathfrak{T}} F$ pour $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{E}) = \mathcal{K}(\hat{E}_{\otimes})$, et $\vec{T} \in \mathcal{H}'_{s}(F\,;\, \mathfrak{T})$, et on a les propriétés de continuité de la proposition 18.

Interversion des rôles de E et de F, de $\vec{\varphi}$ et de $\vec{T}$.

Soit $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, $\Lambda =$ identité.

Si $\mathcal{H}$ est nucléaire (donc Λ sous-nucléaire), et si $\mathcal{H}$ a un système fondamental de voisinages $\mathfrak{U}$ de 0 tels que $\mathcal{H}'_{\mathfrak{U}^0}$ ait la propriété d'approximation, ou tels que $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{U}}$ ait la propriété d'approximation, si $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F\,;\, \beta_0)$, la proposition 10 nous permet de définir un élément $\vec{\varphi}\cdot_\iota \vec{T}$ de $E \hat{\otimes}_\iota F$.

Si maintenant $\mathcal{H}'_c$ est nucléaire (donc ${}^t\Lambda$ sous-nucléaire) et si $\mathcal{H}$ a un système fondamental de parties K convexes équilibrées compactes telles que $\mathcal{H}_K$ ait la propriété d'approximation ou tels que $(\mathcal{H}')^{\wedge}_{K^0}$ ait la propriété d'approximation, si $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F)$, $\vec{\varphi} \in (\mathcal{H}'_c)'_c(E\,;\, \beta_0)$ (c'est-à-dire si l'application $L_{\vec{\varphi}}$ est β_0-bornée de $\mathcal{H}'_c$ dans E), alors la même proposition 10, où les rôles de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$, E et F, sont renversés, nous permet de définir un élément que, pour ne pas le confondre avec le précédent, nous noterons $\vec{T}\cdot_\iota \vec{\varphi} \in F \hat{\otimes}_\iota E$.
Supposons alors que toutes les propriétés ci-dessus soient vérifiées à la fois, et montrons que $\vec{\varphi}\cdot_\iota \vec{T}$ et $\vec{T}\cdot_\iota \vec{\varphi}$ sont identiques, à la symétrie canonique près entre $E \hat{\otimes}_\iota F$ et $F \hat{\otimes}_\iota E$.

Soient $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$, des voisinages disqués de 0 dans $\mathcal{H}$, servant à la première définition; nous supposerons de plus $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ hilbertien, ce qui est possible puisque $\mathcal{H}$ est nucléaire ([1]). Soient $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$, des voisinages de 0 dans $\mathcal{H}'_c$, servant à la deuxième définition, $\hat{\mathcal{H}}'_{\mathfrak{S}}$ hilbertien.

On a les factorisations :

$$\mathcal{H}'_{\mathfrak{V}^0} \to \mathcal{H}'_{\mathfrak{U}^0} \to \mathcal{H}'_c \to \hat{\mathcal{H}}'_{\mathfrak{R}} \to \hat{\mathcal{H}}'_{\mathfrak{S}} \xrightarrow[L_{\vec{\varphi},\mathfrak{S}}]{} E$$
$$\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^0} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{R}^0} \to \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}} \xrightarrow[L_{\vec{T},\mathfrak{V}}]{} F.$$

Soit ζ_1 l'élément de $\mathcal{H}'_{\mathfrak{U}^0} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$ qui définit l'application nucléaire $\hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{U}} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}}$; il a une image $\tilde{\zeta}_1$ dans

$$\hat{\mathcal{H}}'_{\mathfrak{S}} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}} = \left(\hat{\mathcal{H}}'_{\mathfrak{S}}\right)'' \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{V}},$$

([1]) Voir Grothendieck [5], § 2, n° 1, lemme 3, page 37, et Schwartz [2], exposé 17, proposition 4.

qui définit l'opérateur nucléaire $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^0} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ factorisé à la deuxième ligne. Soit ensuite ζ_2 l'élément de $\hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{G}} \otimes_\iota \mathcal{H}_{\mathcal{R}^0}$ qui définit l'application nucléaire $\hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{R}} \to \hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{G}}$; il a une image $\tilde{\zeta}_2$ dans $\hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{G}} \hat{\otimes}_\iota \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{G}} \hat{\otimes}_\iota (\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}})''$, qui définit l'opérateur nucléaire $\hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{V}^0} \to \hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{G}}$ factorisé à la première ligne. Mais les 2 opérateurs nucléaires $\mathcal{H}'_{\mathcal{V}^0} \to \hat{\mathcal{H}}'_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^0} \to \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ sont transposés l'un de l'autre, donc les éléments $\tilde{\zeta}_1$ et $\tilde{\zeta}_2$ sont identiques; les éléments $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ définis par les 2 procédés, étant les images respectives de ζ_1 et ζ_2 par $(L_{\vec{\varphi}, \mathcal{G}} \otimes L_{\vec{T}, \mathcal{V}})$, sont donc bien identiques.

Si alors on considère l'application $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} \vec{T}$ de $(\mathcal{H}'_c)'_c\,(E; \mathfrak{S}) \times \mathcal{H}'_c\,(F; \mathfrak{T})$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$, elle peut se définir par deux procédés différents, et possède donc les propriétés de continuité des 2 procédés : elle est hypocontinue par rapport aux parties $\mathfrak{S}$-équibornées de $(\mathcal{H}'_c)'_c\,(E; \mathfrak{S})$ et aux parties $\mathfrak{T}$-équibornées de $\mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$.

Cas où toute application continue de $\mathcal{H}$ dans F est bornée.

a) Si $\mathcal{H}$ est un espace de Frechet, F un espace (DF), on sait que toute application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans F est bornée, et que tout ensemble borné de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H};\ F)$ est équiborné. Comme $\mathcal{H}$ a la topologie γ, $\mathcal{H}'_c(F) = \mathcal{L}_c(\mathcal{H};\ F)$ (1). *Donc* $\mathcal{H}'_c(F) = \mathcal{H}'_c\,(F; \beta)$, *et toute partie bornée de* $\mathcal{H}'_c(F)$ *est équibornée.*

b) Si $\mathcal{H}$ est le dual fort d'un espace de Fréchet distingué, F un espace de Fréchet, on sait que toute application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans F est bornée, et que tout ensemble borné de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H};\ F)$ est équiborné. Comme ici encore $\mathcal{H}$ à la topologie γ (2), $\mathcal{H}'_c(F) = \mathcal{H}'_c(F; \beta)$, et toute partie bornée est équibornée.

b') Si $\mathcal{H}$ est le dual fort d'un espace de Fréchet, F un espace de Fréchet, toute application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans F

(1) Voir chapitre I, note (2), page 62. Un espace de Fréchet a la topologie τ, donc la topologie γ.

(2) Si H est une partie bornée de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H};\ F)$, elle est équicontinue, parce que $\mathcal{H}$ est tonnelé (Grothendieck [2], théorème 7, page 73), alors elle définit un ensemble équihypocontinu de formes bilinéaires sur $\mathcal{H} \times F'_b$, donc équicontinu (Grothendieck [2], théorème 2 page 64), donc H est équibornée. On peut aussi appliquer le théorème 9, page 96, de Dieudonne-Schwartz [1], en l'étendant à un ensemble d'applications. $\mathcal{H}$ étant tonnelé a bien la topologie γ.

est bornée, et tout ensemble *équicontinu* de $\mathcal{L}(\mathcal{H}; F)$ est équi-borné (1). Mais on ne peut pas nécessairement en déduire que tout élément de $\mathcal{H}'_c(F)$ soit dans $\mathcal{H}'_c(F; \beta)$, car $\mathcal{H}$ n'a pas peut-être pas la topologie γ, donc $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F)$ est peut-être un sous-espace strict de $\mathcal{H}'_c(F)$. D'autre part une partie bornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, même contenue dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; F)$, n'est peut-être pas équicontinue donc peut-être pas équibornée, car $\mathcal{H}$ n'est pas nécessairement tonnelé.

Exemples et applications de la proposition 10.

EXEMPLE 1 (2). — Soient F, G deux espaces localement convexes séparés quasi-complets. Nous prendrons pour E l'espace $\mathcal{L}_b(F; G)$, espace des applications linéaires continues de F dans G, muni de la topologie de la convergence bornée. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{L}(F, G)$, $\mathfrak{T}$ l'ensemble des parties bornées de F; alors $\theta : (u, \vec{f}) \to u(\vec{f})$, est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinue. Elle définit donc une application $\bar{\theta}$ de $E \otimes_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$ dans G. En prenant $\mathcal{K} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$, $\Lambda =$ identité, nous nous proposons de définir $\vec{\varphi} \cdot_\theta \vec{T} = \theta(\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} \vec{T}) \in G$, lorsque $\vec{\varphi}$ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact à valeurs dans $\mathcal{L}_b(F; G)$, $\vec{T}$ une distribution localement bornée à valeurs dans F.

Remarquons, entre parenthèses, que si $\vec{\varphi}$ est une fonction indéfiniment dérivable à valeurs dans $\mathcal{L}_s(F; G)$, espace $\mathcal{L}(F; G)$ muni de la topologie de la convergence simple, elle est aussi indéfiniment dérivable à valeurs dans $\mathcal{L}_b(F; G)$. En effet chaque dérivée $D^p\vec{\varphi}$ est bornée dans $\mathcal{L}_s(F; G)$ sur tout compact de R^n. Or on peut écrire, l'intégrale étant prise sur le chemin rectiligne $(\overrightarrow{x_0, x})$, dans $\mathcal{L}_s(F; G)$:

$$\text{(II, 4; 20)} \quad D^p\vec{\varphi}(x) - D^p\vec{\varphi}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k} D^p\vec{\varphi}(\xi)\, d\xi_k \right),$$

donc $D^p\vec{\varphi}(x) - D^p\vec{\varphi}(x_0)$ est contenu, pour $|x - x_0| \leqslant 1$, dans

(1) Voir la note précédente. $\mathcal{H}$ n'est plus nécessairement tonnelé, mais on suppose d'emblée H équicontinue.

(2) C'est l'exemple fondamental utilisé dans BRUHAT [1].

l'enveloppe (dans $\mathcal{L}_s(F;\, G)$) de l'ensemble $|x - x_0|\Psi_p$, où $\Psi_p = \sqrt{n} \bigcup_{\substack{|\xi - x_0| \leqslant 1 \\ |q| = |p|+1}} \mathfrak{D}^q \vec{\varphi}(\xi)$. L'enveloppe $\widehat{\Psi}_p$ de Ψ_p est bornée, dans $\mathcal{L}_s(F;\, G)$ donc aussi dans $\mathcal{L}_b(G;\, F)$ puisque F est quasi-complet (1).

Alors $D^p\vec{\varphi}(x) - D^p\vec{\varphi}(x_0)$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}_b(F;\, G)$ quand x tend vers x_0; $D^p\vec{\varphi}$, pour tout p, est une fonction continue sur R^n à valeurs dans $\mathcal{L}_b(F;\, G)$. On sait alors que $D^p\vec{\varphi}$ est aussi la dérivée de $\vec{\varphi}$ pour la topologie $\mathcal{L}_b(F;\, G)$ (2)].

Une fonction $\vec{\varphi}$, indéfiniment dérivable à support compact à valeurs dans E, n'est pas nécessairement dans $\overline{\mathfrak{D}}(E)$, parce que $E = \mathcal{L}_b(F;\, G)$ n'est pas nécessairement quasi-complet (il l'est si F est tonnelé (3)). Nous pourrons appliquer le résultat de la page 86 si $\vec{\varphi} \in \overline{\mathfrak{D}}(E)$, c'est-à-dire si $\vec{\varphi}$ vérifié Φ'_∞(page 57).

Comme ici $E = \mathcal{L}_b(F;\, G)$, on sait que toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(F;\, G)$ a, dans $\mathcal{L}_b(F;\, G)$ et même dans $\mathcal{L}_s(F;\, G)$, une enveloppe complète, puisque G est quasi-complet (4).

On voit donc que $\vec{\varphi}$ vérifiera sûrement Φ'_∞) si elle vérifie :

Φ'') *Pour tout indice p,* $\bigcup_{x \in R^n} D^p\vec{\varphi}(x)$ *est une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(F;\, G)$.

Alors $\vec{\varphi}$ appartiendra même à $\overline{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{S}})$; la réciproque est évidente. L'espace $\overline{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{S}})$ est l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$, indéfiniment dérivables sur R^n à valeurs dans E à support compact, et qui vérifient la condition Φ''.

La proposition 20 *bis* est donc applicable :

Il existe une application bilinéaire et une seule, $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_\theta \vec{T}$, définie pour $\vec{\varphi} \in \overline{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{S}})$, $\vec{T} \in \mathfrak{D}'(F)$ localement bornée, qui vérifie

$$\text{(II, 4; 21)} \qquad \psi u . S\vec{f} = (\psi . S)\, u(\vec{f}) \in G,$$

pour $\psi \in \mathfrak{D}$, $S \in \mathfrak{D}'$, $u \in \mathcal{L}(F;\, G)$, $\vec{f} \in F$, et qui soit continue en φ, $\vec{T}$, lorsque $\vec{T}$ parcourt une partie localement équibornée de $\mathfrak{D}'(F)$.

(1) Bourbaki [2], chapitre III, § 3, n° 4, corollaire 1 du théorème I.

(2) D'après le lemme 1 de Schwartz [1] (voir l'application signalée au cas 1°).

(3) Bourbaki [2], chapitre III, § 3, n° 7, corollaire 2 du théorème IV.

(4) Cette enveloppe est en effet fermée dans $\mathcal{L}_s(F,\, G)$, et équicontinue (Bourbaki [2], chapitre III, § 3, n° 5, proposition 4), donc complète (ibidem, chapitre III, § 3, n° 7, théorème IV).

Sur un voisinage borné du support de $\vec{\varphi}$, $\vec{T}$ est dérivée d'une fonction continue à valeurs dans F, $\vec{T} = D^p \vec{f}$ (corollaire 1 de la proposition 24 du chapitre I). La formule (II, 4; 12) donne d'abord

$$\vec{\varphi} \cdot_{\theta;\Lambda} \vec{T} = (-1)^{|p|} D^p \vec{\varphi} \cdot_{\theta;\Lambda} \vec{f}.$$

On peut alors appliquer la formule (II, 4; 18 *bis*), avec les conditions trivialement réalisées a, b $(p=1)$, c_2 (page 88), d_θ (page 93); pour tout compact K de R^n, $\vec{f}(K)$ est en effet une partie bornée de F, et $\theta\big(D^p\vec{\varphi}(\hat{x}), \vec{f}(\hat{x})\big)$ est continue à support compact. On en déduit la formule intégrale :

$$\text{(II, 4; 22)} \quad \vec{\varphi} \cdot_\theta \vec{T} = (-1)^{|p|} \int_{R^n} \theta\big(D^p\vec{\varphi}(x), \vec{f}(x)\big)\, dx.$$

On peut définir $\vec{\varphi} \cdot_\theta \vec{T} \in G$ même si $\vec{\varphi}$ ne vérifie pas Φ'', donc appartient seulement à $\overline{\mathcal{D}}(\hat{E})$. Il suffit d'introduire l'espace F_0 défini page 94, relativement à l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les parties bornées de F. On sait qu'on peut alors définir un élément $\vec{\varphi} \cdot_\eta \vec{T}_0$ de $E \hat{\otimes}_{\mathcal{G}} F$ associé à $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(\hat{E})$, $\vec{T}$ localement bornée à valeurs dans F; son image par $\bar{\theta} : E \hat{\otimes}_{\mathcal{G}} F \to G$ donne le résultat cherché. En utilisant les raisonnements A et B page 90, on peut étendre (II, 4; 22) au cas où $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(\hat{E})$ est une fonction indéfiniment dérivable à valeurs dans E lui-même, $\vec{T} = D^p\vec{f}$, $\vec{f}$ fonction continue à valeurs dans F.

Exemple 2. — *Dual de* $\mathcal{H}(E)$.

Soient E un espace localement convexe, $\mathcal{H}$ un espace nucléaire, $\mathcal{H}$ et E non nécessairement quasi-complets. Alors, $\mathcal{H}$ ayant la propriété d'approximation puisque nucléaire [1], on a $\mathcal{H} \otimes_\varepsilon E \subset \mathcal{H}(E) \subset \mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon E$ (chapitre I, proposition 11). D'autre part $\mathcal{H} \otimes_\varepsilon E = \mathcal{H} \otimes_\pi E$, $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{H} \hat{\otimes}_\pi E$. Le dual de $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon E$, comme de $\mathcal{H}(E)$ ou de $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\pi E$, est alors l'espace des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{H} \times E$, et les parties équicontinues de $(\mathcal{H}(E))'$ sont les ensembles équicontinus de formes bilinéaires sur $\mathcal{H} \times E$.

Appelons ε l'ensemble des parties équicontinues de E'.

Une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{H} \times E$ est de la forme

(1) Voir note (1), page 58.

$L_{\overleftarrow{T}}$, où $\overleftarrow{T}$ est une application ε-bornée de $\mathcal{H}$ dans le dual fort E' : $\overleftarrow{T} \in \mathcal{H}'_c(E' ; \varepsilon)$, et réciproquement. Il y a identité entre les ensembles équicontinus de formes bilinéaires sur $\mathcal{H} \times E$ et les parties ε-équibornées de $\mathcal{H}'_c(E')$. On a donc l'identité algébrique $(\mathcal{H}(E))' \approx \mathcal{H}'_c(E' ; \varepsilon)$, et les parties équicontinues de $(\mathcal{H}(E))'$ sont les parties ε-équibornées de $\mathcal{H}'_c(E' ; \varepsilon)$. La topologie forte sur $(\mathcal{H}(E))'$ est évidemment plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur les produits tensoriels de parties bornées de $\mathcal{H}$ et de E; cette dernière est la topologie induite par $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}; E')$. La topologie forte de $(\mathcal{H}(E))'$ est identique à la topologie induite par $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}; E')$ si et seulement si toute partie bornée de $\mathcal{H}(E)$ est β-β-décomposable.

La topologie $(\mathcal{H}(E))'_c$, si $\mathcal{H}$ et E sont quasi-complets, est plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur les produits tensoriels de parties compactes de $\mathcal{H}$ et de E, c'est-à-dire $\mathcal{H}'_c(E'_c; \varepsilon)$; $(\mathcal{H}(E))'_c$ et $\mathcal{H}'_c(E'_c; \varepsilon)$ coïncident si et seulement si toute partie compacte de $\mathcal{H}(E)$ est γ-γ-décomposable.

Soient $\varphi \in \mathcal{H}(E)$, $\overleftarrow{T} \in \mathcal{H}'_c(E' ; \varepsilon)$; comme les parties équicontinues convexes équilibrées faiblement fermées sont faiblement compactes, elles sont complétantes, E' est ε-quasi-complet, et on peut appliquer la proposition 10, avec $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, $\Lambda =$ identité (comme $\mathcal{H}$ est nucléaire, il a un système fondamental de voisinage disqués $\mathcal{U}$ de 0 tels que $\mathcal{H}'_{\mathcal{U}^0}$ soit hilbertien [1]), donc ait la propriété d'approximation). On peut donc définir $\overrightarrow{\varphi} \cdot_\iota \overleftarrow{T} \in E \otimes_\iota E'$; si β est la famille des parties bornées de E, on en déduit l'existence de $\overrightarrow{\varphi} \cdot_{\beta, \varepsilon} \overleftarrow{T} \in E \,\hat{\otimes}_{\beta, \varepsilon} E'$. Comme alors la forme bilinéaire θ qui définit la dualité entre E et E' est hypocontinue par rapport aux parties bornées de E et aux parties équicontinues de E', elle définit une forme linéaire $\bar{\theta}$ sur $E \,\hat{\otimes}_{\beta, \varepsilon} E'$, et $\bar{\theta}(\overrightarrow{\varphi} \cdot_{\beta, \varepsilon} \overleftarrow{T}) = \overrightarrow{\varphi} \cdot_\theta \overleftarrow{T}$ est un nombre complexe. Comme $\theta(\overrightarrow{e}, \overleftarrow{e'})$ se note aussi $\langle \overrightarrow{e}, \overleftarrow{e} \rangle$, $\overrightarrow{\varphi} \cdot_\theta \overleftarrow{T}$ se notera aussi $\langle \overrightarrow{\varphi}, \overleftarrow{T} \rangle$, et $\int_{R^n} \langle \overrightarrow{\varphi}(x), \overleftarrow{T}(x) \rangle \, dx$ si les conditions de la proposition 21 le permettent. La forme qui définit la dualité entre $\mathcal{H}(E)$ et son dual, et la forme $(\overrightarrow{\varphi}, \overleftarrow{T}) \to \langle \overrightarrow{\varphi}, \overleftarrow{T} \rangle$ coïncident sur $(\mathcal{H} \otimes E) \times \mathcal{H}'_c(E' ; \varepsilon)$ à cause de (II, 4; 6); ces formes sont continues en $\overrightarrow{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$ pour $\overrightarrow{T}$ fixée d'après la proposition 14, donc elles coïncident.

[1] Voir note [1] page 58.

Ainsi :

PROPOSITION 22. — *Soient* E *un espace localement convexe séparé,* $\mathcal{H}$ *un espace nucléaire,* $\mathcal{H}$ *et* E *non nécessairement quasi-complets. Le dual de* $\mathcal{H}(E)$ *est* $\mathcal{H}'_c(E'\,;\,\varepsilon)$, *les parties équicontinues de* $(\mathcal{H}(E))'$ *sont les parties* ε*-équibornées de* $\mathcal{H}'_c(E')$. *La topologie forte de* $(\mathcal{H}(E))'$ *est plus fine que la topologie induite par* $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}\,;\,E')$, *et lui est identique si et seulement si toute partie bornée de* $\mathcal{H}(E)$ *est* β-β*-décomposable; si* $\mathcal{H}$ *et* E *sont quasi-complets, la topologie* $(\mathcal{H}(E))'_c$ *est plus fine que* $\mathcal{H}'_c(E'_c\,;\,\varepsilon)$, *et lui est identique si et seulement si toute partie compacte de* $\mathcal{H}(E)$ *est* γ-γ*-décomposable. La forme bilinéaire qui définit la dualité entre* $\mathcal{H}(E)$ *et* $\mathcal{H}'_c(E'\,;\,\varepsilon)$ *est* $(\vec{\varphi}, \overleftarrow{T}) \to \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{T} \rangle = \vec{\varphi} \cdot_\theta \overleftarrow{T}$, *où* θ *est la forme bilinéaire définissant la dualité entre* E *et* E′.

COROLLAIRE 1. — *Si* $\mathcal{H}$ *et* E *sont des espaces de Fréchet,* $\mathcal{H}$ *nucléaire,* $(\mathcal{H}(E))'$ *et* $\mathcal{H}'(E')$ *sont identiques, algébriquement et topologiquement;* $(\mathcal{H}(E))'_c$ *et* $\mathcal{H}'(E'_c)$ *sont identiques, algébriquement et topologiquement* (¹).

Il suffit d'appliquer la proposition 22, compte tenu de *a*, page 98 (avec $F = E'$; ε est alors aussi l'ensemble de toutes les parties bornées), et de la proposition 1, page 16, 4° et 2°.

COROLLAIRE 2. — *Si* $\mathcal{H}$ *est le dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire,* E *un espace* (DF) *tonnelé,* $(\mathcal{H}(E))'$ *et* $\mathcal{H}'(E')$ *sont identiques, algébriquement et topologiquement*

On appliquera ici *b*, page 98 ($\mathcal{H}$ est bien nucléaire; un espace de Fréchet nucléaire $\mathcal{L}$ est réflexif donc distingué, on peut donc appliquer les résultats énoncés à $\mathcal{H} = \mathcal{L}'$ (²); ensuite $F = E'$ est un espace de Fréchet; enfin ε est aussi la famille des parties bornées de E′ puisque E est supposé tonnelé), et la proposition 1, 3° page 9.

Le dual de $\mathcal{D}(E)$ est le sous-espace de $\mathcal{D}'(E')$ formé des distributions ε-bornées. C'est cet espace que Bruhat appelle, dans [1], l'espace des E-distributions.

(¹) Si $\mathcal{H}$ et E sont des espaces de Fréchet, $\mathcal{H}$ nucléaire, le fait que $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H} \hat{\otimes} E$ ait pour dual fort $\mathcal{H}'(E') = \mathcal{H}' \hat{\otimes} E'$, résulte aussi de GROTHENDIECK [5], § 3, n° 2, théorème 12, page 76, et SCHWARTZ [2], exposé 19, théorème 3.

(²) Le dual d'un espace de Fréchet nucléaire est nucléaire (GROTHENDIECK [5], § 2, n° 1, théorème 7, page 40, et SCHWARTZ [2], exposé 18, théorème page 3). Un espace nucléaire quasi-complet est semi-réflexif, d'après SCHWARTZ [2], exposé 17, proposition 3, donc réflexif si c'est un espace de Fréchet.

Cherchons le dual de $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$.

Soit u une forme linéaire continue sur $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$. Sa restriction à $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$, K compact de R^n, est continue. Donc elle définit une forme bilinéaire continue sur $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{E}$, c'est-à-dire une application linéaire ε-bornée de $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}$ dans E'. Donc u définit une distribution $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ à valeurs dans E', telle que, pour tout compact K de R^n, $\mathrm{L}_{\overleftarrow{\mathrm{T}}}$ soit ε-bornée de $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}$ dans E'. Donc $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ est une distribution localement ε-bornée à valeurs dans E'.

Réciproquement, soit $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ une telle distribution. Elle définit une forme bilinéaire continue sur $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{E}$, donc une forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}) \subset \mathfrak{D}_{\mathrm{K}} \hat{\otimes}_{\pi} \mathrm{E}$, et comme $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$ est la limite inductive de $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$, elle définit une forme linéaire continue u sur $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$. Comme par ailleurs les parties bornées (resp. compactes) de $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$ sont celles des $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$, le corollaire 1 permet d'énoncer :

Corollaire 3. — *Le dual de* $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$ *est l'espace des distributions localement* ε*-bornées à valeurs dans* E'. *Les parties équicontinues de ce dual sont les parties localement équibornées de* $\mathfrak{D}'(\mathrm{E}')$. *la forme bilinéaire définissant la dualité est* $(\vec{\varphi}, \overleftarrow{\mathrm{T}}) \to \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{\mathrm{T}} \rangle$, *ce dernier étant défini comme égal à* $\langle \vec{\varphi}, \alpha\overleftarrow{\mathrm{T}} \rangle$, *pour* $\alpha \in \mathfrak{D}$ *quelconque égale à* 1 *sur voisinage du support de* $\vec{\varphi}$. *Si* E *un espace de Fréchet,* $(\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E}))' = \mathfrak{D}'(\mathrm{E}')$, $(\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E}))'_c = \mathfrak{D}'(\mathrm{E}'_c)$, *algébriquement et topologiquement.*

Soit $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ une distribution localement ε-bornée à valeurs dans E'. Alors, dans tout ouvert borné Ω de R^n, $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ coïncide avec une dérivée $\mathrm{D}^p\overleftarrow{f}$ d'une fonction continue $\overleftarrow{f}$ à valeurs dans E'_c, telle que $\overleftarrow{f}(\Omega)$ soit une partie équicontinue de E' (chapitre I, corollaire 1 de la proposition 24). Si Ω contient le support de $\vec{\varphi}$, on a, d'après (II, 4; 18 *bis*), avec les conditions trivialement réalisées a, b $(p = 1)$, c_2 (page 88), d_θ (page 93), θ étant γ-ε- hypocontinue sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'_c$:

$$\text{(II, 4; 23)} \quad \vec{\varphi} \cdot_{\theta} \overleftarrow{\mathrm{T}} = \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{\mathrm{T}} \rangle = (-1)^{|p|} \int_{\mathrm{R}^n} \langle \mathrm{D}^p \vec{\varphi}(x), \overleftarrow{f}(x) \rangle dx.$$

Rappelons que, si E n'est pas quasi-complet, une fonction $\vec{\varphi}$ n'appartient à $\overline{\mathfrak{D}}(\mathrm{E})$ que si elle est indéfiniment dérivable sur R^n à valeurs dans E, à support compact, et vérifié Φ' (page 60). Si $\vec{\varphi}$ est indéfiniment dérivable à support compact mais ne vérifie pas Φ', elle appartient de toute façon à $\overline{\mathcal{D}}(\hat{E})$; comme $(\hat{E})' = E'$, que les parties équicontinues de $(\hat{E})'$ et E' sont les mêmes, et que sur ces parties équicontinues les topologies $(\hat{E})'_c$ et E'_c sont les mêmes et identiques à $\sigma(E', E)$ (1), (II, 4; 23) reste applicable, en considérant $\vec{\varphi}$ comme élément de $\overline{\mathcal{D}}(\hat{E})$, $\overleftarrow{T}$ comme élément de $\mathcal{D}'((\hat{E})'_c; \varepsilon)$, et $\overleftarrow{f}$ comme fonction continue à valeurs dans $(\hat{E})'_c$, prenant ses valeurs dans une partie équicontinue de $(\hat{E})'$; le second membre restant inchangé.

Exemple 3. — *Produit scalaire d'une fonction $m + n + 1$ fois continuement différentiable et d'une distribution d'ordre $\leqslant m$.*

Nous énoncerons d'abord un lemme qui complète certains résultats du chapitre I, puis des propositions préliminaires.

Lemme. — 1° *Dans* R^n, δ *est somme de dérivées d'ordre* $\leqslant m + n + 1$ *de fonctions* m *fois continuement différentiables, qu'on peut choisir de manière que leurs supports soient contenus dans un voisinage donné de l'origine. Si* $n = 1$, *on ne peut pas remplacer* $m + n + 1$ *par* $m + n$; *si* $n > 1$, *nous ignorons si on peut ou non remplacer* $m + n + 1$ *par* $m + n$, *mais on ne peut sûrement pas le remplacer par* $m + n - 1$.

2° *Dans* R^n, *si* n *est impair, ou si* n *est quelconque mais* $m = 0$, δ *est somme de dérivées d'ordre* $\leqslant m + n$ *de fonctions bornées, ainsi que leurs dérivées d'ordre* $\leqslant m$, *qu'on peut choisir de manière que leurs supports soient contenus dans un voisinage donné l'origine. Si* n *est pair, et* $m > 0$, *nous ignorons si ce résultat subsiste. On ne peut pas remplacer* $m + n$ *par* $m + n - 1$.

3° *Dans* R^n, *toute distribution dont les dérivées d'ordre* $\leqslant n + 1$ *sont des mesures est une fonction continue. On peut remplacer* $n + 1$ *par* n, *pour* n *impair* $\geqslant 3$; *on ne le peut pas pour* $n = 1$; *nous ignorons ce qu'il en est pour* n *pair. On ne peut pas remplacer* $n + 1$ *par* $n - 1$.

4° *Dans* R^n, *toute distribution dont les dérivées d'ordre* $\leqslant n$ *sont des mesures est une fonction localement bornée. On ne peut pas remplacer* n *par* $n - 1$.

(1) Bourbaki [2], chapitre III, § 3, n° 5, proposition 5, appliquée aux espaces $\hat{E}$, et $F = C$.

1° Le résultat énoncé n'est autre que le lemme du chapitre I, page 86, formule (I, 3; 23) ou (I, 3; 24). Le support des fonctions trouvées, L_p ou M_q, est contenu dans celui de γ, donc peut être pris dans un voisinage donné de l'origine. L'impossibilité de remplacer $m+n+1$ par $m+n$ ou $m+n-1$ est indiquée à la remarque page 89, au moins pour $m=0$, ou plus loin à 3°; mais si une telle propriété est vraie pour m, elle est vraie pour $m' \leqslant m$, car une dérivée D^pL, $|p| = m+s$, $L \in \mathcal{E}^m$, s'écrit aussi $D^q(D^{p-q}L)$, avec $|q| = m'+s$, $D^{p-q}L \in \mathcal{E}^{m'}$; alors l'impossibilité d'une telle propriété pour $m=0$ entraîne son impossibilité pour tout m.

2° Démontrons d'abord le 2°, pour n impair. En reprenant les notations des formules ci-dessus du chapitre I, la solution élémentaire E de Δ^k, $k = \frac{m+n+1}{2}$ ou $\frac{m+n}{2}$ selon que $m+n+1$ est pair ou impair, est proportionnelle à $r^{2k-n} = r^{m+1}$ ou r^m; donc ses dérivées d'ordre $\leqslant 2k-n = m+1$ ou m sont bornées au voisinage de l'origine, et celles de la fonction γE sont bornées partout; alors δ est somme de dérivées d'ordre $\leqslant 2k = m+n+1$ ou $m+n$ de fonctions dont les dérivées d'ordre $\leqslant m+1$ ou m sont bornées, et de supports arbitrairement voisins de l'origine, ce qui donne de toute façon le résultat cherché, en prenant pour fonctions certaines dérivées d'ordre 1 des précédentes dans le cas où $m+n+1$ est pair (d'ailleurs nous venons de voir que si on peut démontrer une telle propriété pour une valeur de m, elle est a fortiori démontrée pour les valeurs plus petites; on peut alors se contenter de montrer la propriété pour $m+n+1$ impair, avec $k = \frac{m+n}{2}$).
L'impossibilité de faire le même raisonnement pour n pair résulte de ce que E est proportionnelle à $r^{2k-n}\log r$, dont les dérivées d'ordre $2k-n$ ne sont pas des fonctions bornées au voisinage de l'origine. Cela ne prouve pas que le résultat ne soit pas exact.

Mais dans le cas particulier $m=0$, nous remarquerons que si un tel résultat est exact pour les dimensions n' et n'', il est exact pour la dimension $n = n'+n''$. En effet on a alors $R^n = R^{n'} \times R^{n''}$, $\delta_x = \delta_\xi \otimes \delta_\eta$, en appelant x, ξ, η, les variables canoniques de R^n, $R^{n'}$, $R^{n''}$ respectivement. Si alors on sait que

$$\delta_\xi = \sum_{|p| \leqslant n'} D^pL_p(\xi), \qquad \delta_\eta = \sum_{|q| \leqslant n''} D^qM_q(\eta),$$

on aura $\delta = \sum\limits_{\substack{|p| \leqslant n' \\ |q| \leqslant n''}} D_\xi^p D_\eta^q L_p(\xi) M_q(\eta)$, ce qui est le résultat cherché pour la dimension n; le résultat étant vrai pour les dimensions impaires (ou même simplement pour $n = 1$), est alors vrai pour $m = 0$, et toute dimension n.

L'impossibilité de remplacer $m + n$ par $m + n - 1$, pour $m = 0$, résulte du même contre-exemple que pour 1°, donné au chapitre I, page 89, ou plus loin à 4°; on en déduit la même impossibilité pour m quelconque.

3° Soit S une distribution dont les dérivées d'ordre $\leqslant n + 1$ sont des mesures. Alors, si $\delta = \sum\limits_{|p| \leqslant n+1} D^p L_p$, $L^p \in \mathcal{D}^0$ (voir 1°), on a $S = S * \delta = \Sigma D^p L_p * S = \Sigma L_p * D^p S \in \mathcal{E}^0$, S est bien une fonction continue.

Si l'on peut remplacer $n + 1$ par n dans 1°, alors on le peut aussi dans 3°; si on ne le peut pas dans 1°, cela ne prouve pas qu'on ne le puisse pas dans 3°. Les conclusions de 1° ne nous permettent donc pas de savoir si on peut ou non remplacer $n + 1$ par n dans 3°.

Mais on peut démontrer par une voie directe que, dans 3°, on peut remplacer $n + 1$ par n, si n est impair $\geqslant 3$; comme nous n'utiliserons pas ce résultat assez spécial dans le présent ouvrage, nous ne donnerons pas la démonstration. Cela ne donne aucune indication pour 1°.

Mais pour $n = 1$, on ne peut sûrement pas, dans 3°, remplacer $n + 1$ par n (car Y, fonction d'Heaviside, a pour dérivée une mesure, et n'est pas une fonction continue), et pour n quelconque, on ne peut pas remplacer $n + 1$ par $n - 1$ (car $\frac{1}{r^\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, a pour dérivées d'ordre $\leqslant n - 1$ des fonctions, et n'est pas une fonction bornée au voisinage de l'origine); d'où la même impossibilité pour 1°.

4° En utilisant 2° pour $m = 0$, on démontre 4° comme 3°. Le même contre exemple que dans 3° montre l'impossibilité de remplacer n par $n - 1$, dans 4° donc aussi dans 2°.

Proposition 23. — *Soient* K *un compact de* R^n *d'intérieur non vide et* H *un voisinage compact de* K. *Soit* L *une distribution de support assez voisin de l'origine pour que la convolution* $\{L\}$ *opère de* $\mathcal{E}'_K$ *dans* $\mathcal{E}'_H$. *Pour que* $\{L\}$ *soit un opérateur nucléaire* (*resp. intégral*) *de* $\mathcal{D}^0_K$ *dans* $\mathcal{D}^m_H$, *il faut et il suffit* *que* L *soit une fonction m fois continuement différentiable* (*resp. une fonction mesurable bornée ainsi que ses dérivées d'ordre* $\leqslant m$).

1° Soit d'abord L une fonction m fois continuement différentiable, de support assez voisin de l'origine pour que la convolution $\{L\} : T \to T * L$, opère de $\mathcal{E}'_K$ dans $\mathcal{E}'_H$. Montrons alors que $\{L\}$ est un opérateur nucléaire $\mathcal{D}^0_K \to \mathcal{D}^m_H$. En effet cette convolution est définie par le noyau $L(\hat{x} - \hat{y})$ (voir chapitre I, page 47), qui appartient à $\mathcal{E}^m_{x.y} \subset \mathcal{E}^0_y(\mathcal{E}^m_x)$ (1).

L'opérateur $\{L\}$ de $\mathcal{D}^0_K$ dans $\mathcal{D}^m_H$ est défini par le noyau $N(\hat{x}, \hat{y}) = L(\hat{x} - \hat{y})$, $x \in H$, $y \in K$, par la formule

$$(L * \varphi)(\hat{x}) = \int_K N(\hat{x}, y)\, \varphi(y) dy, \quad x \in H,$$

et on a $N \in (\mathcal{C}(K))_y((\mathcal{D}^m_H)_x)$(2). Mais une fonction continue sur le compact K, à valeurs vectorielles, est a fortiori sommable (pour la restriction à K de la mesure de Lebesgue). Donc $N \in \overline{L^1_K}(\mathcal{D}^m_H) = L^1_K \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^m_H$.

Comme $L^1_K \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^m_H$ admet une application canonique dans $(\mathcal{D}^0_K)' \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^m_H$, l'opération $\{L\}$ de $\mathcal{D}^0_K$ dans $\mathcal{D}^m_H$ provient d'un élément de $(\mathcal{D}^0_K)' \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^m_H$, donc est bien nucléaire.

Réciproquement, soit d'abord L une distribution telle que la convolution $\{L\}$ définisse un opérateur nucléaire de $\mathcal{D}^0_K$ dans $\mathcal{D}'^0_H$ (cas particulier $m = 0$); montrons que L est une fonction continue.

La convolution $\{L\}$ est en effet définie, si elle est nucléaire, par un élément $N_{x,y}$ de $(\mathcal{D}^0_K)'_y \widehat{\otimes}_\pi (\mathcal{D}^0_H)_x$. Cet élément N peut s'écrire comme une série $\sum_\nu \lambda_\nu(\mu_\nu \otimes h_\nu)$, les μ_ν étant des éléments de la boule unité de $(\mathcal{D}^0_K)'_y$, les h_ν étant des fonctions de $(\mathcal{D}^0_H)$, bornées en module par 1, et $\sum|\lambda_\nu| < \infty$. Les μ_ν, d'après le théorème de Hahn-Banach, se prolongent en formes linéaires continues sur $(\mathcal{D}^0)_y$ donc en mesures sur R^n, qu'on peut supposer de support dans K et de normes bornées par 1; appelons-les encore μ_ν. Soit μ une mesure $\geqslant 0$, de support dans K, majorant toutes les μ_ν, et majorant aussi la restriction de la mesure de Lebesgue dx au compact K; on peut écrire $\mu_\nu = g_\nu \mu$, $dx = \sigma\mu$, g_ν et σ de support dans K, avec $g_\nu \in L^1_\mu$, $\sigma \in L^1_\mu$; et

(1) SCHWARTZ [1], proposition 12, page 113.

(2) $\mathcal{C}$ (K) est l'espace des fonctions continues sur le compact K; ne pas confondre avec $\mathcal{D}^0_K$ ou $\mathcal{E}^0_K$, espace des fonctions continues sur R^n, à support dans K (donc s'annulant sur la frontière de K).

$\|g_\nu\|_{L^1_\mu} \leqslant 1$, $|\sigma| \leqslant 1$. On a alors $N = \sum_\nu \lambda_\nu g_\nu \mu \otimes h_\nu = l(\hat{x}, \hat{y})\mu_y$, où $l(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{(L^1_\mu)_y}(\mathcal{D}^0_x)$. Mais N, étant la convolution avec L, peut aussi se représenter, en tant que noyau sur $R^n \times R^n$, comme $L(\hat{x} - \hat{y})$. En particulier, si $\mathring{K}$ est l'intérieur de K, on voit que les distributions $l(\hat{x}, \hat{y})\mu_y$ et $L(\hat{x} - \hat{y})$ doivent coïncider dans $R^n \times \mathring{K}$. Pour tout $x \in R^n$, les distributions $l(x, \hat{y})\mu_y$ et $L(x - \hat{y})$ doivent coïncider dans $\mathring{K}$; donc $L(x - \hat{y})$ est une mesure de base μ dans $\mathring{K}$ pour tout $x \in R^n$, et alors L elle-même est une mesure sur R^n; mais toute les translatées de $L(- \hat{y})$ devant être de base μ dans $\mathring{K}$, L est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ou encore est une fonction (¹). De plus, puisque, sur K, $dy = \sigma(\hat{y})\mu_y$, $L(x - \hat{y})$ peut se remplacer par $L(x - \hat{y})\sigma(\hat{y})\mu_y$, pour $x \in R^n$, $y \in \mathring{K}$; mais si les noyaux $l(\hat{x}, \hat{y})\mu_y$ et $L(\hat{x} - \hat{y})\sigma(\hat{y})\mu_y$ coïncident dans $R^n \times \mathring{K}$, cela implique que $l(\hat{x}, y) = L(\hat{x} - y)\sigma(y)$, pour μ-presque toutes les valeurs de $y \in \mathring{K}$ (²). Mais, pour tout $y \in K$, $l(\hat{x}, y) \in \mathcal{D}^0_x$; « μ-presque partout » implique « presque partout sur K pour la mesure de Lebesgue »; enfin $\sigma(y) \neq 0$ sur K, presque partout pour la mesure de Lebesgue. Retenons finalement que, pour au moins un $y \in \mathring{K}$, la distribution $L(\hat{x} - y) \in \mathcal{D}'_x$ coïncide avec une fonction de $\mathcal{D}^0_x$, donc la distribution L coïncide elle aussi avec une fonction de $\mathcal{D}^0$.

(¹) Pour montrer que L est une fonction, nous devons montrer que tout ensemble compact F, négligeable pour la mesure de Lebesgue, est $|L|$-négligeable. Il suffit de le voir lorsque F est assez petit pour qu'un de ses transformés par symétrie et translation, $\tau_{x_0}\check{F}$, soit dans l'intérieur $\mathring{K}$ de K; il existe alors $\eta > 0$ tel que $\tau_x\check{F} \subset \mathring{K}$ pour $|x - x_0| \leqslant \eta$. Soit f la fonction caractéristique de F, presque partout nulle. La théorie classique de la convolution dit alors que le produit de convolution $\mu * f$ est lui aussi presque partout nul, et que l'on a, pour presque toutes les valeurs de x: $0 = \int f(x - y)\, d\mu(y)$. Cela prouve que $f(x - \hat{y}) = \tau_x\check{f}$ est, pour presque toutes les valeurs de x, μ-négligeable. Donc $\tau_x\check{F}$ est μ-négligeable pour presque tout x, donc pour au moins une valeur de x telle que $|x - x_0| \leqslant \eta$; mais alors $\tau_x\check{F}$ est $|L|(x - \hat{y})$-négligeable ou $\tau_x|\check{L}|$-négligeable, puisqu'il est dans $\mathring{K}$ et que $\tau_x\check{L}$ est de base μ dans $\mathring{K}$. Donc F est aussi $|L|$-négligeable.

(²) Les mesures $l(\hat{x}, \hat{y})\mu_y$ et $L(\hat{x} - \hat{y})\sigma(\hat{y})\mu_y$ sur $(\mathring{K})_y$, à valeurs dans $E = \mathcal{D}'_x$, coïncident, donc leurs densités $l(\hat{x}, \hat{y})$ et $L(\hat{x} - \hat{y})\sigma(\hat{y})$ sont scalairement μ-presque partout égales, donc μ-presque partout puisque $E' = \mathcal{D}_x$ est séparable (chapitre I, note (¹) page 66). Autrement dit, pour μ-presque tout y, les distributions $l(\hat{x}, y)$ et $L(\hat{x} - y)\sigma(y)$ coïncident.

Pour terminer la démonstration de la réciproque, nous prendrons m quelconque, et nous supposerons que $\{L\}$ est nucléaire de $\mathcal{D}_K^0$ dans $\mathcal{D}_H^m$. Si alors D^p est une dérivation d'ordre $\leqslant m$, $\{D^pL\}$: $\mathcal{D}_K^0 \xrightarrow{\{L\}} \mathcal{D}_H^m \xrightarrow{D^p} \mathcal{D}_H^0$ est nucléaire, donc D^pL est une fonction continue; cela prouve bien que L est une fonction m fois continuement différentiable.

2° Soit L une fonction mesurable bornée ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$, de support assez voisin de l'origine pour que la convolution $\{L\}$ opère de $\mathcal{E}'_K$ dans $\mathcal{E}'_H$. $\{L\}$ est alors un opérateur intégral de $\mathcal{D}_K^0$ dans $\mathcal{D}_H^m$. Il se factorise en effet en : $\mathcal{D}_K^0 \rightarrow L_K^\infty \rightarrow L_K^1 \xrightarrow{\{L\}} \mathcal{D}_H^m$, et on sait que $L_H^\infty \rightarrow L_K^1$ est intégrale [1].

