ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JULIEN KRAVTCHENKO

ACHYUT APTÉ

Note sur la méthode d'intégration de Fourier des équations de la physique mathématique

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 329-358

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__329_0>

NOTE SUR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION DE FOURIER DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

par **Julien KRAVTCHENKO** et **Achyut APTÉ.**

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION
ÉNONCÉ DU PROBLÈME. RÉSULTATS ÉLÉMENTAIRES

§ 1. — La méthode de Fourier — qui repose sur le développement des inconnues en série de fonctions propres — est d'un usage fréquent et commode pour le calcul numérique des solutions de nombreux problèmes aux limites de la Physique mathématique et de la technique. Toutefois, beaucoup de traités — et même de mémoires originaux récents — qui en décrivent et utilisent le mécanisme formel en vue des applications à l'art de l'ingénieur, sont muets sur sa justification. Bien mieux, nous pourrions citer plusieurs publications récentes où l'on verrait d'implicites regrets de ne pouvoir légitimer en toute rigueur les procédés de Fourier. Or, la solution de cette difficulté est, en fait, connue depuis longtemps, tout au moins pour les étapes essentielles des raisonnements et dans les cas assez réguliers. Il faut convenir, cependant, que les moyens mis en œuvre à cette fin sont, parfois, d'un niveau assez élevé pour rebuter les non-spécialistes. C'est pourquoi, il nous a paru opportun de publier quelques remarques plus élémentaires — et dont plusieurs ne sont pas originales — propres à répandre et à vulgariser la démonstration de la validité du calcul de Fourier.

Ainsi, nous avons pu éviter de faire appel à la théorie des équations intégrales à noyau singulier — qui donnent cependant, la vraie clé de la solution de la difficulté signalée — et, à une exception près, à la théorie des séries doubles de Fourier, non absolument convergentes, dont le maniement est, parfois, délicat.

Nous avons été amenés à nous occuper de cette théorie à propos du problème de l'agitation des eaux portuaires à profondeur constante. La question se ramène au problème de Neumann, posé relativement à l'équation classique de la membrane. Dans le but de simplifier l'exposition, nous nous limiterons à cette équation très particulière de la Physique mathématique : nous nous bornerons même au cas où le domaine de définition D de la solution affecte la forme, particulièrement simple, d'un rectangle. Mais un lecteur averti n'éprouvera aucune peine à adapter nos raisonnements à des cas plus généraux. Au surplus, l'un de nous publiera prochainement une courte note, consacrée au problème des plaques rectangulaires, traité par la même méthode.

L'exemple que nous allons étudier nous paraît intéressant à un double point de vue.

D'une part, la tangente à la frontière du domaine D n'est pas continue. D'autre part, les conditions aux limites, données *a priori*, imposent à la solution des singularités à la frontière : on trouvera, peut-être là, une extension des résultats classiques, concernant la validité de la méthode de Fourier, à des cas singuliers, offrant un intérêt spécial aux yeux des techniciens.

Enfin, nous pensons que notre exposé de l'ensemble de la théorie est assez simple pour être utilisé comme canevas d'un cours d'analyse appliquée. L'un de nous a eu l'occasion d'enseigner à des élèves-ingénieurs la matière du présent mémoire. A l'exception du théorème de Liapounov-Korn et de quelques autres points de rigueur, l'exposé a été suivi — et même assimilé sans peine — par plusieurs auditeurs. Au reste, c'est à la demande de quelques techniciens que nous nous sommes décidés à publier un mémoire d'un niveau aussi élémentaire.

Nous avons eu le privilège de recevoir les conseils de M. M. Picone. Nous lui exprimons notre très vive gratitude pour les indications qu'il a bien voulu nous donner.

§ 2. — Énonçons le problème aux limites dont nous allons nous occuper. Soient : Oxy un système d'axes rectangulaires;

D, le rectangle; $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$; C, la frontière de D; α, β, deux constantes données, telles que: $0 < \alpha < \beta < a$; $f(x)$ une fonction donnée, définie pour: $\alpha < x < \beta$, mais qui, en vue des applications aux problèmes concrets, ne sera pas supposée partout finie; nous préciserons ultérieurement les propriétés de régularité, imposées à $f(x)$; k, une constante positive donnée.

Nous nous proposons de déterminer dans D une solution régulière $F(x, y)$ (c'est-à-dire finie et continue avec les dérivées des deux premiers ordres) de l'équation de la membrane :

$$\Delta F + k^2 F = 0, \tag{1}$$

assujettie à vérifier les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dF}{dn} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} a) & y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant x \leqslant a; \\ b) & y = b, \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \\ c) & x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b; \\ d) & x = a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b; \end{cases} \\ &\frac{dF}{dn} = f(x) \quad \text{pour} \quad y = 0, \quad \alpha < x < \beta, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où n désigne la normale extérieure à C. Dans toute la suite, ce problème sera noté problème I. L'objet de ce travail est de former une solution du problème I au moyen des développements en série de fonctions propres pour une classe étendue de données $f(x)$.

§ 3. — Rappelons quelques faits tout à fait élémentaires. Pour simplifier, nous admettrons que le paramètre donné k n'est égal à aucun terme $k_{m,n}$ de la suite des valeurs propres de (1), relativement à la donnée frontière $dF/dn = 0$.
Rappelons que l'on a, m et n étant des entiers :

$$k^2_{m,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{3}$$

A chaque terme $k_{m,n}$ de (3) correspond une fonction propre $\Phi_{m,n}(x, y)$, solution de :

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\Phi + k^2_{m,n}\Phi = 0, \quad \text{dans D}; \\ &\frac{d\Phi}{dn} = 0, \qquad\quad \text{sur C}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

donnée par le tableau :

$$
(5) \quad \begin{cases} \Phi_{0,0} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}; & \Phi_{m,0} = \sqrt{\dfrac{2}{ab}} \cos \dfrac{m\pi x}{a}; \\ \Phi_{0,n} = \sqrt{\dfrac{2}{ab}} \cos \dfrac{n\pi y}{b}; & \Phi_{m,n} = \dfrac{2}{\sqrt{ab}} \cos \dfrac{m\pi x}{a} \cos \dfrac{n\pi y}{b} \end{cases}
$$

§ 4. — La suite (5) est orthonormée et complète dans D. Soit [U], la classe des fonctions définies, continues et bornées dans D + C, avec leurs dérivées des deux premiers ordres, telles, de plus, que $du/dn = 0$ sur C. (A noter qu'il est possible d'atténuer ces conditions pour les dérivées du second ordre). On peut alors développer chaque $u \in [\mathrm{U}]$ en série de Bessel-Fourier :

$$
(6) \qquad u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \Phi_{m,n}(x, y),
$$

absolument et uniformément convergente sur D + C, et même dérivable terme à terme en x et y une fois, au moins. De plus :

$$
(7) \qquad c_{m,n} = \iint_{\mathrm{D}} u \, \Phi_{m,n} \, d\sigma,
$$

$d\sigma$ étant l'élément d'aire de D.

§ 5. — Il est bien connu que le développement (6) peut être valable pour des classes de fonctions plus vastes que [U]. En particulier, la dérivée normale de la fonction à développer peut n'être pas nulle sur C; mais la convergence de la série (6) est alors beaucoup plus faible que pour $u \in [\mathrm{U}]$ et (6) ne sera plus dérivable terme à terme. Si donc on calcule la solution du problème I au moyen des formules (6) et (7), il est indispensable de justifier, par une voie indirecte, que l'on a bien une représentation de cette solution : c'est là une difficulté bien connue de la théorie.

Il existe bien des énoncés, aujourd'hui classiques, qui garantissent l'existence des développements (6) pour de larges classes de fonctions $\mathrm{F}(x, y)$, définies dans D. Sans entrer dans les détails, nous allons rappeler l'usage qu'on peut faire des résultats de cette nature pour justifier, en toute rigueur, le calcul de la solution du problème I par la méthode de Fourier.