Réciproquement, soit L une distribution telle que $\{L\}$ soit intégrale de $\mathcal{D}_K^0$ dans $\mathcal{D}_H^0$. Soit H_1 un voisinage compact fixé de H. Soit f une fonction sommable, de support assez voisin de l'origine pour que $\{f\}$ opère de $\mathcal{E}'_H$ dans $\mathcal{E}'_{H_1}$. La convolution $\{f\}$ est évidemment continue de $\sigma(L_H^\infty, L^1)$ dans $\sigma(\mathcal{D}_{H_1}^0, (\mathcal{D}_{H_1}^0)')$ [car $(\mathcal{D}_{H_1}^0)'$, est un quotient de $\mathcal{E}'^0$, et, si $\mu \in \mathcal{E}'^0$, on a $(f*\varphi)\cdot\mu = \varphi\cdot(\check{f}*\mu)$, avec $\check{f}*\mu \in L^1$; donc, si φ converge vers 0 dans $\sigma(L_H^\infty, L^1)$, $f*\varphi$ converge vers 0 dans $\sigma(\mathcal{D}_{H_1}^0, (\mathcal{D}_{H_1}^0)')$]. Mais la boule unité de L_K^∞ est compacte dans $\sigma(L_H^\infty, L^1)$; donc $\{f\}$ est un opérateur faiblement compact de L_H^∞ dans $\mathcal{D}_{H_1}^0$, et a fortiori de $\mathcal{D}_H^0$ dans $\mathcal{D}_{H_1}^0$.

Alors le composé $\{L*f\}$: $\mathcal{D}_K^0 \xrightarrow{\{L\}} \mathcal{D}_H^0 \xrightarrow{\{f\}} \mathcal{D}_{H_1}^0$ est nucléaire [2], donc, d'après ce que nous avons vu en 1°, $L*f$ est une fonction continue dès que $f \in L^1$ est de support assez voisin de l'origine; donc L (qui a un support compact) est dans L^∞[3].

Si enfin $\{L\}$ est intégrale de $\mathcal{D}_K^0$ dans $\mathcal{D}_H^m$, on voit, comme dans la fin de 1°, que les D^pL, $|p| \leqslant m$, sont dans L^∞, et la proposition est complètement démontrée.

Remarque. — Pour la dimension $n = 1$, si L une est fonction m fois continuement différentiable (resp. mesurable bornée ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$), et de support assez voisin de l'origine, $\{L\}$ est nucléaire (resp. intégrale) de $\mathcal{D}_K^k$ dans $\mathcal{D}_H^{m+k}$.

(1) Grothendieck [4], § 4, n° 3, page 127, et Schwartz [2], exposé 16, proposition 6.

(2) Grothendieck [4], § 4, n° 3, théorème 10, 1, page 132.

(3) Schwartz [5], chapitre vi, § 7, remarque 1° page 49, pour $p = 1$, $p' = \infty$.

En effet L est alors somme de dérivées d'ordre $\leqslant k$ de fonctions $m+k$ fois continuement différentiables (resp. mesurables bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m+k$), de supports voisins de l'origine : $L = \sum_{|p|\leqslant k} D^p L_p$.

Alors $\{D^p L_p\}$: $\mathcal{D}_K^k \xrightarrow{D^p} \mathcal{D}_K^0 \xrightarrow{\{L_p\}} \mathcal{D}_H^{m+k}$ est nucléaire (resp. intégrale).

Pour une dimension n quelconque, cette conclusion ne semble pas valable pour $k > 0$. On peut, semble-t-il, seulement affirmer que L est somme de dérivées d'ordre $\leqslant k+1$ de fonctions $m+k$ fois continuement différentiables, si L est mesurable bornée ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$; on pourra seulement dire que, si L est de support assez voisin de l'origine, et mesurable bornée ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$, $\{L\}$ est nucléaire de $\mathcal{D}_K^{k+1}$ dans $\mathcal{D}_H^{m+k}$.

Proposition 23 *bis*. — *Soient* K *un compact de* R^n, H *un voisinage ouvert ou fermé de* K. *L'injection canonique de* $\mathcal{D}_K^{m+n+1}$ (*resp.* $\mathcal{D}_K^{m+n}$) *dans* $\mathcal{D}_H^m$ ([1]) *est un opérateur nucléaire* (*resp. intégral, si n est impair ou* $m=0$).

1° Si $H \subset H'$, l'injection $\mathcal{D}_K^{m+n+1} \to \mathcal{D}_{H'}^m$, se factorise en $\mathcal{D}_K^{m+n+1} \to \mathcal{D}_H^m \to \mathcal{D}_{H'}^m$, donc on peut se borner, pour la démonstration, à supposer H compact; alors $\mathcal{D}_H^m$ est un espace de Banach.

Mais on sait que δ est somme de dérivées d'ordre $\leqslant m+n+1$ de fonctions de $\mathcal{D}^m$ (voir lemme, 1°), dont on peut supposer les supports assez voisins de l'origine pour qu'elles opèrent, par convolution, de $\mathcal{E}'_K$ dans $\mathcal{E}'_H$:

$$\delta = \sum_{|p|\leqslant m+n+1} D^p L_p.$$

Alors l'injection canonique de $\mathcal{D}_K^{m+n+1}$ dans $\mathcal{D}_H^m$ est somme des opérations de convolution $\{D^p L_p\}$, qui elles-mêmes se factorisent en $\mathcal{D}_K^{m+n+1} \xrightarrow{D^p} \mathcal{D}_K^0 \xrightarrow{\{L_p\}} \mathcal{D}_H^m$, et comme les opérations $\{L_p\}$ sont nucléaires, d'après la proposition 23, l'injection $\mathcal{D}_K^{m+n+1} \to \mathcal{D}_H^m$ est bien nucléaire.

2° Si n est impair ou $m=0$, on a vu (lemme, 2°) que δ est somme de dérivées d'ordre $\leqslant m+n$ de fonctions qui sont

([1]) Nous montrons que l'injection de $\mathcal{D}_K^{m+n+1}$ dans $\mathcal{D}_H^m$ est nucléaire. L'image de $\mathcal{D}_K^{m+n+1}$ par cette injection est en fait dans $\mathcal{D}_K^m$; mais cela n'entraîne pas que l'injection de $\mathcal{D}_K^{m+n+1}$ dans $\mathcal{D}_K^m$ soit nucléaire, et nous ne pensons pas que cette propriété soit exacte.

bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$, et de supports assez voisins de l'origine pour opérer par convolution de $\mathcal{E}'_{\mathrm{K}}$ dans $\mathcal{E}'_{\mathrm{H}}$; alors la même méthode que ci-dessus montre que l'injection $\mathcal{D}^{m+n}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{m}_{\mathrm{H}}$ est intégrale.

Nous ignorons si cette conclusion subsiste pour une dimension n paire et $m \neq 0$.

Remarques. — Cette proposition ne peut pas être très améliorée. Elle montre que l'injection $\mathcal{D}^{n+1}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est nucléaire. Nous allons voir réciproquement que, si l'injection $\mathcal{D}^{k}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est nucléaire, l'intérieur de K n'étant pas vide, alors toute distribution S, dont les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont des mesures, est une fonction continue; d'après le lemme, 3°, cela n'est donc possible que pour $k \geqslant n$, et $k \geqslant n + 1 = 2$ si $n = 1$. Ainsi l'injection $\mathcal{D}^{n-1}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ n'est pas nucléaire, et l'injection $\mathcal{D}^{n}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ n'est pas nucléaire si $n = 1$; nous ignorons si l'injection $\mathcal{D}^{n}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est ou n'est pas nucléaire pour $n > 1$.

De même $\mathcal{D}^{n}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est intégrale. Nous allons voir réciproquement que, si l'intérieur de K n'est pas vide et si $\mathcal{D}^{k}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est intégrale, toute distribution S, dont les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont des mesures, est une fonction localement bornée. D'après le lemme, 4°, cela n'est donc possible que pour $k \geqslant n$; donc $\mathcal{D}^{n-1}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ n'est pas intégrale. En résumé :

$\mathcal{D}^{n+1}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est nucléaire;

$\mathcal{D}^{n}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est intégrale, et pour $n = 1$ n'est certainement pas nucléaire;

$\mathcal{D}^{n-1}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ n'est pas intégrale.

Donnons la démonstration dans le cas nucléaire, l'autre étant analogue. Supposons donc l'injection $\mathcal{D}^{k}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ nucléaire, l'intérieur $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$ de K n'étant pas vide. Soit S une distribution dont les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont des mesures. Le problème étant purement local, on peut, en remplaçant au besoin S par αS, $\alpha \in \mathcal{D}$, supposer que le support de S est compact; on peut même, par translation, supposer que ce support est assez voisin de l'origine pour que la convolution $\{S\}$ opère de $\mathcal{E}'_{\mathrm{K}_1}$ dans $\mathcal{E}'_{\mathrm{K}}$, K_1 étant un compact d'intérieur non vide contenu dans K. Alors $\{S\}$ opère continuement de $\mathcal{D}^{0}_{\mathrm{K}_1}$ dans $\mathcal{D}^{k}_{\mathrm{K}}$, du fait que les dérivées d'ordre $\leqslant k$ de S sont des mesures; donc $\{S\}$: $\mathcal{D}^{0}_{\mathrm{K}_1} \xrightarrow{\{S\}} \mathcal{D}^{k}_{\mathrm{K}} \to \mathcal{D}^{0}_{\mathrm{H}}$ est nucléaire. D'après la proposition 23, cela prouve bien que S est une fonction continue.

COROLLAIRE 1. — *Quels que soient le compact* K *de* R^n *et l'entier* m, *l'injection canonique de* $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}$ *dans* $\mathfrak{D}^m$ *et l'injection canonique de* $\mathfrak{D}_K$ *dans* $\mathfrak{D}^m$ *sont nucléaires.*

COROLLAIRE 2. — *L'injection canonique de* $\mathcal{E}^{m+n+1}$ *dans* $\mathcal{E}^m$ *est un opérateur sous-nucléaire.*

Soit en effet $\mathcal{V}$ un voisinage disqué de 0 dans $\mathcal{E}^m$; il existe un compact K de R^n tel que l'image $f^\bullet$ de $f \in \mathcal{E}^m$ dans $\mathcal{E}^m_{\mathcal{V}}$ ne dépende que des valeurs de f et ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ sur K. Soit alors $\alpha \in \mathfrak{D}$, de support H, égale à 1 sur un voisinage de K, et soit $[\alpha]$ l'opérateur de multiplication par α. L'application canonique $\mathcal{E}^{m+n+1} \to \mathcal{E}^m \to \hat{\mathcal{E}}^m_{\mathcal{V}}$ peut se factoriser en

$$\mathcal{E}^{m+n+1} \xrightarrow{[\alpha]} \mathfrak{D}_H^{m+n+1} \to \mathfrak{D}^m \to \mathcal{E}^m \to \hat{\mathcal{E}}^m_{\mathcal{V}};$$

comme $\mathfrak{D}_H^{m+n+1} \to \mathfrak{D}^m$ est nucléaire (corollaire 1), $\mathcal{E}^{m+n+1} \to \hat{\mathcal{E}}^m_{\mathcal{V}}$ est bien nucléaire, et $\mathcal{E}^{m+n+1} \to \mathcal{E}^m$ sous-nucléaire, c.q.f.d.

Appliquons maintenant la proposition 10 à $\mathcal{K} = \mathfrak{D}_K^{m+n+1}$, K compact de R^n, $\mathcal{H} = \mathfrak{D}_H^m$, H voisinage compact de K. Nous prendrons pour Λ l'injection canonique, nucléaire, de $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}$ dans $\mathfrak{D}_H^m$. Pour pouvoir appliquer la proposition 10, nous avons besoin d'une certaine propriété d'approximation relative soit à $\mathcal{K}$, soit à $\mathcal{H}$. On ne sait pas si $\mathcal{K}$ la possède (si $\mathcal{U}$ est la boule unité de $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}$, il faudrait que

$\mathcal{K}'_{\mathcal{U}^\circ} = (\mathfrak{D}_K^{m+n+1})'$ fort ait la propriété d'approximation; on ne sait pas s'il en est ainsi). Montrons que $\mathcal{H}$ la possède. $\mathcal{V}$ étant la boule unité de $\mathfrak{D}_H^m$, nous allons montrer que $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}$ a la propriété d'approximation :

LEMME. — $\mathfrak{D}_H^m$ *a la propriété d'approximation stricte, pour* H *compact de* R^n.

Considérons d'abord le sous-espace $\mathcal{L}^0(\mathfrak{D}_H^m; \mathfrak{D}_H^m) = \bigcup_{K \subset \mathring{H}} \mathcal{L}(\mathfrak{D}_H^m; \mathfrak{D}_K^m)$ de $\mathcal{L}_c(\mathfrak{D}_H^m; \mathfrak{D}_H^m)$; et montrons qu'il est strictement adhérent à l'identité I. Soit $d > 0$; on sait qu'on peut prouver une fonction α_d de $\mathfrak{D}$, de support intérieur à H, égale à 1 en tous les points de H dont la distance à $\complement \mathring{H}$ est $\geqslant d$, et vérifiant

$$\text{(II, 4; 24)} \qquad |D^p(\alpha_d - 1)| \leqslant \frac{C}{|d|^p},$$

où C est une constante absolue (ne dépendant que de m et n) [1].

Soit $[\alpha_d]$ l'opération de multiplication par α_d. Elle appartient bien à $\mathcal{L}^0(\mathcal{D}^m_{\mathrm{H}}; \mathcal{D}^m_{\mathrm{H}})$, et nous allons montrer que $[\alpha_d]$ tend vers I dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_{\mathrm{H}}; \mathcal{D}^m_{\mathrm{H}})$ lorsque d tend vers 0, ce qui montrera notre assertion ci-dessus (en prenant pour d les nombre $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\nu}, \ldots$)

Soit $\mathfrak{M}$ un compact de $\mathcal{D}^m_{\mathrm{H}}$. D'après le théorème d'Ascoli [2], les dérivées $\mathrm{D}^p\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $|p| \leqslant m$, forment un ensemble équicontinu de fonctions numériques sur R^n. Si donc, pour tout $d > 0$, on pose

$$\eta(d, \mathfrak{M}) = \sup_{\substack{|p|\leqslant m,\ \varphi \in \mathfrak{M} \\ |x'-x''|\leqslant d}} |\mathrm{D}^p\varphi(x') - \mathrm{D}^p\varphi(x'')|,$$

$\eta(d, \mathfrak{M})$ converge vers 0 quand d converge vers 0. Comme φ et ses dérivées sont nulles sur la frontière $\dot{\mathrm{H}}$ de H dans R^n, on voit que, si $x \in \mathrm{R}^n$ est à une distance $\leqslant d$ de $\complement \mathring{\mathrm{H}}$, on a $|\mathrm{D}^p\varphi(x)| \leqslant \eta(d, \mathfrak{M})$ pour $|p| \leqslant m$, $\varphi \in \mathfrak{M}$.

La formule d'intégration

$$(\mathrm{II},\ 4;\ 25) \qquad \mathrm{D}^p\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathrm{D}^p\varphi(\xi)\right) d\xi_i$$

(intégrale prise sur un chemin rectiligne de x_0 à x, $x_0 \in \dot{\mathrm{H}}$) montre, de proche en proche, successivement pour $|p| = m-1$, $m-2, \ldots$, que l'on a la majoration

$$(\mathrm{II},\ 4;\ 26) \qquad |\mathrm{D}^p\varphi(x)| \leqslant (d\sqrt{n})^{m-|p|}\eta(d, \mathfrak{M}),$$

pour $|p| \leqslant m$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, x à une distance $\leqslant d$ de $\complement \mathring{\mathrm{H}}$.

On a alors, d'après la formule de Leibniz :

$$(\mathrm{II},\ 4;\ 27) \quad |\mathrm{D}^p(\alpha_d\varphi - \varphi)| \leqslant \sum_{q \leqslant p} \binom{p}{q} |\mathrm{D}^q(\alpha_d - 1)|\,|\mathrm{D}^{p-q}\varphi|$$
$$\leqslant \sup_{q<p} \frac{\mathrm{C}2^{|p|}}{d^{|q|}} (d\sqrt{n})^{m-|p|+|q|}\eta(d, \mathfrak{M}) \leqslant \mathrm{C}(2\sqrt{n})^m d^{m-|p|}\eta(d, \mathfrak{M}),$$

pour $\varphi \in \mathfrak{M}$, $|p| \leqslant m$.

(1) Soit H_1 l'intersection de $\complement \mathrm{H}$ et d'une boule de rayon assez grand pour contenir un voisinage de H. H_1 est compact. On peut relativement à H_1, construite une fonction α_1 vérifiant les formules (III, 7; 15 et 16) de Schwartz [4]. On pourra alors prendre ici $\alpha_d = 1 - \alpha_1$ dans H, $= 0$ dans $\complement \mathrm{H}$.

(2) Bourbaki [3], chapitre x, § 4, n° 1, proposition 1, au moins pour $m = 0$.

Puisque $\eta(d, \mathcal{M})$ converge vers 0 avec d, on voit bien que $[\alpha_d] - I$ converge vers 0 uniformément sur $\mathcal{M}$, donc dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_H)$, lorsque d tend vers 0.

Pour montrer que $\mathcal{D}^m_H$ a la propriété d'approximation stricte, il suffit donc de montrer que $(\mathcal{D}^m_H)' \otimes \mathcal{D}^m_H$ est, dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_H)$, strictement dense dans $\mathcal{L}^0(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_H)$. Soit donc K un compact de $\mathring{H}$, et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_K)$. On sait que $\mathcal{D}^m$ a la propriété d'approximation stricte (préliminaires, corollaire de la proposition 3). Donc $u \in \mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_K)$ est strictement adhérente, dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m)$, à l'espace des applications linéaires continues de rang fini. Soit $\alpha \in \mathcal{D}_H$ une fonction égale à 1 sur un voisinage de K. La multiplication $[\alpha]$ est continue de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{D}^m_H$; donc $v \to [\alpha] \circ v$ est continue de $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m)$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_H)$; alors $[\alpha] \circ u = u \in \mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_K)$ est strictement adhérente, dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m_H; \mathcal{D}^m_H)$, à l'espace des applications linéaires continues de rang fini, ce qui finalement démontre la proposition.

Appliquons alors la proposition 10. Soient $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'^m_c(F)$, E et F non nécessairement quasi-complets.

Choisissons un compact K contenant le support de $\vec{\varphi}$, alors $\vec{\varphi}_K = \vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}_K(E)$, et choisissons aussi un voisinage compact H de K. Appelons $\vec{T}_H$ l'image de $\vec{T}$ par $\mathcal{D}'^m \to (\mathcal{D}^m_K)'$ ($\vec{T}_H$ n'est pas une distribution, car $\mathcal{D}^m_H$ n'est pas normal). Par hypothèse, $\vec{T}_H$ est dans $(\mathcal{D}^m_H)'_c(F; \beta_0)$ (puisque $\mathcal{D}^m_H$ est un Banach (1)). Soit Λ l'injection nucléaire $\mathcal{D}^{m+n+1}_K \to \mathcal{D}^m_H$. On peut alors calculer $\vec{\varphi}_K \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}_H \in E \hat{\otimes}_\iota F$.

D'après la méthode indiquée à la page 58, $\vec{\varphi}_K \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}_H$ n'est autre que $(L_{\vec{\varphi}} \otimes L_{\vec{T}})\zeta_{K,H}$, où $\zeta_{K,H} \in (\mathcal{D}^{m+n+1}_K)' \hat{\otimes}_\iota \mathcal{D}^m_H$ est l'élément qui définit l'injection nucléaire Λ. A priori cet élément dépend non seulement de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$, mais encore de K et H.

Nous allons voir qu'il n'en dépend pas. Soient H_1, K_1, et H_2, K_2, deux couples possibles; posons $K = K_1 \cap K_2$, $H = H_1 \cap H_2$, H est encore un voisinage compact de K, et $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}_K(E)$.

(1) L'image de la boule unité, partie bornée complétante de $\mathcal{D}^m_H$, doit en effet être bornée complétante dans F.

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{D}_{K_1}^{m+n+1} \arrow[dr, "\Lambda_1"] & \\ \mathfrak{D}_{K}^{m+n+1} \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & \mathfrak{D}_{H_1}^{m} \\ & \mathfrak{D}_{H}^{m} \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

où toutes les opérations sont les injections naturelles, u et v continues, Λ et Λ_1 nucléaires. La formule (II, 4; 7) donne alors

$$\vec{\varphi}_{K_1} \cdot_{\iota;\Lambda_1} \vec{T}_{H_1} = \vec{\varphi}_{K} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}_{H}.$$

Le même raisonnement montre que

$$\vec{\varphi}_{K_2} \cdot_{\iota;\Lambda_2} \vec{T}_{H_2} = \vec{\varphi}_{K} \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}_{H},$$

ce qui prouve bien l'indépendance démandée. De manière analogue, on voit que l'élément obtenu est indépendant de m, pourvu que $\vec{\varphi} \in \overline{\mathfrak{D}^{m+n+1}}(E)$ et que $\vec{T}$ soit dans $\mathfrak{D}_c'^{m}(F)$; et si $\vec{\varphi} \in \overline{\mathfrak{D}}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ est l'élément défini à la proposition 20 *bis*. On peut donc noter $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$ l'élément $\vec{\varphi}_K \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}_H$ de $E \hat{\otimes}_\iota F$ calculé avec m, K, H, quelconques. De plus nous voyons que $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T} = \vec{0}$, si les supports de $\vec{\varphi}$ et $\vec{T}$ sont sans point commun, car alors on peut choisir K contenant le support de $\vec{\varphi}$, et H voisinage compact de K sans point commun avec le support de $\vec{T}$, de sorte que $\vec{T}_H = 0$.

Etudions les propriétés de continuité. Soit $\mathfrak{C}$ un ensemble saturé de parties bornées complétantes de F. La proposition 14 montre que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{C}} \vec{T}$ converge vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{C}} F$, si $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans un $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}(E)$, tandis que $\vec{T}$ parcourt une partie localement $\mathfrak{C}$-équibornée de $\mathfrak{D}_c'^{m}(F)$ (car alors $\vec{T}_H$ parcourt une partie $\mathfrak{C}$-équibornée de $(\mathfrak{D}_H^m)_c'(F)$). Comme $\mathfrak{D}_H^m$ est un Banach, une partie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{D}_c'^{m}(F)$ est localement $\mathfrak{C}$-équibornée si et seulement si, quelle que soit la partie bornée D de $\mathfrak{D}^m$, $\bigcup_{\vec{T} \in \mathfrak{B}} L_{\vec{T}}(D)$ appartient à $\mathfrak{C}$; si $\mathfrak{C}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de F, cela signifie simplement que $\mathfrak{B}$ est bornée dans $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}^m; F)$, ou dans $\mathfrak{D}_c'^{m}(F) = \mathfrak{L}_c(\mathfrak{D}^m; F)$, puisque $\mathfrak{D}^m$ est complet [1].

[1] Bourbaki [2], chapitre III, § 3, n° 4, corollaire 1 du théorème I.

Un raisonnement analogue à celui de la page 87 montre alors que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}$ converge encore vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, si $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\overline{\mathfrak{D}^{m+n+1}}(E)$ (muni de la toplogie limite inductive des $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}(E)$) et que $\vec{T}$ parcoure une partie localement $\mathfrak{T}$-équibornée de $\mathfrak{D}_c'^m(F)$.

[Mais si $\vec{T}$ est dans $\mathfrak{D}_c'^m(F; \mathfrak{T})$ et que l'on cherche seulement $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T} \in E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, on peut appliquer la proposition 17 au lieu de la proposition 10; car on sait (proposition 23 *bis*) que l'injection canonique de $\mathfrak{D}_K^{m+n}$ dans $\mathfrak{D}_H^m$ est intégrale, pour n impair ou $m = 0$. Si $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\overline{\mathfrak{D}^{m+n}}(E)$ et que $\vec{T}$ reste dans une partie localement $\mathfrak{T}$-équibornée de $\mathfrak{D}_c'^m(F)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}$ converge encore vers 0.]

Soit maintenant $\mathfrak{S}$ un ensemble saturé de parties bornées de E. La proposition 12 (compte tenu de ce que Λ est non seulement sous-nucléaire de $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}$ dans $\mathfrak{D}_H^m$ mais même nucléaire) montre que $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ converge vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$, quand $\vec{\varphi}$ parcourt une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\overline{\mathfrak{D}^{m+n+1}}(E)$ (ce qui veut dire du type $\mathfrak{S}$ dans un $\mathfrak{D}_K^{m+n+1}(E)$), et que $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathfrak{D}_c'^m(F)$.

D'après la proposition 24 du chapitre I, $\vec{T} \in \mathfrak{D}_c'^m(F)$ est égale à une somme de dérivées d'ordre $\leqslant m + n + 1$ de fonctions continues : $\vec{T} = \sum_{|p| \leqslant m+n+1} D^p \vec{f}_p$.

On peut toujours supposer, si $\vec{T}$ est localement $\mathfrak{T}$-bornée, que l'image $\vec{f}_p(H)$ d'un voisinage H du support K de $\vec{\varphi}$ appartient à $\mathfrak{T}$. Alors on aura

$$(\text{II}, 4; 35)\,[1] \quad \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T} = \int_{R^n} \sum_{|p| \leqslant m+n+1} (-1)^{|p|} \big(D^p \vec{\varphi}(x) \otimes_{\mathfrak{T}} \vec{f}_p(x)\big)\, dx,$$

la fonction à intégrer étant continue à support dans K (puisque $(\vec{e}, \vec{f}) \rightarrow \vec{e} \otimes_{\mathfrak{T}} \vec{f}$ est continue sur le produit de E par une partie de F appartenant à $\mathfrak{T}$). La formule (II, 4; 35) ne peut pas se démontrer par application mécanique de la formule (II, 4; 15). Il faudrait en effet passer par l'intermédiaire de

$$(\text{II}, 4; 36) \quad \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T} = \sum_{|p| \leqslant m+n+1} (-1)^{|p|} D^p \vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{f}_p.$$

[1] **Pour des raisons techniques tenant à des corrections de dernier moment, les formules (II, 7; 29 à 34) n'existent pas.**

Or la théorie précédente ne donne pas directement un sens à $D^p\vec{\varphi} \cdot_{\mathcal{C}} \vec{f}_p$ pour $D^p\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^0_K(E)$, $\vec{f}_p \in \mathcal{E}^0(F)$, car $\mathcal{E}^0(F) = (\mathcal{E}'^0_c)'_c(F)$, et l'injection $\mathcal{D}^0_K \to \mathcal{E}'^0_c$ n'est pas nucléaire (elle est par contre intégrale, puisqu'elle se factorise en

$$\mathcal{D}^0_K \to L^\infty_K \to L^1_K \to \mathcal{E}'^0_c,$$

et que $L^\infty_K \to L^1_K$ est intégrale [1]).

Démontrons donc directement (II, 4; 35). Comme les deux membres dépendent seulement de $\vec{T}$ et des $\vec{f}_p$ au voisinage du support de $\vec{\varphi}$, on peut toujours supposer $\vec{T} \in \mathcal{E}'_c(F; \mathcal{C})$, $\vec{f}_p \in \overline{\mathcal{D}^0}(F)$, avec $\vec{f}_p(R^n) \in \mathcal{C}$. Pour $\vec{T}$ et les $\vec{f}_p$ ainsi fixés, les 2 membres de (II, 4; 35) dépendent continuement de $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$ (nous l'avons vu plus haut pour le premier membre; c'est trivial pour le deuxième, car si $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans un $\mathcal{D}^{m+n+1}_K(E)$, $D^p\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^0_K(E)$, et $(\vec{f}_p K) \in \mathcal{C}$, donc $D^p\vec{\varphi}(\hat{x}) \otimes_{\mathcal{C}} \vec{f}_p(\hat{x})$ converge vers 0 uniformément sur R^n en gardant son support dans K, donc son intégrale converge vers 0), et sont égaux sur le sous-espace dense $\mathcal{D}^{m+n+1} \otimes E$ de $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}(E)}$ (pour $\vec{\varphi} = \psi \otimes \vec{e}$, $\psi \in \mathcal{D}^{m+n+1}$, $\vec{e} \in E$, le premier membre vaut $\vec{e} \otimes L_{\vec{T}}(\psi)$ d'après (II; 4; 6), le deuxième membre vaut

$$\vec{e} \otimes \int_{R^n} \sum_{|p| \leq m+n+1} (-1)^{|p|} D^p\psi(x) \vec{f}_p(x)\, dx.$$

Or il est équivalent d'écrire $\vec{T} = \sum D^p \vec{f}_p$ ou d'écrire

$$L_{\vec{T}}(\psi) = \int_{R^n} \sum_p (-1)^{|p|} D^p\psi(x) \vec{f}_p(x)\, dx$$

pour toute $\psi \in \mathcal{D}$, donc aussi pour toute $\psi \in \mathcal{D}^{m+n+1}$ par passage à la limite), donc ils sont égaux toujours.

[Remarquons que nous n'avons pas supposé E quasi-complet. Alors une fonction $\vec{\varphi}$, $m+n+1$ fois continuement différentiable à support compact, appartient à $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(\hat{E})$, mais n'appartient pas nécessairement à $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$ (à moins de vérifier la condition Φ'_{m+n+1} de la page 57). Mais la méthode de

[1] Voir note [1] page 110.

la page 94 permet toujours de définir un élément $\vec{\varphi} \cdot_{\theta} \vec{T}_0$ de $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$, si $\vec{T}$ est localement $\mathfrak{T}$-bornée].

On peut finalement énoncer :

Proposition 24. — *Soient* E, F, *des espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On peut définir un élément* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota} \vec{T}$ *de* $E \hat{\otimes}_{\iota} F$, *pour* $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'^m_c(F)$ *(m fini). L'application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot \vec{T}$ *est compatible avec les applications linéaires continues de* E *et* F. *Si* $\vec{\varphi}$ *parcourt une partie bornée de* $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$ *et* $\vec{T}$ *une partie localement* β_0*-équibornée de* $\mathcal{D}'^m_c(F)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\iota} \vec{T}$ *reste dans une partie bornée de* $E \hat{\otimes}_{\iota} F$. *Le produit* $\vec{\varphi} \cdot_{\iota} \vec{T}$ *est nul si les supports de* $\vec{\varphi}$ *et* $\vec{T}$ *sont sans point commun. Si* $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, $\vec{\varphi} \cdot_{\iota} \vec{T}$ *coïncide avec l'élément défini à la proposition* 20 *bis. Si* $\mathfrak{S}$ *(resp.* $\mathfrak{T}$*) est un ensemble saturé de parties bornées de* E *(resp. bornées complétantes de* F*),* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ *converge vers* 0 *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$ *quand* $\vec{\varphi}$ *parcourt une partie du type* $\mathfrak{S}$ *d'un* $\mathcal{D}^{m+n+1}_K(E)$, *tandis que* $\vec{T}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{D}'^m_c(F)$; $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}$ *converge vers* 0 *dans* $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$ *quand* $\vec{\varphi}$ *converge vers* 0 *dans* $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$, *tandis que* $\vec{T}$ *reste dans une partie localement* $\mathfrak{T}$*-équibornée de de* $\mathcal{D}'^m_c(F)$ *[on peut même définir* $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T} \in E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$ *pour* $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'^m_c(F)$ *localement* $\mathfrak{T}$*-bornée, n impair, ou n pair et* $m = 0$; *la dernière propriété de continuité subsiste dans ce cas, avec* $m + n$ *au lieu de* $m + n + 1$*]. L'application bilinéaire* $(\vec{\varphi}, \vec{T}) \to \vec{\varphi} \cdot_{\beta} \vec{T}$ *(si* F *est quasi-complet, de sorte que toutes les parties bornées sont complétantes) de* $\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E) \times \mathcal{D}'^m_c(F)$ *dans* $E \hat{\otimes}_{\beta} F$ *est la seule qui vérifie* (II, 4; 1) *(avec* $\Lambda =$ *identité), et qui soit hypocontinue par rapport aux parties bornées. Si* $\vec{T}$ *est égale, sur un voisinage du support* K *de* $\vec{\varphi}$, *à une somme finie de dérivées de fonctions continues,* $\vec{T} = \sum_{|p| \leqslant m+n+1} D^p \vec{f}_p$, *avec* $\vec{f}_p(K) \in \mathfrak{T}$, *on a* (II, 4; 35).

On peut démontrer partiellement cette proposition d'une autre manière sans employer le lemme de la page 113. Soient $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'^m_c(F)$ localement $\mathfrak{T}$-bornée. Soit $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage du support de $\vec{\varphi}$. Alors $\alpha\vec{T} \in \mathcal{E}'^m_c(F ; \mathfrak{T})$, et comme $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^{m+n+1}(\mathrm{E})$ et que l'injection de $\mathcal{E}^{m+n+1}$ dans $\mathcal{E}^m$ est sous-nucléaire (corollaire 2 de la proposition 23) donc sous-intégrale, on peut calculer $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{T}} \alpha\vec{\mathrm{T}}$ d'après la proposition 17 ($\mathcal{E}^{m+n+1}$ a la propriété d'approximation stricte, préliminaires, corollaire de la proposition 3). Le résultat ne dépend pas du choix de α. Il est identique à celui qui est obtenu par la méthode précédente [car c'est vrai si $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1} \otimes \mathrm{E}$, et les deux résultats dépendent continuement de $\vec{\varphi}$ pour $\vec{\mathrm{T}}$ fixée; mais ici $\mathfrak{T}$ n'a pas besoin d'être formée de parties bornées complétantes, de sorte que, pour $\mathfrak{T} = \beta$, il est inutile de supposer F quasi-complet].

Mais cette nouvelle méthode ne permet pas d'obtenir $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$ ni même $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{\mathrm{T}}$ (1).

Remarques. — 1° Soit $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^{m+n+1}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \overline{\mathcal{E}'^m}(\mathrm{F})$. Soit $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage du support de $\vec{\mathrm{T}}$. Alors $\alpha\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'^m(\mathrm{F})$, on peut donc appliquer la proposition 24, et calculer $\alpha\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}} \in \mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F}$; le résultat est indépendant du choix de α, on peut l'écrire $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$. Nous laissons au lecteur l'énoncé des propriétés de ce produit scalaire.

Plus généralement si $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^{m+n+1}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'^m(\mathrm{F})$, et si l'intersection des supports de $\vec{\varphi}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ est compacte, on pourra définir $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$ comme $\alpha\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$, $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de l'intersection des supports de $\vec{\varphi}$ et $\vec{\mathrm{T}}$; $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$ sera nulle si l'intersection des supports est vide.

2° La possibilité de remplacer $m + n + 1$ par $m + n$ ou $m + n - 1$ sera discutée au § 8, 2ème contre-exemple.

§ 5. Produit multiplicatif.

Proposition 25. — *Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, 3 espaces de distributions, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ normaux*; E, F, 2 *espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On suppose de plus que $\mathcal{H}$ est nucléaire et de dual fort nucléaire, et qu'il a la propriété*

(1) Ou alors il faudrait démontrer que $\mathcal{E}^{m+n+1}$ a la propriété d'approximation exigée par la proposition 10; c'est probable mais nous ne l'avons pas cherché.

d'approximation stricte. Soit $(S, T) \to ST$ *une multiplication de* $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{L}$[1], μ*-continue,* $\mu \leqslant \gamma$. *On peut définir une multiplication* $(\vec{S}, \vec{T}) \to (\vec{S}\,\vec{T})_\pi$ *(et une seule si* $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation), application bilinéaire de* $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ *dans* $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, *séparément continue et vérifiant:*

$$\text{(II, 5; 1)} \qquad \left((S\vec{e})(T\vec{f})\right)_\pi = ST\vec{e} \otimes f,$$

pour $S \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{K}$, $\vec{e} \in E$, $\vec{f} \in F$. *Cette multiplication est en outre hypocontinue par rapport aux parties bornées de* $\mathcal{H}(E)$, *et aux* μ*-parties de* $\mathcal{K}(F)$*; elle est continue si* $\mu \leqslant \pi$. *Cette application est compatible avec les applications linéaires continues de* E, F *ou de* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$.

Il suffit d'appliquer la proposition 3 à la multiplication de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$.

Exemples. — On peut définir des multiplications, hypocontinues par rapport aux parties bornées, de $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{D}'(F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, de $\mathcal{O}_M(E) \times \mathcal{S}'(F)$ dans $\mathcal{S}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, de $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}'(F)$ dans $\mathcal{O}'_C(E \hat{\otimes}_\pi F)$ (et même dans $\mathcal{O}'_M(E \hat{\otimes}_\pi F)$) [2].

On peut aussi définir une multiplication, hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{E}(E)$ et aux parties compactes de $\mathcal{D}'^m_c(F)$, de $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{D}'^m_c(F)$ dans $\mathcal{D}'^m_c(E \hat{\otimes}_\pi F)$.

On peut aussi appliquer les formules (II, 2; 8).

Alors $\vec{S} \to (\vec{S}\,\vec{T})_\pi$ est la seule application linéaire continue de $\mathcal{H}(E)$ dans $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$ qui vérifie

$$\text{(II, 5; 2)} \quad [(S\,\vec{e})\vec{T}]_\pi = S\Gamma_\pi(\vec{e}, \vec{T}) = \Gamma_\pi(\vec{e}, S\,\vec{T}).$$

Si $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation, $\vec{T} \to (\vec{S}\,\vec{T})_\pi$ est la seule application linéaire continue de $\mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, qui vérifie

$$\text{(II, 5; 2 \textit{bis})} \quad [\vec{S}(T\,\vec{f})]_\pi = \Gamma_\pi(\vec{f}, \vec{S})T = \Gamma_\pi(\vec{S}\,T, \vec{f}).$$

[1] Rappelons (chapitre I, page 70) qu'une multiplication de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ est une application bilinéaire séparément continue, coïncidant sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ avec la multiplication usuelle.

[2] Les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_c$, sont normaux, et ont la propriété d'approximation stricte (préliminaires, corollaire de la proposition 3). Ils sont nucléaires et de dual nucléaire, d'après Grothendieck [5], § 2, n° 3, théorème 10, page 55.

Remarque. — Si, au lieu de $\mathcal{H}$, on suppose que c'est $\mathcal{K}$ qui est nucléaire et le dual nucléaire, et a la propriété d'approximation stricte, on peut aussi définir $(\vec{S}\ \vec{T})_\pi \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, pour $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$. Pour le définir, on appliquera la proposition 25. à la multiplication de $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$ déduite par symétrie de la multiplication donnée; à l'élément obtenu $(\vec{T}\ \vec{S})_\pi \in \mathcal{L}(F \hat{\otimes}_\pi E)$, on appliquera la symétrie canonique $F \hat{\otimes}_\pi E \rightarrow E \hat{\otimes}_\pi F$.

Si alors $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ ont tous deux ces propriétés, on peut définir deux produits; mais il coïncident sur $(\mathcal{H} \otimes E) \times (\mathcal{K} \otimes F)$, et sont séparément continus, donc coïncident partout. On peut donc employer la même notation $(\vec{S}\vec{T})_\pi$ pour ces deux produits.

Associativité de la multiplication.

Proposition 25 *bis.* — *Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ des espaces de distributions normaux. Supposons qu'il existe des multiplications de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{M}$, de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{N}$, de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}'$, de $\mathcal{H} \times \mathcal{N}$ dans $\mathcal{D}'$, et qu'on ait la relation d'associativité*

(II, 5; 3) $\quad (RS)T = R(ST), \quad$ pour $\quad R \in \mathcal{H}, \quad S \in \mathcal{K}, \quad T \in \mathcal{L}.$

Supposons d'autre part vérifiées les conditions énoncées dans la proposition 25, *pour que ces diverses multiplications puissent s'étendre aux distributions vectorielles, et supposons que $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, aient la propriété d'approximation. Alors on aura aussi* :

(II, 5; 3 *bis*) $\quad ((\vec{R}\vec{S})_\pi\vec{T})_\pi = (\vec{R}(\vec{S}\vec{T})_\pi)_\pi \in (E \otimes F \otimes G)^\wedge_\pi,$

pour $\vec{R} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{S} \in \mathcal{K}(F)$, $\vec{T} \in \mathcal{L}(G)$ (*en identifiant* $(E \hat{\otimes}_\pi F) \hat{\otimes}_\pi G$ *et* $E \hat{\otimes}_\pi (F \hat{\otimes}_\pi G)$ à $(E \otimes F \otimes G)^\wedge_\pi$).

En effet les 2 membres de (II, 5; 3) définissent des applications trilinéaires sur $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F) \times \mathcal{L}(G)$, hypocontinues par rapport aux parties compactes, et qui coïncident sur $(\mathcal{H} \otimes E) \times (\mathcal{K} \otimes F) \times (\mathcal{L} \otimes G)$, produit de sous-espaces denses (proposition 11 du chapitre I); donc elles coïncident partout.

Cas où l'un des facteurs est une fonction indéfiniment dérivable.

Il existe des produits multiplicatifs de 2 distributions scalaires, dont aucune n'est une fonction indéfiniment dérivable.

Par exemple on peut définir une multiplication de $\mathcal{E}^m \times \mathcal{D}'^m_c$ dans $\mathcal{D}'^m_c$. Mais nous voulons ici que $\mathcal{H}$ soit nucléaire; dans tous les cas pratiques, $\mathcal{H}$ est ou bien un espace de fonctions indéfiniment dérivables, ou bien un espace de distributions d'ordre non borné, auquel cas $\mathcal{K}$ est un espace de fonctions indéfiniment dérivables.

Nous ne restreindrons donc pas la généralité pratique des résultats obtenus en supposant que $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{K}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite. On a alors le résultat suivant :

Proposition 26. — *Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite, le produit $(\vec{\alpha}\ \vec{\mathrm{T}})_\pi \in \mathcal{D}'(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{F})$ est le même, que l'on considère $\vec{\alpha}$ comme élément de $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}}$ comme élément de $\mathcal{K}(\mathrm{F})$, ou que l'on considère $\vec{\alpha}$ comme élément de $\mathcal{E}(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}}$ comme élément de $\mathcal{D}'(\mathrm{F})$. Résultat symétrique si c'est $\mathcal{K}$ qui est un sous-espace de $\mathcal{E}$.*

Remarquons d'abord que la chose est évidente si E et F sont le corps des scalaires. $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont en effet normaux; on peut donc trouver des $\alpha_j \in \mathcal{D}$ (resp. des $\mathrm{T}_k \in \mathcal{D}$) convergeant vers $\alpha \in \mathcal{H}$(resp. $\mathrm{T} \in \mathcal{K}$). On a, pour chacun des deux produits : $\alpha\mathrm{T} = \lim\limits_j \left(\lim\limits_k \alpha_j \mathrm{T}_k\right)$, et sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ les deux produits coïncident avec la multiplication usuelle.

Mais alors le cas vectoriel en résulte aussitôt, puisque le produit est compatible avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \times \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{E} \times \mathcal{D}' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{D}' & \end{array}$$

donne naissance au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{K}(\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathrm{E}) \times \mathcal{D}'(\mathrm{F}) \\ & \searrow \qquad \swarrow & \\ & \mathcal{D}'(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi\, \mathrm{F}) & \end{array} ,$$

ce qui démontre la proposition.

Remarques. — 1° Même si l'on n'a ni $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, ni $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, le produit $(\vec{\mathrm{S}}\,\vec{\mathrm{T}})_\pi$ ne dépend que de $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$ et non de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, pourvu que l'un de ces deux espaces ait la propriété d'approximation par troncature et régularisation. Nous laissons au lecteur le soin de le montrer en s'inspirant du raisonnement de la page 43.

Il en est de même, sans rien supposer sur $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{K}$, si $\vec{S} \in \mathcal{D}(E)$ ou si $\vec{T} \in \mathcal{D}(F)$, d'après le raisonnement déjà utilisé page 123 (parce que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{K}$, avec une topologie plus fine que la topologie induite).

Si l'on ne fait pas d'hypothèse spéciale sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, mais si l'on sait que $\vec{S} \in \mathcal{E}(E)$, peut on dire que $(\vec{S}\,\vec{T})_\pi$ soit nécessairement le même, pour $\vec{S}$ consédéré comme élément de $\mathcal{H}(E)$, $\vec{T}$ considéré comme élément de $\mathcal{K}(F)$, et pour $\vec{S}$ considéré comme élément de $\mathcal{E}(E)$, $\vec{T}$ considéré comme élément de $\mathcal{D}'(F)$? Nous ne le pensons pas.

2° Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont tous deux contenus dans $\mathcal{E}$, avec une topologie plus fine que la topologie induite, la multiplication sur $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ est induite par la multiplication sur $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}(F)$, car, d'après la proposition 26, toutes deux sont induites par la multiplication sur $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{D}'(F)$; la multiplication de $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{E}(E \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} F)$ est par ailleurs la multiplication triviale $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \to \vec{\alpha}(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{\beta}(\hat{x})$, comme on le voit immédiatement (c'est aussi un cas particulier de ce qui sera démontré à la proposition 28).

Problèmes de support.

Proposition 27. — *Si* $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, *le support de* $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_\pi$ *est contenu dans l'intersection des supports de* $\vec{\alpha}$ *et de* $\vec{T}$ *(donc la valeur de* $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_\pi$ *ne dépend que de la valeur de* $\vec{\alpha}$ *sur un voisinage arbitraire du support de* $\vec{T}$*).*

Soient A et B les supports de $\vec{S}$ et $\vec{T}$, $A \cap B = K$.

Alors la multiplication induit une application bilinéaire séparément continue de $\mathcal{E}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ [1] dans $\mathcal{D}'(E \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} F)$; mais l'image de $(\mathcal{E}_A \otimes E) \times (\mathcal{D}'_B \otimes F)$ est dans $\mathcal{D}'_K(F)$, fermé dans $\mathcal{D}'(F)$; comme $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{D}'_B$, sous-espace d'espaces nucléaires,

[1] Rappelons que, si A est une partie fermée de R^n, $\mathcal{H}$ un espace de distributions sur R^n, $\mathcal{H}_A$ est le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des distributions sur R^n de support dans A; il est donc toujours considéré comme muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H}_A(E) = \mathcal{H}_A \varepsilon E$ est le sous-espace de $\mathcal{H}(E)$ formé des distributions de $\mathcal{H}(E)$ de support dans A.

sont nucléaires, donc ont la propriété d'approximation [1], $\mathcal{E}_A \otimes E$ est dense dans $\mathcal{E}_A(E)$, $\mathcal{D}'_B \otimes F$ est dense dans $\mathcal{D}'_B(F)$, donc l'image de $\mathcal{E}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ est aussi contenue dans $\mathcal{D}'_K(F)$.

Formule de dérivation du produit.

Proposition 28. — *On a la formule*

$$\text{(II, 5; 4)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi = \left(\frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x_i}\vec{T}\right)_\pi + \left(\vec{\alpha}\frac{\partial \vec{T}}{\partial x_i}\right)_\pi,$$

pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$.

Les 2 membres définissent en effet des formes bilinéaires séparément continues sur $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{D}'(F)$, et qui coïncident sur $(\mathcal{E} \otimes E) \times (\mathcal{D}' \otimes F)$, produit de sous-espaces denses, donc partout.

Cas où $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont toutes les deux des fonctions. Notation fonctionnelle du produit.