Supposons que pour une classe déterminée $[f]$ de fonctions $f(x)$, on ait réussi à démontrer l'existence et l'unicité de la solution F du problème. Admettons que l'on ait pu étudier, *a priori*, les propriétés de F et, en particulier, de justifier, pour cette fonction, l'ensemble des propriétés de régularité qui garantissent la validité de la représentation (6) de l'inconnue-série dont il y aura lieu de préciser le mode de convergence. Ceci fait, il suffira, par un procédé approprié, de calculer la suite des coefficients $c_{m,n}$ de F pour avoir une représentation de l'inconnue. Mais, de ce qui précède, résulte aussi un autre point capital; en gros, sauf pour $u \in [U]$, le développement (6) ne satisfera pas formellement aux conditions frontières (2), dès que $f(x) \neq 0$. La représentation utilisée de F sera donc impropre, en général, au calcul pratique des dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$, tout au moins, dans le voisinage de la frontière C. Or, ces dérivées ont une signification physique des plus importantes. Dans le cas du problème des seiches dans les ouvrages portuaires, à section rectangulaire et à profondeur constante, elles donnent le champ des vitesses dans la masse des eaux, enfermées dans le bassin et animées des oscillations sinusoïdales irrotationnelles. Il y a donc un intérêt majeur à disposer, dans certains cas, des formules susceptibles de donner $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$. Mais il ne faut pas perdre de vue que la connaissance d'une représentation du type (6) de $F(x, y)$ — même non dérivable terme à terme — offre déjà un grand intérêt, au point de vue pratique. Car F est proportionnelle à la dénivellation de la surface libre du liquide; c'est là une donnée essentielle pour l'étude de la sécurité des ouvrages portuaires et qui, dans beaucoup de cas, est la seule dont la détermination soit utile au technicien.

§ 6. — Aussi, au point de vue pratique, il faut distinguer deux problèmes.

Problème I *a* : Former une série convergente du type (6), de somme égale à $F(x, y)$, solution du problème I.

Problème I *b* : Donner une représentation de F du type (6), dérivable terme à terme, au moins une fois, en x et y.

Il va de soi qu'au point de vue pratique, la solution du second problème sera, en général, beaucoup plus laborieuse que celle du premier.

§ 7. — En général, les innombrables calculateurs n'ont guère recours à la théorie dont nous venons de rappeler les conclusions essentielles. Ils se bornent au calcul des coefficients (7), en utilisant, parfois, à cette fin, le procédé de la substitution directe de (6) dans (1). Le résultat donne bien une série du type (6), absolument et uniformément convergente sur D + C, mais dont les séries dérivées une fois — et *a fortiori* deux fois — en x et en y sont divergentes. Dans ces conditions, on ne peut vérifier, par substitution dans (1) de la série (6), que celle-ci est une solution de l'équation (1) et que (6) satisfait la condition frontière (2).

Nous nous proposons d'indiquer ci-après une méthode très élémentaire qui permet de vérifier *a posteriori* et en toute rigueur, que la série ainsi obtenue donne bien une représentation de la solution du problème I *a*, quoique cette représentation soit, en général, impropre au calcul des dérivées. Voici les étapes essentielles de nos raisonnements. Après avoir défini une classe $[f]$, assez régulière, de données $f(x)$, nous indiquons quelques propriétés *a priori* de la solution F correspondante. On en déduit aisément un mode de calcul des coefficients de Fourier à l'abri de tout reproche et qui, d'ailleurs, n'est, peut-être, pas nouveau. Nous vérifions, en utilisant quelques propriétés classiques de la fonction de Green et des potentiels de masses, qu'on a bien ainsi une représentation de la solution du problème I *a*.

Nous reprenons la question à propos du problème I *b*. En suivant une voie classique, nous transformons d'abord le problème I en un problème aux limites homogènes, mais portant sur l'équation (1) avec second nombre. Les méthodes précédemment décrites permettent alors de conclure.

Nous avons mis à profit un grand nombre de résultats classiques. Le grand traité de W. Smirnov (Cf. [1]) nous a été particulièrement utile ([1]). Signalons ainsi les références [2] et [3]. Nous nous bornerons à mentionner les énoncés classiques ainsi que ceux d'Apté, en cours de publication; nous

([1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, placée à la fin de l'article.

donnons des démonstrations plus explicites pour les résultats qui paraissent plus ou moins nouveaux. Dans le but d'être bref, nous omettons quelques calculs faciles mais longs.

Le chapitre II est consacré au rappel des quelques résultats indispensables. Les chapitres III et IV donnent respectivement les solutions des problèmes I a et I b.

CHAPITRE II

LEMMES PRÉLIMINAIRES. SOLUTIONS FORMELLES

§ 8. — La fonction donnée $f(x)$ (cf. (2)), sera, dans tout ce qui suit, supposée être de la forme :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{\nu}(\beta-x)^{\nu}}, \tag{8}$$

où ν est un nombre constant, donné, tel que $0 \leqslant \nu < \frac{1}{2}$ et où $\varphi(x)$ est une fonction bornée, analytique et régulière pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ (²). Nous dirons, pour abréger, que $f(x)$ est de la classe $[f]$.

Il serait aisé de remplacer les conditions de régularité ci-dessus par d'autres, moins restrictives. D'une part, on pourrait tolérer un nombre fini d'infinis, d'ordre ν, à l'intérieur de l'intervalle (α, β). D'autre part, l'ordre de l'infini pourrait n'être pas le même en α et en β. Enfin, au lieu de supposer $\varphi(x)$ analytique pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, il suffirait d'admettre que $\varphi(x)$ possède des dérivées bornées jusqu'au 3e ordre inclusivement. Mais nous nous en tiendrons, dans un but de simplicité, aux hypothèses ci-dessus qui paraissent largement suffisantes pour les besoins de la pratique courante; notons, toutefois, que toutes les conclusions de ce travail s'appliquent au cas où $f(x)$ se présente sous forme d'une somme d'éléments $\in [f]$.

(²) En fait, on peut tolérer en α et β une singularité plus forte : $\nu < 1$; $|f(x)|$ est alors intégrable sur (α, β) et cela suffit pour justifier la plupart des résultats qui suivent. Toutefois, si $\nu < \frac{1}{2}$, $f(x)$ est de carré intégrable. Dans ce cas, les démonstrations de convergence de certains développements trigonométriques deviennent élémentaires (cf. § 14). Pour cette raison, nous conservons l'hypothèse restrictive du texte.

Le cas particulier où $\nu = 0$, $\varphi(x) \equiv A = c^{te}$, est important pour les applications; on a alors : $f(x) \equiv A$.

Il sera commode d'introduire la fonction $\bar{f}(x)$, définie pour $0 \leqslant x \leqslant a$ au moyen de :

$$(8') \quad \begin{cases} \bar{f}(x) = 0, & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant x \leqslant a; \\ \bar{f}(x) = f(x), & \qquad\qquad \alpha < x < \beta. \end{cases}$$

Posons maintenant :

$$(9) \qquad f_1(x) = \int_\alpha^x f(x)\,dx, \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

On voit que $f_1(x)$ est bornée, continue au sens de Hölder avec l'exposant $(1 - \nu) > 1/2$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, analytique et régulière pour $\alpha < x < \beta$.

Nous commencerons par étudier *a priori* la solution F du problème I, correspondant à $f \in [f]$ — et dont nous postulons l'existence. En particulier, nous préciserons l'allure de F pour $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = \beta$. A cet effet, nous allons introduire quelques fonctions harmoniques auxiliaires.

§ 9. — Soit D_1 un domaine borné, simplement connexe, limité par une portion de $y = 0$ contenant à son intérieur le segment $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$. D_1 est tel que $D \in D_1$. Le cas échéant, on peut prendre $D \equiv D_1$. Soit C_1, la frontière de D_1; on choisira la portion de C_1, étrangère à l'axe Oy, de manière que toutes les propriétés de régularité énumérées ci-dessous soient valables. On pourra alors définir dans D_1 — et cela d'une infinité de façons — une fonction harmonique $\Phi(x, y)$ régulière dans $D_1 + C_1$, sauf sur l'axe $y = 0$, ou, on devra avoir :

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dn} = f(x) = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, & \text{pour} \quad \alpha < x < \beta; \\ \dfrac{d\Phi}{dn} = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, & \text{pour} \quad x \leqslant \alpha, \ x \geqslant \beta. \end{cases}$$

Observons que pour le moment nous n'avons besoin que de déterminer les propriétés locales de $\Phi(x, y)$ en les points $x = \alpha$, $y = 0$ et $x = \beta$, $y = 0$. On pourra, ultérieurement, expliciter cette fonction qu'on choisira de manière à rendre aussi simples que possibles les calculs numériques.

On construira $\Phi(x, y)$ à partir de la fonction $\Psi(x, y)$, harmonique dans D_1, vérifiant le long de $y=0$ (Cf. (8′) et (9)) les données frontières de Dirichlet :

$$(11)\quad \begin{cases} \Psi(x,\ 0) = f_1(\alpha) = 0, & \text{pour} \quad x \leqslant \alpha; \\ \Psi(x,\ 0) = f_1(x), & \text{pour} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta; \\ \Psi(\alpha,\ 0) = f_1(\beta), & \text{pour} \quad x \geqslant \beta. \end{cases}$$

Sur la portion restante de C_1, on se donnera les valeurs de Ψ de manière à ce que cette fonction y soit, par exemple, analytique et régulière. D'après cela, $\Psi(x, o)$ est höldérienne, d'exposent $1-\nu$ sur l'axe Ox, analytique et régulière pour $x<\alpha$, $\alpha<x<\beta$, $x>\beta$. On sait alors que $\Psi(x, y)$ est prolongeable analytiquement à travers chacune de ces portions de Ox; la fonction : $-\Phi(x, y)$, conjuguée de Ψ dans D_1, possède les mêmes propriétés et, en particulier, est höldérienne, d'exposent $1-\nu$ sur $y=0$ (Cf. [5]). Il s'en suit, d'abord, que pour $y=0$, $x<\alpha$, $\alpha<x<\beta$, $x>\beta$, les relations de Cauchy sont valables.
On a donc :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad \text{pour} \quad y=0,\ x<\alpha,\ \alpha<x<\beta,\ x>\beta.$$

D'après (9) et (11), Φ vérifie bien les conditions aux limites (10). Cherchons la nature de la singularité de Φ au point; $x=\beta$, $y=0$; il suffit pour cela de déterminer la singularité de sa conjuguée Ψ. Or, d'après (8) et (9), on a le développement :

$$f_1(x) = f_1(\beta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\beta - x)^{n+1-\nu},$$

convergent pour $\beta - x > 0$, assez petit, ou les a_n sont des constantes. Supposons, d'abord, que $a_0 \neq 0$, $\nu \neq 0$ et introduisons la fonction harmonique auxiliaire Ψ_1, définie, pour $y \geqslant 0$, dans le voisinage assez petit de $x=\beta$, $y=0$ au moyen du développement, convergent pour ρ petit :

$$\Psi_1(\rho,\ \theta) = f_1(\beta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^{n+1-\nu}\frac{\sin[(n+1-\nu)\theta]}{\sin[(n+1-\nu)\pi]},$$

ou on a posé :

$$\rho = \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2}; \qquad 0 \leqslant \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-\beta} \leqslant \pi, \qquad y \geqslant 0.$$

On voit que dans le voisinage de la singularité, Ψ_1 vérifie les conditions frontières :

$$\begin{aligned}&\Psi_1(\rho, 0) = f_1(\beta)\\ &\Psi_1(\rho, \pi) = f_1(x), \qquad x = \beta - \rho > 0\end{aligned}$$

identiques, d'après (11), à celles que vérifie $\Psi(x, y)$. Il s'en suit que $\Psi - \Psi_1$ est une fonction harmonique, continue en $x = \beta$, $y = 0$, nulle le long de $y = 0$, donc régulière dans un voisinage assez petit de ce point. Nous avons, par suite, le développement limité :

$$\Psi(x, y) = f_1(\beta) + \frac{a_0}{\sin[(1-\nu)\pi]}\rho^{1-\nu}\sin[(1-\nu)\theta] + A_1\rho\sin\theta + \rho^{2-\nu}U(\rho, \theta) + \rho^2V(\rho, \theta),$$

valable pour ρ assez petit et où : A est une constante; U et V sont des fonctions régulières dans le voisinage envisagé de la singularité. On en déduit aussitôt que dans celui-ci on a :

$$\text{(12)}\quad -\Phi(x, y) = \Phi(\beta, 0) + \frac{a_0}{\sin[(1-\nu)\pi]}\rho^{1-\nu}\cos[(1-\nu)\theta] + A_1\rho\cos\theta + \rho^{2-\nu}U_1(\rho, \theta) + \rho^2V_1(\rho, \theta),$$

où U_1 et V_1 sont encore des fonctions régulières. Bien entendu, l'allure de Φ dans le voisinage de $x = \alpha$, $y = 0$, est du même type. La discussion précédente est à retoucher si $\nu = 0$. On se reportera à [4] pour l'étude de ce cas, relativement élémentaire, sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

§ 10. — Les résultats du précédent paragraphe nous permettent déjà de transformer le problème I. Posons, en effet (Cf. [4]) :

$$\text{(13)}\qquad F = u + \Phi - \Phi_1$$

et :

$$\text{(14)}\quad \Phi_1(x, y) = p(x)\frac{y^2}{2b} + q(y)\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + r(y)\frac{x^2}{2a} - \left\{p'(0)x + [p'(a) - p'(0)]\frac{x^2}{2a}\right\}\frac{y^2}{2b}$$

avec :

$$(15)\quad \begin{cases} p(x) = \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=b}, & 0 \leqslant x \leqslant a; \\ q(y) = \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=0}; \quad r(y) = \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=a}, & 0 \leqslant y \leqslant b. \end{cases}$$

D'après la manière même dont on a défini la fonction harmonique Φ, les fonctions $p(x)$, $q(y)$ et $r(y)$ sont analytiques et régulières sur leurs intervalles de définition. En écrivant que $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$ en les sommets de D — où Φ est holomorphe — on voit que (cf. (10)) :

$$(15')\quad q'(0) = r'(0) = 0; \qquad q'(b) = p'(0); \qquad r'(b) = p'(a).$$

Un calcul facile montre alors que $u(x, y)$, définie par (13), est une solution, régulière dans D, de l'équation non homogène de la membrane :

$$(16)\qquad \Delta u + k^2 u = \Delta \Phi_1 + k^2(\Phi_1 - \Phi) = \mathrm{R}(x, y),$$

où $\mathrm{R}(x, y)$ est une fonction connue, définie, continue sur $\mathrm{D} + \mathrm{C}$ analytique et régulière sur $\mathrm{D} + \mathrm{C}$, sauf pour $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = \beta$, où ses singularités sont données par (12).

De plus, il résulte de (10), (13), (14) (15) et (15′) que :

$$(17)\qquad \frac{du}{dn} = 0 \qquad \text{sur} \qquad \mathrm{C}.$$

Ainsi, le problème I se trouve ramené à la solution d'un problème aux conditions limites homogènes, portant sur une équation avec second membre.

§ 11. — Nous sommes maintenant en mesure de préciser la nature des singularités de F. Nous renvoyons à [3] pour la démonstration des faits suivants. La solution $\mathrm{F}(x, y)$ du problème I est analytique et régulière dans $\mathrm{D} + \mathrm{C}$ si $f \in [f]$, sauf pour $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = 0$. Les singularités de F en ces points sont du même type que les singularités de la fonction harmonique Φ, introduite au § 9; la démonstration de ce dernier point repose sur l'emploi d'une formule de Vekoua (Cf. [6]). Il en résulte qu'on peut appliquer à F et à u (Cf. (13)) les transformations de Green-Ostrogradsky, dont nous aurons à faire un constant usage; on trouvera dans [7] une démonstration très simple de cette propriété, d'ailleurs élémentaire, dans le cas où $\nu = 0$; l'extension au cas $\nu \neq 0$ est aisée.