Proposition 29. — *Si* $\vec{f} \in \mathcal{E}(E)$, *et si* $\vec{g} \in \mathcal{D}'(F)$ *est une fonction localement intégrable, alors* $(\vec{f}\vec{g})_\pi$ *est la fonction localement intégrable* $\vec{f}(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{g}(\hat{x})$ *($\otimes_\pi$ veut dire qu'on la considère comme prenant ses valeurs dans* $E \hat{\otimes}_\pi F$).

Les deux applications : $(\vec{f}, \vec{g}) \to (\vec{f}, \vec{g})_\pi$ et $(\vec{f}, \vec{g}) \to f(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{g}(\hat{x})$, sont des applications bilinéaires de $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{L}^1(F)$ dans $\mathcal{L}^1(E \hat{\otimes}_\pi F)$ séparément continues, qui coïncident sur $(\mathcal{E} \otimes E) \times (\mathcal{L}^1 \otimes F)$, donc partout.

C'est pourquoi nous emploierons dans tous les cas la notation fonctionnelle : pour $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, *dans les conditions d'application de la proposition* 25, *nous noterons toujours par* $\vec{S}(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{T}(\hat{x})$ *le produit* $(\vec{S}\vec{T})_\pi$ [2] :

$$\text{(II, 5; 5)} \qquad (\vec{S}\vec{T})_\pi = S(\hat{x}) \otimes_\pi T(\hat{x}).$$

[1] $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}'$ sont nucléaires (note [2], page 121). Un sous-espace d'un espace nucléaire est nucléaire (Grothendieck [5], § 2, n° 2, théorème 9. 1, page 47, ou Schwartz [2], exposé 18, proprosition 4). Tout espace nucléaire a la propriété d'approximation (voir note [1] page 58).

[2] Cette notation pourra donc se trouver contradictoire : si $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions $\vec{f}$ et $\vec{g}$, si l'on a les conditions de la proposition 25 mais non celles de la proposition 29, il se pourra que $(\vec{S}\vec{T})_\pi$, que nous aurons noté $S(\hat{x}) \otimes_\pi T(\hat{x})$, ne soit pas défini par la fonction $x \to \vec{f}(x) \otimes \vec{g}(x)$. Mais cela ne risque pas de se produire souvent dans la pratique.

Relation entre produits scalaire et multiplicatif. Notation fonctionnelle du produit scalaire.

PROPOSITION 30. — *Pour* $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, *on a:*

$$(\mathrm{II}, 5; 6) \quad (\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\pi \cdot_\pi \vec{\varphi} = (\vec{\alpha}\vec{\varphi})_\pi \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = \vec{\alpha} \cdot_\pi (\vec{\mathrm{T}}\vec{\varphi})_\pi \in (\mathrm{E} \otimes \mathrm{F} \otimes \mathrm{G})^{\wedge}_{\pi},$$

les produits scalaires étant ceux qui sont définis à la proposition 4, *respectivement pour les couples d'espaces* ($\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$), ($\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$), ($\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$).

En effet, les 3 membres sont séparément continus et coïncident sur $(\mathcal{E} \otimes \mathrm{E}) \times (\mathcal{D}' \otimes \mathrm{F}) \times (\mathcal{D} \otimes \mathrm{F})$, donc partout.

Il est évidemment intéressant d'étendre cette formule à des espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, autres que $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$.

Par exemple on pourra supposer $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{E}'(\mathrm{F})$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}(\mathrm{G})$, ou bien $\vec{\alpha} \in \mathcal{O}_\mathrm{M}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{S}'(\mathrm{F})$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathrm{G})$, etc... On peut donner une proposition générale, dans le style de la proposition 25 *bis*.

PROPOSITION 31. — *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace vérifiant les conditions de la proposition* 4. *Supposons en outre qu'on puisse définir une multiplication de* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ *dans* $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1}$, *hypocontinue par rapport aux parties compactes. Alors on peut définir, d'après la proposition* 4, *un produit scalaire* $(\vec{\alpha}, \vec{\mathrm{T}}) \to \vec{\alpha} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$ *de* $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ *dans* $(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$, *et d'après la proposition* 25, *un produit multiplicatif* $(\vec{\alpha}, \vec{\mathrm{T}}) \to (\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\pi$ *de* $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ *dans* $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1}(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$. *On a la relation* :

$$(\mathrm{II}, 5;\ 7) \qquad \vec{\alpha} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{R}^n} (\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\pi.$$

Les deux membres définissent en effet des applications bilinéaires de $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$, séparément continues (propositions 4 et 25; et proposition 36 du chapitre I), et qui coïncident sur $(\mathcal{D} \otimes \mathrm{E}) \times (\mathcal{D} \otimes \mathrm{F})$, donc partout $\big((\mathcal{D} \otimes \mathrm{E})$ est dense dans $\mathcal{H} \otimes_\varepsilon \mathrm{E}$, puisque $\mathcal{H}$ est normal, et que $\mathcal{H} \otimes \mathrm{E}$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ puisque $\mathcal{H}$, nucléaire, a la propriété d'approximation; de même $\mathcal{D} \otimes \mathrm{F}$ est dense dans $\mathcal{H}'(\mathrm{F})\big)$.

C'est pourquoi, toutes les fois que les conditions énoncées dans la proposition 31 *seront réalisées, nous pourrons, conformément à la notation* (II, 5; 5), *écrire sous la forme*

$$\int_{\mathrm{R}^n} (\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}(x))dx$$

le produit $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}}$:

$$\text{(II, 5; 8)} \qquad \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{R}^n} \big(\vec{\varphi}(x) \otimes_\pi \vec{\mathrm{T}}(x)\big) dx.$$

Cette formule est justement celle qui avait été annoncée à (II, 3, 8); elle est maintenant justifiée.

On pourra l'employer en particulier pour $\mathcal{H} = \mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$; les multiplications sont en effet hypocontinues de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$, $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$, $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ dans $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{O}'_{\mathrm{C}}$ respectivement, donc dans $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1}$.

Produit multiplicatif général.

Il est utile de généraliser le produit multiplicatif, comme nous avons généralisé le produit scalaire au § 4. Il serait trop long de faire une théorie complète; nous nous bornerons aux cas les plus utiles. Le principe de la méthode va consister à ramener le produit multiplicatif au produit scalaire par la formule (II, 5; 6), et à appliquer ensuite les résultats du § 4.

PROPOSITION 32. — *Soient* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ (1) *des espaces de distributions normaux sur* R^n, E *et* F *des espaces localement convexes séparés, ces espaces n'étant pas nécessairement quasi-complets. Soient* $\mathfrak{S}$ (*resp.* $\mathcal{C}$) *un ensemble saturé de parties bornées de* E (*resp. de parties bornées complétantes de* F). *On suppose que* $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ *et que l'injection* Λ *de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{H}$ *est sous-nucléaire*; *on suppose d'autre part que* $\mathcal{K}$ *ou* $\mathcal{H}$ *à la propriété d'approximation requise dans l'énoncé de la proposition* 10, *et que* $\mathcal{L}$ *est bornologique.*

Enfin on suppose donnée une multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ *dans* $\mathcal{L}'_c$, *provenant, par transposition, d'une multiplication de* $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{K}$, *hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{L}$. *Alors on peut définir une* « *multiplication* » (2) *de* $\mathcal{M}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$ *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$, *notée* $(\vec{\alpha}, \vec{\mathrm{T}}) \to (\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$, *vérifiant* :

$$\text{(II, 5; 9)} \qquad (\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota \cdot \varphi = \vec{\alpha}\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{\mathrm{T}} \in \mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F},$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{L}$; *le second membre est celui qui est défini à la proposition* 10, *pour* $\vec{\alpha}\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$.

(1) Observer le changement de notation entre les propositions 25 et 32.

(2) Nous avons mis multiplication entre guillemets. C'est une opération bilinéaire de $\mathcal{M}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$ dans $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$, qui est évidemment apparentée à une multiplication, mais qui, par exemple, n'est pas nécessairement séparément continue !

On a

$$\text{(II, 5; 10)} \qquad [(\alpha\vec{e})(\mathrm{T}\vec{f})]_\iota = (\alpha\mathrm{T})\vec{e}\otimes\vec{f},$$

pour $\alpha \in \mathcal{M}$, $\mathrm{T} \in \mathcal{H}'$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$.

Cette multiplication est compatible avec les applications linéaires continues de E, F, *ou de* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$.

Si les conditions d'application de la proposition 25 *sont aussi vérifiées pour* $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}'_c$, $\mathcal{L}'_c$, *l'image de* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,\hat{\otimes}_\pi\,\mathrm{F})$ *coïncide avec le produit* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\pi$ *défini à la proposition* 25.

Si $\vec{\alpha}$ *parcourt une partie du type* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathcal{M}(\mathrm{E})$, *et que* $\vec{\mathrm{T}}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$ *en restant dans une partie* β_0*-équibornée,* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\mathfrak{S}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E}\otimes_\mathfrak{S}\mathrm{F})$; *si l'injection* Λ *est non seulement sous-nucléaire, mais nucléaire, il est inutile de contraindre* $\vec{\mathrm{T}}$ *à rester dans une partie* β_0*-équibornée.*

Si $\vec{\mathrm{T}}$ *est* $\mathcal{C}$*-bornée, on peut définir* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\mathcal{C}$ *même si* $\mathcal{L}$ *n'est pas bornologique, pourvu que la multiplication de* $\mathcal{M}\times\mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{K}$, *déjà supposée hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{L}$, *soit en outre hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{M}$. *Dans chacun de ces deux cas* ($\mathcal{L}$ *bornologique, ou multiplication hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{M}$), *si* $\vec{\alpha}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{M}(\mathrm{E})$, *et que* $\vec{\mathrm{T}}$ *reste dans une partie* $\mathcal{C}$*-équibornée de* $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$, $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\mathcal{C}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E}\,\hat{\otimes}_\mathcal{C}\,\mathrm{F})$.

Nous partons d'une multiplication de $\mathcal{M}\times\mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$; d'après la proposition 21 *bis* du chapitre I, elle définit une application bilinéaire, encore notée multiplicativement, de $\mathcal{M}(\mathrm{E})\times\mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}(\mathrm{E})$. Alors, pour $\vec{\alpha}\in\mathcal{M}(\mathrm{E})$, $\varphi\in\mathcal{L}$, $\vec{\alpha}\varphi$ est un élément bien déterminé de $\mathcal{K}(\mathrm{E})$; comme $\vec{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\beta_0)$, le second membre de (II, 5; 9) a bien un sens, d'après la proposition 10. Alors $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ est défini comme application linéaire $\varphi\to(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota\cdot\varphi = \vec{\alpha}\varphi\cdot_{\iota;\Lambda}\vec{\mathrm{T}}$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{E}\,\hat{\otimes}_\iota\,\mathrm{F}$.

Nous devons montrer que cette application est continue; alors $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ sera une distribution, et on aura même $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota\in\mathcal{L}(\mathcal{L};\mathrm{E}\,\hat{\otimes}_\iota\,\mathrm{F})$ (1) $\subset\mathcal{L}'_c(\mathrm{E}\,\hat{\otimes}_\iota\,\mathrm{F})$. Comme $\mathcal{L}$ est bornologique, il

(1) Les deux $\mathcal{L}$ n'ont pas ici le même sens; le premier est celui qu'on emploie dans $\mathcal{L}(\mathrm{A};\mathrm{B})$, espace des applications linéaires continues de A dans B, le second est l'espace $\mathcal{L}$ introduit dans l'énoncé.

suffira de montrer que si φ parcourt une partie compacte L de $\mathcal{L}$, $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota \cdot \varphi$ parcourt une partie bornée de $E \hat{\otimes}_\iota F$ [1]. Or, lorsque φ parcourt L, les multiplicateurs $[\varphi]$ forment une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{M}; \mathcal{K})$, donc aussi une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{M}(E); \mathcal{K}(E))$ (proposition 1 du chapitre I); alors, pour $\vec{\alpha}$ fixée, $\vec{\alpha}\varphi$ reste bornée dans $\mathcal{K}(E)$ pour $\varphi \in \mathcal{L}$, et comme $\vec{T}$ est fixe, la fin de la proposition 10 exprime justement que $\vec{\alpha}\varphi \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{T}$ reste bornée dans $E \hat{\otimes}_\iota F$. On a donc bien $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota \in \mathcal{L}'_c(E \hat{\otimes}_\iota F)$.

Supposons que $\vec{\alpha}$ parcoure une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{M}(E)$. Si φ parcourt une partie compacte L de $\mathcal{L}$, $\vec{\alpha}\varphi$ parcourt une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{K}(E)$ (en effet, pour tout k' de $\mathcal{K}'$, on a $L_{\vec{\alpha}\varphi}(k) = L_{\vec{\alpha}}({}^t[\varphi]\cdot(k'))$; si k' parcourt une partie équicontinue de $\mathcal{K}'$, ${}^t[\varphi]\cdot(k')$ parcourt une partie équicontinue de $\mathcal{M}'$ pour $\varphi \in L$, puisque L définit une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{M}; \mathcal{K})$ [2]; donc $L_{\vec{\alpha}}({}^t[\varphi]\cdot(k'))$ décrit une partie de E appartenant à $\mathfrak{S}$ puisqu'$\vec{\alpha}$ est du type $\mathfrak{S}$, et $\vec{\alpha}\varphi$ décrit bien une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{K}(E)$). Si alors $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, en restant dans une partie β_0-équibornée (condition inutile si Λ est nucléaire), $\vec{\alpha}\varphi \cdot_{\mathfrak{S}} \vec{T}$ converge vers 0 dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F$ d'après la proposition 12, donc $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\mathfrak{S}}$ converge bien vers 0 dans $\mathcal{L}'_c(E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}} F)$.

Supposons maintenant $\vec{T}$ $\mathfrak{T}$-bornée. Définissons toujours $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\mathfrak{T}} \cdot \varphi$ par $\vec{\alpha}\varphi \cdot_{\mathfrak{T}} \vec{T}$. Montrons que l'application linéaire $\varphi \to (\vec{\alpha}\vec{T})_{\mathfrak{T}} \cdot \varphi$ de $\mathcal{L}$ dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{T}} F$ est continue, même sans supposer $\mathcal{L}$ bornologique, pourvu que la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$ soit hypocontinue par rapport aux parties

[1] Soient L, M, des espaces localement convexes séparés. Soit u une application linéaire de L dans M, transformant toute suite convergeant vers 0 dans L en une partie bornée de M; alors elle transforme toute partie bornée de L en une partie bornée de M, donc elle est continue si L est bornologique (BOURBAKI [4], théorème 3, page 11). A fortiori, si L est bornologique, toute application linéaire de L dans M, transformant toute partie compacte de L en une partie bornée de M, est continue.

[2] Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ des espaces localement convexes séparés, L une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{M}; \mathcal{K})$. Soit K un voisinage de 0 de $\mathcal{K}$; de la formule ${}^tu(K^0) \subset \big(\overset{-1}{u}(K)\big)^0$, on déduit que $\bigcup_{u\in L} {}^tu(K^0) \subset \bigcup_{u \in L} \big(\overset{-1}{u}(K)\big)^0 \subset \Big(\bigcap_{u\in L} \overset{-1}{u}(K)\Big)^0$; comme L est équicontinue, $\bigcap_{u\in L} \overset{-1}{u}(K)$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}$, et son polaire est bien une partie équicontinue de $\mathcal{M}'$.

compactes de $\mathcal{M}$. Si φ converge vers 0 dans $\mathcal{L}$, $\vec{\alpha}\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(\mathrm{E})$, en vertu de la proposition 21 *bis* du chapitre I, et alors $\vec{\alpha}\varphi \cdot_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{T}}$ converge bien vers 0 dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathrm{F}$, en vertu de la proposition 14. Supposons alors que $\vec{\alpha}$ converge vers 0 dans $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ ($\mathcal{L}$ bornologique, ou multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ hypocontinue par rapport aux parties compactes). Si φ parcourt une partie compacte L de $\mathcal{L}$, nous venons de voir que les $[\varphi]$ sont équicontinus de $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{K}(\mathrm{E})$, donc $\vec{\alpha}\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{K}(\mathrm{E})$; si alors $\vec{\mathrm{T}}$ parcourt une partie $\mathcal{E}$-équibornée de $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$, $\vec{\alpha}\varphi \cdot_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{T}}$ converge vers 0 d'après la proposition 14, et $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_{\mathcal{E}}$ converge bien vers 0 dans $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathrm{F})$.

Nous devons voir maintenant pourquoi l'application bilinéaire ainsi définie de $\mathcal{M}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$ dans $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$ mérite le nom de multiplication.

Remarquons d'abord que, « par transposition » de la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$, donc dans $\mathcal{H}$, on peut définir une application bilinéaire de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ dans $\mathcal{L}'_c$. Elle se définit (si on la note aussi multiplicativement) par $\langle m\ h', l\rangle = \langle ml, h'\rangle$ pour $m \in \mathcal{M}$, $l \in \mathcal{L}$, $h' \in \mathcal{H}'$; $h' \to mh'$ est transposée de $l \to ml$. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{H}$ sont normaux et cette application bilinéaire coïncide sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ avec la multiplication usuelle; c'est donc elle-même une multiplication si elle est séparément continue. Or si $m \in \mathcal{M}$ est fixé, $h' \to mh'$ est continue de $\mathcal{K}'_c$ dans $\mathcal{L}'_c$, comme transposée d'une application linéaire continue de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{H}$; si $h' \in \mathcal{H}'$ est fixé, et que m converge vers 0 dans $\mathcal{M}$, on sait que lm converge vers 0 dans $\mathcal{H}$, uniformément lorsque l décrit une partie compacte de $\mathcal{L}$; donc on sait que mh' converge vers 0 dans $\mathcal{L}'_c$. Il est donc exact de dire, comme nous le faisons dans l'énoncé, qu'une multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$, donc dans $\mathcal{H}$, hypocontinue par rapport aux parties compactes de $\mathcal{L}$, définit « par transposition » une multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ dans $\mathcal{L}'_c$.

Alors on a la formule (II, 5; 10), où $\alpha\mathrm{T}$ est précisément le produit multiplicatif de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ dans $\mathcal{L}'_c$, ce qui justifie le nom de produit multiplicatif pour $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$; (II, 5; 10) résulte en effet trivialement de (II, 4; 1), et de la définition même de $\alpha\mathrm{T}$ par transposition : $\alpha\mathrm{T} \cdot \varphi = \alpha\varphi \cdot \mathrm{T}$. Supposons maintenant qu'on puisse aussi définir $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi$ d'après la proposition 25 : $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}'_c$, $\mathcal{L}'_c$, E, F, sont quasi-complets; $\mathcal{M}$ est nucléaire et de dual nucléaire, et a la propriété d'approximation stricte; la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ dans $\mathcal{L}'_c$ est hypocontinue par rapport aux parties compactes. Montrons alors que cet élément $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi$ est l'image de l'élément $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota$, défini ici, dans $\mathcal{L}'_c(E \hat{\otimes}_\pi F)$. Les deux produits sont continus en $\vec{\alpha} \in \mathcal{M}(E)$, pour $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F;\, \beta_0)$ fixée; $\mathcal{M}$ est nucléaire, donc a la propriété d'approximation; l'égalité des deux produits résultera de leur égalité pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{M} \otimes E$. Soit donc $\vec{\alpha} = \alpha\vec{e}$, $\alpha \in \mathcal{M}$, $\vec{e} \in E$. Le produit de la proposition 25 vérifie (II, 5; 2), donc $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi \cdot \varphi = \Gamma_\pi(\vec{e},\, \alpha\vec{T}) \cdot \varphi = \vec{e} \otimes (\alpha\vec{T} \cdot \varphi)$ d'après la 2e formule (II, 2; 6 *bis*). Mais, d'après la formule (I, 3; 6), $\alpha\vec{T} \cdot \varphi = \vec{T} \cdot \alpha\varphi$; alors finalement $(\vec{\alpha}\vec{T}) \cdot_\pi \varphi = \vec{e} \otimes L_{\vec{T}}(\alpha\varphi)$, ce qui, d'après (II, 4; 6), est $\alpha\varphi\vec{e} \cdot_\pi \vec{T}$, image dans $E \hat{\otimes}_\pi F$ de $\alpha\varphi\vec{e} \cdot_\iota \vec{T}$ défini à la proposition 10; ce qui prouve l'identité des deux produits considérés.

On pourrait aussi supposer qu'on puisse définir $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi$ d'après les conditions symétriques de celles de la proposition 25: $\mathcal{H}$ nucléaire et le dual nucléaire, vérifiant la propriété d'approximation stricte; nous laissons au lecteur le soin de vérifier (la démonstration comporte quelques difficultés supplémentaires) que le produit ainsi défini coïnciderait aussi avec celui de la proposition 31.

Remarques. — 1° Supposons que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, au lieu de vérifier les conditions de la proposition 10, vérifient celles de la proposition 11, et que l'injection Λ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$ soit nucléaire ($\mathcal{L}$ étant toujours bornologique). Alors on peut définir $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota \in \mathcal{L}'_c(E \hat{\otimes}_\iota F)$ pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{M}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F)$ non nécessairement bornée. On a encore (II, 5; 9 et 10). Si $\vec{\alpha}$ parcourt une partie du type $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{M}(E)$, et que $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}'_c(F)$, $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\mathfrak{S}}$ converge vers 0 (remarque page 71). Si $\mathfrak{T}$ est un ensemble saturé de parties bornées quelconques de $\mathcal{H}'_c(F)$, et si $\vec{T}$ est du type $\mathfrak{T}$, on peut définir $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\mathfrak{T}}$ même si $\mathcal{L}$ n'est pas bornologique, pourvu que la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$ soit hypocontinue par rapport aux parties compactes de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{L}$; en tout cas, si $\vec{\alpha}$ converge vers 0 dans $\mathcal{M}(E)$ et que $\vec{T}$ reste dans une partie du type $\mathcal{T}$ de $\mathcal{H}'_c(F)$, $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\mathcal{T}}$ converge vers 0 (remarque page 74).

2° Supposons que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$, au lieu de vérifier les conditions de la proposition 10, vérifient celles de la proposition 17 (autrement dit, $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation stricte), et que l'injection Λ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$ soit sous-intégrale. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble saturé de parties bornées quelconques de F. Alors on peut définir $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}'_c(E \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{T}}} F)$, pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{M}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F\,;\, \mathcal{T})$, soit si $\mathcal{L}$ est bornologique, soit si la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$ est hypocontinue par rapport aux parties compactes de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$; si $\vec{\alpha}$ converge vers 0 dans $\mathcal{M}(E)$, et que $\vec{T}$ reste dans une partie $\mathcal{T}$-équibornée de $\mathcal{H}'_c(F)$, $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\mathcal{T}}$ converge vers 0.

3° Si $\mathcal{K}$ vérifie les conditions de la proposition 17, Λ sous-intégrale (voir 2°), on peut définir $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\pi} \in \mathcal{L}'_c(E \mathbin{\hat{\otimes}_{\pi}} F)$, pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{M}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}\,;\, F)$, soit si $\mathcal{L}$ est bornologique, soit si la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$ est hypocontinue par rapport aux parties compactes de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$.

Si $\vec{\alpha}$ converge vers 0 dans $\mathcal{M}(E)$, et que $L_{\vec{T}}$ reste dans une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{H}\,;\, F)$, $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\pi}$ converge vers 0.

Si deux quelconques des produits $(\vec{\alpha}\,\vec{T})$ *définis, soit à la proposition* 32, *soit aux remarques* 1°, 2°, 3°, *ont un sens, ils coïncident (propositions* 11, 17, 19*)*.

4° Le produit multiplicatif défini à la proposition 25 est de nature différente; on ne définit pas $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\pi} \cdot \varphi$ par $\vec{\alpha}\varphi \cdot_{\pi} \vec{T}$, en se ramenant à une définition antérieure de produit scalaire.

Quoi qu'il en soit, si le produit défini soit à la proposition 32, soit à l'une des remarques 1°, 2°, 3°, à partir des espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, existe, et si en même temps la multiplication de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ dans $\mathcal{L}'_c$ satisfait aux conditions de la proposition 25 ($\mathcal{M}$ nucléaire et de dual nucléaire, etc...), alors le produit $(\vec{\alpha}\,\vec{T})_{\pi}$, défini par l'une ou l'autre des méthodes, est le même (on le voit encore d'après le raisonnement de la page 31).

5° Bien que la proposition 32 soit une généralisation de la proposition 25, certaines de ses hypothèses, relatives aux espaces de distributions qui interviennent, sont en fait plus fortes que celles de la proposition 25. Par exemple toute $\varphi \in \mathcal{D}$ est dans $\mathcal{L}$ donc est un multiplicateur de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{K}$;

il n'y a rien d'analogue dans les hypothèses de la proposition 25. On en déduit certaines propriétés du produit multiplicatif de la proposition 32, qui ne semblaient pas pouvoir être démontrées pour le produit de la proposition 25, sans supposer des propriétés supplémentaires d'approximation par troncature et régularisation. Par exemple : *si* $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(\mathrm{E})$, *alors* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ *est le même, que l'on considère* $\vec{\alpha}$ *comme élément de* $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ *et* $\vec{\mathrm{T}}$ *comme élément de* $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\ \beta_0)$, *ou que l'on considère* $\vec{\alpha}$ *comme élément de* $\mathcal{E}(\mathrm{E})$ *et* $\vec{\mathrm{T}}$ *comme élément de* $\mathcal{D}'(\mathrm{F};\beta_0)$ (proposition 32 appliquée à $\mathcal{H}_1 = \mathcal{K}_1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{E}$). Soit en effet $\varphi \in \mathcal{D}$. Le produit $\vec{\alpha}\varphi$ est le même dans les deux cas (car le multiplicateur $[\varphi]$, de $\mathcal{M}$ ou de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'$, est défini par un passage à la limite à partir du multiplicateur $[\varphi]$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, et est donc induit par le multiplicateur $[\varphi]$ de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$; donc le multiplicateur $[\varphi]$ de $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ ou de $\mathcal{E}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathrm{E})$ est induit par le multiplicateur $[\varphi]$ de $\mathcal{D}'(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathrm{E})$); alors $\vec{\alpha}\varphi \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$ est le même, que l'on considère $\vec{\alpha}\varphi$ comme élément de $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}}$ comme élément de $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\beta_0)$, ou que l'on considère $\vec{\alpha}\varphi$ comme élément de $\mathcal{D}(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}}$ comme élément de $\mathcal{D}'(\mathrm{F};\beta_0)$ (proposition 20) page 83), alors qu'une telle affirmation n'était sans doute pas valable pour le produit de la proposition 25, sans hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{K}$.

Mais si $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{E}(\mathrm{F};\ \beta_0) = (\mathcal{E}')'_c(\mathrm{F};\ \beta_0)$, $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ est-il le même que l'on considère $\vec{\alpha}$ comme élément de $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}}$ comme élément de $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F};\beta_0)$, ou $\vec{\alpha}$ comme élément de $\mathcal{D}'(\mathrm{E})$ et $\vec{\mathrm{T}}$ comme élément de $\mathcal{E}(\mathrm{F};\ \beta_0)$? Nous l'ignorons.

6° Pour connaître $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota \in \mathcal{D}'(\mathrm{E}\ \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$, il suffit de connaître $\vec{\alpha}$, $\vec{\mathrm{T}}$, et les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, mais non $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$. En effet $\vec{\alpha}\varphi$ est alors connu pour $\varphi \in \mathcal{D}$ (le multiplicateur $[\varphi]$ de $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ étant la restriction du multiplicateur $[\varphi]$ de $\mathcal{D}'(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathrm{E})$, voir remarque 5°), donc $\vec{\alpha}\varphi \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$ est connu, et par suite $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$. Nous laissons d'ailleurs au lecteur le soin d'établir les principales propriétés de ce produit multiplicatif (généralisation des propositions 26, 27, 28, 29) à partir des résultats du § 4. Nous nous contenterons d'énoncer ce qui suit :

Corollaire 1. — *Soient* E *et* F *des espaces localement convexes, non nécessairement quasi-complets. On peut définir* *un produit multiplicatif* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota \in \mathcal{D}'(\mathrm{E} \otimes_\iota \mathrm{F})$, *dans les cas suivants :*

1° $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$ *localement* β_0*-bornée;*

2° $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}'(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{E}(\mathrm{F})$ *localement* β_0*-bornée;*

3° $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}^{m+n+1}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'^m_c(\mathrm{F})$; *alors* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota \in \mathcal{D}'^m_c\ (\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$;

4° $\vec{\alpha} \in \mathcal{O}_\mathrm{M}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{S}'(\mathrm{F}; \beta_0)$; alors $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}) \in \mathcal{S}'(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$.

On a (II, 5; 9), *pour* $\varphi \in \mathcal{D}$ (cas 1 et 2), $\varphi \in \mathcal{D}^{m+n+1}$ (cas 3), $\varphi \in \mathcal{S}$ (cas 4), *et* (II, 5; 10). *On a aussi*

$$\text{(II, 5 ; 11)} \qquad (\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota \cdot \varphi = \vec{\alpha} \cdot_\iota \varphi\vec{\mathrm{T}},$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}$ (cas 1 et 2), $\varphi \in \mathcal{D}^m$ (cas 3), $\varphi \in \mathcal{S}$ (cas 4). *On a par ailleurs*

$$\text{(II, 5; 12)} \qquad \beta(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota = ((\beta\vec{\alpha})\vec{\mathrm{T}})_\iota = (\vec{\alpha}(\beta\vec{\mathrm{T}}))_\iota,$$

pour $\beta \in \mathcal{D}$ (cas 1 et 2), $\beta \in \mathcal{E}^{m+n+1}$ (cas 3), $\beta \in \mathcal{O}_\mathrm{M}$ (cas 4).

Soit $\mathfrak{S}$ (*resp.* $\mathfrak{T}$) *un ensemble saturé de parties bornées de* E (*resp. de parties bornées complétantes de* F). *Si* $\vec{\alpha}$ *converge vers* 0, *et que* $\vec{\mathrm{T}}$ *reste dans une partie localement* $\mathfrak{T}$*-équibornée de* $\mathcal{D}'(\mathrm{F})$ (*cas* 1), *localement* $\mathfrak{T}$*-équibornée de* $\mathcal{E}(\mathrm{F})$ (*cas* 2), *localement* $\mathfrak{T}$*-équibornée de* $\mathcal{D}'^m_c(\mathrm{F})$ (*cas* 3), $\mathfrak{T}$*-équibornée de* $\mathcal{S}'(\mathrm{F})$ (*cas* 4), $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\mathfrak{T}$ *converge vers* 0. *Si* $\vec{\alpha}$ *reste dans une partie du type* $\mathfrak{S}$, *et si* $\vec{\mathrm{T}}$ *converge vers* 0, *en restant dans une partie localement* β_0*-équibornée de* $\mathcal{D}'(\mathrm{F})$ (cas 1), *de* $\mathcal{E}(\mathrm{F})$ (*cas* 2), *sans condition spéciale* (*cas* 3), *ou en restant dans une partie* β_0*-équibornée de* $\mathcal{S}'(\mathrm{F})$ (*cas* 4), $(\vec{\alpha}\ \vec{\mathrm{T}})_\mathfrak{S}$ *converge vers* 0.

On a la formule de dérivation du produit (II, 5; 4) (*où* π *est remplacé par* ι), *pour* $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(\mathrm{E})$ (cas 1), $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}'(\mathrm{E})$ (cas 2), $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}^{m+n+2}(\mathrm{E})$ (cas 3), $\vec{\alpha} \in \mathcal{O}_\mathrm{M}(\mathrm{E})$ (cas 4). *Le support de* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ *est contenu dans l'intersection des supports de* $\vec{\alpha}$ *et* $\vec{\mathrm{T}}$; *donc la valeur de* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\iota$ *ne dépend que des valeurs de* $\vec{\alpha}$ *dans un voisinage arbitraire du support de* $\vec{\mathrm{T}}$.

Dans le cas 2, *si* $\vec{\alpha} \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mathrm{E})$, *et si* $\vec{\mathrm{T}}$ *est localement* $\mathfrak{T}$*-bornée dans* $\mathcal{E}(\mathrm{F})$, *et dans les cas* 1, 3, 4, *si* $\vec{\mathrm{T}}$ *est une fonction, et si, quel que soit le compact* K *de* R^n, *il existe une partie disquée* $\mathrm{B} \in \mathfrak{T}$ *telle que* $\vec{\mathrm{T}} \in \overline{\mathrm{L}^1_\mathrm{K}}(\mathrm{F}_\mathrm{B})$, *alors* $(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}})_\mathfrak{T}$ *est la fonction localement intégrable* $\vec{\alpha}(\hat{x}) \otimes_\mathfrak{T} \vec{\mathrm{T}}(\hat{x})$.

Dans les cas 1, 3, 4, *si, pour tout compact* K *de* R^n, $\left(\bigcup_{x\in K}\vec{\alpha}(x)\right)\in\mathfrak{S}$, *et si* $\vec{T}\in\overline{\mathcal{L}^1}(F)$, *et dans le cas* 2, *si* $\vec{\alpha}$ *est une fonction, et si, pour tout compact* K *de* R^n, *il existe une partie disquée* $A\in\mathfrak{S}$ *telle que* $\vec{\alpha}\in\overline{L^1_K}(E_A)$,alors $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\mathfrak{S}}$ *est la fonction localement intégrable* $\vec{\alpha}(\hat{x})\otimes_{\mathfrak{S}}\vec{T}(\hat{x})$.

Dans les cas 1, 2, 4, *si* $\vec{T}\in\overline{\mathcal{L}^1}(F)$, *et dans le cas* 2, *si* $\vec{\alpha}\in\overline{\mathcal{L}^1}(E)$, $(\vec{\alpha}\vec{T})_\pi$ *est la fonction localement intégrable* $\vec{\alpha}(\hat{x})\otimes_\pi\vec{T}(\hat{x})$.

Le cas 1 ne résulte pas directement de la proposition 32 (avec $\mathcal{K}=\mathcal{H}=\mathcal{D}$, $\mathcal{L}=\mathcal{D}$, $\mathcal{M}=\mathcal{E}$), car celle-ci exigerait $\vec{T}\in\mathcal{D}'(F;\ \beta_0)$, c'est-à-dire *globalement* β_0-bornée. Mais on pourra, pour tout ouvert borné Ω de R^n, appliquer directement la proposition 32. (avec $\mathcal{H}=\mathcal{K}=\mathcal{L}=\mathcal{D}_\Omega$, $\mathcal{M}=\mathcal{E}_\Omega$); on trouve ainsi, pour chaque Ω, une distribution $(\vec{\alpha}\ \vec{T})_{\iota;\Omega}=(\vec{\alpha}_\Omega\vec{T}_\Omega)$ de $\mathcal{D}'_\Omega(E\ \hat{\otimes}_\iota\ F)$; si $\Omega_1\subset\Omega_2$, on voit aussitôt que $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\iota;\Omega_1}$ et $(\vec{\alpha}\vec{T})_{\iota;\Omega_2}$ coïncident dans Ω_1 (c'est tout simplement la compatibilité du produit scalaire du § 4 avec les applications linéaires continues de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$; ici il s'agit de l'application canonique $\mathcal{D}_{\Omega_1}\to\mathcal{D}_{\Omega_2}$); alors l'ensemble des $(\vec{\alpha}\ \vec{T})_{\iota;\Omega}$ définit une distribution $(\vec{\alpha}\ \vec{T})_\iota$ qui vérifie bien (II, 5; 9) pour $\varphi\in\mathcal{D}$. On pourra aussi directement appliquer une proposition analogue à 31 s'appuyant non pas sur la proposition 10, mais sur la proposition 20 *bis*.

On voit aisément que ces 2 méthodes donnent le même résultat, puisque précisément la proposition 20 *bis* se déduit de la proposition 10 par localisation. Le cas 2 se traite de même. Le cas 4 découle directement de la proposition 31 (avec $\mathcal{K}=\mathcal{H}=\mathcal{S}$, $\mathcal{L}=\mathcal{S}$, $\mathcal{M}=\mathcal{O}_M$); le produit du cas 4 est une restriction de celui du cas 1 (compatibilité avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$).

Le cas 3 est un peu plus subtil. Si nous posons (II, 5; 9), on est obligé de supposer $\varphi\in\mathcal{D}^{m+n+1}$, pour que $\vec{\alpha}\varphi\in\overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E)$, $\vec{T}\in\mathcal{D}'^m_c(F)$, et qu'on puisse appliquer la proposition 24. Comme nous voulons obtenir $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota\in\mathcal{D}'^m_c(E\ \hat{\otimes}_\iota\ F)$, il faut pouvoir prendre $\varphi\in\mathcal{D}^m$. Nous poserons alors, par définition, $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota\cdot\varphi=\vec{\alpha}\cdot_\iota\varphi\vec{T}$; comme $\vec{\alpha}\in\mathcal{E}^{m+n+1}(E)$, $\varphi\vec{T}\in\overline{\mathcal{E}'^m}(F)$, $\vec{\alpha}\cdot_\iota\varphi\vec{T}$ a un sens d'après la remarque qui suit la proposition 24; nous laissons au lecteur le soin de montrer, comme dans la proposition 31, que $(\vec{\alpha}\vec{T})_\iota$ ainsi définie est bien une distribution de $\mathcal{D}'^m_c(E \hat{\otimes}_\iota F)$.

La formule (II, 5; 9) résulte de la définition, sauf dans le cas 3. Dans ce cas spécial, (II, 5; 9) résulte de (II, 4; 12), pour $\varphi \in \mathcal{D}^{m+n+1}$. Au contraire c'est (II, 5; 11) qui résulte de la définition dans le 3, et de (II, 4; 12) dans le cas 1, 2, 4; (II, 5; 10) est trivial. La possibilité d'une double définition grâce à (II, 5; 9) et (II, 5; 11), montre que, si $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(E)$, le produit du cas 3 coïncide avec celui du cas 1.

Pour démontrer (II, 5; 12), on doit démontrer

$$\text{(II, 5; 13)} \qquad \vec{\alpha}(\beta\varphi) \cdot_\iota \vec{T} = (\beta\vec{\alpha})\varphi \cdot_\iota \vec{T} = \vec{\alpha}\varphi \cdot_\iota \beta\vec{T}$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}$. La première égalité est évidente, car elle résulte de ce que, pour tout $\overleftarrow{e'} \in E'$, on a $\langle \vec{\alpha}, \overleftarrow{e'} \rangle (\beta\varphi) = (\beta \langle \vec{\alpha}, \overleftarrow{e'} \rangle)\varphi$. Pour voir la deuxième, nous remarquons qu'elle exprime simplement la compatibilité du produit scalaire du § 4 avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ (formules (II, 4; 12).

La formule de dérivation du produit revient à

$$\text{(II, 5; 14)} \qquad -\vec{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot_\iota \vec{T} = \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial x_i}\varphi \cdot_\iota \vec{T} + \vec{\alpha}\varphi \cdot \frac{\partial\vec{T}}{\partial x_i},$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}$. Mais la formule (II, 4; 12) montre que

$$\vec{\alpha}\varphi \cdot_\iota \frac{\partial\vec{T}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{\alpha}\varphi\right) \cdot_\iota \vec{T}.$$

Nous sommes donc ramenés à montrer

$$\text{(II, 5; 15)} \qquad -\vec{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial x_i}\varphi - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{\alpha}\varphi\right),$$

ce qui, en faisant le produit scalaire avec tout $\overleftarrow{e'} \in E'$, est la formule habituelle de dérivation du produit, pour $\langle \vec{\alpha}, \overleftarrow{e'} \rangle\ \varphi$.

La propriété des supports résulte de la proposition 20 *c*, et de la proposition 24. Les propriétés de continuité résultent des propositions 12 et 14.

Quant aux cas où $\vec{\alpha}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions, comme il s'agit d'une propriété locale, on peut se borner aux cas 1, 2, 3, avec $\vec{\alpha}$ et $\vec{T}$ à supports compacts.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 21, ou 21 *bis* ou *ter*, et on voit que, pour $\varphi \in \mathcal{D}$, dans les conditions indiquées dans l'énoncé :

(II, 5; 16)

$$\vec{\alpha}\varphi \cdot_\theta \vec{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{R}^n} \left(\vec{\alpha}(x)\varphi(x) \hat{\otimes}_\theta \vec{\mathrm{T}}(x)\right)dx = \int_{\mathrm{R}^n} \left(\vec{\alpha}(x) \otimes_\theta \vec{\mathrm{T}}(x)\right)\varphi(x)dx,$$

ce qui donne bien $\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\theta = \vec{\alpha}(\hat{x}) \otimes_\theta \vec{\mathrm{T}}(\hat{x}) \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mathrm{E} \otimes_\theta \mathrm{F})$, θ étant l'une des lettres $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$, π.

Corollaire 2 (*relation entre produit scalaire et produit multiplicatif*). — *Dans les conditions de la proposition* 31, *supposons que $\mathcal{B}_c$ soit contenu dans $\mathcal{L}$ avec une topologie plus fine que la topologie induite. Alors, si $\vec{\alpha} \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{K}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}\,;\, \beta_0)$, on peut d'une part définir $\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota$ d'après la proposition* 32, *d'autre part définir $\vec{\alpha} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}$ d'après la proposition* 10. *Alors $\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota$ est sommable $\left(\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota \in \mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1}(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})\right)$, et on a*

$$\text{(II, 5; 17)} \qquad \vec{\alpha} \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{R}^n} \left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota.$$

Il suffit d'appliquer la proposition 32 et (II, 5; 9) avec $\varphi = 1 \in \mathcal{B}_c \in \mathcal{L}$. Le fait que $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$ (et $\mathfrak{M}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{K}(\mathrm{E})$) résulte de ce que 1 est multiplicateur de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{K}$; le fait que $\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota \in \mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1}(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$ résulte de ce que $\mathcal{L}'_c \subset (\mathcal{B}_c)'_c = \mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1}$, avec une topologie plus fine que la topologie induite.

Dans la pratique, on aura souvent $\mathfrak{M} = \mathcal{K}$. On aura parfois $\mathcal{L} = \mathcal{B}_c$, mais alors il n'est pas bornologique; on devra donc supposer $\vec{\mathrm{T}}$ $\mathfrak{C}$-bornée, et la multiplication de $\mathfrak{M} \times \mathcal{B}_c$ dans $\mathcal{K}$ hypocontinue par rapport aux parties compactes; on aura seulement (II, 5; 17) où ι est remplacé par $\mathfrak{C}$ (voir proposition 32). Remarquons que de toute façon, dans le cas $\mathcal{L} = \mathcal{B}_c$, le sous-espace $\dot{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ est un espace de Fréchet, donc bornologique. On peut donc affirmer, d'après la proposition 31, que $\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota$ est dans $(\dot{\mathcal{B}})'_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F}) = (\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^1})_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$ (donc scalairement sommable), même si $\vec{\mathrm{T}}$ est seulement β_0-bornée.

La formule (II, 5; 9) est alors seulement valable pour $\varphi \in \dot{\mathcal{B}}$. En fait on sait qu'alors $\left(\vec{\alpha}\vec{\mathrm{T}}\right)_\iota$ se prolonge par bitransposition en une application linéaire de $\mathcal{B}$ dans $(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})''$ (chapitre I, page 128), donc le second membre de (II, 5; 9) a encore une signification pour $\varphi \in \mathcal{B}$; le premier a aussi directement une signification, puisqu'on a toujours $\vec{\alpha} \in \mathfrak{M}(\mathrm{E})$, $\varphi \in \mathcal{B}$, donc $\vec{\alpha}\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$, et $\vec{\vec{\mathrm{T}}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$. Mais rien ne dit que les deux membres soient égaux. La proposition 31 montre seulement que leurs images dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} \mathrm{F}$ coïncident, si $\vec{\vec{\mathrm{T}}}$ est $\mathcal{C}$-bornée.

Le corollaire 1 *nous suggère d'adopter toujours la notation* $\vec{\alpha}(\hat{x}) \otimes_\iota \vec{\vec{\mathrm{T}}}(\hat{x})$ *pour* $(\vec{\alpha}\vec{\vec{\mathrm{T}}})_\iota$, *même si* $\vec{\alpha}$ *et* $\vec{\vec{\mathrm{T}}}$ *ne sont pas des fonctions; alors il devient légitime, dans les conditions du corollaire* 2, *de noter* $\int_{\mathrm{R}^n} \left(\vec{\varphi}(x) \otimes_\iota \vec{\vec{\mathrm{T}}}(x)\right) dx$ *le produit scalaire* $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\vec{\mathrm{T}}}$:

(II, 5; 18)

$$\begin{cases} (\vec{\alpha}\vec{\vec{\mathrm{T}}})_\iota = \vec{\alpha}(\hat{x}) \otimes_\iota \vec{\vec{\mathrm{T}}}(\hat{x}), & \vec{\alpha} \in \mathfrak{M}(\mathrm{E}), \quad \vec{\vec{\mathrm{T}}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0) \\ \vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{\vec{\mathrm{T}}} = \int_{\mathrm{R}^n} \left(\vec{\varphi}(x) \otimes_\iota \vec{\vec{\mathrm{T}}}(x)\right) dx, & \vec{\varphi} \in \mathcal{K}(\mathrm{E}) \quad \vec{\vec{\mathrm{T}}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0), \end{cases}$$

la première formule étant une définition du symbole du 2^e *membre, dans les conditions générales de la proposition* 32, *et la* 2^e *formule étant une propriété, valable dans les conditions du corollaire* 2.

Exemple 1. — *Soit* $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'_{x,y}$ *une distribution semi-régulière en* x, $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'_{x,y}$ *une distribution intégralement semi-régulière en* y [1]. *Nous allons montrer qu'on peut définir un produit multiplicatif* ST.