Supposons alors que l'on ait démontré l'existence d'une solution régulière du problème Ia; à noter que la démonstration de l'unicité est immédiate et le lecteur pourra, au surplus, la trouver dans [4]. De (1) et de (4) on tire, en appliquant l'identité de Green, la relation :

$$(k^2 - k_{m,n}^2)\, d_{m,n} + \int_C \left(\Phi_{m,n} \frac{dF}{dn} - F \frac{d\Phi_{m,n}}{dn} \right) ds = 0,$$

où $d_{m,n}$ est le coefficient de Fourier de F, défini par (7) et où $ds > 0$ est l'élément de longueur de C, orienté, par exemple, dans le sens positif. D'après (2) et (4), cela donne :

$$(18) \qquad \begin{cases} d_{m,n} = \displaystyle\iint_D F\Phi_{m,n}\, d\sigma = \frac{\gamma_{m,n}}{k_{m,n}^2 - k^2}; \\ F(x, y) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{m,n}\Phi_{m,n}(x, y), \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$(19) \qquad \gamma_{m,n} = \int_\alpha^\beta f(x)\,\Phi_{m,n}(x, 0)\, dx.$$

D'après cela, les coefficients de Fourier de F sont connus. Il s'en suit que la série (18) donne bien une solution du problème I a chaque fois que la série est convergente.

La solution formelle du problème I b est analogue. En combinant les équations (4) et (16), comme on l'a fait ci-dessus, on trouve, pour coefficient $c_{m,n}$ de Fourier de u;

$$(20) \qquad c_{m,n} = \frac{\delta_{m,n}}{k^2 - k_{m,n}^2},$$

avec :

$$(21) \qquad \delta_{m,n} = \iint_D R\Phi_{m,n}\, d\sigma.$$

A noter que l'on retrouverait la formule (20) en substituant directement dans (16) les développements formels de Fourier de u et de R. Ce procédé est couramment employé dans la technique; mais il suppose, sous cette forme, que la série

$\sum_m \sum_n \delta_{m,n} \Phi_{m,n}$ converge ([3]) et que la série (18) est dérivable deux fois terme à terme. Par contre, le raisonnement ci-dessus justifie (20) sous la seule réserve de l'existence d'une solution de (16) assez régulière. Et on sait, *a priori*, que la série correspondante (6) est absolument et uniformément convergente dans $D + C$.

§ 12. — Nous allons maintenant étudier la convergence des séries formelles, obtenues au précédent paragraphe. D'après (5), (8′) et (19), $\gamma_{m,n}$ ne diffère que par un facteur constant de γ'_m :

$$(19') \quad \gamma'_m = \int_\alpha^\beta f(x) \cos \frac{m\pi x}{a} dx = \int_0^a \bar{f}(x) \cos \frac{m\pi x}{a} dx.$$

D'après un résultat classique de la théorie des séries de Fourier (Cf. [9]), γ'_m est de l'ordre de $1/m^{1-\nu}$, pour tout élément de $[f]$; cette proposition est même valable sous la seule réserve que $\varphi(x)$ soit à variation bornée sur (α, β). Mais, pour rester fidèle à l'esprit de cet exposé, nous allons donner, de ce fait, une démonstration entièrement élémentaire, fondée sur cette conséquence évidente des hypothèses de régularité, faites relativement à $\varphi(x)$ (Cf. § 8) : il existe, pour tout $f \in [f]$, une longueur fixe a_1, ne dépendant que de f, telle que $f(x)$ garde un signe constant et demeure strictement monotone sur chacun des segments $(\alpha, \alpha + a_1)$, $(\beta - a_1, \beta)$; on peut toujours supposer que $a_1 < \frac{\beta - \alpha}{2}$. Si m est assez grand pour que : $\frac{a}{m} \leqslant a_1$, on aura :

$$\gamma'_m = \int_\alpha^{\alpha + \frac{a}{m}} + \int_{\alpha + \frac{a}{m}}^{\alpha + a_1} + \int_{\alpha + a_1}^{\beta - a_1} + \int_{\beta - a_1}^{\beta - \frac{a}{m}} + \int_{\beta - \frac{a}{m}}^{\beta} = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{I}_i.$$

Comme $|f(x)|$ et $|f'(x)|$ sont bornées par une constante sur $(\alpha + a_1, \beta - a_1)$, il vient d'abord :

$$|\mathrm{I}_3| \leqslant \frac{\mathrm{C^{te}}}{m}.$$

([3]) Il est à noter que cette série converge effectivement sur D; mais la démonstration de ce fait dépasse les moyens d'analyse dont nous nous autorisons à faire usage (cf. [9], p. 711). Bien entendu, cette convergence n'est pas absolue en général.

On peut maintenant, sans restreindre la généralité, supposer que $f(x)$ est positive et décroissante sur $\alpha+\frac{a}{m}\leqslant x\leqslant\alpha+a_1$. Le second théorème de la moyenne donne alors (cf. [11]) :

$$\mathrm{I}_2=\frac{a}{\pi m}f\left(\alpha+\frac{a}{m}\right)\left(\sin\frac{m\pi x}{a}\right)_{\alpha+\frac{a}{m}}^{\xi},\qquad \alpha+\frac{a}{m}\leqslant\xi\leqslant a_1.$$

Compte tenu de (8), on en déduit :

$$|\mathrm{I}_2|\leqslant\frac{\mathrm{C^{te}}}{m^{1-\nu}}.$$

Si on le désire, on peut s'affranchir de l'emploi du théorème de la moyenne, en démontrant directement, par exemple, un résultat équivalent. Il suffirait pour cela de partager $\left(\alpha+\frac{a}{m},\ \alpha+a_1\right)$ en n segments partiels, de longueur a/m — sauf, en général, pour le premier et le dernier — tels que sur chacun d'eux, $\cos\frac{m\pi x}{a}$ garde un signe constant et ait des signes opposés sur deux segments consécutifs. Si α_p est l'abscisse d'origine du $p^{\text{ième}}$ segment, on aura :

$$\mathrm{I}_2=\sum_1^n \mathrm{J}_p$$

avec :

$$\mathrm{J}_p=\int_{\alpha_p}^{\alpha_p+\frac{a}{m}}f(x)\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx\qquad p=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,$$

les expressions de J_1 et J_n étant, en général, différentes et faciles à former. Il est clair alors que $\mathrm{J}_p\mathrm{J}_{p+1}<0$, $p=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Comme $f(x)$ est décroissante, on aura :

$$f(\alpha_p)>f\left(\alpha_p+\frac{2a}{m}\right)$$

et :

$$|\mathrm{J}_p+\mathrm{J}_{p+1}|\leqslant\frac{2a}{\pi m}\left[f(\alpha_p)-f\left(\alpha_p+\frac{2a}{m}\right)\right],$$

d'où la majoration ci-dessus de I_2. Il est clair que I_4 se majore d'une manière analogue.

On a enfin :

$$I_1 = \left[\frac{(x-\alpha)^{1-\nu}}{1-\nu}\cos\frac{m\pi x}{a}\varphi_1(x)\right]_\alpha^{\alpha+\frac{a}{m}}$$
$$+\frac{\pi m}{a(1-\nu)}\int_\alpha^{\alpha+\frac{a}{m}}(x-\alpha)^{1-\nu}\varphi_1(x)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$
$$-\frac{1}{1-\nu}\int_\alpha^{\alpha+\frac{a}{m}}(x-\alpha)^{1-\nu}\varphi_1'(x)\cos\frac{m\pi x}{a}dx,$$

où on a posé

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{(\beta-x)^\nu}.$$

D'après cela, $\varphi_1(x)$ est une fonction régulière pour $\alpha \leqslant x \leqslant \frac{a}{m} + \alpha$, en sorte que le dernier terme du second membre est majoré, en valeur absolue, par $c^{te}/m^{2-\nu}$; le premier terme se majore par $c^{te}/m^{1-\nu}$. Enfin, on a :

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+\frac{a}{m}}(x-\alpha)^{1-\nu}\varphi_1(x)\sin\frac{m\pi x}{a}dx\right| \leqslant \frac{a^{1-\nu}}{m^{1-\nu}}\int_\alpha^{\alpha+\frac{a}{m}}|\varphi_1(x)|\,dx$$
$$\leqslant \frac{a^{2-\nu}}{m^{2-\nu}}\operatorname{Max}|\varphi_1(x)|.$$

De l'ensemble des résultats qui précèdent, on déduit que :

$$|I_1| \leqslant \frac{c^{te}}{m^{1-\nu}},$$

où la c^{te} ne dépend encore que de $f(x)$. Le terme I_5 vérifie, évidemment, une inégalité analogue. Ainsi, on a, en définitive :

$$|\gamma_{m,n}| \leqslant \frac{A}{m^{1-\nu}}, \tag{22}$$

ou A est une constante, ne dépendant que de $f(x)$. D'après (3), (18) et (19), on voit que pour $n \geqslant \frac{kab}{\pi\sqrt{a^2-b^2}}$ et $m \neq 0$:

$$|d_{m,n}| \leqslant \frac{Aa^2}{\pi^2 m^{1-\nu}(m^2+n^2)}, \tag{22'}$$

si $a > b$; si $a < b$, il y aurait lieu de remplacer au numérateur a par b et supposer m assez grand. L'extension au cas où m (ou n) serait nul est immédiate. La règle intégrale de Cauchy montre alors que la série de Bessel-Fourier (18) de F est absolument convergente; mais ses dérivées formelles en x et y ne le sont déjà plus.

§ 13. — Passons à l'étude de la série (6) donnant u, dont les coefficients sont donnés par (20) et (21). On observera à cet effet que la fonction $R(x, y)$, définie par (16), est régulière dans $D + C$, sauf pour $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = \beta$. En ces points singuliers, l'allure de R est donnée par (12); on voit donc que $\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|^2$, $\left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|^2$ et $\left|\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}\right|$ sont intégrables sur $D + C$. Il s'en suit que (Cf. (21)) :

$$(23) \qquad |\delta_{m,n}| \leqslant \frac{B}{mn}, \qquad m \geqslant 1, \qquad n \geqslant 1,$$

où la constante B ne dépend que de R, c'est-à-dire de f ; de (20) il résulte alors que si $a > b$, on a :

$$(24) \qquad |c_{m,n}| \leqslant \frac{Ba^2}{\pi^2 mn(m^2 + n^2)}.$$

La série (6) correspondante est donc absolument et uniformément convergente sur $D + C$ et dérivable terme à terme, au moins, une fois, en x et en y.

§ 14. — Rappelons quelques propriétés classiques des séries simples de Fourier, d'un fréquent usage dans les applications.

Reprenons la fonction $\bar{f}(x)$, définie par (8). Elle a une dérivée finie partout sur $(0, a)$, sauf pour $x = \alpha$ et $x = \beta$; elle est absolument intégrable et, même, de carré intégrable sur son intervalle de définition; enfin : $\bar{f}(0) = \bar{f}(a)$. Il en résulte que la série de Fourier en cosinus de $\bar{f}(x)$ converge vers $\bar{f}(x)$ pour tout $x \in (0, a)$, sauf pour $x = \alpha$ et $x = \beta$. Compte tenu de (19) et (19') on a donc

$$(25) \qquad \bar{f}(x) = \frac{\gamma'_0}{a} + \frac{2}{a}\sum_{1}^{\infty} \gamma'_m \cos\frac{m\pi x}{a}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

sauf pour $x = \alpha$, $x = \beta$. La primitive $\int_0^x \bar{f}(x)\,dx$ s'obtient en intégrant terme à terme le second membre de (25). Enfin, on démontre élémentairement que si une fonction, définie sur $(0, a)$, a les mêmes coefficients de Fourier que $\overline{f}(x)$, elle coïncide avec $\overline{f}(x)$ en chaque point de continuité de $\overline{f}(x)$.

§ 15. — Nous allons maintenant construire un module de continuité sur D + C pour la somme de la série de Bessel-Fourier, définie au moyen des formules (18) et (19). Partons des inégalités évidentes ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant x' \leqslant a$, $0 \leqslant y' \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant b$) :

$$\left|\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} - \cos\frac{m\pi x'}{a}\cos\frac{n\pi y'}{b}\right| \leqslant \left|\cos\frac{m\pi x}{a} - \cos\frac{m\pi x'}{a}\right| + \left|\cos\frac{n\pi y}{b} - \cos\frac{n\pi y'}{b}\right|$$

et :

$$\left|\cos\frac{m\pi x}{a} - \cos\frac{m\pi x'}{a}\right| \leqslant \pi m\left|\frac{x-x'}{a}\right|.$$

Fixons x, x', y et y', $x \neq x'$, $y \neq y'$. Soient : λ, un nombre réel, tel que $0 < \lambda < \nu$; m_1 et n_1, les plus grands nombres entiers vérifiant les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\left|\dfrac{x-x'}{a}\right|^{\lambda} \leqslant 1; \\ n_1\left|\dfrac{y-y'}{b}\right|^{\lambda} \leqslant 1. \end{array}\right.$$

On a alors :

$$\text{(26)} \qquad \left\{\begin{array}{ll} \pi m\left|\dfrac{x-x'}{a}\right| \leqslant \pi\left|\dfrac{x-x'}{a}\right|^{1-\lambda}, & m \leqslant m_1; \\ \pi n\left|\dfrac{y-y'}{b}\right| \leqslant \pi\left|\dfrac{y-y'}{b}\right|^{1-\lambda}, & n \leqslant n_1. \end{array}\right.$$

Posons :

$$\text{(27)} \qquad \left\{\begin{array}{l} F = F_1 + F_2; \\ F_1 = \sum\limits_{0}^{m_1}\sum\limits_{0}^{n_1} d_{m,n}\Phi_{m,n}; \\ F_2 = \sum\limits_{m_1+1}^{\infty}\sum\limits_{n_1+1}^{\infty} d_{m,n}\Phi_{m,n}. \end{array}\right.$$

D'après (22′) (26) (27), ainsi que les inégalités du début de ce paragraphe, on peut écrire :

$$(28)\qquad |F_1(x,y)-F_1(x',y')| \leqslant \left(\sum_0^{m_1}\sum_0^{n_1}|d_{m,n}|\right)\left[\left|\frac{x-x'}{a}\right|^{1-\lambda} + \left|\frac{y-y'}{b}\right|^{1-\lambda}\right],$$

la somme double du second membre étant majorée par une C^{te}, ne dépendant que de f. D'un autre côté, M étant une C^{te}, ne dépendant que de f, on démontre (au moyen de la règle de Cauchy, par exemple) que (Cf. (22′)) :

$$|F_2(x,\ y)| \leqslant \sum_{m_1+1}^{\infty}\ \sum_{n_1+1}^{\infty}|d_{m,n}| \leqslant \frac{M}{(1+m_1)^{1-\nu}} + \frac{M}{(1+n_1)^{1-\nu}}.$$

Or, d'après la définition même des nombres m_1 et n_1, on a :

$$\frac{1}{m_1+1} \leqslant \left|\frac{x-x'}{a}\right|^{\lambda}; \qquad \frac{1}{n_1+1} \leqslant \left|\frac{y-y'}{a}\right|^{\lambda}.$$

En comparant les deux dernières inégalités, il vient :

$$(29)\quad |F_2(x,y)-F_2(x',y')| \leqslant 2M\left[\left|\frac{x-x'}{a}\right|^{\lambda(1-\nu)} + \left|\frac{y-y'}{b}\right|^{\lambda(1-\nu)}\right].$$

L'ensemble des inégalités (26), (28) et (29) entraîne, compte tenu des équations de définition (18) et (27) :

$$(30)\quad |F(x,\ y)-F(x',\ y')| \leqslant C^{te}\left[\left|\frac{x-x'}{a}\right|^{\lambda(1-\nu)} + \left|\frac{y-y'}{b}\right|^{\lambda(1-\nu)}\right],$$

la C^{te} ne dépendant que de $f(x)$. On adaptera aisément les raisonnements au cas particulier : $x = x'$ où $y = y'$.