On a $\mathrm{S} \in \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$; S définit donc sur X^l une distribution $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{E}_x(\mathrm{E})$, si $\mathrm{E} = \mathcal{D}'_y$; si B est un ouvert borné de Y^m et si $\mathrm{E}_\mathrm{B} = \mathcal{D}'_\mathrm{B}$ est l'espace des distributions sur B, la restriction S_B de S à $\mathrm{X}^l \times \mathrm{B}$ définit une distribution $\vec{\mathrm{S}}_\mathrm{B} \in \mathcal{E}_x(\mathrm{E}_\mathrm{B})$. D'autre part T est en particulier semi-régulière en y; on a donc $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y$; elle définit sur X^l une distribution $\vec{\vec{\mathrm{T}}} \in \mathcal{D}'_x(\mathrm{F})$, si $\mathrm{F} = \mathcal{E}_y$; si B est un ouvert borné de Y^m et si $\mathrm{F}_\mathrm{B} = \mathcal{E}_\mathrm{B}$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur B, la restriction T_B de T à $\mathrm{X}^l \times \mathrm{B}$ définit une distribution $\vec{\vec{\mathrm{T}}}_\mathrm{B} \in \mathcal{D}'_x(\mathrm{F}_\mathrm{B})$. Mais on peut dire plus : dans tout ouvert borné $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ de $\mathrm{X}^l \times \mathrm{Y}^m$, A ouvert borné de X^l, $\vec{\vec{\mathrm{T}}}_\mathrm{B}$ est distribution d'ordre fini en x à valeurs dans $\mathcal{E}_\mathrm{B}$; donc $\vec{\vec{\mathrm{T}}}_\mathrm{B}$ est localement bornée à valeurs dans F_B (corollaire 1 de la proposition 23 du chapitre I). Le corollaire 1 nous permet donc de définir un produit multipli-

[1] Schwartz [7]. Voir en particulier le corollaire 1 page 116 et la remarque page 115.

catif $(\vec{S}_B\vec{T}_B)_\beta \in \mathcal{D}'_x(E_B \hat{\otimes}_B F_B)$. Mais, si θ_B désigne le produit multiplicatif de $\mathcal{D}'_B \times \mathcal{E}_B$ dans $\mathcal{D}'_B$, il est hypocontinu par rapport aux parties bornées, donc il se prolonge en une application linéaire continue $\bar{\theta}$ de $E_B \hat{\otimes}_\beta F_B$ dans E_B; alors $(I_x \otimes \bar{\theta})(\vec{S}_B\vec{T}_B)_\beta$ est un élément de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_B)$, qui n'est autre que $(\vec{S}_B\vec{T}_B)_{\theta_B}$. Si $B_1 \subset B_2$, la compatibilité du produit multiplicatif avec les applications linéaires continues de E, F, montre que $(\vec{S}_{B_1}\vec{T}_{B_1})_\beta$ est l'image de $(\vec{S}_{B_2}\vec{T}_{B_2})_\beta$ par $E_{B_2} \hat{\otimes}_\beta F_{B_2} \to E_{B_1} \hat{\otimes}_\beta F_{B_1}$; et alors $(\vec{S}_{B_1}\vec{T}_{B_1})_{\theta_{B_1}}$ est lui-même l'image de $(\vec{S}_{B_2}\vec{T}_{B_2})_{\theta_{B_2}}$ par $\mathcal{D}'_{B_2} \to \mathcal{D}'_{B_1}$. Alors finalement l'ensemble cohérent des $(\vec{S}_B\vec{T}_B)_{\theta_B}$ définit un élément de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y)$, c'est-à-dire une distribution de $\mathcal{D}'_{x,y}$. C'est cette distribution que nous noterons ST et que nous appellerons produit multiplicatif de S et T.

Ce produit est le seul qui coïncide avec le produit usuel pour $S \in \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{D}'_y$, $T \in \mathcal{D}'_x \otimes \mathcal{E}_y$, et qui soit séparément continu en T (lorsqu'on munit l'espace des distributions intégralement semi-régulières en y de la topologie induite par $\mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y$) pour S fixée dans $\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{D}'_y$, et séparément continu en S pour T fixée quelconque (propositions 15, et 32 corollaire 1). ST *coïncide avec le produit usuel si* S *ou* T *est dans* $\mathcal{E}_{x,y}$. Supposons par exemple $S \in \mathcal{E}_{x,y}$. Soient S_j (resp. T_j) des distributions de $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$ qui convergent vers S (resp. T) dans $\mathcal{E}_{x,y}$ (resp. $\mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y$). Alors $S_j T_j$ est trivialement le produit usuel (formule (II, 5; 10)]. Par passage à la limite S_j T est encore le produit usuel et de même ST. Même démonstration si c'est T qui est dans $\mathcal{E}_{x,y}$. De même, *si* $\alpha \in \mathcal{E}_{x,y}$, *le produit usuel* α(ST) *coïncide avec les produits* (αS) T, S (αT), *calculés d'après la méthode indiquée ici;* on le voit par passage à la limite $S_j \to S$, compte tenu de ce que c'est vrai si $S_j \in \mathcal{E}_{x,y}$.

Nous avons appelé $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'_{loc}$ l'espace des distributions intégralement semi-régulières en y. Si T est dans cet espace et en outre à support compact, elle appartient au dual $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ de $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$; on peut alors définir un produit scalaire S.T, pour $S \in \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$; montrons que S.T *n'est autre que* $\int_{X^l \times Y^m}$ ST, ST *étant le produit défini ici, qui est dans ce cas à support compact.* C'est en effet vrai si $S \in \mathcal{D}_{x,y}$ (ST étant alors le produit usuel, et la dualité entre l'espace normal $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ et son dual devant induire sur $\mathcal{D}_{x,y}$ la dualité entre $\mathcal{D}_{x,y}$ et $\mathcal{D}'_{x,y}$).

Mais comme S.T et $\int$ ST sont continus en S pour T fixée, ils coïncident toujours. On voit donc qu'on aurait pu définir *directement le produit multiplicatif* ST *en posant, par définition,* $\mathrm{ST}.\varphi = \mathrm{S}.\mathrm{T}\varphi$, *pour* $\varphi \in \mathcal{D}_{x,y}$ (ceci définit trivialement ST comme forme linéaire sur $\mathcal{D}_{x,y}$, il suffit alors de montrer sa continuité. Or si φ converge vers 0 dans un $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}$, K compact de $\mathrm{X}^l \times \mathrm{Y}^m$, et si $\alpha \in \mathcal{D}_{x,y}$ est égal à 1 sur un voisinage du support de K, $\mathrm{S}.\mathrm{T}\varphi = \mathrm{S}.\alpha\mathrm{T}\varphi = \mathrm{S}\varphi.\alpha\mathrm{T}$; mais $\mathrm{S}\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}_x \widehat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, et $\alpha\mathrm{T}$ est dans le dual de cet espace, d'où le résultat).

Exemple 2. — *Sections-distributions d'un espace fibré à fibre vectorielle topologique.*

Soit X une variété indéfiniment différentiable de dimension n (dénombrable à l'infini). Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe (séparé quasi-complet comme toujours).

On suppose donnés un espace topologique $\mathcal{G}$, une application continue p (appelée projection) de $\mathcal{G}$ sur X, et un atlas, c'est-à-dire une famille de « cartes » $(\rho_k)_{k \in \mathrm{K}}$, homéomorphismes de produits $\mathrm{O}_k \times \mathrm{F}$ (O_k ouvert de X) sur $\overset{-1}{p}(\mathrm{O}_k)$, ayant les propriétés suivantes :

1° Les O_k, $k \in \mathrm{K}$, forment un recouvrement de X;

2° $\rho_k(x, \vec{f}) \in \overset{-1}{p}(\{x\})$, pour $x \in \mathrm{O}_k$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$; il en résulte que, pour x fixé dans O_k, $\vec{f} \to \rho_k(x, \vec{f})$ est un homéomorphisme qu'on notera $\rho_k(x)$ de F sur $\overset{-1}{p}(\{x\})$. Aussi $\overset{-1}{p}(\{x\})$ sera-t-il noté F_x et appelé fibre au-dessus de x;

3° Si $j \in \mathrm{K}$, $k \in \mathrm{K}$, et si $\mathrm{O}_{j,k} = \mathrm{O}_j \cap \mathrm{O}_k$ n'est pas vide, on posera $\alpha_{j,k}(x) = \overset{-1}{\rho_j}(x)\rho_k(x)$, pour $x \in \mathrm{O}_{j,k}$; alors $\alpha_{j,k}(x)$ est un homéomorphisme de F sur F; nous supposerons que $\alpha_{j,k}(x)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel topologique F, $\alpha_{j,k}(x) \in \mathcal{L}(\mathrm{F}; \mathrm{F})$, et que la fonction $\overrightarrow{\alpha_{j,k}}: x \to \alpha_{j,k}(x)$, est indéfiniment différentiable de $\mathrm{O}_{j,k}$ dans $\mathcal{L}_b(\mathrm{F}; \mathrm{F})$ (d'après ce que nous avons vu page 99, il suffit, pour que cette propriété soit vérifiée, qu'elle soit indéfiniment différentiable à valeurs dans $\mathcal{L}_s(\mathrm{F}; \mathrm{F})$).

Dans ces conditions, on peut mettre canoniquement sur chaque fibre F_x, $x \in \mathrm{X}$, une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe, en transportant la structure de F par l'un quelconque des $\rho_k(x)$ tels que $x \in \mathrm{O}_k$. Tous ces espaces vectoriels topologiques sont isomorphes à F (non canoniquement). L'ensemble de ces données contitue ce qu'on appellera un espace fibré $\mathcal{G}$ indéfiniment différentiable à fibre vectorielle topologique, de base X, de fibre-type F [1].

Une section $\vec{f}$ de G est une application $x \to \vec{f}(x) \in \overset{-1}{p}(\{x\})$ de X dans G. On voit aisément qu'on peut définir la notion de section m fois continuement différentiable $m \geqslant 0$ fini ou infini : c'est une section telle que, quel que soit $k \in$ K, la fonction $\vec{f}_k : x \to \overset{-1}{\rho_k}(x)\left(\vec{f}(x)\right)$ soit une fonction m fois continuement différentiable sur O_k à valeurs dans F. Soit $\vec{f}$ une section telle que, pour un $k \in$ K particulier, la fonction $\vec{f}_k$ appartienne à $\mathcal{E}^m(F)$ sur O_k; alors, pour tout $j \in$ K, la fonction $\vec{f}_j$ appartient à $\mathcal{E}^m(F)$ sur $O_{j,k}$, car on a

$$\text{(II, 5; 19)} \qquad \vec{f}_j(x) = \alpha_{j,k}(x)\left(\vec{f}_k(x)\right),$$

et on suppose, sur $O_{j,k}$, $\vec{f}_k \in \mathcal{E}^m(F)$ et $\vec{\alpha}_{j,k} \in \mathcal{E}^m_g(\mathcal{L}_b(F;\ F))$ [2]; de plus, si on prend une carte locale d'un voisinage de x dans $O_{j,k}$ sur un ouvert de R^n, on aura, pour tout indice de dérivation p, $|p| \leqslant m$,

$$\text{(II, 5; 20)} \quad D^p\vec{f}_j(x) = \sum_{q<p} \binom{p}{q} D^q\alpha_{j,k}(x) D^{p-q}\vec{f}_k(x) \text{ [3]}.$$

[1] On peut naturellement ajouter un axiome exprimant que l'atlas considéré est saturé ou maximal; nous n'en aurons pas besoin ici.

[2] Voir page 60 l'étude des espaces $\mathcal{E}^m(E)$ et $\mathcal{E}^m_g(E)$.

[3] Soient E, F, des espaces localement convexes, $\vec{\alpha}$, $\vec{f}$, des fonctions continues sur la droite R, à valeurs dans E, F, respactivement. Si θ est une application bilinéaire de E $\times$ F dans G, hypocontinue par rapport aux parties compactes de F (ou de E), la fonction $x \to \theta\left(\vec{\alpha}(x), \vec{f}(x)\right)$ est continue. En effet θ est continue sur le produit de E par toute partie compacte de F (BOURBAKI [2]. chapitre III, § 4, n° 2, proposition 4); or, si x parcourt un compact de R, $\vec{f}(x)$ reste dans un compact de F. Si maintenant $\vec{\alpha}$ et $\vec{f}$ sont dérivables, la fonction est dérivable et on a la règle de dérivation du produit :

$$\theta\left(\vec{\alpha}(x), \vec{f}(x)\right)' = \theta\left(\vec{\alpha}'(x), \vec{f}(x)\right) + \theta\left(\vec{\alpha}(x), \vec{f}'(x)\right).$$

En effet

$$\frac{\theta\left(\vec{\alpha}(x+h), \vec{f}(x+h)\right) - \theta\left(\vec{\alpha}(x), \vec{f}(x)\right)}{h}$$
$$= \theta\left(\vec{\alpha}(x+h), \frac{\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{\vec{\alpha}(x+h) - \vec{\alpha}(x)}{h}, \vec{f}(x)\right).$$

Dans le premier terme, $\dfrac{\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)}{h}$ tend vers $f(x)$, pour $h \to 0$, en restant

On appellera $\mathcal{E}^m_{[X]}(\mathcal{G})$ l'espace vectoriel des sections m fois continuement différentiables. On sera tenté de le topologiser de la façon suivante. On dira que $\vec{f} \in \mathcal{E}^m_{[x]}(\mathcal{G})$ converge vers 0 si, pour tout $k \in K$, $\vec{f}_k$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}^m(F)$ sur O_k. Mais, si nous ne faisons aucune hypothèse supplémentaire sur l'espace fibré, cette notion est sans intérêt, et il pourra arriver que $\vec{f}_k$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}^m(F)$ sur O_k, sans que $\vec{f}_j$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}^m(F)$ sur $O_{j,k}$. Si en effet nous regardons la formule (II, 5; 20), nous voyons que $D^{p-q}f_k(x)$ convergera vers 0 uniformément sur tout compact M de l'ouvert de R^n défini par la carte locale considérée, mais il n'y a aucune raison de supposer que $\bigcup_{x \in K} D^q\alpha_{j,k}(x)$ soit une partie équicontinue de $\mathcal{L}(F; F)$, de sorte qu'il n'y a aucune raison pour que $D^p\vec{f}_j(x)$ converge vers 0 uniformément pour $x \in M$, donc pour que $\vec{f}_j$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}^m(F)$ sur $O_{j,k}$.

Nous ferons donc désormais l'hypothèse supplémentaire suivante, analogue à (Φ'') page 100:

(Φ''') *Quels que soient* j, $k \in K$, *quelle que soit la carte locale d'un ouvert de* $O_{j,k}$ *sur un ouvert de* R^n, *quel que soit le compact* M *de cette carte, quel que soit l'indice de dérivation* q, *l'ensemble* $\bigcup_{x \in M} D^q\alpha_{j,k}(x)$ *est une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(F; F)$.

Cette hypothèse entraîne que $\vec{\alpha}_{j,k}$ soit dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}_b(F; F))$ et non seulement $\mathcal{E}_g(\mathcal{L}_b(F; F))$ sur $O_{j,k}$. Alors la difficulté précédente ne se produira pas, et nous pourrons donner à $\mathcal{E}^m_{[X]}(\mathcal{G})$ la topologie précédente. C'est un espace localement convexe séparé quasi-complet (parce que $\mathcal{E}^m(F) = \mathcal{E}^m \varepsilon F$ lui-même est séparé quasi-complet; chapitre I, proposition 3).

Si M est un compact de X, $\mathcal{D}^m_M(\mathcal{G})$ sera le sous-espace de $\mathcal{E}^m_{[X]}(\mathcal{G})$ formé des sections à support dans M; on le munira de

dans un compact de F, $\vec{\alpha}(x+h)$ tend vers $\vec{\alpha}(x)$; donc le premier membre tend vers $\theta(\vec{\alpha}(x), \vec{f}'(x))$, en vertu de la continuité de θ sur le produit de E par un compact de F.

Le deuxième terme tend vers $\theta(\vec{\alpha}'(x), \vec{f}(x))$ pour $h \to 0$, en vertu de la continuité séparée de θ.

Ce que nous venons de dire s'étend aisément aux fonctions définies sur R^n et aux dérivées d'ordre quelconque. Ici $E = \mathcal{L}_b(F; F)$, et θ est l'application canonique de $\mathcal{L}_b(F; F) \times F$ dans F, hypocontinue par rapport aux parties bornées de F.

la topologie induite. Alors $\overline{\mathcal{D}^m_{[X]}}(\mathcal{G})$ sera la réunion des $\mathcal{D}^m_M(\mathcal{G})$, muni de la topologie limite inductive [1].

Essayons maintenant de définir une section-distribution $\vec{T}$ de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est trivial, c'est-à-dire si c'est le produit $X \times F$ (alors réduit à une seule carte), une telle distribution est simplement un élément de $\overset{0}{\mathcal{D}}'(F) = \overset{0}{\mathcal{D}}' \otimes F$, où $\overset{0}{\mathcal{D}}'$ est l'espace des courants de degré 0 sur X [2]. Si $\overset{n}{\mathcal{D}}^{\bullet}$ est l'espace des formes différentielles de degré n et d'espèce impaire sur X, à support compact, avec la topologie limite inductive usuelle, $\vec{T}$ est aussi un élément de $\mathcal{L}\left(\overset{n}{\mathcal{D}}^{\bullet};\ F\right)$. Une section continue est alors une section distribution particulière, car $\mathcal{E}^0_{[X]}(X \times F) = \mathcal{E}^0_X \otimes F \subset \overset{0}{\mathcal{D}}' \otimes_\varepsilon F$. Il existe un théorème de « recollement des morceaux », qui permet de définir une distribution par des données locales cohérentes : si $(O_k)_{k \in K}$ est un recouvrement de X par des ouverts, si $\vec{T}_k$ est une distribution de $\overset{0}{\mathcal{D}}'(F)$ sur O_k, et si $\vec{T}_j$ et T_k coïncident sur $O_{j,k}$, il existe une distribution $\vec{T}$ et une seule sur X qui, sur chaque O_k, coïncide avec $\vec{T}_k$.

Nous sommes donc amenés à *définir* une section-distribution $\vec{T}$ d'un espace fibré général $\mathcal{G}$ comme une famille de distributions $(\vec{T}_k)_{K \in k}$, K étant l'ensemble d'indices définissant les cartes de $\mathcal{G}$, $\vec{T}_k$ étant une distribution de $\overset{0}{\mathcal{D}}'(F)$ sur O_k, $\vec{T}_k \in \overset{0}{\mathcal{D}}'_{O_k} \otimes F$, vérifiant la règle de cohérence :

$$\text{(II, 5; 21)} \qquad \vec{T}_j = \overrightarrow{\alpha_{j,k}}\, \vec{T}_k \text{ sur } O_{j,k}.$$

Cette égalité demande à être interprétée. Elle doit généraliser (II, 5; 19). Sur $O_{j,k}$, $\vec{\alpha}_{j,k} \in \mathcal{E}(\mathcal{L}_b(F;F))$, $\vec{T}_k \in \overset{0}{\mathcal{D}}'(F)$, et le second membre devra être compris comme le produit multiplicatif de ces deux distributions, associé au produit multiplicatif de $\mathcal{E} \times \overset{0}{\mathcal{D}}'$ dans $\overset{0}{\mathcal{D}}'$, et à l'application bilinéaire canonique séparé-

[1] Nous notons $\overline{\mathcal{D}^m}$ et non $\mathcal{D}^m$, parce que, si $\mathcal{G} = X \times F$, on trouve $\overline{\mathcal{D}^m}(F)$.

[2] Comme on est sur une variété X, il faut distinguer entre courants de degré 0 et de degré n. Pour que les sections-distributions généralisent les sections usuelles, il faut prendre les courants de degré 0. Nous noterons le degré des formes ou courants par un nombre placé au-dessus de la lettre indiquant l'espace des formes ou courants considérés ; nous mettrons un point pour les formes ou courants d'espèce impaire. Ainsi $\overset{r}{\mathcal{D}}'^m$ est l'espace des courants de degré r, d'ordre $\leqslant m$; $\overset{r}{\mathcal{D}}'^{\bullet m}$ est l'espace des courants d'espèce impaire, de degré r, d'ordre $\leqslant m$.

ment continue $(\vec{u}, \vec{f}) \to \vec{u} \cdot \vec{f}$ de $\mathfrak{L}_b(F; F) \times F$ dans F. Malheureusement ce produit multiplicatif du second membre n'a aucun sens, aucun des théorèmes démontrés dans ce paragraphe ne permet de lui en donner un; et le premier contre-exemple du § 8 montrera que cette difficulté est inévitable. *On ne peut donc pas définir une section-distribution quelconque d'un espace fibré non trivial à fibre vectorielle topologique de dimension infinie.*

Mais supposons $\vec{T}_k$ *localement bornée;* alors (II, 5; 21) a un sens d'après le corollaire 1 de la proposition 32, cas 1. *On peut donc définir une section-distribution localement bornée de* $\mathcal{G}$. Par ailleurs, si $\vec{T}_k$ est d'ordre $\leqslant m$ dans O_k, $\vec{T}_k \in \mathring{\mathfrak{D}}_c'^m(F)$, le même corollaire, cas 3, montre que $\vec{T}_j$ est d'ordre $\leqslant m$ sur $O_{j,k}$. On pourra définir une section-distribution d'ordre $\leqslant m$ comme un système cohérent de distribution $\vec{T}_k$ d'ordre $\leqslant m$; sur l'espace des sections distributions localement bornées, il n'y a pas de topologie naturelle bien intéressante. Mais sur l'espace $(\mathring{\mathfrak{D}}_c'^m)_{[X]}(\mathcal{G})$ des sections-distributions d'ordre $\leqslant m$, nous mettrons la topologie suivante : $\vec{T}$ converge vers 0 dans $(\mathring{\mathfrak{D}}_c'^m)_{[X]}(\mathcal{G})$ si, pour tout k, $\vec{T}_k$ converge vers 0 dans $\mathring{\mathfrak{D}}_c'^m(F)$ sur O_k. Comme $\vec{\alpha}_{j,k}$ est du type $\mathfrak{S}$ dans $\mathcal{E}(\mathfrak{L}_b(F; F))$ sur $O_{j,k}$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties équicontinues de $\mathfrak{L}(F; F)$ (page 100), et que l'application canonique de $\mathfrak{L}_b(F; F) \times F$ dans F est $\mathfrak{S}$-hypocontinue, alors le corollaire 1 (cas 3) de la proposition 32 montre que $\vec{T}_j$ converge vers 0 dans $\mathfrak{D}_c'^m(F)$ sur $O_{j,k}$, ce qui donne son intérêt à la topologie précédente.

Dans le cas particulier où F est du type (DF), nous avons vu que toute distribution à valeurs dans F est localement bornée (chapitre I, corollaire 2 de la proposition 23). Dans ce cas il n'y a donc aucune restriction à faire sur les $\vec{T}_k$. Supposons même que F soit un espace de Banach; alors $\mathfrak{L}_b(F; F)$ est aussi un espace de Banach et l'application bilinéaire canonique de $\mathfrak{L}_b(F; F) \times F$ dans F est continue. On peut alors, pour donner un sens à (II, 5; 21), utiliser simplement la proposition 25; et alors, pour $\overrightarrow{\alpha_{j,k}}$ fixé danse $\mathcal{E}(\mathfrak{L}_b(F\ F)$ sur $O_{j,k}$, si $\vec{T}_k$ converge vers 0 dans $\mathring{\mathfrak{D}}'(F)$ sur O_k, $\vec{T}_j$ convergera vers 0 dans $\mathring{\mathfrak{D}}'(F)$ sur $O_{j,k}$, de sorte qu'on pourra topologiser l'espace

$\overset{\circ}{\mathfrak{D}}'_{[X]}(\mathcal{G})$ des sections distributions de $\mathcal{G}$ en disant que $\vec{T}$ converge vers 0 dans $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}'_{[X]}(\mathcal{G})$ si, pour tout $k \in K$, $\vec{T}_k$ converge vers 0 dans $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}'(F)$ sur O_k.

Naturellement on pourra étendre tous les résultats précédents et définir les sections-courants de degré r localement bornées de $\mathcal{G}$; une telle section est un système $(\vec{T}_k)_{k\in K}$, où T_k est un courant localement borné de degré r à valeurs dans F sur O_k (un courant de degré r à valeurs dans F est un élément de $\overset{r}{\mathfrak{D}}'(F) = \overset{r}{\mathfrak{D}}' \hat{\otimes} F$, où $\overset{r}{\mathfrak{D}}'$ est l'espace des courants de degré r), avec la relation (II, 5; 21) (relative à la multiplication de $\mathcal{E} \times \overset{r}{\mathfrak{D}}'$, dans $\overset{r}{\mathfrak{D}}'$, et à l'application bilinéaire canonique de $\mathfrak{L}_b(F; F) \times F$ dans F). On peut procéder de même pour les courants d'espèce impaire. Nous laissons au lecteur le soin de développer les relations remarquables qui existent entre les espaces de courants, quand on fait varier r, qu'on remplace F par F′, etc...

§ 6. — Produit tensoriel.

PROPOSITION 33. — *Soient* X^l, Y^m, *des espaces euclidiens,* E, F, *des espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. Soient* $\vec{S}_x \in \mathfrak{D}'_x(E)$, $\vec{T}_y \in \mathfrak{D}'_y(F)$. *Il existe une distribution et une seule à valeurs dans* $E \hat{\otimes}_\iota F$, *notée* $\vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T}_y$ [1], *et appelée produit tensoriel de* $\vec{S}_x$ *et de* $\vec{T}_y$, *vérifiant*

$$\text{(II, 6; 1)} \qquad \vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T}_y \cdot u(x)v(y) = (\vec{S} \cdot u) \otimes (\vec{T} \cdot v),$$

pour $u \in \mathfrak{D}_x$, $v \in \mathfrak{D}_y$.

On a en outre:

$$\text{(II, 6; 1 bis)} \qquad S_x\vec{e} \otimes \otimes_\iota T_y\vec{f} = (S_x \otimes T_y)\vec{e} \otimes \vec{f},$$

pour $S_x \in \mathfrak{D}'_x$, $T_y \in \mathfrak{D}'_y$, $\vec{e} \in E$, $\vec{f} \in F$.

L'application bilinéaire $(\vec{S}_x, \vec{T}_y) \to S_x \otimes \otimes_\iota T_y$ *est compatible avec les applications linéaires continues de* E *et* F. *Si l'on appelle*

[1] Il aurait été plus conforme à nos conventions générales d'employer simplement la notation $\vec{S}_x \otimes_\iota \vec{T}_y$ avec un seul symbole $\otimes$. Nous nous en sommes aperçus trop tard !

$\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\mu \vec{\mathrm{T}}_y$ *l'image de* $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$ *dans* $\mathcal{D}'_{x,y}(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\mu \mathrm{F})$, *l'application bilinéaire* $(\overleftarrow{\mathrm{S}}_x, \vec{\mathrm{T}}_y) \to \overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\mu \vec{\mathrm{T}}_y$ *est* μ*-continue, pour* $\mu = \beta, \pi, \varepsilon$, *et aussi pour* $\mu = \gamma$ *si* E *et* F *sont quasi-complets. Si* $\mathcal{H}_x$ *et* $\mathcal{K}_y$ *sont des espaces de distributions quasi-complets sur* X^l *et* Y^m, *et si* $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \in \mathcal{H}_x(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}}_y \in \mathcal{K}_y(\mathrm{F})$, $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\mu \vec{\mathrm{T}}_y$ *est dans* $(\mathcal{H}_x \varepsilon \mathcal{K}_y) \varepsilon (\mathrm{E} \hat{\otimes}_\mu \mathrm{F})$, *pour* $\mu \leqslant \gamma$, *et aussi pour* $\mu = \iota$ *si* $\mathcal{H}'_c$ *et* $\mathcal{K}'_c$ *sont tonnelés; l'application bilinéaire* $(\overleftarrow{\mathrm{S}}_x, \vec{\mathrm{T}}_y) \to \overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\mu \vec{\mathrm{T}}_y$ *est* μ*-continue de* $\mathcal{H}_x(\mathrm{E}) \times \mathcal{K}_y(\mathrm{F})$ *dans* $(\mathcal{H}_x \varepsilon \mathcal{K}_y) \varepsilon (\mathrm{E} \hat{\otimes}_\mu \mathrm{F})$, *pour* $\mu = \beta, \pi, \varepsilon$, *et aussi pour* $\mu = \gamma$ *si* E *et* F *sont quasi-complets.*

Le support de $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$ *est le produit des supports de* $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x$ *et* $\vec{\mathrm{T}}_y$.

On peut calculer $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$ *par la règle de Fubini:*

(II, 6; 2)

$$\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y \cdot \varphi(x, y) = \overleftarrow{\mathrm{S}}_x \cdot_\iota \big(\vec{\mathrm{T}}_y \cdot \varphi(x, y)\big) = \big(\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \cdot \varphi(x, y)\big) \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}_y,$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}_{x,y}$, *les deux derniers membres ayant un sens en vertu de la proposition* 10 (*avec* $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \in \mathcal{D}'_x(\mathrm{E})$, *et la fonction* $x \to \vec{\mathrm{T}}_y \cdot \varphi(x, y)$ *étant dans* $\mathcal{D}_x(\mathrm{F}; \beta_0) = (\mathcal{D}'_x)'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$; *ou* $\vec{\mathrm{T}}_y \in \mathcal{D}'_y(\mathrm{F})$ *et la fonction* $y \to \overleftarrow{\mathrm{S}}_x \cdot \varphi(x, y)$ *étant dans* $\mathcal{D}_y(\mathrm{E}; \beta_0)$).

$\mathrm{L}_{\overleftarrow{\mathrm{S}}}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_x$ dans E, $\mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}$ une application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans F, donc $\mathrm{L}_{\overleftarrow{\mathrm{S}}} \otimes \mathrm{L}_{\vec{\mathrm{T}}}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_x \hat{\otimes}_\iota \mathcal{D}_y = \mathcal{D}_{x,y}$ proposition 1 bis) dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F}$, donc définit une distribution de $\mathcal{D}'_{x,y}(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\iota \mathrm{F})$, qui est précisément celle que nous appelons $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$; on a donc, par définition, $\mathrm{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y . u(x)v(y) = (\overleftarrow{\mathrm{S}} . u) \otimes (\vec{\mathrm{T}} . v)$, donc a trivialement (II, 6; 1). La compatibilité avec les applications linéaires continues de E et F est aussi triviale.

Si $\overleftarrow{\mathrm{S}}$(resp. $\vec{\mathrm{T}}$) a pour support A (resp. B), $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$ est nulle sur $\mathcal{D}_{\complement \mathrm{A}} \otimes \mathcal{D}_{\mathrm{Y}^m}$, donc sur $\mathcal{D}_{\complement \mathrm{A} \times \mathrm{Y}^m}$, donc $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$ a son support dans $\mathrm{A} \times \mathrm{Y}^m$; mais il a aussi son support dans $\mathrm{X}^l \times \mathrm{B}$, donc dans $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Mais ce support est exactement $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$; car si $a \in \mathrm{A}$, $b \in \mathrm{B}$, pour tout voisinage A_1 de a on peut trouver $u \in \mathcal{D}_{\mathrm{A}_1}$ telle que $\overleftarrow{\mathrm{S}} . u \neq 0$, et pour tout voisinage B_1 de b on peut trouver $v \in \mathcal{D}_{\mathrm{B}_1}$ telle que $\vec{\mathrm{T}} . v \neq 0$, alors $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y \cdot u(x)v(y) \neq 0$, donc $\overleftarrow{\mathrm{S}}_x \otimes \otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_y$ n'est pas nulle dans l'ouvert $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1$, donc (a, b) appartient à son support.

La définition de $\vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T}_y$ montre qu'il n'est autre que $\Delta^0_{\varepsilon,\iota}(\vec{S}_x, \vec{T}_y)$ [à la page 23, nous avons défini $\Gamma^0_{\iota\varepsilon,}$ application, bilinéaire de $(L \varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(L \hat{\otimes}_\iota M) \varepsilon (\hat{U} \varepsilon \hat{V})$, définie si U'_c et V'_c sont tonnelés; en échangeant les rôles de L et U, ainsi que de M et V, on peut, comme nous l'avons fait page 31, définir $\Delta^0_{\varepsilon,\iota}$, application bilinéaire de $(L \varepsilon U) \times (M \varepsilon V)$ dans $(\hat{L} \varepsilon \hat{M}) \varepsilon (U \hat{\otimes}_\iota V)$, pourvu que L'_c et M'_c soient tonnelés. Ici nous prendrons $L = \mathcal{D}'_x$, $M = \mathcal{D}'_y$, $U = E$, $V = F$; alors $\hat{L} \varepsilon \hat{M} = \mathcal{D}'_x \varepsilon \mathcal{D}'_y = \mathcal{D}'_{x,y}$; $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ sont bien tonnelés ([1])]. D'après la définition, $\Delta^0_{\varepsilon,\iota}(\vec{S}_x, \vec{T}_y)$ définit l'application de $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$ dans $E \hat{\otimes}_\iota F$: $\big(u(\hat{x}), v(\hat{y})\big) \to (\vec{S}.u) \otimes (\vec{T}.v)$, c'est donc bien $\vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T}_y$ défini plus haut). Alors, pour $\mu \leqslant \gamma$, $\vec{S}_x \otimes \otimes_\mu \vec{T}_y$ n'est autre que $\Delta^0_{\varepsilon,\mu}$; mais comme $L = \mathcal{D}'_x$ a la propriété d'approximation stricte, $\mathcal{D}'_x \hat{\otimes}_\varepsilon E \supset \mathcal{D}'_x \varepsilon E$, et $\Delta^0_{\varepsilon,\mu}$ est la restriction de $\Delta_{\varepsilon,\mu}$, et lui est identique si E est quasi-complet (voir page 24). La proposition 2 montre alors que $\Delta^0_{\varepsilon,\mu}$ est μ-continue, pour $\mu = \pi, \varepsilon$ (2, III et IV), que $\Delta^0_{\varepsilon,\beta}$ est β-continue (2, V, cela suppose E et F quasi-complets, mais la remarque de la page 27 indique que, s'il n'est pas certain que $\Gamma_{\varepsilon,\beta}$ soit β-continue lorsque E et F ne sont pas quasi-complets, il est certain que $\Gamma^0_{\varepsilon,\beta}$ l'est), et que $\Delta^0_{\varepsilon,\gamma}$ est γ-continue si E et F sont quasi-complets (2, V); $\Delta^0_{\varepsilon,\iota}$ n'est même pas séparément continue.

On peut naturellement remplacer $\mathcal{D}'_x$ et $\mathcal{D}'_y$ par des espaces de distributions quasi-complets $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{K}_y$. Si $\mathcal{H}'_c$ et $\mathcal{K}'_c$ sont tonnelés, on peut définir $\Delta^0_{\varepsilon,\iota}$, application bilinéaire de $\mathcal{H}_x(E) \times \mathcal{K}_y(F)$ dans $(\mathcal{H}_x \varepsilon \mathcal{K}_y) \varepsilon (E \hat{\otimes}_\iota F)$; d'après la compatibilité de Δ avec les applications linéaires continues (proposition 2) de L et M, cette application est la restriction à $\mathcal{H}_x(E) \times \mathcal{K}_y(F)$ de l'application correspondante définie sur $\mathcal{D}'_x(E) \times \mathcal{D}'_y(F)$. On peut en dire autant de $\Delta^0_{\varepsilon,\mu}$ pour $\mu \leqslant \gamma$, mais alors il n'est plus nécessaire de supposer $\mathcal{H}'_c$ et $\mathcal{K}'_c$ tonnelés; $\Delta^0_{\varepsilon,\mu}$ n'est plus nécessairement une restriction de $\Delta_{\varepsilon,\mu}$, car $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{K}_y$ n'ont pas nécessairement la propriété d'approximation stricte; comme

([1]) $\mathcal{D}$ est tonnelé comme limite inductive d'espaces (de Fréchet) tonnelés (Bourbaki [2], chapitre III, § 1, n° 1, corollaire de la proposition 1, et n° 2, corollaire 2 de la proposition 2). Le théorème des noyaux intervient inévitablement dans la démonstration; soit pour prouver (page 17) que $\mathcal{D}_x \hat{\otimes}_\iota \mathcal{D}_y = \mathcal{D}_{x,y}$, soit pour prouver ici que $\mathcal{D}'_x \varepsilon \mathcal{D}'_y = \mathcal{D}'_{x,y}$.

nous l'avons vu aux pages 27, 28, 28, 25, $\Delta^0_{\varepsilon,\mu}$ est μ-continue pour $\mu = \beta$, π, ε, et aussi pour $\mu = \gamma$ si E et F sont quasi-complets.

Montrons enfin que $\vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T} \cdot \varphi(x, y)$ peut se calculer d'après la méthode de Fubini, pour $\varphi \in \mathfrak{D}_{x,y}$. Pour tout $x \in X^l$, $\varphi(x, \hat{y}) = \vec{\varphi}(x)$ est dans $\mathfrak{D}_y$, donc $\vec{T}_y \cdot \varphi(x, y)$ est un élément de F; alors $x \to T_y \cdot \varphi(x, y)$ est une fonction $\vec{\Phi}$ sur X^l à valeurs dans F. Mais $\vec{\varphi}$ est une fonction appartenant à $\overline{\mathfrak{D}_x}(\mathfrak{D}_y)$ donc $\vec{\Phi}$ appartient à $\overline{\mathfrak{D}_x}(F)$. Mais cela n'est pas suffisant pour pouvoir continuer : avec $\vec{S} \in \mathfrak{D}'_x(E)$, $\vec{\Phi} \in \overline{\mathfrak{D}_x}(F)$, on ne peut pas définir un produit scalaire, les conditions de la proposition 10 ou 20 *bis* ne sont pas satisfaites; $\vec{S}$ étant quelconque n'est pas localement bornée. Mais nous allons voir que Φ est β_0 bornée : $\vec{\Phi} \in \mathfrak{D}_x(F; \beta_0) = (\mathfrak{D}'_x)'_c(F; \beta_0)$. On pourra alors appliquer la proposition 10 à $\vec{S}$ et $\vec{\Phi}$ avec $\mathcal{K} = \mathcal{H} = \mathfrak{D}'_x$, $\Lambda =$ identité, et définir $\vec{S}_x \cdot_\iota \vec{\Phi}(x) \in E \hat{\otimes}_\iota F$. Comme $\vec{\Phi}$ est l'image par $L_{\vec{T}}$ de $\vec{\varphi}$, il suffit de montrer que cette fonction appartient à $\mathfrak{D}_x(\mathfrak{D}_y; \beta_0) = \mathfrak{D}_x(\mathfrak{D}_y; \beta)$. Soient alors H et K des compacts de X^l, Y^m, tels que $H \times K$ contienne le support de φ. D'autre part, soit $M_{p,q}$ le maximum du module de $D^p_x D^q_y \varphi(x, y)$. D'après un théorème de Dubois-Reymond, il existe deux suites de constantes > 0, P_p, Q_q, telles que $M_{p,q} \leqslant P_p Q_q$. Soit alors B_x (resp. B_y) l'ensemble borné de $\mathfrak{D}_x$ (resp. $\mathfrak{D}_y$) formé des fonctions de support dans H (resp. K), vérifiant la suite d'inégalités $|D^p u| \leqslant P_p$ (resp. $|D^q v| \leqslant Q_q$). Montrons que $L_{\vec{\varphi}}$ applique le polaire B^0_x de B_x dans B_y, ce qui prouvera bien qu'elle est bornée. Mais si $S_x \in B^0_x$, $L_{\vec{\varphi}}(S)$ est la fonction $y \to S_x \cdot \varphi(x, y)$; alors la dérivée D^q de cette fonction n'est autre que $y \to S_x \cdot D^q_y \varphi(x, y)$; comme $|D^p_x D^q_y \varphi(x, y)| \leqslant P_p Q_q$, $D^q_y \varphi(\hat{x}, y)$ appartient à $Q_q B_x$ pour tout y, donc $|S_x \cdot D^q_y \varphi(x, y)| \leqslant Q_q$, donc $L_{\vec{\varphi}}(S) \in B_y$, alors $L_{\vec{\varphi}}(B^0_x) \subset B_y$, et nous avons bien la possibilité de définir $\vec{S}_x \cdot_\iota \vec{\Phi}(x) \in E \hat{\otimes}_\iota F$ en application de la proposition 10. Il nous faut montrer maintenant que $\vec{S}_x \cdot_\iota \vec{\Phi}(x) = (\vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T}_y) \cdot \varphi(x, y)$. C'est évident si $\varphi \in \mathfrak{D}_x \hat{\otimes} \mathfrak{D}_y$, en vertu de (II, 4; 1) et de (II, 6; 1); ce sera donc toujours vrai si les deux membres dépendent continuement de $\varphi \in \mathfrak{D}_{x,y}$. Or il en est ainsi du deuxième. Montrons donc qu'il en est de même du premier. Comme $\mathfrak{D}_{x,y}$ est bornologique [1], il suffit de montrer que, si φ parcourt une partie bornée, le premier membre reste borné dans $E \hat{\otimes}_\iota F$. Or si φ reste bornée, on peut choisir fixes les compacts H et K, et la suite $M_{p,q}$, donc les suites P_p et Q_q et les ensembles bornés B_x et B_y; alors $\vec{\Phi}$ reste dans une partie β_0-équibornée de $\mathfrak{D}'_x(F)$. Comme $\vec{S}$ est fixe, la fin de la proposition 10 montre bien que $\vec{S}_x \cdot_\iota \vec{\Phi}(x)$ reste bornée dans $E \hat{\otimes}_\iota F$, c.q.f.d.

Remarque. — Le fait que $\vec{\Phi}(\hat{x}) \in \mathfrak{D}_x(F; \beta_0)$ peut être précisé. Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de parties bornées de F, et supposons que $\vec{T}$ soit dans $\mathfrak{D}'(F_{\mathfrak{G}})$; alors $\vec{\Phi}(\hat{x})$ est dans $\mathfrak{D}_x(F; \mathfrak{G})$. En effet, en reprenant les notations de la démonstration précédente, $L_{\vec{\varphi}}$ applique B_x^0 dans B_y, et comme $L_{\vec{T}}$ applique B_y dans une partie de F appartenant à $\mathfrak{G}$, $L_{\vec{\Phi}} = L_{\vec{T}} \circ L_{\vec{\varphi}}$ applique l'ouvert B_x^0 dans une partie de F appartenant à $\mathfrak{G}$. Si en outre $\vec{T}_y$ parcourt une partie du type $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{D}'_y(F)$, $\Phi(\hat{x})$ parcourt une partie $\mathfrak{G}$-équibornée de $\mathfrak{D}_y(F)$.

Cas où $\vec{S}$ et T sont des fonctions.

PROPOSITION 33 *bis*. — *Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble saturé de parties bornées de* F.

Soient $\vec{S} \in \mathfrak{D}'_x(E)$ et $T \in \mathfrak{D}'_y(F)$ *des distributions définies par des fonctions localement intégrables* $\vec{S}(\hat{x})$, $\vec{T}(\hat{y})$. *Alors* $\vec{S}_x \otimes \otimes_\pi \vec{T}_y$ *est la fonction* $\vec{S}(\hat{x}) \otimes_\pi \vec{T}(\hat{y})$. *Si, quel que soit le compact* K *de* Y^m, *il existe une partie bornée disquée* $B \in \mathfrak{G}$ *telle que* $\vec{T} \in \overline{L^1_K}(F_B)$, *alors* $\vec{S}_x \otimes \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{T}_y$ *est la fonction* $\vec{S}(\hat{x}) \otimes_{\mathfrak{G}} \vec{T}(\hat{y})$.

Tout d'abord $\vec{S}(\hat{x}) \otimes \otimes_\pi \vec{T}(\hat{y})$ est localement intégrable, donc définit une distribution. Cette distribution prend pour valeur, sur $u(\hat{x})\, v(\hat{y}) \in \mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y$:

$$\iint_{X^l \times Y^m} \big(\vec{S}(x) \otimes_\pi \vec{T}(y)\big)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy$$
$$= \int_{X^l} \vec{S}(x)\, u(x)\, dx \otimes \int_{Y^m} \vec{T}(y)\, v(y)\, dy$$
$$= (\vec{S}.u) \otimes (\vec{T}.v) = \big(\vec{S}_x \otimes \otimes_\pi \vec{T}_y\big).u(x)\, v(y),$$

et par suite cette distribution coïncide avec $\vec{S}_x \otimes \otimes_\pi \vec{T}_y$.

[1] Car $\mathfrak{D}$ est limite inductive d'espaces (de Fréchet) bornologiques (BOURBAKI [4], page 11).

Si maintenant, quel que soit le compact K de R^n, il existe $B \in \mathfrak{B}$ disquée telle que $\vec{T} \in \overline{L^1_K}(F_B)$, alors $\vec{S}(\hat{x}) \otimes \vec{T}(\hat{y})$ est dans $\overline{\mathcal{L}^1_{X^l \times K}}(E \otimes_\pi F_B)$, donc $\vec{S}(\hat{x}) \otimes_{\mathfrak{T}} \vec{T}(\hat{y})$ est dans $\overline{\mathcal{L}^1_{X^l \times K}}(E \otimes_{\mathfrak{T}} F)$ (voir page 88), et par suite dans $\overline{\mathcal{L}^1}(E \otimes_{\mathfrak{T}} F)$. Le raisonnement ci-dessus montre que la distribution définie par $\vec{S}(\hat{x}) \otimes_{\mathfrak{T}} \vec{T}(\hat{y})$ est $\vec{S}_x \otimes \otimes_{\mathfrak{T}} \vec{T}_y$.

Produit tensoriel de plusieurs distributions.

Soient $\vec{R}_x \in \mathcal{D}'_x(E)$, $\vec{S}_y \in \mathcal{D}'_y(F)$, $\vec{T}_z \in \mathcal{D}'_z(G)$, trois distributions vectorielles (E, F, G, non nécessairement quasi-complets) sur X^l, Y^m, Z^n, respectivement.

On peut alors définir directement une distribution $(\vec{R}_x \otimes \otimes \vec{S}_y \otimes \otimes \vec{T}_z)_\iota \in \mathcal{D}'_{x,y,z}((E \otimes F \otimes G)^\frown_\iota)$ (¹). Nous laissons au lecteur le soin de la définir (on utilisera le fait que $(\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y \otimes \mathcal{D}_z)^\frown_\iota = \mathcal{D}_{x,y,z}$) et d'en donner les propriétés principales, analogues à celles du produit tensoriel de deux distributions. Ce que nous voulons indiquer ici, c'est la propriété d'associativité. On peut former $(\vec{R}_x \otimes \otimes_\iota \vec{S}_y) \otimes \otimes_\iota \vec{T}_z \in \mathcal{D}'_{x,y,z}((E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G)$. Mais il existe une application linéaire continue canonique de $(E \otimes F \otimes G)^\frown_\iota$ dans $(E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G$ (car l'application trilinéaire canonique de $E \times F \times G$ dans $(E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G$ est séparément continue); nous allons montrer que l'image de $(\vec{R}_x \otimes \otimes \vec{S}_y \otimes \otimes \vec{T}_z)_\iota$ dans $\mathcal{D}'_{x,y,z}((E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G)$ n'est autre que $(\vec{R}_x \otimes \otimes_\iota \vec{S}_y) \otimes \otimes_\iota \vec{T}_z$. Comme ce sont deux distributions, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur un sous-espace dense de $\mathcal{D}_{x,y,z}$; or elles sont trivialement égales sur $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y \otimes \mathcal{D}_z$, ce qui prouve notre assertion.

§ 7. — Convolution.

Les méthodes que nous avons développées au § 6 sont souvent valables si on remplace la multiplication par une application bilinéaire υ de nature quelconque; il aurait été possible,

(¹) $(E \otimes F \otimes G)_\iota$ est la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l'application trilinéaire canonique $E \times F \times G \to E \otimes F \otimes G$ soit séparément continue.