On démontre immédiatement l'inégalité :

$$x^{\lambda} + y^{\lambda} \leqslant 2(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$

où x et y sont des nombres positifs quelconques. Appelons alors P et Q, les points de coordonnées respectives x, y, et x' y'.

L'inégalité (30) peut s'écrire :

$$(31)\qquad |F(P)-F(Q)| \leqslant C^{te}\,PQ^{\lambda(1-\nu)},$$

où la C^{te} ne dépend encore que de $f(x)$. Ainsi, la fonction F vérifie une condition de Hölder, d'exposant $\lambda(1-\nu)$ pour tout couple de points P et $Q \in D + C$.

§ 16. — Rappelons maintenant les résultats classiques de Liapounov-Korn. Soit la fonction $F(x, y)$, somme de la série de Bessel-Fourier, définie au moyen des formules (18) et (19); envisageons-la comme une densité de masse, au point $P(x, y)$ de $D + C$. Soit W, le potentiel logarithmique, créé par ces masses dans le plan :

$$W(x, y) = W(P) = \iint_D F(Q) \log \frac{1}{PQ} d\sigma_Q, \tag{32}$$

$d\sigma_Q$ étant l'élément d'aire au point courant Q. Alors, on a les énoncés suivants, valables chaque fois que $F(x, y)$ possède les propriétés de régularité que nous lui avons imposées.

1° Le potentiel W, défini par (32) possède des dérivées premières dans tout le plan, continues au sens de Hölder, données par la formule de la dérivation sous le signe somme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \iint_D F(Q) \frac{\partial}{\partial x}\left[\log \frac{1}{PQ}\right] d\sigma_Q; \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \iint_D F(Q) \frac{\partial}{\partial y}\left[\log \frac{1}{PQ}\right] d\sigma_Q. \end{aligned} \tag{33}$$

A noter que la validité de cet énoncé est assurée moyennant des hypothèses moins restrictives; il suffit que $|F|$ soit borné et intégrable dans $D + C$.

2° Le potentiel W possède dans D des dérivées secondes et vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta W = -2\pi F(P). \tag{34}$$

A l'intention d'un lecteur peu familiarisé avec la théorie, rappelons que la propriété précédente découle essentiellement de l'hypothèse de la continuité höldérienne de la densité F; cela suffit pour les applications courantes, mais on peut remarquer que l'hypothèse en cause peut être remplacée par des conditions moins restrictives (Cf. [8]).

§ 17. — Pour en finir avec ces préliminaires, disons quelques mots au sujet de la fonction de Green du rectangle, relative au problème harmonique de Neumann. En adoptant les notations du § 15, rappelons qu'on peut définir dans le rectangle $D + C$ une fonction $G(P, Q)$, $P, Q \in D + C$, possédant les propriétés suivantes :

a) $G(P, Q) = G(Q, P)$. *b*) envisagée comme fonction de Q, G (P, Q) est harmonique et régulière dans D + C, sauf au point P dans le voisinage duquel elle est de la forme :

$$G(P, Q) = \log \frac{1}{PQ} + g(P, Q)$$

où $g(P, Q)$ est harmonique et régulière dans ce voisinage.

c) G(P, Q) vérifie la condition frontière :

$$\frac{dG}{dn} = -\frac{\pi}{a+b} \qquad \text{en P sur C.} \tag{35}$$

Dans le cas du rectangle, la fonction G a été, rappelons-le, construite effectivement. Il aurait été, peut-être, plus simple, au point de vue analytique, d'utiliser la fonction de Klein relative à l'équation de Laplace. Mais cela offrirait l'inconvénient d'avoir recours à des notions moins courantes ([4]).

Des propriétés précédentes de G(P, Q), il résulte que l'expression :

$$W_1(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_D G(P, Q)\, F(Q)\, d\sigma_Q \tag{36}$$

se comporte comme le potentiel W(P), défini par (32); les théorèmes de Korn-Liapounov s'appliquent à (36). On pourra donc former $\frac{\partial W_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial W_1}{\partial y}$ sur D + C par simple dérivation sous le signe somme (cf. (33)); les dérivées secondes de W_1 existent, sont continues dans D et y vérifient l'équation analogue à (34) :

$$\Delta W_1(P) = -F(P). \tag{37}$$

Soit maintenant V(P), une fonction harmonique et régulière sur D + C. On sait qu'alors :

$$\int_C \frac{dV}{dn}\, ds = 0$$

et, à une constante près :

$$V(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C G(P, Q) \left(\frac{dV}{dn}\right)_Q ds_Q.$$

L'extension des résultats précédents à des cas plus généraux, où V(P) admet seulement une dérivée normale régulièrement continue (Cf.(1), p. 607) est bien connue. Au prix d'une discussion classique, mais fastidieuse, nous avons pu étendre ce

([4]) Il y a dans cette théorie quelques points assez délicats, élucidés par M. J. Hadamard (Cf. [10]).

résultat à un cas moins banal — à notre connaissance, du moins — ou la donnée frontière présente des singularités du type (8).

Introduisons l'expression définie à une constante près :

$$W_2(P) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta G(P;\, x', 0)\, f(x')\, dx'. \tag{38}$$

On a alors les propriétés suivantes : $W_2(P)$ est une fonction harmonique et régulière sur $D + C$, sauf pour $y = 0, x = \alpha$ et $x = \beta$, continue sur $D + C$ au sens de Hölder, d'exposant $1 - \nu - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitrairement petit) qui vérifie les conditions frontières (2) pour tout $f \in [f]$ assujetti à la condition supplémentaire (Cf. (9)) :

$$\int_C \frac{dW_2}{dn}\, ds = f_1(\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0. \tag{39}$$

Ainsi, les propriétés ci-dessus de W_2 (P) ne sont valables que pour une classe particulière de $f \in [f]$ (cf. (39)). Observons que moyennant (39), la solution éventuelle F du problème I vérifie les conditions supplémentaires suivantes :

$$\tag{39'} \left\{ \begin{aligned} &\iint_D F(P)\, d\sigma_P = 0; \\ &\gamma_{0,0} = d_{0,0} = 0 \\ &\int_C F(P)\, ds_P = 0. \end{aligned} \right.$$

La première résulte de l'identité de Green, de (1) et de (39) :

$$\iint_D \Delta F(P)\, d\sigma_P = \int_C \frac{dF}{dn}\, ds_P = -k^2 \iint_D F(P)\, d\sigma_P.$$

Les deux autres sont des conséquences immédiates de (5), (18) (19) et (39'). Inversement, si F vérifie l'une des conditions (39'), elle satisfait aussi (39).

Il faut convenir que les matières traitées au cours des paragraphes 16 et 17 sont beaucoup moins élémentaires que le reste de ce mémoire. La démonstration des théorèmes de Korn-Liapounov est longue et délicate; il en est de même de l'étude du second membre de (38) dans le voisinage du segment $y = 0$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Mais il ne semble pas que l'on puisse se passer des résultats précités si on veut utiliser les propriétés des potentiels.

CHAPITRE III

SOLUTION DU PROBLÈME I *a*.