Nous laissons au lecteur le soin de montrer que $(\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y \otimes \mathcal{D}_z)^\frown_\iota = \mathcal{D}_{x,y,z}$.

et même plus logique, de traiter d'abord le cas général avec u quelconque, puis d'appliquer les théorèmes sans nouvelle démonstration, aux cas particuliers de la multiplication et de la convolution; nous avons préféré, pour rester plus près du concret, traiter en détail la multiplication; pour la convolution, nous renverrons donc, sans nouvelle démonstration, aux propriétés correspondantes démontrées pour la multiplication.

Convolution élémentaire.

PROPOSITION 34. — *Soient* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, 3 *espaces de distributions sur* R^n, $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{K}$ *normaux*; E, F, 2 *espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On suppose de plus que* $\mathcal{H}$ *est nucléaire et de dual fort nucléaire, et qu'il a la propriété d'approximation stricte. Soit* $(S, T) \to S * T$ *une convolution* [1] *de* $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{L}$, μ*-continue,* $\mu \leqslant \gamma$. *On peut définir une convolution* $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\pi \vec{T}$ (*et une seule si* $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation*), *application bilinéaire de* $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$ *dans* $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, *séparément continue, et vérifiant*

$$\text{(II, 7; 1)} \qquad S\vec{e} *_\pi T\vec{f} = (S * T)\,\vec{e} \otimes \vec{f},$$

pour $S \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{K}$, $\vec{e} \in E$, $\vec{f} \in F$.

Cette convolution est en outre hypocontinue par rapport aux parties bornées de $\mathcal{H}(E)$ *et aux* μ*-parties de* $\mathcal{K}(F)$; *elle est continue si* $\mu \leqslant \pi$. *Cette application est compatible avec les applications linéaires continues de* E, F, *ou de* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$.

Il suffit d'appliquer la proposition 3 à la convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$.

On peut naturellement faire la même remarque que pour la multiplication, page 122.

EXEMPLES. — On peut définir une convolution, hypocontinue par rapport aux parties bornées, de $\mathcal{E}'(E) \times \mathcal{D}'(F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, de $\mathcal{D}(E) \times \mathcal{D}'(F)$ dans $\mathcal{E}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, de $\mathcal{O}'_C(E) \times \mathcal{S}'(F)$ dans $\mathcal{S}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, de $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}'(F)$ dans $\mathcal{O}_M(E \hat{\otimes}_\pi F)$ (et même

[1] Rappelons qu'on appelle convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ une application bilinéaire séparément continue, coïncidant sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ avec la convolution usuelle.

dans $\mathcal{O}_C(E \hat{\otimes}_\pi F)$), de $\mathcal{O}_C(E) \times \mathcal{D}'_{L^p}(F)$ dans $\mathcal{D}'_{L^p}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, pour $p \neq \infty$ etc. (1).

En appliquant les formules (II, 2; 8), on a des formules analogues à (II, 5; 2 et 2 *bis*).

Associativité de la convolution.

On peut donner une proposition identique à 25 *bis*, en remplaçant partout la multiplication par la convolution.

Contentons-nous de l'application suivante.

Pour $U \in \mathcal{E}'$, $\vec{S} \in \mathcal{E}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, ou pour $U \in \mathcal{O}'_C$, $\vec{S} \in \mathcal{O}'_C(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{S}'(F)$, on a :

$$\text{(II, 7; 2)} \quad U * (\vec{S} *_\pi \vec{T}) = (U * \vec{S}) *_\pi T = \vec{S} *_\pi (U * \vec{T}).$$

Les 3 membres sont en effet séparément continus en U, $\vec{S}$, $\vec{T}$, et coïncident sur $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}' \otimes E) \times (\mathcal{E}' \otimes F)$ donc partout.

Commutativité de la convolution.

Lorsque les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont distincts, de même que E et F, il n'y a pas vraiment lieu de parler de commutativité. Soient, par exemple, $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$. Alors $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ et $\vec{T} *_\pi \vec{S}$, si l'on peut appliquer la proposition 34, se déduisent l'un de l'autre par la symétrie canonique $E \hat{\otimes}_\pi F \to F \hat{\otimes}_\pi E$.

Mais supposons que l'on ait $E = F$; alors la symétrique canonique de $E \hat{\otimes}_\pi E$ est une opération interne, *distincte de l'identité*, et il faudra donc soigneusement distinguer $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ et $\vec{T} *_\pi \vec{S}$, qui seront des éléments distincts de $E \hat{\otimes}_\pi E$, déduits l'un de l'autre par la symétrie canonique. Si en outre E a une structure d'algèbre, donc s'il existe une multiplication θ de $E \times E$ dans E, que nous supposerons continue, alors θ définit une application linéaire continue $\bar{\theta}$ de $E \hat{\otimes}_\pi E$ dans E, et on peut calculer $\vec{S} *_\theta \vec{T}$ et $\vec{T} *_\theta \vec{S}$ qui sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$; ces éléments seront en général distincts. C'est seulement si

(1) Voir note (1), page 130.

Pour $p = \infty$, $\mathcal{D}'_{L^\infty} = \mathcal{B}'$ n'est pas normal, on ne peut donc pas dire qu'il existe une convolution de $\mathcal{O}'_C \times \mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}'$; toutefois il existe une convolution de $\mathcal{O}'_C \times \mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, et sa restriction à $\mathcal{O}'_C \times \mathcal{B}'$ est hypocontinue de $\mathcal{O}'_C \times \mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}'$. On peut donc en fait utiliser même le cas $p = \infty$.

la multiplication θ est commutative, et que $\bar{\theta}$ est alors invariante par la symétrie canonique de $E \hat{\otimes}_\pi E$, que l'on aura

$$\overleftarrow{S} *_\theta \vec{T} = \vec{T} *_\theta \overleftarrow{S}.$$

Mais il y a une autre difficulté. Ce que nous avons écrit $T*S$ ou $\vec{T} *_\pi \overleftarrow{S}$ aurait du, en toute correction s'écrire $T \overset{s}{*} S$ ou $\vec{T} \overset{s}{*} \overleftarrow{S}$. Car il s'agit d'une opération de $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$ déduite par symétrie de la convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$, mais distincte de cette convolution en un certain sens : cette opération symétrique $(T, S) \to T \overset{s}{*} S$ est elle aussi une convolution, car elle est séparément continue, et se réduit sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ à la convolution usuelle, du fait que cette dernière est commutative, et c'est donc l'unique convolution possible de $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$; mais *cette convolution est peut-être distincte de la précédente sur* $(\mathcal{H} \cap \mathcal{K}) \times (\mathcal{H} \cap \mathcal{K})$, car il n'est pas certain que, sur ce sous-espace, la convolution donnée soit commutative [1]; d'où la nécessité de notations différentes, $*$ et $\overset{s}{*}$. C'est pourquoi nous n'examinerons la commutativité que si $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Alors la convolution donnée de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$ est sûrement commutative, puisqu'elle s'obtient par passage à la limite à partir de la convolution commutative sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Alors $T \overset{s}{*} S = T * S$, et $\vec{T} \overset{s}{*} \overleftarrow{S}$ peut correctement s'écrire $\vec{T} *_\pi \overleftarrow{S}$, et se déduit de $\overleftarrow{S} *_\pi \vec{T}$ par la symétrie $E \hat{\otimes}_\pi F \to F \hat{\otimes}_\pi E$.

Finalement supposons que $\mathcal{H}$ soit une algèbre de convolution, c'est-à-dire qu'il existe une convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, et que le couple $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ait les propriétés énoncése à la proposition 34. La convolution sur $\mathcal{H}$ est nécessairement associative et commutative, puisqu'elle l'est sur $\mathcal{D}$. Supposons d'autre

[1] Soient $S \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$, $T \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$. Pour définir $S * T$, en considérant donc $S \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{K}$, on pose $S = \lim_j S_j$, $T = \lim_k T_k$, $S_j \in \mathcal{D}$, $T_k \in \mathcal{D}$, les limites étant prises respectivement dans $\mathcal{H}$ et dans $\mathcal{K}$. Pour définir $T * S$, en considérant donc $T \in \mathcal{H}$, $S \in \mathcal{K}$, on pose cette fois $S = \lim_k S_k$, $T = \lim_j T_j$, $S_k \in \mathcal{D}$, $T_j \in \mathcal{D}$, les limites étant prises dans $\mathcal{K}$ et dans $\mathcal{H}$ respectivement. La convolution donnée sur $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ ne sera donc pas nécessairement commutative sur $(\mathcal{H} \cap \mathcal{K}) \times (\mathcal{H} \cap \mathcal{K})$, car il n'est pas sûr qu'un élément de $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ soit limite, à la fois pour les topologies de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, d'*un même filtre de* $\mathcal{D}$; autrement dit $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$, muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, *n'est pas nécessairement normal.* Mais il le sera toujours, et alors il n'y aura aucune difficulté, si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ ont la propriété d'approximation par troncature et régularisation.

part qu'il existe sur E une structure d'algèbre (associative) à multiplication θ continue. Alors $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\theta \vec{T}$ définit sur $\mathcal{H}(E)$ une structure d'algèbre (associative), à multiplication μ-continue; si θ est commutative, cette algèbre est commutative.

Dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, Lions, utilise le cas suivant [1]. $\mathcal{H}$ est l'espace $\mathcal{D}'_+$ des distributions sur la droite R de la variable temps t, à support limité à gauche. C'est une algèbre de convolution, à convolution hypocontinue par rapport aux parties bornées. Soient L, M, N, 3 espaces de Banach, et soit θ l'application bilinéaire continue de $\mathcal{L}(L; M) \times \mathcal{L}(M; N)$ dans $\mathcal{L}(L; N)$ définie par la composition des opérateurs. Le couple $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ a bien les propriétés énoncées dans la proposition 34 [2].

On peut donc définir une application bilinéaire $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\theta \vec{T}$

[1] Voir, par exemple, Lions [1], chapitre II, § 1.

[2] $\mathcal{D}'_+$ est le dual de $\mathcal{D}_-$ (Schwartz [5], page 28). $\mathcal{D}_-$ est muni de la topologie limite inductive des $\mathcal{E}_{(-\infty, c)}$, (ce dernier est le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des fonctions à support contenu dans la demi-droite $(-\infty, c)$; il est muni de la topologie induite par $\mathcal{E}$); $\mathcal{D}'_+$ de la topologie forte de dual de $\mathcal{D}_-$.

Une partie bornée de $\mathcal{D}_-$ est dans un $\mathcal{E}_{(-\infty, c)}$ (Bourbaki [2], chapitre III, § 2, n° 4, proposition 6). On en déduit que ces parties bornées sont relativement compactes, puisqu'il en est ainsi dans $\mathcal{E}$, donc que $\mathcal{D}_-$ est semi-réflexif (Bourbaki [2], chapitre IV, § 3, n° 3, théorème 1), et comme il est limite inductive d'espaces (de Fréchet) tonnelés, il est tonnelé (Bourbaki [2], chapitre III, § 1, n° 1, corollaire 2 de la proposition 2), donc il est réflexif (Bourbaki [2], chapitre IV, § 3, n° 3, théorème 2), et c'est un espace de Montel. Donc $\mathcal{D}_-$ est le dual fort de $\mathcal{D}'_+$. $\mathcal{D}_-$ est normal et a la propriété d'approximation par troncature et régularisation (parce que ses parties compactes sont dans des $\mathcal{E}_{(-\infty, c)}$ et que ces espaces, comme $\mathcal{E}$, ont cette propriété), et il a la propriété d'approximation stricte (préliminaires, proposition 3) donc aussi son dual $(\mathcal{D}_-)'_c$ (préliminaires, proprosition 4, applicable parce que $\mathcal{D}_-$, tonnelé, à la topologie γ), qui n'est autre que $\mathcal{D}'_+$. La convolution de $\mathcal{D}'_+ \times \mathcal{D}'_+$ dans $\mathcal{D}'_+$ a été étudiée dans Schwartz [5] chapitre VI, § 5. Comme $\mathcal{D}_-$ est tonnelé, toute partie bornée de $\mathcal{D}'_+$ est équicontinue, d'où on déduit aisément qu'elle est contenue dans un $\mathcal{D}_{(c_1, +\infty)}$; alors, si S reste bornée dans $\mathcal{D}'_+$ et que T converge vers 0, on voit aisément que $S * T$ converge vers 0 (car, si φ reste bornée dans $\mathcal{D}_-$, $\check{S} * \varphi$ reste bornée dans $\mathcal{D}_-$, donc $S * T \cdot \varphi = T \cdot \check{S} * \varphi$ converge vers 0), la convolution est hypocontinue par rapport aux parties bornées.

$\mathcal{E}$ est nucléaire, donc aussi $\mathcal{E}_{(-\infty, c)}$ (Grothendieck [5], § 2, n° 2, théorème 9,1, donc aussi $\mathcal{D}_-$ (*ibidem*, corollaire 1); comme les parties bornées de $\mathcal{D}_-$ sont dans des $\mathcal{E}_{(-\infty, c}$, $\mathcal{D}'_+$ est limite projective des $(\mathcal{E}_{(-\infty, c)})'$; $\mathcal{E}_{(-\infty, c)}$ étant un espace de Fréchet nucléaire, son dual est nucléaire (*ibidem*, n° 1, théorème 7), , donc aussi la limite projective $\mathcal{D}'_+$ (*ibidem*, n° 2 corollaire 2 du théorème 9)., Ainsi on a toutes les conditions voulues pour appliquer la proposition 34 à $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{L} = \mathcal{D}'_+$. Soit $\mathcal{D}'_{(0, +\infty}$ le sous-espace de $\mathcal{D}'_+$ formé des distributions à support dans $(0, +\infty)$; la restriction de la convolution de $\mathcal{D}'_+(E) \times \mathcal{D}'_+(F)$ dans $\mathcal{D}'_+(E \otimes_\pi F)$ donne une convolution de $\mathcal{D}'_{(0, +\infty)}(E) \times \mathcal{D}'_{(0, +\infty)}F$ dans $\mathcal{D}'_{(0, +\infty)}(E \hat{\otimes}_\pi F)$.

de $\mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(L;\ M)) \times \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(M;\ N))$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(L;\ N))$, hypocontinue par rapport aux parties bornées. Il n'est pas question ici de commutativité. Mais, si $L = M = N$, on voit que $\mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(L;L))$ est, pour la convolution des distributions et la composition des opérateurs, une algèbre, mais cette algèbre n'est pas commutative puisque la composition des opérateurs de $\mathcal{L}(L;L)$ n'est pas commutative.

Ce que nous venons de voir sur R^n peut s'étendre à la convolution des distributions à valeurs vectorielles sur un groupe de Lie G; mais alors il n'est pas question de commutativité, puisque la convolution des distributions scalaires n'est déjà pas commutative

Indépendance de $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ par rapport à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.

Proposition 35. — *Le produit de convolution $\vec{S} *_\pi \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$ ne dépend que de $\vec{S}$ et $\vec{T}$ et non de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, si l'un des deux espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, à la propriété d'approximation par troncature et régularisation.*

Démonstration analogue à celle de la page 43, la convolution remplaçant le produit scalaire. Si $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, on démontre d'abord que, si $\vec{S} \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ est le même, que l'on considère $\vec{S}$ comme élément de $\mathcal{H}(E)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{K}(F)$, ou $\vec{S}$ comme élément de $\mathcal{D}(E)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{D}'(F)$ (compatibilité de la convolution avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, relativement au diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \times \mathcal{K} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathcal{D} \times \mathcal{D}' \arrow[d, "*"] \\
\mathcal{H} \times \mathcal{K} \arrow[r, "*"] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{D}').
\end{tikzcd}$$

Ensuite on utilise un passage à la limite, comme dans (II; 3, 3).

Si c'est $\mathcal{K}$ qui a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, on prend d'abord $\vec{T} \in \mathcal{D}(F)$ puis $\vec{T}$ quelconque.

Problèmes de supports.

Proposition 36. — *Si, dans les conditions de la proposition 32, $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation par troncature et* *régularisation, et si* A (resp. B) *est le support de* $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$ (*resp.* $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$), *le support de* $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ *est contenu dans* $\overline{A + B}$. *Pour connaître* $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ *dans un ouvert* Ω *de* R^n, *il suffit de connaître* $\vec{T}$ *dans* $\Omega - A$.

Supposons d'abord $\mathcal{H} = \mathcal{D}, \mathcal{K} = \mathcal{D}', \mathcal{L} = \mathcal{D}'$. Alors la convolution induit une application bilinéaire séparément continue de $\mathcal{D}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, qui applique le produit de sous-espaces denses $(\mathcal{D}_A \otimes E) \times (\mathcal{D}'_B \otimes F)$ dans le sous-espace fermé $\mathcal{D}'_K(E \hat{\otimes}_\pi F)$, $K = \overline{A + B} = A + B$ (voir raisonnement analogue à la proposition 27), donc aussi $\mathcal{D}_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ dans $\mathcal{D}'_K(E \hat{\otimes}_\pi F)$, ce qui démontre dans ce cas notre affirmation. Si maintenant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont quelconques, mais que $\mathcal{H}$ ait la propriété d'approximation par troncature et régularisation, on écrira $\vec{S} *_\pi \vec{T} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \left[\lim\limits_{\mu \to \infty} \left(\alpha_\nu(\vec{S} * \rho_\mu)\right) *_\pi \vec{T}\right]$; si A_ε est le voisinage d'ordre ε du support de A, $\alpha_\nu(\vec{S} * \rho_\mu)$ a son support dans A_ε pour μ assez grand, et appartient à $\mathcal{D}(E)$; son produit de convolution avec $\vec{T}$ peut se calculer (proposition 34) en le considérant comme élément de $\mathcal{D}(E)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{D}'(F)$, donc le support de $\left(\alpha_\nu(\vec{S} * \rho_\mu)\right) *_\pi \vec{T}$ est dans $\overline{A_\varepsilon + B}$; alors le support de $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ est dans $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0} (A_\varepsilon + B) \subset \overline{A + B}$. Démonstration symétrique si c'est $\mathcal{K}$ qui à la propriété d'approximation par troncature et régularisation.

Quant à la dernière partie de la proposition, elle résulte trivialement de la première; si $\vec{T} = 0$ dans $\Omega - A$, son support est dans $\complement(\Omega - A)$, donc celui de $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ dans $\overline{A + \complement(\Omega - A)}$; mais $A + \complement(\Omega - A) \subset \complement\Omega$ (car, si $a \in A$, $\xi \notin \Omega - A$, on a $a + \xi \notin \Omega$, sans quoi on aurait $\xi \in \Omega - A$), donc aussi $\overline{A + \complement(\Omega - A)} \subset \complement\Omega$; et par suite $\vec{S} *_\pi \vec{T} = 0$ dans Ω.

Relation entre produit scalaire et produit de convolution.

PROPOSITION 37. — *Supposons vérifiées les conditions de la proposition* 34. *Supposons en outre que* $\mathcal{L}$ *soit normal, que* $\mathcal{K}$ *ait la propriété d'approximation, et que* $\mathcal{H}$ *vérifie les conditions de la proposition* 4. *Alors on a, pour* $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, *et* $\varphi \in \mathcal{L}'$:

$$\text{(II, 7; 3)} \qquad (\vec{S} *_\pi \vec{T}) \cdot \varphi = \vec{S} \cdot_\pi (\vec{T} * \varphi) \in E \hat{\otimes}_\pi F.$$

Si en outre $\mathcal{L}$ vérifie les conditions de la proposition 4, alors on a, pour $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}'(G)$:

$$\text{(II, 7; 3 } bis\text{)} \qquad \left(\vec{S} *_\pi \vec{T}\right) \cdot_\pi \vec{\varphi} = \vec{S} \cdot_\pi \left(\check{\vec{T}} *_\pi \vec{\varphi}\right) \in (E \otimes F \otimes G)^{\wedge}_{\pi}$$

en identifiant $(E \hat{\otimes}_\pi F) \hat{\otimes}_\pi G$ et $E \hat{\otimes}_\pi (F \hat{\otimes}_\pi G)$ à $(E \otimes F \otimes G)^{\wedge}_{\pi}$.

Les produits scalaires π considérés ici sont ceux qui sont définis à la proposition 4.

Les considérations de la page 130 montrent en effet qu'une convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$, hypocontinue par rapport aux parties compactes, définit par transposition une application bilinéaire séparément continue de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}'_c$ dans $\mathcal{H}'_c$; si $\mathcal{L}$, donc aussi $\mathcal{L}'_c$, est normal, cette application peut se noter $(T, \varphi) \to \check{T} * \varphi$, puisqu'elle a cette forme sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$; cela revient à dire qu'il y a une convolution de $\check{\mathcal{K}} \times \mathcal{L}'_c$ dans $\mathcal{H}'_c$ (¹). Alors on peut définir (voir chapitre I, § 3; par exemple proposition 21 *bis*) une application bilinéaire, qu'on notera $(\vec{T}, U) \to \check{\vec{T}} * U$ de $\mathcal{K}(F) \times \mathcal{L}'_c$ dans $\mathcal{H}'_c(F)$; pour U fixée, $\vec{T} \to \check{\vec{T}} * U$ est continue de $\mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{H}'_c(F) = \mathcal{H}'(F)$. Si alors les conditions de la proposition 4 sont en outre réalisées ($\mathcal{H}$ a la topologie γ, $\mathcal{H}'$ est quasi-complet), on peut définir un produit scalaire $\vec{S} \cdot_\pi \check{\vec{T}} * \varphi \in E \hat{\otimes}_\pi F$, pour $\varphi \in \mathcal{L}'$. Nous devons montrer que l'on a alors (II, 7; 3). Or, il en est trivialement ainsi si $\vec{S} \in \mathcal{H} \otimes E$ et $\vec{T} \in \mathcal{K} \otimes F$, d'après la définition même (par transposition) de la convolution de $\check{\mathcal{K}} \times \mathcal{L}'_c$ dans $\mathcal{H}'_c$; les deux membres de (II, 7; 3) étant alors, pour φ fixée, séparément continus sur $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F)$, coïncident.

Naturellement on peut être tenté de procéder en sens inverse. La convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ définit une application bilinéaire séparément continue $(S, \varphi) \to \check{S} * \varphi$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{L}'_c$ dans $\mathcal{K}'_c$, donc une application bilinéaire $\left(\vec{S}, \varphi\right) \to \check{\vec{S}} * \varphi$ de $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{L}'_c$ dans $\mathcal{K}'_c(E)$. Mais alors on ne peut pas appliquer la proposition 4 pour donner un sens à $\check{\vec{S}} * \varphi \cdot_\pi \vec{T}$ ou $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$, car $\mathcal{K}$ n'est pas supposé nucléaire. Mais si $\mathcal{K}$, au lieu de $\mathcal{H}$, vérifie les conditions

(¹) Si $\mathcal{H}$ est un espace de distributions, son symétrique $\check{\mathcal{H}}$ est toujours muni de la topologie déduite de celle de $\mathcal{H}$ par la symétrie $\vee$.

de la proposition 4, alors on peut calculer $\vec{S} * \varphi \cdot_\pi T$; on peut aussi l'appeler $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\pi \check{T}$, produit scalaire entre $\check{\mathcal{K}}'_c(E)$ et $\check{\mathcal{K}}(F)$; mais alors $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ peut se calculer d'après la proposition 34, non plus en considérant $\mathcal{H}$ comme nucléaire, mais en considérant $\mathcal{K}$ comme nucléaire (remarque page 122), et le raisonnement symétrique du précédent donne alors $\vec{S} *_\pi \vec{T} \cdot \varphi = \vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\pi \check{\vec{T}}$.

Supposons maintenant $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}'_c(G)$. Si $\mathcal{L}$ vérifie les conditions de la proposition 4, $(\vec{S} *_\pi \vec{T}) \cdot_\pi \vec{\varphi}$ a un sens pour $(\vec{S} *_\pi \vec{T}) \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F)$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}'_c(G)$; c'est un élément de $(E \hat{\otimes}_\pi F) \hat{\otimes}_\pi G$. D'autre part on peut appliquer la proposition 34 à la convolution de $\check{\mathcal{K}} \times \mathcal{L}'$ dans $\mathcal{H}'(\check{\mathcal{K}}, \mathcal{L}', \mathcal{H}'$, sont quasi-complets, $\check{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{L}'$ sont normaux ; $\mathcal{L}$ a la propriété d'approximation stricte et la topologie γ, donc $\mathcal{L}'$ à la propriété d'approximation stricte (proposition 4 du chapitre I) ; $\mathcal{L}'$ est nucléaire et son dual fort $(\mathcal{L}')'_c = \mathcal{L}$ est nucléaire, donc $\check{\vec{T}} *_\pi \vec{\varphi}$ a un sens, c'est un élément de $\mathcal{H}'(F \hat{\otimes}_\pi G)$; alors $\vec{S} \cdot_\pi (\check{\vec{T}} *_\pi \vec{\varphi})$ a un sens, c'est un élément de $E \hat{\otimes}_\pi (F \hat{\otimes}_\pi G)$. Si l'on identifie les deux espaces $(E \hat{\otimes}_\pi F) \hat{\otimes}_\pi G$ et $E \hat{\otimes}_\pi (F \hat{\otimes}_\pi G)$ à $(E \otimes F \otimes G)^{\wedge}_\pi$, on peut comparer les deux membres de (II ; 7, 3 *bis*). Ils définissent des applications trilinéaires séparément continues sur $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{K}(F) \times \mathcal{L}'(G)$, qui coïncident sur $(\mathcal{H} \otimes E) \times (\mathcal{K} \otimes F) \times (\mathcal{L}' \otimes G)$, donc partout ($\mathcal{K}$ est supposé avoir la propriété d'approximation, ainsi que $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}'$ est nucléaire donc à la propriété d'approximation).

Corollaire 1. — *(Régularisation). Si $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}^0$, vérifient les conditions de la proposition* 34, *si $\mathcal{H}$ vérifie les conditions de la proposition* 4, *et si $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation, alors, pour $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{\alpha} \in \mathcal{K}(F)$, la fonction continue $\vec{S} *_\pi \vec{\alpha}$ est donnée, pour toute valeur de $x \in R^n$, par la formule*

$$(\text{II, 7; 4}) \quad (\vec{S} *_\pi \vec{\alpha})(x) = \vec{S} \cdot_\pi \tau(x) \check{\vec{\alpha}} = \vec{S}_\xi \cdot_\pi \check{\vec{\alpha}}(x - \xi) \in E \hat{\otimes}_\pi F.$$

En particulier

$$(\text{II, 7; 4 } bis) \qquad \vec{S} \cdot_\pi \check{\vec{\alpha}} = T_r(\vec{S} *_\pi \vec{\alpha}).$$

Il suffit en effet d'appliquer (II, 7 ; 3), en prenant pour $\varphi \in \mathcal{E}'^0_c$ la masse unité au point x. Dans (II, 7 ; 4 *bis*), on remarquera (en prenant $\varphi = \delta$) que $\check{\mathcal{K}}$ est donc nécessairement contenu dans $\mathcal{H}'$, et le produit scalaire $\vec{\mathrm{S}} \cdot_\pi \vec{\alpha}$ s'obtient en appliquant la proposition 4 à $\mathcal{H}$.

Dans la pratique, $\mathcal{K}$ sera souvent un sous-espace de $\mathcal{E}$, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite. Alors $\tau(x)\check{\vec{\alpha}}$ est la fonction $\xi \to \vec{\alpha}(x - \xi)$. D'autre part on pourra généralement appliquer la proposition 34, non seulement avec $\mathcal{L} = \mathcal{E}^0$, mais même avec $\mathcal{L} = \mathcal{E}$; il sera alors possible de prendre pour φ une dérivée de la masse unité au point x, et obtenir ainsi :

$$\text{(II, 7; 4 } ter) \quad \left(\mathrm{D}^p(\vec{\mathrm{S}} *_\pi \vec{\alpha})\right)(x) = \vec{\mathrm{S}}_\xi \cdot_\pi \left((\mathrm{D}^p\vec{\alpha})(x - \xi)\right).$$

Corollaire 2. — *Supposons que $\mathcal{H}$ vérifie les conditions de la proposition* 4, *que $\mathcal{K}$ ait la propriété d'approximation, que $\mathcal{L}$ soit normal* (*resp. vérifie les conditions de la proposition* 4), *et qu'il existe une convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ et une convolution de $\mathcal{H} \times \check{\mathcal{H}}'$ dans $\mathcal{E}^0$, hypocontinues par rapport aux parties compactes. Alors on a, pour $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{K}(\mathrm{F})$, $\varphi \in \mathcal{L}'_c$ $\left(resp.\ \vec{\varphi} \in \mathcal{L}'(\mathrm{G})\right)$:*

$$\text{(II, 7; 5)} \quad (\vec{\mathrm{S}} *_\pi \vec{\mathrm{T}}) \cdot \varphi = \mathrm{T}_r\left(\vec{\mathrm{S}} *_\pi (\vec{\mathrm{T}} * \check{\varphi})\right) \in \mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$$

[*resp. :*

$$\text{(II, 7; 5 } bis) \quad (\vec{\mathrm{S}} *_\pi \vec{\mathrm{T}}) \cdot_\pi \vec{\varphi} = \mathrm{T}_r\left(\vec{\mathrm{S}} *_\pi (\vec{\mathrm{T}} *_\pi \check{\vec{\varphi}})\right) \in (\mathrm{E} \otimes \mathrm{F} \otimes \mathrm{G})^\wedge_\pi].$$

On applique d'abord la proposition 37 à $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{K}(\mathrm{F})$, $\varphi \in \mathcal{L}'_c$ $\left(\text{resp. } \vec{\varphi} \in \mathcal{L}'(\mathrm{G})\right)$; puis son corollaire 1 à $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$, $\vec{\alpha} = \vec{\mathrm{T}} * \check{\varphi} \in \mathcal{H}'(\mathrm{F})$ $\left(\text{resp. } \vec{\mathrm{T}} *_\pi \check{\vec{\varphi}} \in \mathcal{H}'(\mathrm{F} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{G})\right)$.

Produit de convolution général.

Proposition 38. — *Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, des espaces de distributions normaux sur R^n,* E *et* F *des espaces localement convexes séparés, ces espaces n'étant pas nécessairement quasi-complets. Soit $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) un ensemble saturé de parties bornées de* E *(resp. de parties bornées complétantes de* F). *On suppose que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ et que l'injection Λ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$ est sous-nucléaire; on suppose d'autre part que $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{H}$ à la propriété d'approximation requise dans l'énoncé de la proposition* 10, *et que $\mathcal{L}$ est* *bornologique. Enfin on suppose donnée une convolution de* $\mathcal{M} \times \mathcal{H}'_c$ *dans* $\mathcal{L}'_c$, *provenant par transposition d'une convolution de* $\check{\mathcal{M}} \times \mathcal{L}$ (¹) *dans* $\mathcal{K}$, *hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{L}$. *Alors on peut définir une « convolution »* (²) *de* $\mathcal{M}(\mathrm{E}) \times \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$ *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \mathbin{\hat{\otimes}_\iota} \mathrm{F})$, *notée* $(\vec{\mathrm{S}}, \vec{\mathrm{T}}) \to \vec{\mathrm{S}} *_\iota \vec{\mathrm{T}}$, *vérifiant :*

$$\text{(II, 7; 6)} \qquad (\vec{\mathrm{S}} *_\iota \vec{\mathrm{T}}) \cdot \varphi = (\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi) \cdot_{\iota;\Lambda} \vec{\mathrm{T}} \in \mathrm{E} \mathbin{\hat{\otimes}_\iota} \mathrm{F},$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{L}$; *le second membre est celui qui est défini à la proposition* 10, *pour* $\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}'_c(\mathrm{F}; \beta_0)$.

On a

$$\text{(II, 7; 7)} \qquad \mathrm{S}\vec{e} *_\iota \mathrm{T}\vec{f} = (\mathrm{S} * \mathrm{T})\vec{e} \otimes \vec{f},$$

pour $\mathrm{S} \in \mathcal{M}$, $\mathrm{T} \in \mathcal{H}'_c$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$.

Si les conditions d'application de la proposition 34 *sont aussi réalisées pour* $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}'_c$, $\mathcal{L}'_c$, *l'image de* $\vec{\mathrm{S}} *_\iota \vec{\mathrm{T}}$ *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} \mathrm{F})$ *coïncide avec le produit* $\vec{\mathrm{S}} *_\pi \vec{\mathrm{T}}$ *défini à la proposition* 34.

Cette convolution est compatible avec les applications linéaires continues de E, F, *ou de* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$.

Si $\vec{\mathrm{S}}$ *parcourt une partie du type* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathcal{M}(\mathrm{E})$, *et que* $\vec{\mathrm{T}}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$ *en restant dans une partie* β_0*-équibornée,* $\vec{\mathrm{S}} *_{\mathfrak{S}} \vec{\mathrm{T}}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathfrak{S}}} \mathrm{F})$; *si l'injection* Λ *est non seulement sous-nucléaire mais nucléaire, il est inutile de contraindre* $\vec{\mathrm{T}}$ *à rester dans une partie* β_0*-équibornée.*

Si $\vec{\mathrm{T}}$ *est* $\mathfrak{T}$*-bornée, on peut définir* $\vec{\mathrm{S}} *_{\mathfrak{T}} \vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathfrak{T}}} \mathrm{F})$ *même si* $\mathcal{L}$ *n'est pas bornologique, pourvu que la convolution de* $\check{\mathcal{M}} \times \mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{K}$, *déjà supposée hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\mathcal{L}$, *soit en outre hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\check{\mathcal{M}}$. *Dans l'un comme dans l'autre cas* ($\mathcal{L}$ *bornologique, ou convolution hypocontinue par rapport aux parties compactes de* $\check{\mathcal{M}}$), *si* $\vec{\mathrm{S}}$ *converge vers* 0 *dans* $\check{\mathcal{M}}(\mathrm{E})$ *et que* $\vec{\mathrm{T}}$ *reste dans une partie* $\mathfrak{T}$*-équibornée de* $\mathcal{H}'_c(\mathrm{F})$, $\vec{\mathrm{S}} *_{\mathfrak{T}} \vec{\mathrm{T}}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{L}'_c(\mathrm{E} \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathfrak{T}}} \mathrm{F})$.

Démonstration calquée sur celle de la proposition 32. On peut aussi reproduire les remarques des pages 131 et suivantes.

(¹) Voir note (¹), page 157.
(²) Voir note (²), page 127.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir les principales propriétés du produit de convolution (généralisation des propositions 34, 35, 36) à partir des résultats du § 4.

Donnons quelques exemples courants :

1° On peut définir une convolution de $\mathcal{E}'(E) \times \mathcal{D}'(F;\beta_0)$ ou $\mathcal{D}'(E) \times \mathcal{E}'(F;\beta_0)$ dans $\mathcal{D}'(E \,\hat{\otimes}_\iota\, F)$ (en prenant pour $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$: $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}'$, ou $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ (¹)). On a alors (II, 7; 7), et (II, 7; 6) pour $\varphi \in \mathcal{D}$. On a aussi (II, 7; 3) (où π est remplacé par ι) pour $\varphi \in \mathcal{D}$, car le passage de $(\vec{S} *_\iota \check{\varphi}) \cdot \check{\vec{T}}$ à $\vec{S} \cdot_\iota (\varphi * \check{\vec{T}})$ n'est autre que la formule (II, 4; 12) (où S, $\vec{\varphi}$, $\vec{T}$, sont remplacées par $\check{\varphi}$, $\vec{S}$, $\check{\vec{T}}$). On a aussi (II, 7; 5) (où π est remplacé par ι); appliquons en effet (II, 7; 6) à $\vec{S}_1 = \vec{S} \in \mathcal{E}'(E)$ $\vec{T}_1 = (\vec{T} * \check{\varphi}) \in \mathcal{E}(F;\beta_0)$ et $\varphi_1 = \delta \in \mathcal{E}'$ (les espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, sont alors $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$ (¹); ou à $\vec{S}_1 = \vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$, $\vec{T}_1 = \vec{T} * \check{\varphi} \in \mathcal{D}(F;\beta_0)$, $\varphi_1 = \delta \in \mathcal{E}'$ (avec les espaces $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'$); on obtient justement $Tr\left(\vec{S} *_\iota (\vec{T} * \check{\varphi})\right) = \vec{S} \cdot_\iota \check{\vec{T}} * \varphi$. Enfin on a (II, 7; 2) (où π est remplacé par ι) avec $U \in \mathcal{E}'$; c'est simplement la compatibilité de la convolution de la proposition 37 avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$. Examinons en détail un des cas. Prenons pour $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$, les espaces $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}'$; et les mêmes pour $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{M}_2$. Pour applications, prenons pour $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$, la convolution $\{\check{U}\}$ avec $\check{U} \in \mathcal{E}'$, ainsi que pour $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$; et pour $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ prenons l'identité. Ces applications sont permises, car on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{K}_2 \arrow[dr] & \\ \mathcal{K}_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{H}_2 \\ & \mathcal{H}_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

de la page 63, et le diagramme commutatif de la convolution :

$$\begin{tikzcd} \check{\mathcal{M}}_1 \times \mathcal{L}_1 \arrow[r, "I \times \{\check{U}\}"] \arrow[d, "*"] & \check{\mathcal{M}}_2 \times \mathcal{L}_2 \arrow[d, "*"] \\ \mathcal{K}_1 \arrow[r, "\{\check{U}\}"] & \mathcal{K}_2, \end{tikzcd}$$

(¹) Les espaces considérés sont normaux et nucléaires [donc ont la propriété d'approximation requise dans la proposition 10, voir note (¹), page 58]. $\mathcal{L} = \mathcal{D}$ est bornologique [note (¹) page 149].

(²) Les espaces considérés sont encore normaux et nucléaires. $\mathcal{E}'$ est bornologique d'après le chapitre I, application page 43, conséquence page 44).

qui exprime l'associativité de la convolution entre distributions scalaires : $\check{M}*(L*\check{U}) = (\check{M}*L)*\check{U}$, pour $M \in \mathcal{D}$, $L \in \mathcal{D}$. Alors on aura le diagramme commutatif vectoriel :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1(E) \times (\mathcal{H}_2)'_c(F;\ \beta_0) \arrow[r, "I"] \arrow[dd, "I \times \{U\}"] & \mathcal{M}_2(E) \times (\mathcal{H}_2)'_c(F;\ \beta_0) \arrow[d, "*_\iota"] \\
 & (\mathcal{L}_2)'_c(E \hat{\otimes}_\iota F) \arrow[d, "\{U\}"] \\
\mathcal{M}_1(E) \times (\mathcal{H}_1)'_c(F;\ \beta_0) \arrow[r, "*_\iota"] & (\mathcal{L}_1)'_c(E \hat{\otimes}_\iota F),
\end{tikzcd}$$

qui s'écrit $\vec{S} *_\iota (\vec{T} * U) = (\vec{S} *_\iota \vec{T}) * U$.

Si au lieu de cela on prend pour $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ et $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ la convolution $\{\check{U}\}$, pour $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ la convolution $\{U\}$, pour $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ l'identité, on obtient $\vec{S} *_\iota (\vec{T} * U) = (\vec{S} * U) *_\iota \vec{T}$. On a donc bien (II, 7; 2).

Si les supports de $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont A et B, le support de $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ est contenu dans $\overline{A+B}$ en vertu de la proposition 20, *c*, appliquée à $\check{\vec{S}} * \varphi \cdot_\iota \vec{T}$: si le support de $\varphi \in \mathcal{D}$ est dans le complémentaire de $\overline{A+B}$, celui de $\check{\vec{S}} * \varphi$ est dans $(-A) + \complement\, \overline{(A+B)}$, dont l'intersection avec B est vide. On en déduit encore que $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ est connue dans Ω quand $\vec{T}$ est connue dans $\Omega - A$ et $\vec{S}$ de support A. On déduit de là facilement qu'on peut définir $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ pour $\vec{S} \in \mathcal{E}'(E), \vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ localement β_0-bornée, car, pour définir $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ dans Ω, ouvert borné de R^n, on pourra remplacer $\vec{T}$ par $\vec{T}_1 \in \mathcal{D}'(F;\ \beta_0)$, égale à $\vec{T}$ dans l'ouvert $\Omega - A$ borné, et le résultat sera indépendant du choix de $\vec{T}_1$. On définit ainsi $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ de façon cohérente dans les ouverts bornés de R^n, donc sur R^n.

Nous étendrons cette définition plus loin (voir proposition 39).

2° On peut définir une convolution de $\mathcal{O}'_C(E) \times \mathcal{S}'(F;\ \beta_0)$ dans $\mathcal{S}'(E \hat{\otimes}_\iota F)$, qui vérifie (II, 7; 7), (II, 7; 6) pour $\varphi \in \mathcal{S}$, (II, 7; 3) (où π est remplacé par ι) pour $\varphi \in \mathcal{S}$, et (II, 7; 2) (où π est remplacé par ι) pour $U \in \mathcal{O}'_C$. Si A et B sont les supports de $\vec{S}$ et $\vec{T}$, le support de $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ est contenu dans $\overline{A+B}$. Les espaces $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$, sont ici $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}'_C$[1].

[1] Ces espaces sont normaux et nucléaires (Grothendieck [5], § 2, n° 3, théorème 10, page 55), donc ont la propriété d'approximation requise par la proposition 10 (note [1] page 58). $\mathcal{L} = \mathcal{S}$ est bornologique, comme espace de Fréchet (Bourbaki [4], page 11).

3° On peut définir des convolutions de $\mathcal{D}(E) \times \mathcal{D}'(F;\, \beta_0)$ ou $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}'(F;\, \beta_0)$ dans $\mathcal{E}(E \hat{\otimes}_\iota F)$, de $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}'(F;\, \beta_0)$ dans $\mathcal{S}(E \hat{\otimes}_\iota F)$ ([1]). Ces applications sont des restrictions de celles qui sont définies dans 1° et 2°, en vertu de la compatibilité avec les applications linéaires continues de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$; donc elles en ont toutes les propriétés. On a en outre (II, 7; 6), et (II, 7; 3) (où π est remplacé par ι), pour $\varphi \in \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$, respectivement.

On a enfin (II, 7; 4) (où π est remplacé par ι) pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{S} \in \mathcal{D}'(F;\, \beta_0)$ ou pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(E)$, $\vec{S} \in \mathcal{E}'(F;\, \beta_0)$ ou pour $\alpha \in \mathcal{S}(E)$, $\vec{S} \in \mathcal{S}'(F;\, \beta_0)$, comme on le voit en appliquant (II, 7; 6) pour $\varphi = \varepsilon(x) =$ masse unité au point x.

4° On peut définir une convolution de $\overline{\mathcal{E}'^p}(E) \times \mathcal{D}'^q_c(F)$ dans $\mathcal{D}'^{p+q+n+1}_c(E \hat{\otimes}_\iota F)$ (p, q, finis). Il suffit d'appliquer (II, 7; 6) et une proposition analogue à 38, mais s'appuyant sur la proposition 24 au lieu de la proposition 10; les espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, seront ici $\mathcal{D}^q$, $\mathcal{D}^{q+n+1}$, $\mathcal{D}^{p+q+n+1}$, $\mathcal{E}'^p$ ([2]). On a (II, 7; 6) pour $\varphi \in \mathcal{D}^{p+q+n+1}$. Pour $\vec{S} \in \overline{\mathcal{E}'^p}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'^q(F)$, $\vec{S} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\iota F)$ coïncide avec l'élément $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ défini en considérant $\vec{S}$ comme élément de $\overline{\mathcal{E}'}(E)$ et $\vec{T}$ comme distribution localement β_0-bornée à valeurs dans F (voir fin de 1°), en vertu de ce qui a été vu à la proposition 24. La présente convolution a donc toutes les propriétés indiquées à 1°. On a (II, 7; 3) (où π est remplacé par ι) pour $\varphi \in \mathcal{D}^{p+q+n+1}$ (voir remarque page 120); les deux membres sont en effet continus en $\varphi \in \mathcal{D}^{p+q+n+1}$ pour $\vec{S}$ et $\vec{T}$ fixés (puisqu'ils définissent tous deux des distributions de $\mathcal{D}'^{p+q+n+1}(E \hat{\otimes}_\iota F)$), il suffit donc, pour qu'ils coïncident, qu'il en soit ainsi pour $\varphi \in \mathcal{D}$; mais alors $\vec{S} *_\iota \vec{T} \cdot \varphi$ est par définition $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$, avec $\vec{S} * \check{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ localement β_0-bornée, ou encore $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}_1$, $\vec{S} \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T}_1 \in \mathcal{D}'(F;\, \beta_0)$ à support compact, égale à $\vec{T}$ dans un ouvert borné assez grand de R^n; le second membre de (II, 7; 3) est égal au produit scalaire de $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E;\, \beta_0)$ et de $\alpha\left(\check{\vec{T}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(F)$, $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage du support

([1]) Ces espaces sont normaux et nucléaires, voir note ([1]), page 162. Ici $\mathcal{L}$ est $\mathcal{E}'$ ou $\mathcal{S}'$, qui est bornologique, voir note ([2]) page 161.

([2]) Ici $\mathcal{L} = \mathcal{D}^{p+q+n+1}$ est bornologique, comme limite inductive d'espaces (de Banach) bornologiques (Bourbaki [4], page 11).

de $\vec{S}$; il vaut donc aussi $S \cdot_\iota \left(\check{\vec{T}}_1 * \varphi\right)$, $\vec{T}_1$ étant la même distribution que ci-dessus; mais, d'après (II, 4; 12), ceci vaut $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}_1$, $\vec{S} * \check{\varphi}$ est considéré comme élément de $\mathcal{E}(E; \beta_0)$ et $\vec{T}_1$ comme élément de $\mathcal{E}'(F)$; comme $\vec{S} * \check{\varphi}$ est à support compact, il est aussi dans $\mathcal{D}(E; \beta_0)$, et alors on trouve aussi $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}_1$ avec $\vec{S} * \check{\varphi} \in \mathcal{D}(E; \beta_0)$, $\vec{T}_1 \in \mathcal{D}'(F)$ (voir application C, page 72); or on sait que, si $\vec{S} * \check{\varphi} \in \mathcal{D}(E; \beta_0)$, $\vec{T}_1 \in \mathcal{D}'(F)$ et en même temps $\vec{S} * \check{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T}_1 \in \mathcal{D}'(F; \beta_0)$, les deux valeurs correspondantes trouvées pour $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}_1$ coïncident (voir page 97).

Ce que nous venons de voir montre en outre que $\vec{S} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \mathbin{\hat{\otimes}_\iota} F)$ est aussi le produit de convolution défini en considérant $\vec{S}$ comme élément de $\mathcal{E}'(E; \beta_0)$ et $\vec{T}$ comme élément de $\mathcal{D}'(F)$.

Nous ne pouvons pas donner un sens à (II, 7; 5) (où π est remplacé par ι), car, comme nous allons le voir à 5°, le produit de convolution de $\vec{S} \in \overline{\mathcal{E}'^p}(E)$ et de $\vec{T} * \check{\varphi} \in \mathcal{E}^{p+n+1}(F)$ n'est pas nécessairement une fonction, et n'a donc pas de trace. Toutefois les 2 membres de (II, 7; 5) sont bien égaux pour $\varphi \in \mathcal{D}$, car alors on est ramené au cas 1°; les développements que nous allons voir à 5° permettent d'étendre cette égalité à $\varphi \in \mathcal{D}^{p+q+n+2}$.

Si $\mathfrak{G}$ est un ensemble de parties bornées de F, et si $\vec{T}$ est localement $\mathfrak{G}$-bornée, on peut définir $\vec{S} *_{\mathfrak{G}} \vec{T} \in \mathcal{D}_c'^{p+q+n}(E \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathfrak{G}}} F)$, d'après le résultat correspondant de la proposition 24, si n est impair, ou n pair et $q = 0$. On peut alors, dans tous les résultats précédents, remplacer $n + 1$ par n. Si d'autre part $\vec{S}$ converge vers 0 dans un $(\mathcal{E}_c'^p)_K(E)$, K compact de R^n, et que $\vec{T}$ reste dans une partie localement $\mathfrak{G}$-équibornée de $\mathcal{D}_c'^q(F)$, $\vec{S} *_{\mathfrak{G}} \vec{T}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_c'^{p+q+n}(E \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathfrak{G}}} F)$.

5° On pourrait être tenté de définir une convolution de $\overline{\mathcal{D}^{m+h+n+1}}(E) \times \mathcal{D}_c'^m(F)$ dans $\mathcal{E}^h(E \mathbin{\hat{\otimes}_\iota} F)$. Il faudrait pour cela appliquer (II, 7; 6) pour $\varphi \in \mathcal{E}_c'^h$ et ensuite la proposition 24. Mais la méthode de la proposition 38 n'est plus applicable, car $\mathcal{E}_c'^h$ n'est pas bornologique(1), alors $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T}$, pour $\vec{\alpha} \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+h+1}}(E)$,

(1) $\mathcal{E}_c'^h$ et $\mathcal{E}_b'^h$ ont les mêmes parties bornées (qui sont les parties équicontinues de $\mathcal{E}'^h$, puisque $\mathcal{E}^h$, espace de Fréchet, est tonnelé). Or $\mathcal{E}_b'^h$ a une topologie strictement plus fine que $\mathcal{E}_c'^h$, donc $\mathcal{E}_c'^h$ n'est sûrement pas bornologique.

$\vec{T} \in \mathcal{D}'^m(F)$, pourrait bien être défini comme une application linéaire de $\mathcal{E}'^h$ dans $E \otimes_\iota F$ transformant toute partie bornée de $\mathcal{E}'^h$ en une partie bornée de $E \hat{\otimes}_\iota F$, mais cela ne prouverait pas que $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{E}^h(E \hat{\otimes}_\iota F)$, et une telle convolution ne nous semble pas pouvoir être définie. Prenons cependant $h = 0$. Alors on peut définir $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T} \cdot \varphi = \check{\vec{\alpha}} * \varphi \cdot_\iota \vec{T}$ pour $\varphi \in \mathcal{E}'^0$ donc pour $\varphi \in L^1$ à support compact; si nous appelons $\mathcal{K}^1$ l'espace $L^1 \cap \mathcal{E}'$ de ces fonctions φ, et si nous le munissons de la topologie limite inductive des topologies induites par L^1 sur les $L^1 \cap \mathcal{E}'_K$, K compacts de R^n, $\mathcal{K}_1$ est complet, normal et bornologique (¹), et le procédé de la proposition 38 s'applique (en la modifiant de façon à utiliser la proposition 24 au lieu de la proposition 10; la convolution de $\check{\mathcal{D}}^{m+n+1} \times \mathcal{K}_1$ dans $\mathcal{D}^{m+n+1}$ est bien hypocontinue par rapport aux parties compactes, puis qu'elle l'est même sur $\check{\mathcal{D}}^{m+n+1} \times \mathcal{E}'^0_c$). On voit donc que $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\iota F)$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{K}^1$ dans $E \hat{\otimes}_\iota F$; si donc nous appelons $\mathcal{L}^\infty$ (espace des fonctions mesurables et localement bornées) le dual de $\mathcal{K}^1$, et si nous le munissons de la topologie $\mathcal{L}^\infty_c = (\mathcal{K}^1)'_c$, on a $\vec{\alpha} *_\iota \vec{T} \in \mathcal{L}^\infty_c(E \hat{\otimes}_\iota F)$. Mais cela ne prouve nullement qu'elle soit une fonction; ni qu'elle ait une relation quelconque avec la fonction $x \to \vec{\alpha}(x-\xi) \cdot_\iota \vec{T}_\xi \left(\text{avec } \vec{\alpha}(x-\xi) \in \overline{\mathcal{D}^{m+n+1}}(E), \vec{T}_\xi \in \mathcal{D}'^m(F)\right)$, qui n'est peut-être pas continue ni même scalairement mesurable.

Appelons maintenant $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ l'espace des distributions qui sont sommes de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de fonctions de $\mathcal{K}^1$, et munissons-le de la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle les dérivations partielles d'ordre $\leqslant m$ soient continues de $\mathcal{K}^1$ dans $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$; $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ est normal et bornologique (²).

(¹) $\mathcal{K}^1$ est complet, comme limite inductive stricte d'une suite d'espaces complets (voir Köthe [1]). Tout élément de $L^1 \cap \mathcal{E}'_K$ est limite, dans L^1, d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ à supports dans un voisinage fixe de K, donc $\mathcal{K}^1$ est normal. Enfin $\mathcal{K}^1$ est bornologique comme limite inductive d'une suite d'espaces (de Banach) bornologiques (Bourbaki [4], page 11).

(²) En fait, ces propriétés ne sont pas immédiates. On a trivialement $\mathcal{D} \subset (\mathcal{K}^1)^{(-m)}$. L'injection de $\mathcal{D}_K$, K compact de R^n, dans $L^1 \cap \mathcal{E}'_K$ est continue, donc aussi son injection dans $\mathcal{K}^1$, et par suite l'injection de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{K}^1$ est continue; l'injection canonique de $\mathcal{K}^1$ dans $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ étant continue par définition, l'injection de $\mathcal{D}$ dans $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ est continue. Soit $T \in (\mathcal{K}^1)^{(-m)}$; alors $T = \sum_{|p| \leqslant m} D^p f_p$, $f_p \in \mathcal{K}^1$. Les régularisées $f_p * \varphi_\nu \in \mathcal{D}$ convergent vers f_p dans $\mathcal{K}^1$, lorsque $\rho_\nu \geqslant 0$, $\int \rho_\nu = 1$, et que le support de ρ_ν

Son dual est l'espace $(\mathcal{L}_c^\infty)^{(m)}$ des fonctions dont les dérivées d'ordre $\leqslant m$ (au sens des distributions) sont dans $\mathcal{L}_c^\infty$; $((\mathcal{K}^1)^{(-m)})'_c$ est l'espace $(\mathcal{L}_c^\infty)^{(m)}$, muni d'une topologie qui est plus fine que celle de la convergence des dérivées d'ordre $\leqslant m$ dans $\mathcal{L}_c^\infty$; $(\mathcal{L}_c^\infty)^{(m)}$ est normal et complet [1]. Alors, pour $h \geqslant 0$, on peut définir $\vec{\alpha} *_t \vec{T} \cdot \varphi$ pour $\varphi \in (\mathcal{K}^1)^{(-h)}$, en appliquant (II, 7; 6) et une proposition analogue à 38 mais s'appuyant sur la proposition 24 au lieu de 10, puisque $(\mathcal{K}^1)^{(-h)}$ est bornologique (la convolution de $\mathcal{D}^{m+h+n+1} \times (\mathcal{K}^1)^{(-h)}$ dans $\mathcal{D}^{m+n+1}$ est bien hypocontinue par rapport aux parties compactes, puisqu'elle l'est même sur $\mathcal{D}^{m+h+n+1} \times \mathcal{E}_c'^h$). On en déduit que $\vec{\alpha} *_t \vec{T} \in (\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)} (E \hat{\otimes}_t F)$. Mais on a $(\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)} \subset \mathcal{E}^{h-1}$, et l'injection correspondante est continue [la méthode employée pour démontrer la proposition 24, en prenant $k = 1$ dans le lemme, montre que δ est somme de dérivées d'ordre $\leqslant 1$ de fonctions appartient à $\mathcal{K}^1$: $\delta = L_0 + \sum_i \frac{\partial L_i}{\partial x_i}$, $L_i \in \mathcal{K}^1$, $L_0 \in \mathcal{K}^1$. Alors toute fonction $f \in (\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)}$ peut s'écrire $f = f * L_0 + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * L_i\right)$. Mais tout élément de $\mathcal{K}^1$ est un opérateur de convolution de $\mathcal{L}_c^\infty$ dans $\mathcal{E}^0$; car, si $f \in \mathcal{L}_c^\infty$, et $L \in \mathcal{K}^1$, on sait que $f * L$ est la fonction $x \to f_\xi \cdot L(x - \xi)$; alors, si x décrit un compact de R^n, $L(x - \xi)$ décrit un compact de $\mathcal{K}^1$, et si f converge vers 0 dans $\mathcal{L}_c^\infty$, $(f * L)(x)$ convergera uniformément vers 0, donc $f * L$ convergera vers 0 dans $\mathcal{E}^0$. Alors, si $f \in (\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)}$, le second membre de l'égalité ci-dessus est dans $\mathcal{E}^{h-1}$; et si f converge vers 0

tend vers l'origine; alors $D^p(f_p * \rho_\nu)$ tend vers $D^p f_p$ dans $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$, donc $T * \rho_\nu \in \mathcal{D}$ tend vers T dans $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$: $\mathcal{D}$ est dense dans $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$, qui est bien normal. On peut représenter T par un système $(f_p)_{|p| \leqslant m}$, $f_p \in \mathcal{K}^1$, tel que $\sum_{|p| \leqslant m} D^p f_p = T$; ce système est déterminé modulo tout système $(g_p)_{|p| \leqslant m}$, $g_p \in \mathcal{K}^1$, tel que $\sum_{|p| \leqslant m} D^p g_p = 0$. Donc $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ est, algébriquement, un quotient d'un produit $\prod_{|p| \leqslant m} (\mathcal{K}^1)_p$, $(\mathcal{K}^1)_p = \mathcal{K}^1$.

On voit sans peine que la topologie de $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ est précisément la topologie de ce quotient du produit $\prod_{|p| \leqslant m} (\mathcal{K}^1)_p$; comme alors $\mathcal{K}^1$ est bornologique (note [1], page 165) $\prod_{|p| \leqslant m} (\mathcal{K}^1)_p$ l'est aussi, ainsi que le quotient $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ (Bourbaki [4] page 11).

[1] Si $\mathcal{H}$ est normal, $\mathcal{H}'_c$ est normal (préliminaires, proposition 4). Si $\mathcal{H}$ est bornologique et quasi-complet, $\mathcal{H}'_c$ est complet (un élément du complété est en effet une forme linéaire transformant toute partie relativement compacte de $\mathcal{H}$ en une partie bornée de C; voir alors note [1], page 129).

dans $(\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)}$ ou même simplement si ses dérivées d'ordre $\leqslant h$ convergent vers 0 dans $\mathcal{L}_c^\infty$, le second membre converge vers 0 dans $\mathcal{E}^{h-1}$].

Donc on a aussi $(\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)}(\mathrm{E}\mathbin{\hat{\otimes}_\iota}\mathrm{F}) \subset \mathcal{E}^{h-1}(\mathrm{E}\mathbin{\hat{\otimes}_\iota}\mathrm{F})$, donc

$$\vec{\alpha} *_\iota \vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{E}^{h-1}(\mathrm{E}\mathbin{\hat{\otimes}_\iota}\mathrm{F}).$$

Ses dérivées d'ordre $\leqslant h-1$ pourront se calculer par la formule usuelle $\big(\mathrm{D}^p(\vec{\alpha} * \vec{\mathrm{T}})\big)(x) = \big(\mathrm{D}^p\vec{\alpha}\big)(x-\xi) \cdot_\iota \vec{\mathrm{T}}_\xi$, qui est la formule (II, 7; 6) pour $\varphi = (-1)^{|p|}\mathrm{D}^p\varepsilon(x) \in \mathcal{E}_c'^{h-1} \subset \big((\mathcal{L}_c^\infty)^{(h)}\big)'_c = (\mathcal{K}^1)^{(-h)}$.

Si maintenant $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}_c'^m(\mathrm{F})$ est localement $\mathcal{C}$-bornée, on sait que la proposition 38 est applicable même lorsque $\mathcal{L}$ n'est pas bornologique; on peut donc ici définir $\vec{\alpha} *_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{E}^h(\mathrm{E}\mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{C}}}\mathrm{F})$, et appliquer la formule usuelle $\big(\mathrm{D}^p(\vec{\alpha} *_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{T}})\big)(x) = \big((\mathrm{D}^p\vec{\alpha})(x-\xi) \cdot_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{T}}_\xi$ même pour $|p| = h$. On pourra même remplacer $m+h+n+1$ par $m+h+n$, si n est impair ou si $m=0$, d'après la proposition 24. On pourra faire des remarques analogues pour la convolution $\vec{\mathrm{S}} * \vec{\beta}$, $\vec{\mathrm{S}} \in \bar{\mathcal{E}}'^m(\mathrm{E})$, $\vec{\beta} \in \mathcal{E}^{m+h+n+1}(\mathrm{F})$.

Définition du produit de convolution à partir du produit tensoriel.

Dans la proposition 38, nous n'avons défini $\vec{\mathrm{S}} *_\iota \vec{\mathrm{T}}$ que si l'une des distributions $\vec{\mathrm{S}}$, $\vec{\mathrm{T}}$, est β_0-bornée. Nous allons voir que cette restriction n'est pas nécessaire si les supports de $\vec{\mathrm{S}}$ et $\vec{\mathrm{T}}$ vérifient certaines conditions.

PROPOSITION 39. (1). — *Soient* A, B, *des ensembles fermés de* R^n *tels que l'application* $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$ *de* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *dans* R^n *soit continue à l'infini, et* E, F, *des espaces localement convexes, non nécessairement quasi-complets. On peut définir un produit de convolution de* $\mathcal{D}'_\mathrm{A}(\mathrm{E}) \times \mathcal{D}'_\mathrm{B}(\mathrm{F})$ *dans* $\mathcal{D}'_{\mathrm{A}+\mathrm{B}}(\mathrm{E}\mathbin{\hat{\otimes}_\iota}\mathrm{F})$, *par la formule :*

$$\text{(II, 7; 8)} \qquad \big(\vec{\mathrm{S}} *_\iota \vec{\mathrm{T}}\big) \cdot \varphi = \vec{\mathrm{S}}_\xi \otimes\otimes_\iota \vec{\mathrm{T}}_\eta \cdot \varphi(\xi+\eta),$$

pour $\vec{\mathrm{S}} \in \mathcal{D}'_\mathrm{A}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'_\mathrm{B}(\mathrm{F})$, $\varphi \in \mathcal{D}$. *On a la formule* (II, 7; 7), *pour* $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'_\mathrm{A}$, $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'_\mathrm{B}$, $\vec{e} \in \mathrm{E}$, $\vec{f} \in \mathrm{F}$.

Cette convolution est compatible avec les applications linéaires continues de E *et* F. *Elle est commutative, à la symétrie canonique*

(1) Voir SCHWARTZ [5], chapitre VI, § 5, page 26.

près entre $E \hat{\otimes}_\iota F$ *et* $F \hat{\otimes}_\iota E$. *Si* A, B, C, *sont trois ensembles fermés de* R^n, *tels que l'application* $(\xi, \eta, \zeta) \to \xi + \eta + \zeta$ *de* $A \times B \times C$ *dans* R^n *soit continue à l'infini, on peut définir un produit de convolution* $(\vec{S} * \vec{T} * \vec{U})_\iota \in \mathcal{D}'((E \otimes F \otimes G)^\frown_\iota)$, *pour* $\vec{S} \in \mathcal{D}'_A(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'_B(F)$, $\vec{U} \in \mathcal{D}'_C(G)$; *ses images dans* $\mathcal{D}'((E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G)$ *et* $\mathcal{D}'((E \hat{\otimes}_\iota (F \hat{\otimes}_\iota G))$ *sont* $(\vec{S} *_\iota \vec{T}) *_\iota \vec{U}$ *et* $\vec{S} *_\iota (\vec{T} *_\iota \vec{U})$ *respectivement (associativité de la convolution).*

On a en outre

$$\text{(II, 7; 9)} \quad (\vec{S} *_\iota \vec{T}) \cdot \varphi = (\vec{S} * \check{\varphi}) \cdot_\iota \check{\vec{T}} = \vec{S} \cdot_\iota (\check{\vec{T}} * \varphi)$$
$$= \mathrm{Tr}\big((\vec{S} *_\iota \vec{T}) * \check{\varphi}\big) = \mathrm{Tr}\big((\vec{S} * \check{\varphi}) *_\iota \vec{T}\big) = \mathrm{Tr}\big(\vec{S} *_\iota (\vec{T} * \check{\varphi})\big),$$

(les 3 derniers membres sont des traces de fonctions indéfiniment dérivables; le 2ᵉ *est pris au sens de la proposition* 10, *avec* $\check{\vec{T}} \in \mathcal{D}'(F)$, $\vec{S} * \check{\varphi} \in \mathcal{E}(E)$ *localement* β_0*-bornée, l'intersection des supports étant compacte; de même pour le* 3ᵒ, *avec* $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$, $\check{\vec{T}} * \varphi \in \mathcal{E}(F)$ *localement* β_0*-bornée).*

Si $\vec{S} *_\mu \vec{T}$ *est l'image de* $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *dans* $E \hat{\otimes}_\mu F$ $(\mu = \gamma, \beta, \pi, \varepsilon)$, *l'application bilinéaire* $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\mu \vec{T}$ *de* $\mathcal{D}'_A(E) \times \mathcal{D}'_B(F)$ *dans* $\mathcal{D}'_{A+B}(E \hat{\otimes}_\mu F)$ *est* μ*-continue, pour* $\mu = \beta, \pi, \varepsilon$, *et aussi pour* $\mu = \gamma$ *si* E *et* F *sont quasi-complets.*

Si le produit de convolution $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ *a déjà un sens d'après la proposition* 34, *il coïncide avec l'image dans* $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$ *du produit* $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *défini ici, si* $\mathcal{H}$ *ou* $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation par troncature et régularisation; si* $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *a déjà un sens d'après la proposition* 38, *il coïncide avec celui qui est défini ici, si* $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ *est nucléaire et a la propriété d'approximation par troncature et régularisation.*

Le support de $\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta$, qui est $A \times B$, et celui de $\varphi(\hat{\xi} + \hat{\eta})$, qui est l'ensemble $\xi + \eta \in K$, K support de φ, ont une intersection compacte; donc le second membre de (II, 7; 8) est bien défini, et $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ est donc une application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $E \hat{\otimes}_\iota F$. Supposons que φ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_K$, K compact de R^n; alors, si $\alpha \in \mathcal{D}_{\xi,\eta}$ est égale à 1 sur un voisinage de l'intersection de $A \times B$ et de l'ensemble $\xi + \eta \in K$, $\alpha(\hat{\xi}, \hat{\eta})\varphi(\hat{\xi} + \hat{\eta})$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$, et, comme $\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta$ est continue sur $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$,

$\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta . \varphi(\xi + \eta) = \vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta . \alpha(\xi, \eta)\varphi(\xi + \eta)$ converge vers 0. Donc $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ est continue sur $\mathfrak{D}_K$, donc sur $\mathfrak{D}$, c'est bien une distribution. Si $K \cap (A + B) = \emptyset$, le support de $\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta$ et celui de $\varphi(\hat{\xi} + \hat{\eta})$ ont une intersection vide, donc $\vec{S} *_\iota \vec{T} . \varphi = 0$, ce qui prouve que $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ a bien son support dans $A + B$ [1]. (II, 7; 7) est une conséquence triviale de (II, 6; 1). La compatibilité avec les applications linéaires continues de E et F résulte de la même compatibilité pour le produit tensoriel, indiquée à la proposition 33.

Naturellement $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ ne dépend que de $\vec{S}$ et $\vec{T}$ et non des ensembles fermés A et B (contenant leurs supports) que nous avons choisis, car il en est bien ainsi du 2° membre de (II, 7; 8).

Supposons que φ parcoure une partie bornée de $\mathfrak{D}_K$. Alors la fonction α ci-dessus pourra être choisie fixe, et $\alpha(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \varphi(\hat{\xi} + \hat{\eta})$ reste dans une partie bornée de $\mathfrak{D}_{\xi, \eta}$. Les applications $\vec{U}_{\xi, \eta} \to \vec{U}_{\xi, \eta} \cdot \alpha(\xi, \eta) \varphi(\xi + \eta)$ sont alors équicontinues de $\mathfrak{D}'_{\xi, \eta}(E \hat{\otimes}_\mu F)$ dans $E \hat{\otimes}_\mu F$; comme alors $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S}_\xi \otimes \otimes_\mu \vec{T}_\eta$ est μ-continue de $\mathfrak{D}'_A(E) \times \mathfrak{D}'_B(F)$ dans $\mathfrak{D}'_{\xi, \eta}(E \hat{\otimes}_\mu F)$, pour $\mu = \beta, \pi, \varepsilon$, et aussi pour $\mu = \gamma$ si E et F sont quasi-complets, alors les composées $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\mu \vec{T} \cdot \varphi = \vec{S}_\xi \otimes \otimes_\mu \vec{T}_\eta \cdot \alpha(\xi, \eta) \varphi(\xi + \eta)$ sont μ-équicontinues dans les mêmes conditions; cela revient à dire que $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\mu \vec{T}$ est μ-continue.

La formule de commutativité est la suivante (voir page 152) : si les ensembles fermés A, B, ont la propriété voulue, il en est de même des ensembles fermés B, A; alors, pour $\vec{S} \in \mathfrak{D}'_A(E)$, $\vec{T} \in \mathfrak{D}'_B(F)$, $\vec{T} *_\iota \vec{S}$ se déduit de $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ par la symétrie canonique $E \hat{\otimes}_\iota F \to F \hat{\otimes}_\iota E$.

Démontrons la formule d'associativité. Si A, B, C, sont 3 ensembles fermés ayant la propriété de l'énoncé, on peut directement définir un produit de convolution $(\vec{S} * \vec{T} * \vec{U})_\iota$, pour $\vec{S} \in \mathfrak{D}'_A(E)$, $\vec{T} \in \mathfrak{D}'_B(F)$, $\vec{U} \in \mathfrak{D}'_C(G)$, en posant

(II, 7; 10)

$$(\vec{S} * \vec{T} * \vec{U})_\iota \cdot \varphi = (\vec{S}_\xi \otimes \otimes \vec{T}_\eta \otimes \otimes \vec{U}_\zeta)_\iota \cdot \varphi(\xi + \eta + \zeta) \in (E \otimes F \otimes G)^\frown_\iota .$$

[1] Rappelons que, en vertu des hypothèses faites sur A et B, A + B est fermé (pour toute application d'un espace localement compact dans un autre, continue à l'infini, l'image directe d'un ensemble fermé, en particulier de l'espace entier, est fermée).

Soit C_ε le voisinage d'ordre $\varepsilon > 0$ de C; soit K le support de φ, K_ε son voisinage d'ordre ε. Alors les relations $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\zeta \in C_\varepsilon$, $\xi + \eta + \zeta \in K$, entraînent, en posant $\zeta = \zeta_0 + \rho$, $|\rho| \leqslant \varepsilon$, $\zeta_0 \in C$: $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\zeta_0 \in C$, $\xi + \eta + \zeta_0 \in K_\varepsilon$; donc l'ensemble des (ξ, η, ζ) est encore un compact de $R^n \times R^n \times R^n$; soit $H \times H \times H$ un compact qui le contienne, H compact de R^n, et soit $\alpha \in \mathcal{D}_{R^n}$ une fonction égale à 1 sur un voisinage de $H \cup (H + H)$. Le deuxième membre de (II, 7; 10) est, par définition, égal à

$$\text{(II, 7; 11)} \quad \left(\vec{S}_\xi \otimes \otimes \vec{T}_\eta \otimes \otimes \vec{U}_\zeta\right)_\iota \cdot \alpha(\xi)\alpha(\eta)\alpha(\zeta)\varphi(\xi + \eta + \zeta).$$

Son image dans $(E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G$ est (§ 6, page 150): $\left(\left(\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta\right) \otimes \otimes_\iota \vec{U}_\zeta\right) \cdot \alpha(\xi)\alpha(\eta)\alpha(\zeta)\varphi(\xi + \eta + \zeta)$. Calculons cette quantité d'après la règle de Fubini (proposition 33); on obtient :

$$\text{(II, 7; 12)} \quad \vec{U}_\zeta \cdot_\iota \left[\left(\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta\right) \cdot \alpha(\xi)\alpha(\eta)\alpha(\zeta)\varphi(\xi + \eta + \zeta)\right].$$

Calculons le crochet pour ζ fixé; ce calcul n'est nécessaire qu'au voisinage du support de $\vec{U}$, soit pour $\zeta \in C_\varepsilon$. Alors le support de $\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta$ est $A \times B$, celui de $\varphi(\hat{\xi} + \hat{\eta} + \zeta)$ est l'ensemble des (ζ, η) tels que $\xi + \eta + \zeta \in K$; comme $\zeta \in C_\varepsilon$, on voit que l'intersection de ces supports est dans $H \times H$, donc $\alpha(\hat{\xi})\alpha(\hat{\eta})$ est égale à 1 sur un voisinage de l'intersection de ces supports; donc le crochet, d'après la définition de la convolution, n'est autre que

$$\alpha(\zeta)\left(\vec{S} *_\iota \vec{T}\right)_\chi \cdot \varphi(\chi + \zeta).$$

Mais le support de $\left(\vec{S} *_\iota \vec{T}\right)_\chi$ est contenu dans $A + B$; celui de $\varphi(\hat{\chi} + \zeta)$ est $K - \zeta$; leur intersection est donc contenue dans $H + H$ (car, si $\chi \in A + B$, on a $\chi = \xi + \eta$, $\xi \in A$, $\eta \in B$, et comme $\chi \in K - \zeta$, on a $\xi + \eta + \zeta \in K$, donc $\xi \in H$, $\eta \in H$ et $\chi \in H + H$); on peut donc remplacer $\varphi(\hat{\chi} + \zeta)$ par $\alpha(\hat{\chi})\varphi(\hat{\chi} + \zeta)$ sans changer le produit scalaire précédent, qui est égal à

$$\left(\vec{S} *_\iota \vec{T}\right)_\chi \cdot \alpha(\chi)\alpha(\zeta)\varphi(\chi + \zeta).$$

Finalement (II, 7; 12) vaut

$$\text{(II, 7; 13)} \quad \vec{U}_\zeta \cdot_\iota \left[\left(\vec{S} *_\iota \vec{T}\right)_\chi \cdot \alpha(\chi)\alpha(\zeta)\varphi(\chi + \zeta)\right],$$

qui, d'après la règle de Fubini appliquée en sens inverse, vaut

$$\text{(II, 7; 14)} \qquad \left((\vec{S} *_\iota \vec{T})_\chi \otimes \otimes_\iota \vec{U}_\zeta\right) \cdot \alpha(\chi)\alpha(\zeta)\varphi(\chi + \zeta);$$

le support de $(\vec{S} * \vec{T})_\chi \otimes \otimes_\iota \vec{U}_\zeta$ est contenu dans $(A + B) \cap C$, celui de $\varphi(\hat{\chi} + \hat{\zeta})$ est défini par $\chi + \zeta \in K$; des points de leur intersection sont de la forme (χ, ζ) avec $\chi = \xi + \eta$, $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\zeta \in C$, $\xi + \eta + \zeta \in K$, donc ils vérifient $\xi \in H$, $\eta \in H$, $\zeta \in H$, donc $\chi \in H + H$, $\zeta \in H$; alors $\alpha(\chi)\,\alpha(\zeta)$ est égale à 1 sur un voisinage de cette intersection, et (II, 7; 14), d'après la définition même de la convolution, vaut $\left((\vec{S} *_\iota \vec{T}) *_\iota \vec{U}\right) \cdot \varphi$, ce qui prouve que l'image de $(\vec{S} * \vec{T} * \vec{U})_\iota \in \mathcal{D}'((E \otimes F \otimes G)_\iota^\frown)$ dans $\mathcal{D}'((E \hat{\otimes}_\iota F) \hat{\otimes}_\iota G)$ est $(\vec{S} *_\iota \vec{T}) *_\iota \vec{U}$. C'est la formule d'associativité.

La formule d'associativité est particulièrement intéressante dans le cas où G est le corps des scalaires; car alors toutes les distributions considérées sont à valeurs dans le même espace vectoriel topologique, $(E \hat{\otimes}_\iota F)$.

En particulier, pour $\vec{S} \in \mathcal{D}'_A(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'_B(F)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $(\vec{S} *_\iota \vec{T}) * \check{\varphi} = (\vec{S} * \check{\varphi}) *_\iota \vec{T} = \vec{S} *_\iota (\vec{T} * \check{\varphi})$; comme le premier membre est une fonction indéfiniment dérivable, il en est de même des autres, et leurs traces sont égales. Par ailleurs $Tr\left((\vec{S} *_\iota \vec{T}) * \check{\varphi}\right)$ vaut $\vec{S} *_\iota \vec{T} \cdot \varphi$ d'après la formule (I, 3; 12) du chapitre I (où $\vec{T}$ est remplacée par $\vec{S} *_\iota \vec{T}$, α par $\check{\varphi}$, et où x est l'origine de R^n). Pour achever de démontrer (II, 7; 9), il suffit donc de montrer l'égalité des 3 premiers membres. Or ce n'est pas autre chose que la règle de Fubini (proposition 33). Précisons. Soit K le support de φ; soit A_ε le voisinage d'ordre ε de A, soit H un compact de R^n tel que l'intersection de $A_\varepsilon \times B$ et de l'ensemble $\xi + \eta \in K$ soit contenue dans $H \times H$, et soit $\alpha \in \mathcal{D}_{R^n}$ une fonction égale à 1 sur un voisinage de H.

Alors, d'après Fubini, on a

$$(\vec{S} *_\iota \vec{T}) \cdot \varphi = (\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta) \cdot \alpha(\xi)\alpha(\eta)\varphi(\xi + \eta) = \vec{S}_\xi \cdot_\iota [\vec{T}_\eta \cdot \alpha(\xi)\alpha(\eta)\varphi(\xi + \eta)].$$

Bornons-nous à calculer le crochet pour ξ fixé dans A_ε. Dans ce cas, $\alpha(\hat{\eta})$ est égale à 1 sur voisinage de l'intersection des supports de $\vec{T}_\eta$ et $\varphi(\xi + \hat{\eta})$, donc le crochet est égal à

$$\alpha(\xi)[\vec{T}_\eta \cdot \varphi(\xi + \eta)] = \alpha(\xi)\left[(\check{\vec{T}} * \varphi)(\xi)\right].$$

Alors $(\vec{S} *_\iota \vec{T}) \cdot \varphi$ vaut

$$\vec{S}_\xi \cdot_\iota \alpha(\xi)\left((\check{\vec{T}} * \varphi)(\xi)\right),$$

produit scalaire au sens de la proposition 10, avec

$$\vec{S} \in \mathcal{D}'(E), \qquad \alpha\left(\check{\vec{T}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(F;\ \beta_0) = (\mathcal{D}')'_c(F;\ \beta_0).$$

On peut donc aussi l'écrire $\vec{S} \cdot_\iota \check{\vec{T}} * \varphi$, en donnant à ce produit scalaire le sens indiqué à la proposition 10, mais modifié comme dans la remarque page 87 : $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$, et $\check{\vec{T}} * \varphi \in \mathcal{E}(F)$ localement β_0-bornée, ont des supports d'intersection compacte. En procédant dans l'ordre inverse, on trouvera $\vec{S} * \check{\varphi} \cdot_\iota \check{\vec{T}}$.

Remarque. — Avant de terminer la démonstration de la proposition 39, notons en passant une importante propriété de la régularisation, comme conséquence de ce qui est indiqué aux pages 148-149 : *si* $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $\vec{T} * \varphi$ *est dans* $\mathcal{E}(F)$ *et localement* β_0*-bornée : la régularisée d'une distribution vectorielle par une fonction de* $\mathcal{D}$ *est non seulement une fonction indéfiniment dérivable, mais une fonction indéfiniment dérivable localement* β_0*-bornée.*

On peut dire plus. *Si* $\mathcal{C}$ *est un ensemble de parties bornées de* F, *et si* $\vec{T}$ *est du type* $\mathcal{C}\left(\vec{T} \in \mathcal{D}'(F_{\mathcal{C}})\right)$, *alors la régularisée* $\vec{T} * \varphi$ *est localement* $\mathcal{C}$*-bornée dans* $\mathcal{E}(F)$; *autrement dit, si* $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha(\vec{T} * \varphi) \in \mathcal{D}(F;\ \mathcal{C}) = (\mathcal{D}')'_c(F;\ \mathcal{C})$.

Pour terminer la démonstration de la proposition 39, montrons que le produit de convolution défini ici, à partir du produit tensoriel, coïncide avec ceux qui ont été définis antérieurement aux propositions 34 et 38 si ceux-ci existent également. Mettons provisoirement les indices 1, 2, 3, à ces 3 produits. Prenons d'abord le cas de la proposition 34, et supposons que $\vec{S} *_\pi \vec{T} = (\vec{S} *_\pi \vec{T})_1$ existe en vertu de cette proposition ; alors il n'est autre que l'image $(\vec{S} *_\pi \vec{T})_3$ du $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ de la proposition 39 dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, si l'un des deux espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, a la propriété d'approximation par troncature et régularisation. Soit en effet $(\alpha_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, convergeant vers 1 dans $\mathcal{E}$ en restant bornée dans $\mathcal{B}$, et soit $(\rho_\mu)_{\mu=1,2,\ldots}$ une suite de fonctions $\geqslant 0$ de $\mathcal{D}$, d'intégrale 1, de supports tendant vers l'origine. Les deux produits $\vec{S} *_\pi \vec{T}$, sont limites de produits $\left(\alpha_\nu(\vec{S} * \rho_\mu)\right) *_\pi \vec{T}$, si $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation par troncature et régularisation. Comme, pour μ assez grand, $\alpha_\nu(\vec{S} * \rho_\mu)$ a son support dans A_ε, voisinage d'ordre ε de A, on voit qu'il suffit de démontrer l'égalité des 2 produits $\vec{S}_1 *_\pi \vec{T}$, $\vec{S}_1 = \alpha_\nu(\vec{S} * \rho_\mu) \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, les supports de $\vec{S}_1$ et $\vec{T}$ étant contenus dans A_ε et B.

Mais, en fait, nous venons de voir plus haut que $\vec{S}_1$ est même dans $\mathcal{D}(E; \beta_0)$; alors $(\vec{S}_1 *_\pi T)_1$, au sens de la proposition 34, coïncide avec $(\vec{S}_1 *_\pi \vec{T})_2$, au sens de la proposition 38, avec $\vec{S}_1 \in \mathcal{D}(E; \beta_0)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, comme nous l'avons vu à la proposition 38; donc finalement nous avons ramené le cas où la convolution à un sens à la fois d'après les propositions 34 et 39, au cas où elle a un sens à la fois d'après les propositions 38 et 39. Il reste donc à voir maintenant, si, lorsque $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ a un sens à la fois d'après les propositions 38 et 39, les deux produits coïncident; or la formule (II, 7; 6) et la formule (II, 7; 9), pour $\varphi \in \mathcal{D}$, vont nous prouver cette coïncidence dans les conditions énoncées. Dans (II, 7, 6), $\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \cdot_\iota \vec{T}\right]_2$ est défini à partir de $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, et de la proposition 10; dans (II, 7; 9), $\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \cdot_\iota \vec{T}\right]_3$ est défini d'après la proposition 10, avec $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, l'intersection des supports étant compacte. Supposons donc $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ nucléaire, $\Lambda =$ identité, $\mathcal{H}$ ayant la propriété d'approximation par troncature et régularisation. Soit $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de l'intersection des supports de $\check{\vec{S}} * \varphi$ et de $\vec{T}$. Alors on peut affirmer que $[\check{\vec{S}} * \varphi \cdot_\iota \vec{T}]_2$ est égal à $\left[\alpha(\check{\vec{S}} * \varphi) \cdot_\iota \vec{T}\right]_2$ d'après la proposition 20, *c*, car les supports de $(\alpha - 1)\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)$ et de $\vec{T}$ ont une intersection vide. Mais alors $\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(E)$, donc cette dernière expression peut aussi se calculer en considérant $\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F; \beta_0)$, (formule II, 4; 11 bis); mais alors c'est aussi la valeur de $\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \cdot_\iota \vec{T}$ avec $\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(E; \beta_0)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ (page 97); or ceci est précisément la valeur de $\left[\left(\check{\vec{S}}*\varphi\right)\cdot_\iota\vec{T}\right]_3$ avec $\check{\vec{S}}*\varphi\in\mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T}\in\mathcal{D}'(F)$, l'intersection des supports étant compacte. Les conditions données pour $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ semblent couvrir tous les cas usuels, même si ce n'est pas immédiatement apparent. Prenons par exemple $\vec{S}\in\overline{\mathcal{E}'^p}(E)$, $\vec{T}\in\mathcal{D}'^q(F)$ (exemple 4° page 163). On peut définir $\vec{S}*_\iota\vec{T}\in\mathcal{D}'^{p+q+n+1}(E\,\hat{\otimes}_\iota\,F)$ d'après 4° page 163, et $\vec{S}*_\iota\vec{T}\in\mathcal{D}'(E\,\hat{\otimes}_\iota\,F)$ d'après la proposition 39. Y a-t-il coïncidence des 2 définitions? Cela ne résulte pas immédiatement de ce qui est indiqué dans la proposition 39. Mais nous avons vu page 163 que le $\vec{S}*_\iota\vec{T}$ défini alors coïncidait avec celui que l'on obtenait à partir de $\vec{S}\in\mathcal{E}'(E;\beta_0)$, $\vec{T}\in\mathcal{D}'(F)$, et alors il coïncide avec celui de la proposition 39.

Corollaire. — *On peut définir une convolution, application bilinéaire de* $\overline{\mathcal{E}'}(E)\times\mathcal{D}'(F)$ (E, F, *non nécessairement quasi-complets*) *dans* $\mathcal{D}'(E\,\hat{\otimes}_\mu\,F)$, $\mu=\iota,\gamma,\beta,\pi,\varepsilon$. *Pour* $\mu\leqslant\pi$, *elle coïncide avec la restriction de la convolution de* $\mathcal{E}'(E)\times\mathcal{D}'(F)$ *dans* $\mathcal{D}'(E\,\hat{\otimes}_\mu\,F)$ *définie par la proposition* 34. *Cette application est* μ*-continue, pour* $\mu=\beta$, *et aussi pour* $\mu=\gamma$ *si* E *et* F *sont quasi-complets.*

En effet $\overline{\mathcal{E}'}(E)$ est la réunion des $\mathcal{E}'_A(E)$, A compacts de R^n; or, si $B=R^n$, on a une convolution de $\mathcal{E}'_A(E)\times\mathcal{D}'_B(F)$ dans $\mathcal{D}'(E\,\hat{\otimes}_\iota\,F)$, d'après la proposition 39.

La μ-continuité, pour $\mu=\gamma$ ou β, résulte facilement de celle de la proposition 39, compte tenu de ce que toute partie bornée de $\overline{\mathcal{E}'}(E)$ est bornée dans un $\mathcal{E}'_A(E)$, $\overline{\mathcal{E}'}(E)$ étant la limite inductive des $\mathcal{E}'_A(E)$ [1]. Pour $\mu=\pi$ ou ε, il n'y a pas μ-continuité déjà lorsque E et F sont le corps des scalaires [2].

Cas où les distributions sont des fonctions.

Soient $\vec{S}$ et $\vec{T}$ deux fonctions scalairement localement intégrables à valeurs dans E et F respectivement, et définissant des distributions à valeurs dans ces espaces. Supposons qu'on puisse définir leur convolution $\vec{S}*\vec{T}$ suivant l'une des

(1) Bourbaki [2], chapitre iii, § 2, n° 4, proposition 6.

(2) La convolution est continue de $\mathcal{E}'_K\times\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ (Schwartz [5], chapitre vi, § 3, théorème v, page 13), mais non de $\mathcal{E}'\times\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$.

propositions 34, 38, ou 39. Peut-on dire que $\vec{\vec{S}} * \vec{T}$ est une fonction, définie pour presque toutes les valeurs de x par l'intégrale $\int_{\mathrm{R}^n} \vec{\vec{S}}(x-t) \otimes \vec{T}(t)\, dt$? Il est très difficile de donner des conditions générales, parce qu'il n'y a pas de théorème de Fubini pour les intégrales vectorielles; on est donc obligé de faire des hypothèses plus compliquées que celles auxquelles on s'attendrait. Pour traiter à la fois tous les cas tensoriels, nous appellerons θ une application bilinéaire séparément continue de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ dans G; E, F, ne sont pas nécessairement quasi-complets, mais G est supposé quasi-complet. Nous supposerons que $\theta\big(\vec{\vec{S}}(x-\hat{t}),\ \vec{T}(\hat{t})\big)$ est scalairement intégrable (en t), pour presque toutes les valeurs de x. Alors

$$(\mathrm{II},\ 7;\ 15) \qquad \vec{g}(x) = \int_{\mathrm{R}^n} \theta\big(\vec{\vec{S}}(x-t),\ \vec{T}(t)\big)\, dt$$

a un sens pour presque toutes les valeurs de x; elle définit une fonction de x à valeurs dans G'^*, dual algébrique de G', que nous supposerons muni de la topologie faible $\sigma(\mathrm{G}'^*,\ \mathrm{G}')$. Nous supposerons ensuite que $\vec{g}(\hat{x})$ est scalairement localement intégrable. Si alors $\varphi \in \mathcal{D}$, l'intégrale $\int_{\mathrm{R}^n} \vec{g}(x)\, \varphi(x)\, dx$ a un sens, et représente un élément $\vec{\gamma}$ de G'^*. Pour tout $\overleftarrow{g}' \in \mathrm{G}'$, on a

$$(\mathrm{II}, 7; 16) \quad \langle \vec{\gamma},\ \overleftarrow{g}' \rangle = \int_{\mathrm{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathrm{R}^n} \langle \theta\big(\vec{\vec{S}}(x-t),\ \vec{T}(t)\big),\ \overleftarrow{g}' \rangle\, dt.$$

Pouvons-nous écrire cela sous forme d'intégrale double

$$(\mathrm{II},\ 7;\ 17) \quad \iint_{\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n} \langle \theta\big(\vec{\vec{S}}(x-t),\ \vec{T}(t)\big),\ \overleftarrow{g}' \rangle\, \varphi(x)\, dx\, dt?$$

Il en sera bien ainsi si nous supposons que la fonction de 2 variables $\theta\big(\vec{\vec{S}}(\hat{x}-\hat{t}),\ \vec{T}(\hat{t})\big)$ est scalairement intégrable en $(x,\ t)$, sur tout produit $\mathrm{K} \times \mathrm{R}^n$, K compact de R^n. Cela revient à dire que la fonction $\theta\big(\vec{\vec{S}}(\hat{\xi}),\ \vec{T}(\hat{\eta})\big)$ est scalairement intégrable sur toute bande $\xi + \eta \in \mathrm{K}$, K compact de R^n.

On a alors, d'après le théorème usuel de Fubini :

$$(\mathrm{II}, 7; 18) \quad \langle \vec{\gamma},\ \overleftarrow{g}' \rangle = \int_{\mathrm{R}^n} dt \int_{\mathrm{R}^n} \langle \theta\big(\vec{\vec{S}}(x-t),\ \vec{T}(t)\big),\ \overleftarrow{g}' \rangle\, \varphi(x)\, dx.$$

Dans cette formule, l'intégrale $\int_{\mathrm{R}^n} \langle \theta\big(\vec{\vec{S}}(x-t),\ \vec{T}(t)\big),\ \overleftarrow{g}' \rangle\, \varphi(x)\, dx$ est censée exister pour presque toutes les valeurs de t; les valeurs de t pour lesquelles elle n'a pas de sens forment un ensemble de mesure nulle, pouvant à priori dépendre de $\overleftarrow{g}'$. Mais il n'en est rien. Pour tout t fixé, $\vec{\mathrm{S}}(\hat{x}-t)$ est scalairement localement intégrable; comme $\vec{e} \to \theta(\vec{e}, \vec{\mathrm{T}}(t))$ est une application linéaire continue de E dans G, $\theta(\vec{\mathrm{S}}(\hat{x}-t), \vec{\mathrm{T}}(t))$ est scalairement localement intégrable (en x) pour toutes les valeurs de t. En outre, pour tout t et tout $\overleftarrow{g}'$:

$$\text{(II, 7; 19)} \quad \int_{\mathrm{R}^n} \varphi(x)\left\langle\theta\left(\vec{\mathrm{S}}(x-t), \vec{\mathrm{T}}(t)\right), \overleftarrow{g}'\right\rangle dx$$

$$=\left\langle\theta\left(\int_{\mathrm{R}^n} \vec{\mathrm{S}}(x-t)\varphi(x)\,dx, \vec{\mathrm{T}}(t)\right), \overleftarrow{g}'\right\rangle=\left\langle\theta\left((\check{\vec{\mathrm{S}}}*\varphi)(t), \vec{\mathrm{T}}(t)\right), \overleftarrow{g}'\right\rangle,$$

d'après (I, 3; 12); finalement on aura

$$\langle\vec{\gamma}, \overleftarrow{g}'\rangle=\int_{\mathrm{R}^n}\left\langle\theta\left((\check{\vec{\mathrm{S}}}*\varphi)(t), \vec{\mathrm{T}}(t)\right), \overleftarrow{g}'\right\rangle dt,$$

ce qui s'écrit

$$\text{(II, 7; 20)} \quad \vec{\gamma}=\int_{\mathrm{R}^n}\theta\left((\check{\vec{\mathrm{S}}}*\varphi)(t), \vec{\mathrm{T}}(t)\right) dt \in \mathrm{G}'^{*}.$$

Supposons alors que $\vec{\mathrm{S}} *_{\iota} \vec{\mathrm{T}}$ ait un sens d'après la proposition 38, ou la proposition 39. Dans les deux cas, $\vec{\mathrm{S}} *_{\iota} \vec{\mathrm{T}} \cdot \varphi$ vaut $\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi \cdot_{\iota} \vec{\mathrm{T}}$, mais ayant des sens différents suivant la proposition qu'on considère, et $\vec{\mathrm{S}} *_{\theta} \vec{\mathrm{T}}$ vaut de même $\left(\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi\right) \cdot_{\theta} \vec{\mathrm{T}}$. Si alors, en appliquant au cas considéré la proposition 21 ou son corollaire, ou 21 *bis*, on peut affirmer que $\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi \cdot_{\theta} \vec{\mathrm{T}}$ est l'intégrale $\int_{\mathrm{R}^n} \theta\left((\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi)(t), \vec{\mathrm{T}}(t)\right) dt$, on voit qu'on aura $\vec{\gamma} = \left(\vec{\mathrm{S}} *_{\theta} \vec{\mathrm{T}}\right) \cdot \varphi \in \mathrm{G}$, et la fonction $\vec{g}$ définie par (II, 7; 15), supposée au début scalairement localement intégrable, sera le produit de convolution $\vec{\mathrm{S}} *_{\theta} \vec{\mathrm{T}}$.