§ 18. — Nous allons maintenant démontrer que la série de Fourier, définie par (18) et (19), donne effectivement la solution du problème I *a*. Voici les étapes du raisonnement. En nous inspirant d'une méthode introduite par E. Picard (et présentée avec beaucoup de clarté et de détails par Smirnov Cf. [1]) — il y a une cinquantaine d'années — nous commencerons par remplacer l'équation (1) et la condition frontière (2) par une équation intégrale unique. Nous vérifierons, en second lieu, que la représentation (18) de la fonction $F(x, y)$ est une solution de cette équation intégrale. Nous montrerons ensuite que cette solution F peut être mise sous une forme différente; cette deuxième représentation de F est bien une solution de (1) en chaque point $P \in D$, vérifiant les conditions frontières (2). Le théorème que nous avions en vue sera ainsi démontré.

§ 19. — Rappelons d'abord une formule connue, dont la démonstration est élémentaire. Soient: $P(x, y)$, un point de D; $Q(x', y')$, un point parcourant $D + C$; $U(P) = U(x, y)$, une fonction définie sur $D + C$, assez régulière pour qu'on puisse lui appliquer la transformation de Green-Ostrogradsky (à noter que d'après les résultats du § 11, c'est le cas de la représentation présumée (18) et (19) de la solution du problème I*a*); D(P), un cercle centré sur $P \in D$; C(P), la frontière de D(P). Utilisons alors le fait que, d'après sa définition même (Cf. § 17), $G(P, Q) = G(x, y; x', y')$ est régulière dans $D - D(P)$. Comme $\Delta G_Q = 0$, on a, en tenant compte de (35) et en appliquant la formule de Green:

$$\iint_{D-D(P)} G(P, Q)\Delta U(Q)\, d\sigma_Q = \int_C G(P, Q)\left(\frac{dU}{dn}\right)_Q ds_Q$$
$$+\frac{\pi}{a+b}\int_C U(Q)ds_Q + \int_{C(P)}\left[G(P, Q)\left(\frac{dU}{dn}\right)_Q - \left(\frac{dG}{dn}\right)_Q U(Q)\right]ds_Q,$$

où on a noté par ds_{Q} l'élément d'arc de C et de C(P) au point courant Q. En faisant tendre vers zéro le rayon de D(P), on trouve, au moyen des raisonnements classiques :

$$(40)\quad \mathrm{U}(x, y) = \mathrm{U}(\mathrm{P}) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\Delta\mathrm{U}(\mathrm{Q})\, d\sigma_{\mathrm{Q}} + \frac{1}{2(a+b)}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{U}(\mathrm{Q}) ds_{\mathrm{Q}} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\left(\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right)_{\mathrm{Q}} ds_{\mathrm{Q}}.$$

Faisons, en particulier, dans (40) : $\mathrm{U} \equiv \Phi_{m,n}$; d'après (4), on retrouve la relation classique, pour $\Phi_{m,n} \neq \Phi_{0,0}$:

$$(41)\qquad \Phi_{m,n}(\mathrm{P}) = \frac{k_{m,n}^2}{2\pi}\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\Phi_{m,n}(\mathrm{Q})\, d\sigma_{\mathrm{Q}}.$$

Si $\Phi_{m,n} \equiv \Phi_{0,0}$, (40) se réduit à une identité banale.

§ 20. — Ceci posé, faisons dans (40) : $\mathrm{U} = \mathrm{F}$, F étant la solution régulière du problème I a, dont nous admettons l'existence. Supposons d'abord, que la donnée frontière f vérifie la condition (39); comme nous le verrons plus loin, le cas général se ramène aisément à ce cas particulier; il vient, en tenant compte de (1), (2), (36) (37) (39) et (39') :

$$(42)\quad \mathrm{F}(\mathrm{P}) = \mathrm{F}(x, y) = \frac{k^2}{2\pi}\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\mathrm{F}(\mathrm{Q})\, d\sigma_{\mathrm{Q}} + \frac{1}{2\pi}\int^{\beta} \mathrm{G}(\mathrm{P}, x', 0) f(x')\, dx' = k^2\mathrm{W}_1(\mathrm{P}) + \mathrm{W}_2(\mathrm{P}).$$

Ainsi, dans le cas particulier envisagé, toute solution régulière du problème Ia est aussi solution de l'équation intégrale (42). Nous allons maintenant montrer que la représentation présumée de F(x, y), donnée par (18) et (19), vérifie encore (42). Pour cela, il suffit de constater que les coefficients de Fourier du second membre de (42) — où, au préalable, on aura remplacé F(x, y) par la série (18) — sont donnés par (18) et (19). Mais la série (18) est, comme on l'a vu, absolument et uniformément convergente sur D + C, donc intégrable terme à terme sur ce domaine.

Compte tenu de (18), de (36) de (39'$_2$) et de (41), on a donc :

$$\mathrm{W}_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{m,n}}{k_{m,n}^2}\Phi_{m,n},$$

la série du second membre étant, bien entendu, absolument et uniformément convergente; ici, $d_{0,0} = 0$.

Calculons maintenant le coefficient de Fourier de $W_2(P)$. En utilisant la symétrie en P et Q de $G(P, Q)$ et les relations (19) et (41), nous avons, pour $\Phi_{m,n} \neq \Phi_{0,0}$

$$\iint_D W_2(P)\,\Phi_{m,n}(P)\,d\sigma_P = \int_\alpha^\beta f(x')\,dx' \iint_D \frac{G(P\,; x', 0)}{2\pi}\Phi_{m,n}(P)\,d\sigma_P$$
$$= \frac{1}{k^2_{m,n}} \int_\alpha^\beta f(x')\,\Phi_{m,n}(x', 0)\,dx' = \frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}.$$

L'ensemble des relations précédentes prouve que le coefficient de Fourier, relatif à $\Phi_{m,n}$ du second membre de (42) est (Cf. (18)) :

$$\frac{d_{m,n}k^2 + \gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}} = d_{m,n}.$$

Il est donc égal au coefficient correspondant de (18), ce qui démontre notre assertion. En passant, notons que les formules (18) et (19) sont, d'après le calcul précédent, une conséquence directe de (42). Mais notre but est moins d'indiquer la voie la plus rapide pour résoudre le problème I *a* que de justifier les méthodes formelles des calculateurs.

§ 21. — De ce qui précède, résulte cette conséquence capitale; le second membre de (42) donne donc une nouvelle représentation de la fonction $F(x, y)$, définie par (18) et (19) et satisfaisant à (39), valable dans D, donc dans D + C, puisque les deux représentations en cause sont continues sur D + C. Nous allons nous en servir pour démontrer la réciproque du théorème précédent, à savoir que la solution de (42) que nous avons formée, vérifie l'équation (1) en chaque point $P \in D$. En effet, la fonction W_1, définie par (36), possède, comme on l'a rappelé au § 17, les propriétés d'un potentiel de masses, répandues sur D + C, de densité $F(x, y)$, höldérienne; on a donc (Cf. (36) et (37])) en tout $P \in D$:

$$\Delta W_1 = -F = -(k^2W_1 + W_2).$$

Nous savons, d'autre part, que $W_2(P)$ est une fonction harmonique en tout point autre que $y = 0$, $x = \alpha$, $x = \beta$. Il suit de là que :

$$\frac{\Delta F}{k^2} + F = \Delta\left(W_1 + \frac{W_2}{k^2}\right) + k^2 W_1 + W_2 = 0.$$

Cela entraîne que pour tout $P \in D$, la représentation (42) de la somme $F(x, y)$ de la série (18) est bien une solution de l'équation de la membrane (1).

§ 22. — Il reste, à présent, de justifier le dernier point, à savoir que le second membre de (42) vérifie les conditions aux limites (2). Or, d'après les théorèmes de Korn-Liapounov, nous avons, pour tout $P \in D + C$ (cf. [33]) :

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\partial G}{\partial x} F(x', y')\, dx'\, dy';$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\partial G}{\partial y} F(x', y')\, dx'\, dy'.$$

D'un autre côté, $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$ se réduisent à $-\frac{\pi}{a+b}$ pour $x = 0$, $x = a$ et $y = 0$ et $y = b$ en vertu de (35). On en conclut que (cf. $(39'_3)$) :

$$\frac{dW_1}{dn} = 0, \qquad \text{sur} \qquad C.$$

D'après les propriétés de $W_2(P)$, établies au § 17, $W_2(P)$ vérifie les conditions frontières (2) si $f(x)$ satisfait à (39). Moyennant cette hypothèse, on voit que $F = k^2 W_1 + W_2$ est bien une solution du problème I *a*.