Supposons d'abord que $\vec{\mathrm{S}} *_{\theta} \vec{\mathrm{T}}$ soit défini par la proposition 38. Si l'on applique la proposition 21 (ou plutôt son corollaire), on devra supposer (21 a), et (21 c_1), avec $p' = 1$, et avec $\Lambda =$ identité; (21 b) est automatique, avec $p = \infty$, puisque $\check{\vec{\mathrm{S}}} * \varphi \in \mathcal{E}(\mathrm{E})$; (21 d_θ) résulte de ce qui a été supposé au début de ce paragraphe, il est en effet impliqué par (II, 7; 20). D'autre part, pour pouvoir appliquer le corollaire, θ doit être supposée $\mathcal{T}$-hypocontinue.

Si, au lieu de cela, on veut appliquer la proposition 21 *bis*, ou plus exactement son corollaire non énoncé, on devra supposer (21 *bis* a') et (21 *bis* b'_1), avec $p = \infty$ et $\Lambda =$ identité (ce dernier point résultera de l'hypothèse $\vec{\check{S}} \in \mathfrak{M}(E_{\circledS})$, qui entraînera en effet $\vec{\check{S}} * \varphi \in \mathcal{K}(E_{\circledS})$, mais aussi (puisque $\vec{\check{S}} \in \mathcal{D}'(E_{\circledS})$), $\vec{\check{S}} * \varphi \in \mathcal{E}(E_{\circledS})$) ; ensuite (21 *bis* c'), qui s'écrit $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0) \cap \overline{\mathcal{L}^1}(F)$; (21 *bis* d_θ) résulte des hypothèses du début; et θ doit être supposée $\mathfrak{S}$-hypocontinue.

Si nous supposons la convolution définie à partir de la proposition 39, les choses sont assez différentes. On a $\vec{\check{S}} * \varphi \in \mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, et l'intersection de leurs supports est compacte. On applique dans ce cas la proposition 10 à $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_1 = \mathcal{D}'$, $\Lambda_1 =$ identité; $E_1 = F$, $F_1 = E$, et $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}$ (ce sont donc les parties de $\mathfrak{S}$ qui devront être supposées complétantes), $\vec{\varphi}_1 = \vec{T} \in \mathcal{D}'(F) = \mathcal{K}_1(E_1)$, $\vec{T}_1 = \alpha(\vec{\check{S}} * \varphi) \in \mathcal{D}(E; \beta_0) = (\mathcal{H}_1)'_c(F_1; \beta_0)$ (où $\alpha \in \mathcal{D}$ est égale à 1 sur un voisinage de l'intersection des supports de $\vec{\check{S}} * \varphi$ et $\vec{T}$). Si alors on applique la proposition 21, on supposera simplement $\vec{\check{S}} \in \mathcal{D}'(E_{\circledS})$, $\vec{T} \in \mathcal{L}^1(F)$, et θ $\mathfrak{S}$-hypocontinue; car (21 a) est vérifiée pour $\mathcal{K}_1 = \mathcal{D}'$, (21 b), pour $p = 1$, s'écrit $\vec{T} \in \overline{\mathcal{L}^1}(F)$, (21 c_2) s'écrit $\alpha(\vec{\check{S}} * \varphi) \in \mathcal{D}(E; \mathfrak{S})$, ce qui est conséquence de $\vec{\check{S}} \in \mathcal{D}'(E_{\circledS})$ d'après la remarque page 172, et (21 d_θ) résulte des hypothèses du début. Si on applique la proposition 21 *bis*, on supposera que $\vec{T}$ est une fonction, et que, pour tout compact K de R^n, il existe une partie disquée $B \in \mathfrak{T}$ telle que $\vec{T} \in \overline{L^1_K}(F_B)$, et que θ est $\mathfrak{T}$-hypocontinue; car (21 *bis* a') est vérifiée pour $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}'$ [1], nous venons de supposer (21 *bis* b'_1) pour $p = 1$, (21 *bis* c') est automatique puisque $\alpha(\vec{\check{S}} * \varphi) \in \mathcal{D}(E)$, et (21 *bis* d'_θ) résulte des hypothèses du début.

Supposons enfin qu'il s'agisse du produit de convolution élémentaire défini par la proposition 34. Alors θ est supposée continue. Nous avons vu page 157 que $\vec{\check{S}} * \varphi \cdot_\pi \vec{T}$ n'a pas nécessairement un sens, et ne représente donc pas nécessairement la

[1] Voir note [1], page 85. $\mathcal{D}'$ est bien tonnelé, puisque réflexif (Bourbaki [2], chapitre IV, § 3, n° 3, théorème 2).

valeur de $\vec{S} *_\pi \vec{T} \cdot \varphi$. Nous supposerons donc ici que la proposition 34 s'applique non pas directement, mais avec renversement des rôles de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$; c'est $\mathcal{K}$ qui sera supposé nucléaire et de dual nucléaire, avec la propriété d'approximation stricte. Alors on a bien, d'après (II, 7; 3), $\vec{S} *_\theta \vec{T} \cdot \varphi = \check{\vec{S}} * \varphi \cdot_\theta \vec{T}$, calculé en appliquant la proposition 4 à l'espace $\mathcal{K}$. Il restera alors à supposer que la proposition 7 est applicable à $\mathcal{H}_1 = \mathcal{K}$, $E_1 = F$, $F_1 = E$, $\vec{\varphi}_1 = \vec{T} \in \mathcal{K}(F) = \mathcal{H}_1(E_1)$, $\vec{T}_1 = \check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{K}'(E) = \mathcal{H}'_1(F_1)$; on supposera donc que $\mathcal{K}$ à la propriété d'approximation par troncature et régularisation (7*a*), que $\vec{T} \in \overline{\mathcal{L}^1}(F)$, ce qui est (7*b*) avec $p = 1$; (7*c*) est automatique puisque $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{E}(E)$, et (7*d*) résulte des hypothèses du début.

Remarquons que, si l'intégrale $\int_{R^n} \theta(\vec{S}(x-t), \vec{T}(t))\,dt$ existe scalairement, il en est de même par changement de variables de $\int_{R^n} \theta(\vec{S}(t), \vec{T}(x-t))\,dt$, et ces deux intégrales sont égales. Or si l'on cherche dans quelles conditions cette deuxième intégrale existe et représente le produit de convolution $\vec{S} *_\theta \vec{T}$, on est amené à trouver des conditions différentes; on est en effet amené à représenter $\vec{S} *_\theta \vec{T} \cdot \varphi$ par $\vec{S} \cdot_\theta (\check{\vec{T}} * \varphi)$. Or ceci, par exemple, est valable dans le cas du produit de convolution défini directement par la proposition 34, avec $\mathcal{H}$ nucléaire, d'après (II, 7; 3). Alors les conditions de la proposition 7, appliquée à $\mathcal{H}$, E, F, $\vec{\varphi}_1 = \vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T}_1 = \check{\vec{T}} * \varphi \in \mathcal{H}'(F)$, sont les suivantes : $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, $\vec{S} \in \overline{\mathcal{L}^1}(E)$, et θ continue bien entendu. De même, dans le cas de la convolution définie par la proposition 39, $\vec{S}$ et $\vec{T}$ jouent des rôles symétriques, on a toujours $\vec{S} *_\theta \vec{T} \cdot \varphi = \check{\vec{S}} * \varphi \cdot_\theta \vec{T} = \vec{S} \cdot_\theta \check{\vec{T}} * \varphi$, et on aura des conditions symétriques de celles qui ont été trouvées plus haut.

Comme les 2 intégrales existent en même temps et sont égales, l'un ou l'autre des systèmes de conditions entraînera l'existence des deux intégrales, ce qui laisse un plus grand choix.

Nous pouvons exprimer l'ensemble des résultats précédents comme suit :

PROPOSITION 40. — *Soient* $\vec{S}$, $\vec{T}$, *des fonctions sur* R^n, *scalairement localement intégrables, à valeurs dans des espaces* E, F, *localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. On suppose qu'elles définissent des distributions à valeurs dans* E *et* F. *Soit* θ *une application bilinéaire séparément continue de* $E \times F$ *dans un espace* G *localement convexe séparé quasi-complet. On suppose en outre que la fonction* $\theta(\vec{S}(x-\hat{t}), \vec{T}(\hat{t}))$, *ou la fonction* $\theta(\vec{S}(\hat{t}), \vec{T}(x-\hat{t}))$, *est scalairement intégrable en t, pour presque toutes les valeurs de x, et que son intégrale, fonction de x définie presque partout à valeurs dans* G'^* *muni de la topologie* $\sigma(G'^*, G')$, *est scalairement localement intégrable; les deux fonctions considérées ont alors cette même propriété, et leurs intégrales coïncident. On suppose ensuite que la fonction de deux variables* $\theta(\vec{S}(\xi)\vec{T}(\eta))$ *est scalairement intégrable sur toute bande* $\xi + \eta \in K$, K *compact de* R^n.

Alors $\vec{S} *_\theta \vec{T}$ *est une fonction, définie pour presque toutes les valeurs de x par la formule*

$$\text{(II, 7; 21)} \quad (\vec{S} *_\theta \vec{T})(x) = \int_{R^n} \theta(\vec{S}(x-t), \vec{T}(t))\, dt = \int_{R^n} \theta(\vec{S}(t), \vec{T}(x-t))\, dt,$$

dans l'un quelconque des cas suivants :

A) $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ *a un sens en vertu de la proposition* 34; $\mathcal{H}$ *a la propriété d'approximation par troncature et régularisation*; $\vec{S} \in \overline{\mathcal{L}^1}(E)$; θ *est continue.*

B) $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *a un sens en vertu de la proposition* 38; $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation par troncature et régularisation; il existe un ensemble saturé* $\mathfrak{T}$ *de parties bornées complétantes de* F *tel que : a)* $\vec{T}$ *soit dans* $\mathcal{H}'_c(F; \mathfrak{T})$; *b) pour tout compact* K *de* R^n, *on puisse trouver une partie disquée* $B \in \mathfrak{T}$ *pour laquelle* $\vec{T} \in \overline{L^1_K}(F_B)$; *c)* θ *soit* $\mathfrak{T}$*-hypocontinue.*

B') $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *a un sens en vertu de la proposition* 38; $\mathcal{H}$ *a la propriété d'approximation équicontinue par troncature et régularisation; il existe un ensemble saturé* $\mathfrak{S}$ *de parties bornées de* E *tel que : a)* $\vec{S} \in \mathcal{M}(E_\mathfrak{S})$; *b)* $\vec{T} \in \overline{\mathcal{L}^1}(F)$; *c)* θ *soit* $\mathfrak{S}$*-hypocontinue.*

C) $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *a un sens d'après la proposition* 39; *il existe un ensemble saturé* $\mathfrak{T}$ *de parties bornées de* F *tel que : a) Pour tout* *compact* K *de* R^n, *on puisse trouver une partie disquée* $B \in \mathfrak{C}$ *pour laquelle* $\vec{T} \in \overline{L^1_K}(F_B)$; *b)* θ *soit* $\mathfrak{C}$*-hypocontinue.*

C′) $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *existe au sens de la proposition* 39; *il existe un ensemble saturé* $\mathfrak{C}$ *de parties bornées complétantes de* F *tel que : a)* $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F_{\mathfrak{C}})$ *b)* $\vec{S} \in \overline{\mathcal{L}^1}(E)$; *c)* θ *soit* $\mathfrak{C}$*-hypocontinue.*

C″, C‴ *respectivement obtenues par symétrie à partir de* C, C′, *en changeant les rôles de* $\vec{S}$ *et* $\vec{T}$, E *et* F.

Notation fonctionnelle du produit de convolution.

Soient $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, des distributions sur R^n. On peut conventionnellement donner un sens à $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})$; on le définit comme identique, pour le changement de variables $x - t = \xi$, $t = \eta$, à la distribution $\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta$.

On peut alors se demander, dans les cas étudiés aux propositions 34, 38, 39, si $\vec{S} * \vec{T}$ coïncide avec l'intégrale partielle en t du produit ainsi défini : a-t-on $(S *_\iota T)(\hat{x}) = \int_{R^n} \big(\vec{S}(\hat{x} - t) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t)\big)dt$?

Nous devons d'abord voir si le second membre a un sens, c'est-à-dire si $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t)$ est partiellement sommable en t (chapitre I, § 5). D'après ce que nous avons vu au chapitre I, page 131, 2°, nous devons chercher si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_x$, $\big(\vec{S}(x - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})\big) \cdot \varphi(x)$ est dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_t$; s'il en est ainsi, $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})$ sera bien partiellement sommable en t, et on aura

$$\text{(II, 7; 22)} \quad \Big[\int_{R^n} \big(\vec{S}(x - t) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t)\big)dt\Big] \cdot \varphi(x) = \int_{R^n} \big[\big(\vec{S}(x - t) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t)\big) \cdot \varphi(x)\big]dt.$$

Mais, d'après la définition même de $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})$ par changement de variables, et d'après la règle de Fubini énoncée à la proposition 33, on a, pour toute $\psi \in \mathcal{D}$:

$$\text{(II, 7; 23)} \quad \big(\vec{S}(x - t) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t)\big) \cdot \varphi(x)\psi(t) = \big(\vec{S}_\xi \otimes \otimes_\iota \vec{T}_\eta\big) \cdot \varphi(\xi + \eta)\psi(\eta) = \vec{T}_\eta \cdot_\iota \big[\psi(\eta)\big(\vec{S}_\xi \cdot \varphi(\xi + \eta)\big)\big],$$

le produit scalaire ι du dernier membre résultant de l'application de la proposition 10 à $\psi(\hat{\eta})\big(\vec{S}_\xi \cdot \varphi(\xi + \hat{\eta})\big) \in \mathcal{D}_\eta(E; \beta_0)$, $\vec{T}_\eta \in \mathcal{D}'(F)$.

Mais $\vec{S}_\xi \cdot \varphi(\xi + \hat{\eta})$ n'est autre que $\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)(\hat{\eta})$ (formule (I, 3; 12)); alors le produit multiplicatif $\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t$ a un sens d'après le corollaire 1 de la proposition 32, cas 2, avec $\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{E}(E)$, localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, et on a précisément (formule (II, 5; 11)

$$\text{(II, 7; 24)} \quad \left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t \cdot \psi = \vec{T} \cdot_t \left(\psi\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\right),$$

le dernier membre étant relatif à $\psi\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(E;\ \beta_0)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$. Alors (II, 7; 23) et (II, 7; 24) donnent $\left(\vec{S}(x-t) \otimes \otimes_t \vec{T}(t)\right) \cdot \varphi(x)\psi(t) = \left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t \cdot \psi$, de sorte que l'on a

$$\text{(II, 7; 25)} \quad \left(\vec{S}(x-\hat{t}) \otimes \otimes_t \vec{T}(\hat{t})\right) \cdot \varphi(x) = \left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t (\hat{t}).$$

Nous devons donc voir si $\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t$ est dans $\mathcal{D}'_{L^1}$; et s'il en est ainsi, $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_t \vec{T}(\hat{t})$ sera partiellement sommable en t, et l'on aura, d'après (II, 7; 22) et (II, 7; 25):

$$\text{(II, 7; 26)} \left[\int_{R^n}\left(\vec{S}(x-t) \otimes \otimes_t \vec{T}(t)\right)dt\right] \cdot \varphi(x) = \int_{R^n}\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t dt.$$

A) Supposons d'abord que $\vec{S}$ et $\vec{T}$ vérifient les conditions de la proposition 39. Alors $\check{\vec{S}} * \varphi$ et $\vec{T}$ ont des supports d'intersection compacte; leur produit multiplicatif a donc un support compact (corollaire 1 de la proposition 32), donc est bien sommable; en outre, si $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de l'intersection des supports de $\check{\vec{S}} * \varphi$ et de $\vec{T}$, on a, d'après (II, 5; 12) : $\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t = \alpha\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t = \left[\left(\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\right)\vec{T}\right]_t$, avec $\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(E;\ \beta_0)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$. Donc $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_t \vec{T}(\hat{t})$ est partiellement sommable en t, et on a (II, 7; 26), pour $\varphi \in \mathcal{D}$; par ailleurs on peut appliquer le corollaire 2 de la proposition 32, avec $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{D}'$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{E}$, et on aura

$$\text{(II, 7; 27)} \quad \int_{R^n}\left[\left(\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\right)\vec{T}\right]_t dt = \left(\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\right) \cdot_t \vec{T},$$

le dernier produit scalaire étant celui de la proposition 10 relatif à $\alpha\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \in \mathcal{D}(E;\ \beta_0)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, ou encore le produit scalaire

$\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \cdot_t \vec{T}$ de la remarque qui suit la proposition 20, avec $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$, l'intersection des supports étant compacte; et ce dernier n'est autre que le produit scalaire $\left(\vec{S} *_t \vec{T}\right) \cdot \varphi$, où $\vec{S} *_t \vec{T}$ est défini d'après la proposition 39 (formule (II, 7; 9)). On a donc, dans les conditions de la proposition 39 :

$$\text{(II, 7; 29)}[1] \quad \int_{R^n} \left(\vec{S}(\hat{x} - t) \otimes \otimes_t \vec{T}(t)\right) dt = \left(\vec{S} *_t \vec{T}\right)(\hat{x}) \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_t F).$$

B) Supposons maintenant que l'on se trouve dans les conditions de la proposition 38. Supposons d'autre part qu'il existe des espaces $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{L}_1$, tels que $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1$, vérifient les conditions d'application de la proposition 32, que $\mathcal{B}_c \subset \mathfrak{L}_1$, avec une topologie plus fine que la topologie induite, et que $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathfrak{M}_1(E)$.

On a donc, d'après le corollaire 2 de la proposition 32 :

$$\text{(II, 7; 30)} \quad \int_{R^n} \left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t = \left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \cdot_t \vec{T} = \left(\vec{S} *_t \vec{T}\right) \cdot \varphi,$$

le premier membre étant l'intégrale sur R^n du produit multiplicatif de $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathfrak{M}_1(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, défini par la proposition 32 à partir des espaces $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1$, le deuxième étant le produit scalaire de $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, défini par la proposition 10; le produit de convolution $\vec{S} *_t \vec{T}$ du troisième membre est celui de $\vec{S} \in \mathfrak{M}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, défini par la proposition 38 à partir des espaces $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$. En particulier $\left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t$ défini par la proposition 32 est sommable.

Examinons ce produit d'un peu plus près. Pour $\psi \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{L}_1$, on a :

$$\text{(II, 7; 31)} \quad \left[\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right)\vec{T}\right]_t \cdot \psi = \left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \psi \cdot_t \vec{T},$$

avec $\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \psi \in \mathcal{K}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F; \beta_0)$, le produit scalaire étant celui de la proposition 10.

Mais on a aussi $\left(\check{\vec{S}} * \varphi\right) \psi \in \mathcal{D}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F; \beta_0)$; et le produit scalaire qu'ils définissent de cette manière est le même (proposition 20); et ce produit scalaire est encore celui qui est défini

[1] Par suite d'un oubli, il n'y a pas de formule (II, 7; 28).

par $(\check{\vec{S}}*\varphi)\,\psi \in \mathcal{D}(E;\beta_0)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ (page 97). Mais alors le second membre de (II, 7; 31) est égal au premier, défini par le corollaire 1 de la proposition 32, cas 2, avec interversion des rôles de E et F, pour $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$; cela prouve donc que le produit $[(\check{\vec{S}}*\varphi)\vec{T}]_\iota$ défini par la proposition 32, à partir de $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{M}_1(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{H}'_c(F;\beta_0)$, et des espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$, est le même que le produit correspondant défini au corollaire 1 de la proposition 32, à partir de $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$; donc ce dernier produit est sommable sur R^n. Mais c'est ce dernier produit qui intervient dans (II, 7; 26); donc, dans les conditions où nous nous sommes placés, $\vec{S}(\hat{x}-\hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})$ sera partiellement sommable en t, et alors (II, 7; 26) et (II, 7; 30) redonnent (II, 7; 29).

C) Supposons maintenant que $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, soient des espaces de distributions normaux (quasi-complets); on suppose que $\mathcal{K}$ vérifie les conditions énoncées dans la proposition 4. Supposons qu'il existe une convolution de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{D}'$, hypocontinue par rapport aux parties compactes.

La proposition 34 (où l'on inverse les rôles de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$) permet alors de définir $\vec{S} *_\pi \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, pour $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$. Si en outre $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation, (II, 7; 3) donne $(\vec{S} *_\pi \vec{T}) \cdot \varphi = (\check{\vec{S}} * \varphi) \cdot_\pi \vec{T}$, le produit scalaire étant celui de la proposition 4, avec $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{K}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$.

Supposons maintenant qu'il existe une multiplication de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$ dans $\mathcal{D}'_{L^1}$, hypocontinue par rapport aux parties compactes. Alors, d'après la proposition 31 (formule (II, 5; 7)] : $\int_{R^n}[(\check{\vec{S}}*\varphi)\vec{T}]_\pi = (\check{\vec{S}}*\varphi) \cdot_\pi \vec{T}$; le produit multiplicatif $[(\check{\vec{S}}*\varphi)\vec{T}]_\pi$ est en particulier sommable sur R^n. Mais on a aussi $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{E}(E)$; si $\mathcal{K}$ donc $\mathcal{K}'$ (proposition 4 des préliminaires) a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, le produit $[(\check{\vec{S}}*\varphi)\vec{T}]_\pi$ défini à partir de $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{K}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, est le même que celui qui est défini à partir de $\check{\vec{S}}*\varphi \in \mathcal{E}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ (voir remarque 1° page 122). Donc ce dernier produit multiplicatif est sommable.

Mais ce produit est aussi celui qui est défini par le corollaire 1 de la proposition 32, avec $\check{\vec{S}} * \varphi \in \mathcal{E}(E)$ localement β_0-bornée, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$ (ι remplacé par π) (puisque les propositions 25 et 32, si elles sont toutes deux applicables, donnent le même résultat); et c'est celui qui intervient dans (II, 7; 26) (où ι est remplacé par π). Donc finalement $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\pi \vec{T}(\hat{t})$ est partiellement sommable en t, et son intégrale en t est $(\vec{S} *_\pi \vec{T})(\hat{x})$ défini par la proposition 34; on a encore (II, 7; 29), où ι est remplacé par π.

On a donc la proposition suivante :

Proposition 41. — *Soient* E, F, *des espaces localement convexes séparés, non nécessairement quasi-complets. Soient* $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F)$; *on peut toujours définir* $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t) \in \mathcal{D}'_{x,t}(E \hat{\otimes}_\iota F)$. *Cette distribution est partiellement sommable en t, et on a*

$$(\text{II}, 7; 29) \qquad \int_{R^n} \left(\vec{S}(\hat{x} - t) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(t)\right) dt = \left(\vec{S} *_\iota \vec{T}\right)(\hat{x}),$$

dans l'un quelconque des cas suivants :

A) $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *a un sens d'après la proposition* 39;

B) $\vec{S} *_\iota \vec{T}$ *a un sens d'après la proposition* 38, *relative à* 4 *espaces* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$; *il existe des espaces* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$, *tels qu'on puisse définir un produit multiplicatif d'après la proposition* 32, *relative aux* 4 *espaces* $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$; $\mathcal{B}_c$ *est contenu dans* $\mathcal{L}_1$, *avec une topologie plus fine que la topologie induite*; *toute* $\varphi \in \mathcal{D}$ *est un opérateur de convolution de* $\mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{M}_1$.

D'autre part $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\pi \vec{T}(\hat{t})$ *est partiellement sommable en t, et on a* (II, 7; 29), *où* ι *est remplacé par* π, *dans le cas suivant* :

C) $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, *sont des espaces de distributions normaux (quasi-complets)*; $\mathcal{H}$ *a la propriété d'approximation*; $\mathcal{K}$ *a la propriété d'approximation par troncature et régularisation, la topologie* γ, *il est nucléaire, son dual fort est quasi-complet et nucléaire; il existe une convolution de* $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{D}'$, *et une multiplication de* $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$ *dans* $\mathcal{D}'_{L^1}$, *hypocontinues par rapport aux parties compactes*; *on a* $\vec{S} \in \mathcal{H}(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{K}(F)$, *et* $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ *est défini par la proposition* 34 *(où les rôles de* $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{H}$ *sont inversés)*.

Exemples. — On se trouve dans la condition B pour $\vec{S} \in \mathcal{E}'(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(F; \beta_0)$ ($\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{L} = \mathcal{D}$, $\mathcal{M} = \mathcal{E}'$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{D}$,

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{E}$), ou $\vec{S} \in \mathcal{O}'_C(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{S}'(F;\ \beta_0)$ (avec $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{L} = \mathcal{S}$, $\mathcal{M} = \mathcal{O}'_C$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{S}$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_M$) (¹). On se trouve dans la condition C avec $S \in \mathcal{E}'(F)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$, ou $\vec{S} \in \mathcal{O}'_C(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{S}'(F)$.

Remarques. — 1° Si la condition B ou la condition C est réalisée, le produit de convolution ne dépend que de $\vec{S}$ et $\vec{T}$, et non des espaces de distributions qui sont intervenus, puisqu'il en est ainsi du premier membre de (II, 7; 29).

2° Contrairement à ce qui se passe pour la proposition 40, il y a dissymétrie entre les rôles de $\vec{S}$ et de $\vec{T}$ dans la proposition 41. Si $\vec{S}(\hat{x} - \hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{t})$ est partiellement sommable en t, rien ne dit qu'il en soit de même pour $\vec{S}(\hat{t}) \otimes \otimes_\iota \vec{T}(\hat{x} - \hat{t})$; et même s'il en est ainsi, rien ne dit que les intégrales en t soient les mêmes.

Multiplication, convolution, transformations de Fourier et Laplace.

Proposition 42. — *Soient* $\vec{S} \in \mathcal{O}_M(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{S}'(F)$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{S}(E)$, (E, F, *non nécessairement quasi-complets*). *On a la formule de Parseval :*

$$\text{(II, 7; 32)} \quad \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T} = \mathcal{F}\vec{\varphi} \cdot_\pi \overline{\mathcal{F}}\vec{T} \qquad \left(\text{avec } \overline{\mathcal{F}}\vec{T} = \mathcal{F}\check{\vec{T}} = (\mathcal{F}\vec{T})^{\vee}\right),$$

et la formule de transformation de la multiplication en convolution :

$$\text{(II, 7; 33)} \qquad \mathcal{F}\big((\vec{S}\vec{T})_\pi\big) = \mathcal{F}\vec{S} *_\pi \mathcal{F}\vec{T},$$

les produits scalaires étant pris au sens de la proposition 4, *le produit multiplicatif au sens de la proposition* 25, *le produit de convolution au sens de la proposition* 34.

On démontrerait facilement cette proposition par transport de structure; mais autant vaut dire simplement que les deux membres de la première (resp. seconde) égalité définissent des applications bilinéaires séparément continues sur $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}'(F)$ (resp. $\mathcal{O}_M(E) \times \mathcal{S}'(F)$), et coïncident sur $(\mathcal{S} \otimes E) \times (\mathcal{S}' \otimes F)$ (resp. $(\mathcal{O}_M \otimes E) \times (\mathcal{S}' \otimes F)$), donc partout.

(¹) Tous ces espaces sont bien normaux, et ont les propriétés d'approximation requises dans la proposition 10 parce que nucléaires (voir note (¹), page 58). $\mathcal{S}$ est bornologique comme espace de Fréchet; $\mathcal{O}_M$ est bornologique d'après Grothendieck [5], § 4, n° 4, théorème 16, page 131.

PROPOSITION 42 *bis*. — *Soient* $\vec{S} \in \mathcal{O}_M(E)$, $T \in \mathcal{S}'(F; \beta_0)$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{S}(E)$ (E, F, *non nécessairement quasi-complets*). *On a* (II, 7; 32 *et* 33), *où* π *est remplacé par* ι, *les produits scalaires étant pris au sens de la proposition* 10, *le produit multiplicatif au sens de la proposition* 32 *(corollaire* 1, *cas* 4*)*, *le produit de convolution au sens de la proposition* 38 *(exemple* 2°, *page* 162*)*.

L'opération $\mathcal{F}$ est en effet un automorphisme de l'espace $\mathcal{K} = \mathcal{H} = \mathcal{S}$, transformant l'identité $\Lambda = I$ en elle-même. Par transport de structure, il transforme donc l'application bilinéaire de la proposition 10 en elle-même. Mais pour faire ce transport de structure, on doit transformer $\mathcal{H}'_c = \mathcal{S}'$ en lui-même par l'opération contragrédiente ${}^t\mathcal{F}^{-1}$ de $\mathcal{F}$; mais on sait que ${}^t\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$ (d'après la formule de Parseval dans le cas scalaire: ${}^t\mathcal{F}^{-1}T \cdot \varphi = T \cdot \mathcal{F}^{-1}\varphi = T \cdot \bar{\mathcal{F}}\varphi = \bar{\mathcal{F}}T \cdot \varphi$, ce qui démontre (II, 7; 33) (π remplacé par ι)). On en déduit alors (II, 7; 33) (π remplacé par ι), par:

$$\text{(II, 7; 34)}\quad \mathcal{F}[(\vec{S}\vec{T})_\iota] \cdot \varphi = (\vec{S}\vec{T})_\iota \cdot \mathcal{F}\varphi = \vec{S}(\mathcal{F}\varphi) \cdot_\iota \vec{T}$$
$$= \mathcal{F}(\vec{S}(\mathcal{F}\varphi)) \cdot_\iota (\mathcal{F}\vec{T})^\vee = (\mathcal{F}\vec{S} * \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi) \cdot_\iota (\mathcal{F}\vec{T})^\vee = (\mathcal{F}\vec{S} * \check{\varphi}) \cdot_\iota (\mathcal{F}\vec{T})^\vee$$
$$= ((\mathcal{F}\vec{S})^\vee * \varphi) \cdot_\iota \mathcal{F}\vec{T} = (\mathcal{F}\vec{S} *_\iota \mathcal{F}\vec{T}) \cdot \varphi,$$

pour $\varphi \in \mathcal{S}$ (en appliquant les résultats du chapitre I, page 73).

PROPOSITION 43 [1]. — *Soit* Γ *un ensemble ouvert convexe du dual* Ξ^n *de l'espace euclidien* X^n. *On peut définir une convolution de* $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ *dans* $\mathcal{S}'(\Gamma)(E \hat{\otimes}_\pi F)$, *hypocontinue par rapport aux parties bornées. Si* $\vec{A} \in (\mathcal{S}'(\Gamma))(E)$, $\vec{B} \in (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$, *et* $\vec{\mathcal{A}}(\hat{p})$ *et* $\vec{\mathcal{B}}(\hat{p})$ *sont leurs images de Laplace, pour* $p \in \Gamma + i\,\Xi^n$, *alors l'image de Laplace de* $\vec{A} *_\pi \vec{B}$ *est* $\vec{\mathcal{A}}(\hat{p}) \otimes_\pi \vec{\mathcal{B}}(\hat{p})$.

On peut être tenté de définir directement la convolution de $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ dans $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E \hat{\otimes}_\pi F)$, en appliquant la proposition 3 à l'opération $\cup$ de convolution de $\mathcal{S}'(\Gamma) \times \mathcal{S}'(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}'(\Gamma)$. Mais alors il faudrait d'abord montrer que $\mathcal{S}'(\Gamma)$ est nucléaire, ce qui est aisé, mais aussi de dual nucléaire, ce qui l'est moins.

Procédons donc autrement. Choisissons une fois pour toutes

[1] Voir SCHWARTZ [3]. Pour simplifier, nous noterons par ξx le produit scalaire de $\xi \in \Xi^n$ et de $x \in X^n$.

$p_0 \in \Gamma + i\Xi^n$. Alors, pour $\vec{S} \in (\mathcal{S}'(\Gamma))(E)$, $\vec{T} \in (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$, on peut définir $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ par

$$\text{(II, 7; 35)} \quad S *_\pi T = \exp(p_0\hat{x})\left[\left(\exp(-p_0\hat{x})\vec{S}\right) *_\pi \left(\exp(-p_0\hat{x})\vec{T}\right)\right],$$

avec $\exp(-p_0\hat{x})\vec{S} \in \mathcal{O}'_C(E)$, $\exp(-p_0\hat{x})\vec{T} \in \mathcal{O}'_C(F)$, par la proposition 34 relative à la convolution de $\mathcal{O}'_C \times \mathcal{O}'_C$ dans $\mathcal{S}'$. L'application bilinéaire $(\vec{S}, \vec{T}) \to \vec{S} *_\pi \vec{T}$ ainsi définie, de $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ dans $\left(\mathcal{S}'(\{\xi_0\})\right)(E \hat{\otimes}_\pi F)$, est hypocontinue par rapport aux parties bornées. Mais $\mathcal{S}'(\Gamma)$ est trivialement normal et a la propriété d'approximation par troncature et régularisation [car il en est ainsi de $\mathcal{S}'$. Pour la propriété d'approximation par régularisation, on remarquera que $\exp(-\xi\hat{x})(\rho_\nu * U) = \exp(-\xi\hat{x})\rho_\nu * \exp(-\xi\hat{x})U$, pour $U \in \mathcal{S}'(\Gamma)$, $\xi \in \Gamma$; et $\exp(-\xi\hat{x})\rho_\nu(\hat{x})$ a des propriétés analogues à celles de ρ_ν], donc il a la propriété d'approximation (préliminaires, proposition 3). Alors la convolution précédente de $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$ est entièrement connue quand elle l'est sur le sous-espace $(\mathcal{S}'(\Gamma) \otimes E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma) \otimes F)$; mais sur ce sous-espace l'opération est indépendante du point p_0 choisi dans $\Gamma + i\Xi^n$, donc il en est de même de l'opération sur l'espace entier. De plus, on voit même qu'elle est hypocontinue par rapport aux parties bornées, de $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ dans $\left(\mathcal{S}'(\{\xi_0\})\right)(E \hat{\otimes}_\pi F)$, quel que soit $\xi_0 \in \Gamma$, donc elle est hypocontinue par rapport aux parties bornées, de $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ dans $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E \hat{\otimes}_\pi F)$, et c'est la seule application bilinéaire séparément continue qui, pour $A \in \mathcal{S}'(\Gamma)$, $B \in \mathcal{S}'(\Gamma)$, $\vec{e} \in E$, $\vec{f} \in F$, vérifie $A\vec{e} *_\pi B\vec{f} = (A * B)\vec{e} \otimes \vec{f}$.

Quant à la transformation de la convolution en multiplication, elle est évidente; la valeur en p de l'image de Laplace de $\vec{A} *_\pi \vec{B}$ et le produit $\vec{\mathcal{A}}(p) \otimes_\pi \vec{\mathcal{B}}(p)$ définissent, pour p fixé, des applications bilinéaires séparément continues de $(\mathcal{S}'(\Gamma))(E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma))(F)$ dans $E \hat{\otimes}_\pi F$, qui coïncident sur $(\mathcal{S}'(\Gamma) \otimes E) \times (\mathcal{S}'(\Gamma) \otimes F)$, donc partout.

Corollaire. — *Soit $n = 1$. Soit a un nombre réel, et soient $\vec{A}$ espaces des distributions appartenant respectivement à $(\mathcal{L}'(a))(E) \subset \mathcal{D}'_+(E)$ et $(\mathcal{L}'(a))(F) \subset \mathcal{D}'_+(F)$. Alors leur produit de convolution π appartient à $(\mathcal{L}'(a))(E \hat{\otimes}_\pi F)$, et son image de*

Laplace est le produit multiplicatif des images de Laplace $\vec{\mathfrak{A}}(\hat{p})$ *et* $\vec{\mathfrak{B}}(\hat{p})$ *de* $\vec{\mathrm{A}}$ *et* $\vec{\mathrm{B}}$.

On a vu au chapitre I, page 78, que, si Γ_a est le convexe $\xi \geqslant a$, $\mathfrak{L}'(a)$ est l'intersection de $\mathcal{S}'(\Gamma_a)$ et de $\mathcal{D}'_+$, espace des distributions à support limité à gauche. La convolution de $\mathfrak{L}'(a) \times \mathfrak{L}'(a)$ dans $\mathfrak{L}'(a)$ est alors indifféremment la restriction de la convolution de $\mathcal{S}'(\mathring{\Gamma}_a) \times \mathcal{S}'(\mathring{\Gamma}_a)$ dans $\mathcal{S}'(\mathring{\Gamma}_a)$, ou la restriction de la convolution de $\mathcal{D}'_+ \times \mathcal{D}'_+$ dans $\mathcal{D}'_+$, car tous ces espaces ont la propriété d'approximation par troncature et régularisation; de même la convolution de $(\mathfrak{L}'(a))(\mathrm{E}) \times (\mathfrak{L}'(a))(\mathrm{F})$ dans $(\mathfrak{L}'(a))(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$ est indifféremment la restriction de la convolution de $(\mathcal{S}'(\mathring{\Gamma}_a))(\mathrm{E}) \times (\mathcal{S}'(\mathring{\Gamma}_a))(\mathrm{F})$ dans $(\mathcal{S}'(\mathring{\Gamma}_a))(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$, ou la restriction de la convolution de $\mathcal{D}'_+(\mathrm{E}) \times \mathcal{D}'_+(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$ (proposition 35).

Le résultat relatif à la transformation de Laplace revient à appliquer la proposition 43 à l'ouvert convexe $\mathring{\Gamma}_a$.

§ 8. Étude de trois contre-exemples.

Premier contre-exemple.

Soient $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}(\mathrm{E})$, $\vec{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}'(\mathrm{F})$. Nous pouvons calculer $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mathrm{T}}$ par la proposition 34; le résultat est un élément de $\mathcal{E}(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$. Mais si nous essayons de remplacer π par ι, γ, ou β, la proposition 34 n'est plus applicable. Si nous ne supposons pas $\vec{\alpha}$ ou $\vec{\mathrm{T}}$ bornée, nous n'avons à notre disposition que le corollaire de la proposition 39, qui, par exemple, nous montre seulement que, si $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}(\mathrm{E})$, $\vec{\alpha} *_\beta \vec{\mathrm{T}}$ est un élément de $\mathcal{D}'(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\beta \mathrm{F})$, c'est-à-dire une *distribution* à valeurs dans $\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\beta \mathrm{F}$, non nécessairement une fonction. Nous allons montrer par un contre-exemple que $\vec{\alpha} *_\beta \vec{\mathrm{T}}$ peut en effet n'être pas une fonction (mais son image $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mathrm{T}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$ est toujours une fonction indéfiniment dérivable à valeurs dans $\mathrm{E} \,\hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$), de sorte qu'on ne peut plus parler ici de *régularisation.*

Raisonnons pour simplifier sur le tore T^n au lieu de R^n. Prenons $\mathrm{E} = \mathcal{D}'$, $\mathrm{F} = \mathcal{D}$.

La fonction $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}(\mathcal{D}')$ est celle qui définit l'application identique $L_{\vec{T}}$ de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, la distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'(\mathcal{D})$ est celle qui définit la symétrie $L_{\vec{T}} : \chi \to \check{\chi}$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Appelons B la forme bilinéaire définissant la dualité entre $E = \mathcal{D}'$ et $F = \mathcal{D}$; elle est hypocontinue, donc se prolonge en une forme linéaire continue $\overline{B}$ sur $\mathcal{D}' \hat{\otimes}_\beta \mathcal{D}$, et pour montrer que $\vec{\alpha} *_\beta \vec{T} \in \mathcal{D}'(\mathcal{D}' \hat{\otimes}_\beta \mathcal{D})$ n'est pas une fonction, il suffit de montrer que son image $\overline{B}(\vec{\alpha} *_\beta \vec{T}) = \vec{\alpha} *_B \vec{T} \in \mathcal{D}'$ n'est pas une fonction. On a, d'après (II, 7; 8) :

$$\text{(II, 8; 1)} \quad (\vec{\alpha} *_B \vec{T}) \cdot \psi = (\vec{\alpha}_\xi \otimes_B \vec{T}_\eta) \cdot \psi(\xi + \eta), \quad \psi \in \mathcal{D}.$$

Tout d'abord on a, pour $u \in \mathcal{D}_\xi$, $v \in \mathcal{D}_\eta$:

$$\text{(II, 8; 2)} \quad \begin{aligned}(\vec{\alpha}_\xi \otimes_B \vec{T}_\eta) \cdot u(\xi) \otimes v(\eta) &= B(L_{\vec{\alpha}}(u), L_{\vec{T}}(v)) \\ &= B(u, \check{v}) = \int_{T^n} u(t)\, v(-t)\, dt.\end{aligned}$$

Comme $\vec{\alpha}_\xi \otimes_B \vec{T}_\eta$ est une distribution, donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$, ce ne peut être que celle qui est définie par

$$\text{(II, 8; 3)} \quad (\vec{\alpha}_\xi \otimes_B \vec{T}_\eta) \cdot \theta(\xi, \eta) = \int_{T^n} \theta(t, -t)\, dt, \quad \theta \in \mathcal{D}_{\xi,\eta},$$

cas (II, 8; 2) et (II, 8; 3) coïncident pour $\theta(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = u(\hat{\xi}) \otimes v(\hat{\eta})$.

Alors on aura, pour $\psi \in \mathcal{D}$:

$$\text{(II, 8; 4)} \quad (\vec{\alpha} *_B \vec{T}) \cdot \psi = \int_{T^n} \psi(t - t)\, dt = \psi(0) \int_{T^n} dt = \psi(0)$$

d'où

$$\text{(II, 8; 5)} \qquad \vec{\alpha} *_B \vec{T} = \delta \in \mathcal{D}',$$

qui n'est pas une fonction.

Prenons maintenant pour B la forme bilinéaire $(S, \varphi) \to D^p S \cdot \varphi$ sur $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}$, qui est encore hypocontinue. Alors on trouvera $\vec{\alpha} *_B \vec{T} = D^p \delta \in \mathcal{D}'$. Donc, en faisant varier B, on obtiendra des distributions $\vec{\alpha} *_B \vec{T}$ d'ordre arbitrairement élevé; donc $\vec{\alpha} *_\beta \vec{T}$ est une distribution d'ordre infini à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\beta F$.

Par contre on voit bien ici que son image $\vec{\alpha} *_\pi \vec{T}$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{D}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D})$ est une fonction indéfiniment dérivable. En effet $\vec{\alpha}_\xi \otimes \otimes_\pi \vec{T}_\eta$ définit l'application $L_{\vec{\alpha}_\xi \otimes_\pi \vec{T}_\eta} : \theta(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \to \theta(\hat{\xi}, -\hat{\eta})$ de $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$ dans $\mathcal{D}'_\xi \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_\eta$, donc $\vec{\alpha} *_\pi \vec{T}$ est l'élément de $\mathcal{D}'_x\ (\mathcal{D}'_\xi \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_\eta)$ qui définit l'application $\psi(\hat{x}) \to \psi(\hat{\xi} - \hat{\eta})$ de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{D}'_\xi \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_\eta$.

C'est la distribution $\delta(\hat{x} - \xi + \hat{\eta})$, qui appartient bien à $\mathcal{D}_x(\mathcal{D}'_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_\eta) = \mathcal{D}_x \widehat{\otimes} \mathcal{D}'_\xi \widehat{\otimes} \mathcal{D}_\eta$.

Conséquence. — Nous avons défini à la proposition 4 l'élément $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$, sans restriction sur $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$. Au contraire, pour définir $\vec{\varphi} \cdot_\iota \vec{T}$, $\vec{\varphi} \cdot_\gamma \vec{T}$, $\vec{\varphi} \cdot_\beta \vec{T}$, nous avons dû, par exemple, supposer T *bornée* (proposition 10). Un tel type de restriction était inévitable. Sans aucune restriction, $\check{\vec{\varphi}} *_\beta \vec{T} \in \mathcal{D}'(E \widehat{\otimes}_\beta F)$ existe toujours si $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{D}}(E)$, *mais ce n'est pas une fonction*, et toute tentative de définir $\vec{\varphi} \cdot_\beta \vec{T}$ par $\vec{\varphi} \cdot_\beta \vec{T} = \left(\check{\vec{\varphi}} *_\beta \vec{T}\right)(0)$ est vouée à l'échec.

Deuxième contre-exemple.

Raisonnons encore sur le tore T^n, au lieu de R^n, pour simplifier. Soient E et F des espaces de Banach. Soient $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^0(E)$, $\vec{\mu} \in \mathcal{D}'^0_c(F)$. On peut définir, avec la proposition 39, leur produit de convolution $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu} \in \mathcal{D}'(E \widehat{\otimes}_\pi F)$. Il est facile de voir que c'est une mesure. On pourrait appliquer en effet une proposition analogue à 38, mais s'appuyant sur la proposition 19 au lieu de la proposition 10, en prenant $\mathcal{M} = \mathcal{D}'^0_c$, $\mathcal{K} = \mathcal{D}^0$, $\mathcal{H} = \mathcal{D}'^0_c$, $\mathcal{L} = \mathcal{D}^0$, et en échangeant les rôles de E et F. L'injection de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}'^0_c$ est intégrale (puisqu'elle se factorise en $\mathcal{D}^0 \to L^\infty \to L^1 \to \mathcal{D}'^0_b \to \mathcal{D}'^0_c$).

Mais on peut définir autrement la précédente convolution. A partir de $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^0 \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $\vec{\mu} \in \mathcal{D}'^0_c \widehat{\otimes}_\varepsilon F$, on peut définir (proposition 2) $\Gamma_{\varepsilon,\pi}(\vec{\alpha}, \vec{\mu}) \in (\mathcal{D}^0 \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'^0_c) \otimes_\varepsilon (E \widehat{\otimes}_\pi F)$. L'application $\Gamma_{\varepsilon,\pi}$ est continue. Par ailleurs la convolution $*$ de $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{D}'^0_c$ dans $\mathcal{D}'^0_c$ est ε-continue [en effet on peut la factoriser comme suit. On a la suite d'applications continues $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{D}'^0_c \to \mathcal{D}^0 \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'^0_c \to \mathcal{D}'^0_b \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}'^0_c$, parce que $\mathcal{D}^0 \to L^\infty \to L^1 \to \mathcal{D}'^0_b$ est intégrale (proposition 16). Mais la convolution de $\mathcal{D}'^0_b \times \mathcal{D}'^0_c$ dans $\mathcal{D}'^0_c$ est continue; car, si ν converge vers 0 dans $\mathcal{D}'^0_c$, $\check{\nu} * \varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^0$, uniformément lorsque φ parcourt un compact de $\mathcal{D}^0$; alors, si λ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'^0_b$, $(\lambda * \nu) \cdot \varphi = \lambda \cdot (\check{\nu} * \varphi)$ convergera vers 0, la forme bilinéaire définissant la dualité étant continue sur $\mathcal{D}'^0_b \times \mathcal{D}^0$; alors $\lambda * \nu$ convergera bien vers 0 dans $\mathcal{D}'^0_c$. Donc la convolution $*$ se prolonge en une application linéaire continue $\bar{*}$ de $\mathcal{D}'^0_b \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}'^0_c$ dans $\mathcal{D}'^0_c$. On a donc la suite d'applications linéaires continues :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^0 \times \mathcal{D}'^0_c \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{D}'^0_b \times \mathcal{D}'^0_c \arrow[r] & \mathcal{D}'^0_b \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}'^0_c \arrow[r, "\bar{*}"] & \mathcal{D}'^0_c, \\ & \mathcal{D}^0 \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'^0_c \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

d'où l'on retiendra seulement que la convolution $*$ se factorise en $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{D}'^0_c \to \mathcal{D}^0 \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'^0_c \xrightarrow{\bar{*}} \mathcal{D}'^0_c$]. Alors $(\bar{*} \otimes \mathrm{I})\big(\Gamma_{\varepsilon,\pi}(\vec{\alpha}, \vec{\mu})\big)$ est un élément de $\mathcal{D}'^0_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$. L'application $(\bar{*} \otimes \mathrm{I})\Gamma_{\varepsilon,\pi}$ est continue de $\mathcal{D}^0(\mathrm{E}) \times \mathcal{D}'^0_c(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{D}'^0_c(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$, et coïncide avec la convolution sur $(\mathcal{D}^0 \otimes \mathrm{E}) \times (\mathcal{D}'^0_c \otimes \mathrm{F})$, donc partout. Ceci nous montre que *la convolution précédente est même continue.* Elle est enfin la restriction de la convolution de $\mathcal{D}'(\mathrm{E}) \times \mathcal{D}'(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{D}'(\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F})$, définie par le même procédé ou par la proposition 34 ou 39.

On pourrait naïvement s'attendre à ce que $\alpha *_\pi \mu$ fût même une fonction continue, pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^0(\mathrm{E})$, $\mu \in \mathcal{D}'^0_c(\mathrm{F})$, comme c'est le cas si E et F sont de dimension finie. Il n'en est rien ($\mathcal{D}^0$ et $\mathcal{D}'^0_c$ ne sont pas nucléaires, on ne peut pas leur appliquer la proposition 34).

En fait nous avons vu page 167 que, si $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^n(\mathrm{E})$, $\mu \in \mathcal{D}'^0_c(\mathrm{F})$, alors $\vec{\alpha} *_\pi \mu$ est une fonction continue (F étant un espace de Banach, $\vec{\mathrm{T}}$ est sûrement bornée). Nous allons montrer que ce résultat ne peut pas être très amélioré. Nous allons donner un exemple explicite pour E, F, $\vec{\alpha}$, $\vec{\mu}$, avec $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^k(\mathrm{E})$, $\vec{\mu} \in \mathcal{D}'^0_c(\mathrm{F})$, où $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu}$ ne pourra être une fonction scalairement intégrable à valeurs dans $\mathrm{E} \hat{\otimes}_\pi \mathrm{F}$ que si l'injection naturelle $\mathcal{D}^{k+1} \to \mathcal{D}^0$ est nucléaire; $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu}$ ne sera donc sûrement pas, dans cet exemple, une fonction scalairement intégrable, si $k \leqslant n - 2$, ou même si $k = n - 1 = 0$ pour $n = 1$, d'après la remarque de la page 112. Le problème restera donc ouvert seulement pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathrm{E})$, $n > 1$ [1].

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{D}'^{k+1} = \mathcal{D}'^{k+1}_b$, $\mathrm{F} = \mathcal{D}^0$.

Prenons pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^k(\mathcal{D}'^{k+1})$ la fonction qui définit l'injection canonique $\mathrm{L}_{\vec{\alpha}}$ de $\mathcal{D}'^k_c$ dans $\mathcal{D}'^{k+1}_b$; cet opérateur est bien

[1] Nous avons vu, à la proposition 23 *bis*, que l'injection de $\mathcal{D}^{m+n+1}_{\mathrm{K}}$ dans $\mathcal{D}^m_{\mathrm{H}}$ était nucléaire. Il est bien évident que, sur un tore, il n'y a pas de problèmes de supports, et que l'injection de $\mathcal{D}^{m+n+1}_{\mathrm{T}^n}$ dans $\mathcal{D}^m_{\mathrm{T}^n}$ est nucléaire. Nous laissons au lecteur le soin d'opérer partout ici ce genre de modifications.

continu, comme transposé de l'identité, opérateur compact de $\mathcal{D}^{k+1}$ dans $\mathcal{D}^{k}$ (1). En tant que noyau, appartenant à $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_\xi)$, $\vec{\alpha}$ n'est autre que $\delta(\hat{x}-\xi)$. Prenons pour $\vec{\mu} \in \mathcal{D}'^0_c(\mathcal{D}^0)$ la distribution qui définit l'opérateur identique $L_{\vec{\mu}}$ de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}^0$. En tant que noyau, appartenant à $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_\eta)$, $\vec{\mu}$ n'est autre encore que $\delta(\hat{x}-\hat{\eta})$.

Alors $\vec{\alpha}_\xi \otimes \otimes_\pi \vec{\mu}_\eta$ définit l'application linéaire continue $L_{\vec{\alpha}_\xi \otimes_\pi \vec{\mu}_\eta}$ de $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$ dans $\mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta$, qui coïncide, sur $\mathcal{D}_\xi \otimes \mathcal{D}_\eta$, avec l'application identique. Comme $\mathcal{D}^0$ a la propriété d'approximation, $\mathcal{D}'^{k+1} \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0$ est un sous-espace de $\mathcal{D}'^{k+1} \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}^0$ (avec une topologie plus fine) (2), et on a les injections canoniques $\mathcal{D}_{\xi,\eta} = \mathcal{D}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_\eta$ (3) $\subset \mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta \subset \mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}^0_\eta \subset \mathcal{D}'_\xi \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'_\eta = \mathcal{D}'_{\xi,\eta}$, et $L_{\vec{\alpha}_\xi \otimes_\pi \vec{\mu}_\eta}$ n'est autre que la première de ces injections, $\mathcal{D}_{\xi,\eta} \to \mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta$. La formule (II, 7; 8) qui définit la convolution montre alors que $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu}$ est la distribution de $\mathcal{D}_x(\mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta)$ telle que

(II, 8; 6)
$$(\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu})_x \cdot \psi(x) = \psi(\xi + \hat{\eta}) \in \mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta, \qquad \text{et même} \qquad \in \mathcal{D}_{\xi,\eta}.$$

Supposons cette distribution $(\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu})_x$ définie par une fonction $\vec{f}(\hat{x})$, scalairement intégrable sur T^n à valeurs dans $\mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta$. Or, si on prend l'image $J(\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu})$ de $(\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu})$ par l'injection canonique J de $\mathcal{D}'^{k+1}_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta$ dans $\mathcal{D}'_{\xi,\eta}$, on obtient la distribution de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_{\xi,\eta})$: $\psi(\hat{x}) \to \psi(\xi + \hat{\eta})$; si $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu}$ est une fonction $\vec{f}$, cette distribution sera définie par la fonction $(J \circ \vec{f})(\hat{x})$, scalairement intégrable sur T^n à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\xi,\eta}$. Or elle est effectivement définie par la fonction $\vec{g} \in \mathcal{D}_x(\mathcal{D}'_{\xi,\eta})$:

(II, 8; 7) $$\vec{g}(x) = \delta(x - \xi - \hat{\eta}),$$

(1) Soient L et M des espaces vectoriels localement convexes. Si u est une application linéaire continue de L dans M, transformant toute partie bornée en une partie d'enveloppe compacte, ${}^t u$ est continue de M'_c dans L'_b, en vertu de la formule ${}^t u((u(B))^0) \subset B^0$, appliquée à toute partie bornée B de L (B^0 est un voisinage de 0 de L'_b, $(u(B))^0$ un voisinage de 0 de M'_c).

(2) Grothendieck [4], § 5, n° 1, proposition 35, B_2; rappelons que $B(F', E')$ admet $F \varepsilon E$ comme sous-espace, et qu'en réalité il s'agit de l'application linéaire canonique de $F \widehat{\otimes}_\pi E$ dans $F \varepsilon E$ ou même $F \widehat{\otimes}_\varepsilon E$. Voir aussi Schwartz [2], exposé 14, théorème 3, B_3.

(3) Nous avons vu que $\mathcal{E}_x \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{x,y}$ (chapitre I, proposition 28), et, sur un tore, $\mathcal{E} = \mathcal{D}$.

car on a bien (d'après le chapitre I, page 106) :

$$\text{(II, 8; 8)} \quad \int_{T^n} \delta(x - \hat{\xi} - \hat{\eta}) \psi(x)\, dx = \psi(\hat{\xi} + \hat{\eta}) \in \mathcal{D}'_{\xi,\eta}.$$

Alors $\vec{g}$ et $J \circ \vec{f}$ définissent la même distribution en x à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\xi,\eta}$; comme le dual $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$ de $\mathcal{D}'_{\xi,\eta}$ est séparable, $\vec{g}(x) = (J \circ \vec{f})(x)$ pour presque toutes les valeurs de x (¹). Cela prouve que $\delta(x - \hat{\xi} - \hat{\eta}) \in \mathcal{D}'_{\xi,\eta}$ devra appartenir à $\mathcal{D}'^{k+1}_{\xi} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta$ pour presque toutes les valeurs de x.

Soit $x_0 \in T^n$ un point tel que $\delta(x_0 - \hat{\xi} - \hat{\eta}) \in \mathcal{D}'^{k+1}_{\xi}\, {}_\pi\hat{\otimes}\, \mathcal{D}^0_\eta$. L'opération, définie par ce noyau, de $\mathcal{D}^{k+1}_{\xi}$ dans $\mathcal{D}^0_\eta$ est

$$\theta(\hat{\xi}) \to \int_{T^n} \delta(x_0 - \xi - \hat{\eta}) \theta(\xi) d\xi = \theta(x_0 - \hat{\eta});$$

cette opération devra être *nucléaire*, puisque

$$\delta(x_0 - \hat{\xi} - \hat{\eta}) \in \mathcal{D}'^{k+1}_{\xi} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta.$$

En composant l'opération précédente avec l'opération continue $\theta(x_0 - \hat{\eta}) \to \theta(\hat{\eta})$ de $\mathcal{D}^0_\eta$ dans lui-même, on en déduira bien que l'injection canonique de $\mathcal{D}^{k+1}$ dans $\mathcal{D}^0$ est nucléaire, ce qui prouve notre affirmation du début : pour $k = n - 2$, $n > 1$, ou pour $k = n - 1 = 0$, $n = 1$, nous avons donné un exemple, où $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}^k(E)$, $\vec{\mu} \in \mathcal{D}'^0_c(F)$, et où $\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu}$ n'est pas une fonction.

Toute tentative, dans ce cas, pour définir le produit scalaire $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mu} \in (E \hat{\otimes}_\pi F)$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^k(E)$, $\vec{T} \in \mathcal{D}'^0_c(F)$, par $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mu} = (\check{\vec{\varphi}} *_\pi \vec{\mu})(0)$, est donc vouée à l'échec, puisque le second membre n'a pas de sens. Voilà donc un cas où on ne peut sûrement pas définir un produit scalaire « raisonnable » $(\vec{\varphi}, \vec{\mu}) \to \vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{\mu}$ sur $\mathcal{D}^0(E) \times \mathcal{D}'^0_c(F)$ ou même sur $\mathcal{D}^k(E) \times \mathcal{D}'^0_c(F)$.

Au contraire, comme nous l'avons vu en passant, $J(\vec{\alpha} *_\pi \vec{\mu})$ est une fonction indéfiniment dérivable $\delta(x - \hat{\xi} - \hat{\eta})$, à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\xi,\eta} = \mathcal{D}'_\xi \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}'_\eta$. Mais ici il n'y avait aucune difficulté, car $J\vec{\alpha}$, considérée comme distribution à valeurs dans $\mathcal{D}'_\xi$, est une fonction indéfiniment dérivable, donc la proposition 34 montrait bien que $J\vec{\alpha} *_\pi J\vec{\mu}$ est une fonction indéfiniment dérivable. Dans ce cas la formule (II, 7; 4 *bis*) était valable.

(¹) Voici chapitre I, remarque 2°, page 66.

Troisième contre-exemple.

Plaçons-nous toujours sur le tore T^n. Soient E et F des espaces de Banach, $\vec{\mu}$ et $\vec{\nu}$ des mesures sur T^n à valeurs dans E et F respectivement : $\vec{\mu} \in \mathcal{D}_c'^0(E)$, $\vec{\nu} \in \mathcal{D}_c'^0(F)$. On sait alors que $\vec{\mu} *_\pi \vec{\nu}$ est dans $\mathcal{D}_c'^n(E \hat{\otimes}_\pi F)$. C'est en effet ce qui indique la proposition 38, exemple 4° page 163 (F étant un espace de Banach. $\vec{T}$ est bien bornée). En outre, si $\vec{\mu}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_c'^n(E)$, et si $\vec{\nu}$ reste dans une partie bornée de $\mathcal{D}_c'^0(F)$, $\vec{\mu} *_\pi \vec{\nu}$ converge vers 0; mais par suite de la symétrie des rôles de $\vec{\mu}$ et $\vec{\nu}$ (les deux produits de convolution qu'on peut définir en échangeant les rôles de $\vec{\mu}$ et $\vec{\nu}$ coïncident, parce qu'ils sont tous deux la restriction de la convolution de $\mathcal{D}'(E) \times \mathcal{D}'(F)$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$, définie par la proposition 34 ou 39), on en déduit que la convolution de $\mathcal{D}_c'^0(E) \times \mathcal{D}_c'^0(F)$ dans $\mathcal{D}_c'^n(E \hat{\otimes}_\pi F)$ est hypocontinue par rapport aux parties bornées.

Peut-on remplacer ici n par $k < n$? Nous l'ignorons. Mais nous allons montrer qu'on ne peut sûrement pas le remplacer par 0; le produit de convolution de 2 mesures à valeurs dans E et F respectivement n'est pas nécessairement une mesure à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\pi F$. Plus précisément, soient $E = \mathcal{D}^0$, $\vec{\mu} \in \mathcal{D}_c'^0(\mathcal{D}^0)$ la mesure telle que $L_{\vec{\mu}}$ soit l'application identique de $\mathcal{D}^0$; et soient $F = \mathcal{D}^0$, $\vec{\nu} \in \mathcal{D}_c'^0(\mathcal{D}^0)$ la mesure telle que $L_{\vec{\nu}}$ soit la symétrie $\check{}$ de $\mathcal{D}^0$ dans lui-même. Nous allons montrer que, si $\vec{\mu} *_\pi \vec{\nu}$ est dans $\mathcal{D}_c'^k(E \hat{\otimes}_\pi F)$, alors toute distribution S, telle que la convolution $\{S\}$ opère continuement de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}_b'^0$ est d'ordre $\leqslant k$.

Malheureusement, nous ne connaissons pas l'ordre maximum k_M de telles distributions S : on a sûrement $k \geqslant k_M$. Pour $n = 1$, la convolution avec $vp \operatorname{cotg} \frac{1}{\hat{x}}$ opère continuement de L^2 dans L^2, donc à fortiori de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}_b'^0$, or cette distribution est d'ordre 1 et non d'ordre 0; donc, pour $n = 1$, $k = 0$ est impossible, et comme $k = 1$ est possible, le problème est complètement résolu pour la dimension 1. Pour la dimension n,

$$S = vp \operatorname{cotg} \frac{1}{\hat{x}_1} \otimes vp \operatorname{cotg} \frac{1}{\hat{x}_2} \otimes \cdots \otimes vp \operatorname{cotg} \frac{1}{\hat{x}_n},$$

n'est pas non plus d'ordre 0, mais nous ignorons son ordre effectif k_0; on peut montrer aisément que $k_0 \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$ (car les coefficients de Fourier de S sont bornés, donc S est somme de dérivées d'ordre $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$ de fonctions de L^2, donc d'ordre $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$), ce qui ne nous dit pas grand'chose; quoiqu'il en soit, on a sûrement $k \geqslant k_0$. On peut former [1] une distribution S d'ordre effectif $k_1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, dont les coefficients de Fourier sont bornés, et telle par conséquent que $\{S\}$ opère continuement de L^2 dans L^2, et par suite à fortiori de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}_b'^0$; on a donc sûrement $k \geqslant k_1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, ce qui est très loin de n.

Démontrons donc notre assertion. Nous avons vu, au 1er contre-exemple, que $\vec{\mu} *_\pi \vec{\nu}$, en tant que distribution à valeurs dans $\mathcal{D}'_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}'_\eta$, est $\delta(\hat{x} - \xi + \hat{\eta})$. Elle est une fonction indéfiniment dérivable de x à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\xi,\eta}$, donc à fortiori distribution d'ordre $\leqslant k$, et sa valeur pour $\varphi(\hat{x}) \in \mathcal{D}^k$ est $\varphi(\xi - \hat{\eta}) \in \mathcal{D}'_{\xi,\eta}$. Il s'agit donc de savoir s'il est possible que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^k$, $\varphi(\xi - \hat{\eta})$ soit dans $\mathcal{D}^0_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta \subset$ [2] $\mathcal{D}^0_\xi \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}^0_\eta \subset \mathcal{D}'_{\xi,\eta}$.

Mais, en tant que noyau, $\varphi(\xi - \hat{\eta})$ définit l'opération de convolution avec φ; si $\varphi(\xi - \hat{\eta}) \in \mathcal{D}^0_\xi \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^0_\eta$, cette opération doit être nucléaire de $\mathcal{D}_b'^0$ dans $\mathcal{D}^0$. Donc, si $\vec{\mu} *_\pi \vec{\nu} \in \mathcal{D}_c'^k(E \widehat{\otimes}_\pi F)$, la convolution $\{\varphi\}$ doit être nucléaire de $\mathcal{D}_b'^0$ dans $\mathcal{D}^0$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^k$. Soit alors S une distribution telle que la convolution $\{S\}$ soit continue de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}_b'^0$; alors la convolution $\{S * \varphi\}$:

[1] Soit en effet τ une mesure $\geqslant 0$ répartie de manière homogène sur la surface d'une sphère de R^n, de centre 0. On sait (voir SCHWARTZ [8]) que son image de Fourier est bornée, à l'infini, par une quantité de l'ordre de $\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. Donc toute dérivée $D^p\tau$, $|p| \leqslant \frac{n-1}{2}$, est une distribution d'ordre exactement $|p|$, d'image de Fourier bornée; la périodifiée $D^p\tilde{\tau}$ de $D^p\tau$, de période 1 par rapport à toutes les coordonnées (c'est-à-dire la somme de toute les translatées de translations entières), définit une distribution d'ordre $|p|$ sur le tore, dont les coefficients de Fourier sont bornés.

[2] Rappelons que cette relation d'inclusion résulte, par exemple, de ce que $\mathcal{D}^0$ à la propriété d'approximation (voir note [2], page 88).

$\mathcal{D}^0 \xrightarrow{\{S\}} \mathcal{D}_b'^0 \xrightarrow{\{\varphi\}} \mathcal{D}^0$ sera nucléaire; d'après la proposition 23, $S * \varphi$ devra être une fonction continue. S est donc une distribution telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^k$, $S * \varphi$ soit une fonction continue: S est donc d'ordre $\leqslant k$ (1). Nous avons donc bien montré que, si $\vec{\mu} *_\pi \vec{\nu} \in \mathcal{D}_c'^k(E \hat{\otimes}_\pi F)$, toute distribution S telle que $\{S\}$ opère continuement de $\mathcal{D}^0$ dans $\mathcal{D}_b'^0$, est d'ordre $\leqslant k$.

(1) SCHWARTZ [5], chapitre VI, § 7, remarque 1°, page 49.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Nous écrivons : page 75 (I), ou page 75 (II), selon qu'il s'agit de la page 75 du chapitre I ou du chapitre II.

Convexité.

Un *ensemble convexe* d'un espace vectoriel sur le corps des réels ou des complexes est un ensemble qui, toutes les fois qu'il contient deux points, contient le segment qui les joint (Bourbaki [1], chapitre II, § 1, n° 1 page 42).

Un espace vectoriel topologique sur le corps des réels ou des complexes est dit *localement convexe*, s'il a un système fondamental de voisinages de 0 convexes (Bourbaki [1], chapitre II, § 2, n° 1, page 57); sa topologie est alors définie par une famille de *semi-normes* (Bourbaki [1], chapitre II, § 5, n° 4, page 95)

Un *ensemble équilibré* d'un espace vectoriel sur un corps valué K, est un ensemble qui, toutes les fois qu'il contient un élément x, contient tous les éléments λx, $\lambda \in K$, $|\lambda| \leqslant 1$ (Bourbaki [1], chap. I, § 1, n° 3, définition 2, page 5).

Un ensemble *disqué* d'un espace localement convexe est un ensemble convexe équilibré fermé.

L'*enveloppe convexe* (resp. *convexe équilibrée*) d'une partie d'un espace vectoriel sur le corps des réels ou des complexes est la plus petite partie convexe (resp. convexe équilibrée) qui la contienne (Bourbaki [1], chap. I, § 1, n° 3, page 6; chap. II, § 1, n° 3, page 45).

L'*enveloppe* d'une partie d'un espace localement convexe est la plus petite partie disquée qui la contienne. « Enveloppe » est donc une abréviation de « enveloppe disquée ».

Soit A une partie d'un espace vectoriel E sur le corps des réels ou des complexes; supposons A convexe, équilibrée, absorbante (voir plus bas). On appelle *jauge* de A la semi-norme p définie par

$$p(x) = \Big(\operatorname*{Sup}_{\lambda x \in A} |\lambda|\Big)^{-1} \quad \text{(Bourbaki, chap. II, § 5, n° 3, page 95).}$$

Ensembles de parties bornées d'un espace vectoriel localement convexe.

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E sur le corps des réels ou des complexes. On dit que A *absorbe* B, s'il existe un scalaire λ tel que $\lambda A \supset B$. Une partie de E est dite *absorbante*, si elle absorbe toute partie réduite à un point.

Une partie d'un espace localement convexe E est dite *bornée* si elle est absorbée par tout voisinage de 0 (Bourbaki [2], chap. III, § 2, n° 1, déf. 1, page 4).

L'enveloppe d'une partie bornée est bornée.

Un *système fondamental* $\mathcal{B}$ *de parties bornées* est un ensemble de parties bornées tel que toute partie bornée de E soit contenue dans une partie appartenant à $\mathcal{B}$.

Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties bornées est dit *saturé*, si, toutes les fois que A et B appartiennent à $\mathcal{B}$, il en est de même de λA, λ scalaire, ainsi que de toutes les parties contenues dans A. de l'enveloppe de A, et de la réunion A $\cup$ B, et si en outre toute partie réduite à un point appartient à $\mathcal{B}$.

Les λ-*parties* ($\lambda = \iota, \gamma, \beta, \pi, \varepsilon$), et les *parties* σ-τ-*décomposables* sont définies page 15 (II).

Adhérence stricte, parties strictement denses, parties quasi-fermées d'un espace localement convexe.

Une partie A d'un espace localement convexe E est dite *quasi-fermée*, si tout point de E, adhérent à une partie *bornée* de A, appartient à A. L'*adhérence stricte* de A dans E est la plus petite partie quasi-fermée contenant A; un point de E est *strictement adhérent* à A, s'il appartient à son adhérence stricte; A est *strictement dense* dans E si son adhérence stricte est E.

(Schwartz [1], Introduction, pages 90, 92).

Espaces complets, quasi-complets; parties complétantes.

Un espace uniforme est *complet*, si tout filtre de Cauchy est convergent (Bourbaki [5], chap. II, § 3, n° 1, déf. 4, page 147).

Un espace localement convexe est *quasi-complet* si toute partie fermée *bornée* est complète. Pour les propriétés essentielles des espaces quasi-complets, voir Schwartz [1], Introduction, pages 90, 92.

Une partie A d'un espace localement convexe E est dite *complétante*, s'il existe une partie convexe équilibrée B $\supset$ A, coupant toute droite issue de l'origine suivant un segment fermé, et telle que l'espace normé E_B (espace vectoriel normé engendré par B, et ayant B comme boule unité) soit *complet.* Toute partie contenue dans une partie complétante est complétante; l'enveloppe convexe équilibrée d'une partie complétante est complétante (mais son adhérence ne l'est pas nécessairement).

Toute partie A, bornée disquée complète, est complétante, et même E_A est complet (Bourbaki [2], démonstration du lemme 1, chap. III, § 3, n° 4, page 21).

Si E est quasi-complet, toute partie bornée est complétante.

Soit E localement convexe; si A est bornée disquée complétante, E_A est complet (car soit B $\supset$ A tel que E_B soit complet; A est bornée disquée dans E_B complet, donc E_A est complet). Cette propriété ne subsiste pas nécessairement si A est seulement convexe équilibrée bornée complétante.

Soit A une partie bornée complétante de E. Parmi les parties B $\supset$ A telles que E_B soit complet, il en existe au moins une B_1 qui soit contenue dans l'enveloppe de A. Si en effet A_1 est cette enveloppe, $A_1 \cap B$ est disquée bornée dans E_B complet, donc $E_{A_1 \cap B}$ est complet, et on peut prendre $B_1 = A_1 \cap B$.

Si A est une partie complétante de E, u une application linéaire de E dans F telle que l'image par u de l'enveloppe de A soit bornée, alors u(A) est complétante dans F. En effet soit $B \supset A$ une partie contenue dans l'enveloppe de A, telle que E_B soit complet. L'espace $F_{u(B)}$ est exactement l'espace normé quotient de E_B par le noyau de la restriction de u à E_B (comme u(B) est bornée, $F_{u(B)}$ est séparé, donc le noyau est nécessairement fermé); donc $F_{u(B)}$ est complet, et u(B), donc u(A), est complétante. En particulier, l'image d'une partie complétante par une application linéaire continue (ou transformant toute partie bornée en une partie bornée) est complétante. On en déduit que, pour qu'une partie de E soit complétante, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans l'image de la boule unité d'un Banach par une application continue (c'est nécessaire, car si A est complétante et si $B \supset A$ est telle que E_B un soit Banach, A est contenue dans l'image de la boule unité de E_B par $E_B \rightarrow E$; c'est suffisant d'après ce que nous venons de voir).

Si $\mathfrak{T}$ est un ensemble saturé de parties bornées de E, E est dit *$\mathfrak{T}$-quasi-complet* (resp. *$\mathfrak{T}$-complétant*), si toute partie appartenant à $\mathfrak{T}$ a une adhérence complète (resp. complétante).

Applications linéaires continues et homomorphismes.

Une application u de E dans F est *injective*, si l'image réciproque d'un point ne contient pas plus d'un point; *épijective* ou *surjective* si $u(E) = F$; *bijective* si elle est injective et épijective.

Une application linéaire d'un espace vectoriel topologique E dans un espace vectoriel topologique F est un *isomorphisme*, si elle est bijective et si elle est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique; elle est un *monomorphisme*, si elle est un isomorphisme de E sur u(E), un *épimorphisme* si elle définit un isomorphisme de $E/\overset{-1}{u}(0)$ sur F; un *homomorphisme*, si elle définit un isomorphisme de $E/\overset{-1}{u}(0)$ sur u(E).

Applications continues, hypocontinues; bornées, compactes.

Application bilinéaires *$\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-hypocontinues*: page 9 (II).

Applications bilinéaires *λ-continues* ($\lambda = \iota, \gamma, \beta, \pi, \varepsilon$): page 13 (II).

Applications multilinéaires *ε-hypocontinues*: page 3 (I).

Quand on écrit *hypocontinue*, sans autre précision, cela veut dire hypocontinue par rapport aux parties bornées.

Une application linéaire u d'un espace localement convexe E dans un espace localement convexe F est dite *bornée* (resp. compacte), s'il existe un voisinage de 0 de E dont l'image par u soit bornée (resp. relativement compacte).

Soit $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties bornées de F. Une application linéaire u de E dans F est $\mathfrak{T}$-bornée, s'il existe un voisinage de 0 de E dont l'image par u appartient à $\mathfrak{T}$. On définit de même les ensembles équibornés, $\mathfrak{T}$-équibornés, d'application linéaires de E dans F [page 83 (I)].

Diverses topologies sur un espace localement convexe et son dual. Polarité.

Soit E un espace localement convexe, E' son dual. La topologie affaiblie $\sigma(E, E')$, la topologie faible $\sigma(E', E)$, sont définies dans Bourbaki [2], chap. IV, § 2, n° 1, page 63; la topologie τ de Mackey est définie dans Bourbaki [2], chap. IV, § 2, n° 3, page 69; la topologie forte sur E' est définie dans

Bourbaki [2], chap. iv, § 3, n° 1, page 85; la topologie $\gamma = (E'_c)'_c$ sur E est définie ici page 17 (I).

Si $A \subset E$, son polaire A^0 est l'ensemble des $\overleftarrow{e'} \in E'$, tels que $\langle \overleftarrow{e'}, \overrightarrow{e} \rangle \leqslant 1$ pour tout $e \in A$. Le bipolaire A^{00} est $(A^0)^0$; c'est l'enveloppe de A pour la topologie $\sigma(E, E')$ (Bourbaki [2], chap. iv, § 1, n° 3, prop. 3, page 52).

Limites inductives.

Soit E un espace vectoriel, réunion d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'espaces localement convexes; on suppose que l'ensemble d'indices I est ordonné filtrant, et que, pour $j \geqslant i$, on a $E_i \subset E_j$, la topologie de E_i étant plus fine que la topologie induite par E_j. La *limite inductive* des topologies des E_i est la topologie localement convexe la plus fine sur E, qui, sur chaque E_i, induise une topologie moins fine que la sienne (Bourbaki [1] chap. ii, § 2, n° 4, page 61). On dit que E est *limite inductive stricte* des E_i, si I est dénombrable et si, pour $j \geqslant i$, la topologie de E_i est identique à la topologie induite par E_j.

On montre alors que la topologie limite inductive de E induit sur chaque E_i sa propre topologie (Dieudonné-Schwartz [1], proposition 2, page 68).

Applications intégrales et nucléaires, espaces nucléaires.

Application nucléaire de E dans F : Grothendieck [4], § 3, n° 2, déf. 4.3. page 80; Schwartz [2], exposé 12, déf. 2, page 4).

Application intégrale de E dans F : Grothendieck [4], § 4, n° 3, déf. 7.2, page 127; Schwartz [2], exposé 16, page 3).

Application sous-nucléaire, *sous-intégrale* : page 54 (II).

Espaces nucléaires : Grothendieck [5], § 2, n° 1, déf. 4, page 34; Schwartz [2], exposé 17, page 2).

Les produits tensoriels topologiques.

Indépendamment des définitions données dans Grothendieck [4] et Schwartz [2], on trouvera ici, page 10 (II), la définition de la topologie $\otimes_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}}$, et des 5 topologies ι, γ, β, π, ε, sur un produit tensoriel.

Parties σ-τ-décomposables d'un produit tensoriel complété : page 15 (II).

Tonneaux, espaces tonnelés.

Un *tonneau* d'un espace localement convexe est un ensemble disqué absorbant; un espace localement convexe est *tonnelé*, si tout tonneau est un voisinage de 0 (Bourbaki [2], chap. iii, § 1, n° 1, déf. 1, page 1).

Un espace localement convexe est *infra-tonnelé*, si tout tonneau absorbant toutes les parties bornées est un voisinage de 0. Un espace tonnelé est infra-tonnelé; un espace quasi-complet infra-tonnelé est tonnelé. Un espace bornologique est infra-tonnelé; un espace ultra-bornologique est tonnelé.

Espaces bornologiques.

Un espace localement convexe est *bornologique*, si toute partie convexe équilibrée, absorbant toutes les parties bornées, est un voisinage de 0 (Bourbaki [4], page 11).

Un espace localement convexe est *ultra-bornologique* s'il est limite inductive d'espaces de Banach (voir page 43 (I)). Un espace ultrabornologique est bornologique et tonnelé; un espace bornologique et quasi-complet est ultra-bornologique.

Espaces de Montel.

Un *espace de Montel* est un espace localement convexe tonnelé, où les parties bornées sont relativement compactes (Bourbaki [2], chap. iv, § 3, n° 4, page 89).

Espaces de Schwartz.

Un espace de Schwartz est un espace localement convexe E tel que, pour tout voisinage disqué $\mathcal{U}$ de 0, il en existe un autre $\mathcal{V}$, dont l'image dans $E_{\mathcal{U}}$ ($E_{\mathcal{U}}$ est l'espace normé *séparé*, associé à l'espace E muni de la seule semi-norme jauge de $\mathcal{U}$) soit précompacte (Grothendieck [2], déf. 5, page 117).

Espaces de Fréchet, espaces ($\mathcal{LF}$), espaces (DF).

Un *espace de Fréchet* est un espace localement convexe, à base déombrable de voisinages de 0 et complet (Bourbaki, chap. ii, § 2, n° 1, page 59).

Un espace $\mathcal{LF}$ est une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet (Dieudonné-Schwartz [1]).

Un espace (DF) est un espace, ayant une base dénombrable de parties bornées, et tel que toute partie bornée du dual, contenue dans une réunion dénombrable de parties équicontinues, soit encore équicontinue (Grothendieck [4], déf. 1, page 63).

Le dual d'un espace de Fréchet est un espace (DF); le dual d'un espace (DF) est un espace de Fréchet.

Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Recouvrements, partition de l'unité.

Un *recouvrement ouvert* d'un espace topologique X est une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X, dont la réunion est X.

Le recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ est dit *subordonné* au recouvrement ouvert $(O'_i)_{i\in I}$ (correspondant au même ensemble d'indices), si, pour tout $i \in I$, $\overline{O_i}$ est contenu dans O'_i.

Une *partition de l'unité sur* X, *subordonnée à un recouvrement ouvert* $(O_i)_{i\in I}$, est une famille de fonctions continues $(\alpha_i)_{i\in I}$, correspondant au même ensemble d'indices, et telle que : *a*) $\alpha_i \geqslant 0$; *b*) l'adhérence de l'ensemble des points où $\alpha_i \neq 0$ est contenu dans O_i; *c*) la somme $\sum_i \alpha_i$ vaut 1, chaque point de X possédant un voisinage où tous les termes de cette somme, sauf un nombre fini, sont nuls.

Propriétés d'approximation et de densité; espaces de distributions.

Propriété d'approximation et d'approximation stricte, pour un espace localement convexe, page 5 (I); *propriété d'approximation équicontinue ou métrique :* page 72 (II); voir aussi Grothendieck [4], § 5, n° 2, page 178.

Espaces de distributions, espaces normaux et strictement normaux : page 7 (I).

INDEX DES NOTATIONS

Les espaces usuels de distributions $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^m$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'^m$, $\mathcal{D}'_+$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^m$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'^m$, L^p, $\mathcal{D}'_{L^p}$, $\mathcal{B}^{\bullet}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_c$, sont ceux qui sont définis dans Schwartz [4] et [5] (voir index des notations à la fin de [5]); on peut y ajouter $\mathcal{O}'_M$ et $\mathcal{O}_c$, duals forts respectifs de $\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{O}'_c$. $\mathcal{S}'(\Gamma)$ est défini dans Schwartz [3]. Les espaces $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, sont définis page 77 (I). $\mathcal{D}'^m_c$ (resp. $\mathcal{E}'^m_c$) est l'espace $\mathcal{D}'^m$ (resp. $\mathcal{E}'^m$), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathcal{D}^m$ (resp. $\mathcal{E}^m$). Les espaces $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{K}^\infty$, sont définis pages 111 et 112 (I), l'espace $\mathcal{L}^p$ page 48 (II). Les espaces $(\mathcal{K}^1)^{(-m)}$ et $(\mathcal{L}^\infty_c)^{(m)}$ sont définis page 165 (II) et suivantes. La transformation de Fourier se note $\mathcal{F}$.

Les espaces $\mathcal{H}(E)$ sont définis page 49 (I) (pour $\mathcal{H} = \mathcal{D}'^m$) et 52 (I). Les espaces $\mathcal{H}(\overline{E})$ sont définis page 61 (I) (pour $\mathcal{H} = \mathcal{E}'^m$), page 63 (I) (pour $\mathcal{H} = \mathcal{D}^m$), page 48 (II) (pour $\mathcal{H} = L^p$ ou $\mathcal{L}^p$).

La notation $\mathcal{H}'_c(E; \mathfrak{C})$ est définie page 54 (II), la notation $\mathcal{H}(E_{\mathfrak{S}})$ page 54 (II),

On adopte la notation de la variable muette marquée par un $\wedge$ quand elle n'est écrite qu'une fois : $f(\hat{x})$ pour la fonction $x \to f(x)$, ou $S(\hat{x})$ pour la distribution $S_x \in \mathcal{D}'_x$ (pages 2 (II), 71 (I)).

La distribution définie par la masse unité au point a de R^n se note $\delta_{(a)}$, ou δ_{x-a}, ou $\delta(\hat{x} - a)$, ou $\varepsilon(a)$.

La symétrie par rapport à l'origine de R^n se note par ν; $\check{f}$, $\check{T}$, sont les symétriques de la fonction f, de la distribution T; elles sont définies par : $\check{f}(x) = f(-x)$; $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$. Si $\mathcal{H}$ est un espace de distributions, on notera par $\check{\mathcal{H}}$ l'espace de distributions obtenu par cette symétrie (sous disons : espace de distributions, ce qui veut dire qu'il a une topologie, obtenue à partir de celle de $\mathcal{H}$ par symétrie).

τ_h est la translation de R^n par le vecteur h; $\tau_h f$ est la translatée de la fonction f, définie par $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$; $\tau_h T$ est la translatée de la distribution T, définie par $(\tau_h T)(\varphi) = T(\tau_{-h}(\varphi))$.

Le symétrique ${}^sK$ d'un noyau K est défini page 90 (I).

Les notations $L \varepsilon M$, $\underset{i \in I}{\varepsilon}(L_i; M)$, sont définies page 18 (I).

$\mathcal{L}(E; F)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans F; $\mathcal{L}_c(E; F)$ (resp. $\mathcal{L}_b(E; F)$, resp. $\mathcal{L}_s(E; F)$) veut dire qu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes équilibrées compactes de E (resp. sur les parties bornées, resp. de la topologie de la convergence simple). $\mathcal{L}_\varepsilon(L'_c; M)$ est l'espace des applications linéaires continues de L'_c dans

M, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de L'.

La topologie affaiblie ou faible se note σ (voir page 199); voir à cette même page les références relatives aux topologies τ et γ.

Si E est un espace localement convexe, $\mathfrak{U}$ un voisinage de 0 disqué, $E_{\mathfrak{U}}$ est l'espace vectoriel quotient de E par le sous-espace vectoriel $\bigcap_{\lambda \neq 0} \lambda \mathfrak{U}$, muni de la norme pour laquelle l'image de $\mathfrak{U}$ est la boule unité. C'est aussi l'espace séparé normé, associé à E muni de la topologie définie par la seule semi-norme jauge (voir page 197) de $\mathfrak{U}$.

Son complété s'écrit, par abus de langage, $\hat{E}_{\mathfrak{U}}$, au lieu de $(E_{\mathfrak{U}})^{\wedge}$ (on ne risque pas de confondre avec $(\hat{E})_{\mathfrak{U}}$, car $\mathfrak{U}$ n'est pas un voisinage de 0 de $\hat{E}$, sauf si E est déjà complet).

Si maintenant A est une partie bornée convexe équilibrée de E, E_A est l'espace vectoriel engendré par A, muni de la norme jauge de A.

Si $A \subset B$, et si $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$, on a les applications linéaires continues canoniques :

$$E_A \to E_B \to E \to E_{\mathfrak{U}} \to E_{\mathfrak{V}}.$$

Si α est une forme bilinéaire séparément continue sur $L \times M$, $\tilde{\alpha}$ est l'application linéaire qu'elle définit de L dans M' : $\langle \tilde{\alpha}(l), m \rangle = \alpha(l, m)$. Alors ${}^t\tilde{\alpha}$ est sa transposée, application linéaire de M' dans L :

$$\langle l, {}^t\tilde{\alpha}(m) \rangle = \alpha(l, m).$$

Alors, si $\xi \in L \varepsilon M$, $\tilde{\xi}$ est l'application linéaire continue de L'_c dans M, et ${}^t\tilde{\xi}$ l'application linéaire continue de M'_c dans L, associées à ξ par le corollaire 2 de la proposition 4, page 34 (I).

Le complété d'un espace localement convexe E se note par $\widehat{E}$, son quasi-complété par $\hat{E}$.

Sur un produit tensoriel $E \otimes F$, la topologie $\otimes_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}}$ est définie page 10 (II), les topologies $\otimes_\lambda (\lambda = \iota, \gamma, \beta, \pi, \varepsilon)$ page 12 (II); les complétés (resp. quasi-complétés) de ces produits tensoriels topologiques se notent donc $E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$ (resp. $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$), $E \widehat{\otimes}_\lambda F$ (resp. $E \hat{\otimes}_\lambda F$).

L'application $\Gamma_{\mu, \lambda}$ est définie page 18 (II); l'application $\Gamma^0_{\mu, \varepsilon}$, page 22 (II); l'application $\Delta_{\varepsilon, \mu}$ page 31 (II); $\Gamma_{\varphi, \chi; \psi, \omega}$ page 35 (II), $\Delta_{\varphi, \chi; \psi, \omega}$ page 36 (II).

La notation $\vec{\varphi} \cdot_{\iota; \Lambda} \vec{T}$ est définie page 57 (II); $\vec{\varphi} \cdot_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}; \Lambda} \vec{T}$ (resp. $\vec{\varphi} \cdot_{\lambda; \Lambda} \vec{T}$) est l'image de $\vec{\varphi} \cdot_{\iota; \Lambda} \vec{T}$ dans $E \widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}} F$ (resp. $E \widehat{\otimes}_\lambda F$). $\vec{\varphi} \cdot_\pi \vec{T}$ est défini aussi page 41(II). $(\vec{\alpha} \vec{T})_\iota$ est défini page 127 (II); $(\vec{\alpha} \vec{T})_\lambda$ est défini page 128 (II); $(\vec{\alpha} \vec{T})_\pi$ est déjà défini page 121 (II).

$\vec{S} *_\iota \vec{T}$ est défini page 159 (II); $\vec{S} *_\lambda \vec{T}$ est défini page 160 (II); $\vec{S} *_\pi \vec{T}$ est déjà défini page 151.

$\vec{S}_x \otimes \otimes_\iota \vec{T}_y$ est défini page 145 (II); $\vec{S}_x \otimes \otimes_\mu \vec{T}_y$ page 146 (II).

Si $\cup$ est une application bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}$ (espaces de distributions), θ une application bilinéaires de $E \times F$ dans G, le symbole général $\vec{S} \cup_\theta \vec{T} \in \mathcal{L}(G)$ est défini page 9, pour $\vec{S} \in \mathcal{H}(E), \vec{T} \in \mathcal{K}(F)$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

BOURBAKI.

[1] *Espaces vectoriels topologiques.* Chapitres I et II, Paris, Hermann, 1953.

[2] *Espaces vectoriels topologiques.* Chapitres III, IV, V, Paris Hermann, 1955.

[3] *Topologie générale.* Chapitre X, Paris, Hermann, 1949.

[4] « Sur certains espaces vectoriels topologiques ». *Annales de l'Institut Fourier*, tome II, 1950, p. 5-16.

[5] *Topologie générale.* Chapitres I et II, Paris, Hermann, 1951.

[6] *Intégration.* Chapitres I, II, III, IV, Paris, Hermann, 1952.

BRUHAT.

[1] *Sur les représentations induites des groupes de Lie*, Paris, Gauthiers-Villars, 1956.

DIEUDONNÉ-SCHWARTZ.

[1] « La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$ ». *Annales de l'Institut Fourier*, tome I, 1949, p. 61-101.

GARNIR.

[1] « Sur la transformation de Laplace des distributions ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 234, 1952, p. 583-585.

GROTHENDIECK.

[1] « Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 230, 1950, p. 605-606.

[2] « Sur les espaces (F) et (DF) ». *Summa Brasiliensis Mathematicae*, volume 2, 1954, p. 57-123.

[3] « Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires ». *Annales de l'Institut Fourier*, tome IV, 1952, p. 73-112.

[4] « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires ». Préliminaires et chapitre I, *Mémoirs of the American Mathematical Society*, n° 16, 1955.

[5] « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires », Chapitre II, *Memoirs of the American Mathematical Society*, n° 16, 1955.

[6] « Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux ». *American Journal of Mathematics*, volume LXXIV, 1952, p. 168-186.

KOETHE.

[1] « Uber die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Raume ». *Mathematische Zeischrift*, volume 52, 1950, p. 627-630.

LIONS.

[1] « Problèmes aux limites en théorie des distributions ». *Acta Mathematica*, tome 94, 1955, p. 13-153.

DE RHAM.

[1] « *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques* ». Paris, Hermann, 1955.

SCHWARTZ.

[1] « Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles ». *Journal d'Analyse Mathématique*, Jérusalem, volume IV, 1954-55, p. 88-148.

[2] « *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* ». Séminaire, Institut Henri-Poincaré, 1953-54.

[3] « Transformation de Laplace des distributions ». *Communications du Séminaire Mathématique de l'Université de Lund*, tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz (1952), p. 196-206.

[4] « *Théorie des Distributions* », tome I, Paris, Hermann, 1957.

[5] « *Théorie des Distributions* », tome II, Paris, Hermann, 1951.

[6] « Théorie des noyaux ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950, volume I, p. 220-230.

[7] « Distributions semi-régulières et changements de variables ». *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XXXVI, 1957, p. 109-127.

[8] « Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts ». *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 227, 1948, p. 424-426.

SCHWARTZ-DIEUDONNÉ.

Voir Dieudonné-Schwartz.

TABLE DES MATIÈRES DU CHAPITRE II