§ 23. — Or, on peut ramener d'une façon à la fois élémentaire et classique le cas général, où $f(x)$ ne vérifie pas (39), au cas particulier que l'on vient d'examiner. En effet, dans [4], on a formé la série $\Psi_1(x, y)$, du type (18), qui correspond au choix ci-après des données frontières (2) :

$$\frac{d\Psi_1}{dn} = K, \qquad y = 0, \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

K étant une constante. Les singularités de Ψ_1 étant beaucoup plus faibles que dans le cas général, où $f(x)$ est quelconque $\in [f]$, on peut démontrer directement que Ψ_1 est une solution du problème I a sus-énoncé; mais on peut le déduire aussi d'un résultat du prochain chapitre. Ce point acquis, soit $f \in [f]$; nous prendrons (cf. [9]) :

$$K = \frac{f_1(\beta)}{\beta - \alpha}. \tag{43}$$

Appelons alors Ψ, la série (18) correspondant au choix ci-après pour $y = 0$, $\alpha < x < \beta$:

$$\frac{d\Psi}{dn} = f(x) - K. \tag{44}$$

En combinant (9), (43) et (44), on voit que :

$$\int_C \frac{d\Psi}{dn} ds = \int_\alpha^\beta [f(x) - K]\, dx = 0.$$

Il s'ensuit que les conclusions du § 22 s'appliquent au problème I a, posé pour la donnée frontière (44) : la série (18) correspondante forme bien une représentation de l'inconnue.

En effet, nous avons dit, au paragraphe 8, qu'en vertu de la linéarité de notre problème, nos conclusions s'appliquent au cas où f se présente sous forme d'une somme d'éléments de $[f]$.

Par suite, la fonction F_1 :

$$F_1 = \Psi + \Psi_1$$

donne ainsi une représentation du type (18) de la solution avec la donnée frontière $f \in [f]$. Mais on voit de suite (Cf. (18), (19), (43) et (44)) que le coefficient de Fourier de F_1 est égal à $d_{m,n}$, coefficient de la série (18); donc $F \equiv F_1$. Nous avons donc vérifié que pour tout $f \in [f]$, la série F, déduite de f au moyen de (18) et (19), donne bien la solution du problème I a : c'est le résultat à établir.

Note. Le potentiel $W_2(P')$, utilisé en cours de ce chapitre n'est défini par [38] qu'à une constante additive près. On choisira cette constante de manière que :

$$\iint_D W_2(P)\, d\sigma_P = 0.$$

CHAPITRE IV

SOLUTION DU PROBLÈME I*b*.

§ 24. — Au § 11, nous avons construit la solution formelle u — définie par (6), (20) et (21) — de l'équation (16) avec la condition frontière (17). Rappelons que la série u est absolument et uniformément convergente, sur D + C, ainsi que ses dérivées premières en x et y; donc u est, *a fortiori*, une fonction höldérienne sur D + C. Rappelons aussi que $R(x, y)$, définie par (12), (13), (14) et (16) est höldérienne sur D + C. On peut toujours, sans restreindre la généralité, supposer que :

$$\int_C u(P)\, ds_p = 0.$$

En effet s'il n'en était pas ainsi, il suffirait de prendre la nouvelle inconnue u_1 :

$$u_1 = u - C_1,$$

où la constante C_1 est donnée par

$$2(a + b)C_1 = \int_C u(P)\, ds_p.$$

Il est clair que u_1 est une solution régulière d'une équation de type (16) où il faut changer R en $R - k^2C_1$; (17) demeure toujours valable.

Posons $U \equiv u$ dans la formule (40) : il vient (Cf. [16] et [17]), en reprenant les notations du § 19 :

$$(45) \quad u(x, y) = u(P) = \frac{k^2}{2\pi}\iint_D G(P, Q)\, u(Q)\, d\sigma_Q - \frac{1}{2\pi}\iint_D G(P, Q)\, R(Q)\, d\sigma_Q.$$

C'est l'équation intégrale que vérifie u, solution de (16) vérifiant (17).

§ 25. — Montrons maintenant que la série (6), (20) et (21) est une solution de (45). En reprenant une méthode utilisée au chapitre III, nous allons identifier les coefficients de Fourier des deux membres, où on aurait substitué à u sa représentation (6); compte tenu de (41), cela revient à vérifier la relation :

$$\frac{k^2 c_{m,n} - \delta_{m,n}}{k^2_{m,n}} = c_{m,n}$$

identique à (20).

§ 26. — En s'appuyant sur les résultats rappelés au § 24, les raisonnements du § 21 prouvent que le second membre de (45) — où on a substitué à u la série (6), (20) et (21) — possède des dérivées du second ordre, continues en $P \in D$; le laplacien du second membre vaut : $-k^2 u + R$. Cela montre que la solution envisagée de (45) est aussi solution de (16). Comme la série (6), (20), (21) est dérivable terme à terme, (4) prouve que la condition frontière (17) est satisfaite.

Ainsi, la solution formelle u est complètement justifiée.

§ 27. — Examinons, en particulier, le cas où $f(x) \equiv K$ (Cf. (43)). On trouvera dans [4] la forme explicite des fonctions correspondantes $R(x, y)$ et $\Phi(x, y)$, introduites au § 10. On constate que Φ et R présentent au point $x = \beta$, $y = 0$, une singularité du type (Cf. pour les notations, le § 4) :

$$\rho \log \rho \cos \theta - \rho\theta \sin \theta.$$

Un résultat de la théorie des séries de Fourier à deux variables garantit alors la convergence du développement en série de cosinus de $\Phi(x, y)$ dans D [5]. La formule (13) donne donc le moyen de construire une représentation du type (18) de la fonction $\Psi_1(x, y)$, utilisée dans les raisonnements du § 23.

On peut, en s'appuyant sur des résultats de cette nature, donner la justification de la méthode de résolution par simple substitution de l'équation (16), avec la condition frontière (17). Mais il semble préférable, lorsqu'on veut rester à un niveau plus élémentaire, de suivre la marche esquissée ci-dessus.

[5] Ce résultat est, d'ailleurs, valable pour R et Φ correspondant à tout $f \in [f]$; mais la démonstration de ce fait général est plus délicate que celle du cas particulier; cf. [9], p. 711.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Smirnov, *Cours de Mathématiques Supérieures*, t. IV, 2e édition, 1951, chap. IV (en russe).

[2] O. Ladygenskaya, Problèmes mixtes pour l'équation hyperbolique, Moscou, 1953, chap. II (en russe).

[3] A. Apté, Recherches théoriques et expérimentales sur les mouvements des liquides pesants avec surface libre. *Thèse de doctorat*, Grenoble, 1955, publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 333, 1957. Cf., chap. III.

[4] J. Kravtchenko and J. S. Mc Nown, Seiche in rectangular ports, *Quaterly of Applied Mathematics*, t. XIII, 1955.

[5] J. Privaloff, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 44, 1916, pp. 100-103.

[6] J. Vekoua, *Nouvelles méthodes de résolution des équations du type elliptique*, Moscou, 1948, p. 69 (En russe).

[7] R. Huron, Contribution à l'étude de l'unicité des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz, *Thèse*, Paris, 1951, chap. V.

[8] J. Kravtchenko, Sur la continuité des dérivées du potentiel, *Journal de Mathématiques*, t. 23, 1944.

[9] E. W. Hobson, The Theory of functions of a real variable, *Harren Press*, Washington, 1950, 2e édition, t. II, p. 518.

[10] J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique, Paris, Hermann, 1903, pp. 33-39.

[11] E. Picard, Traité d'Analyse, t. I, chap. IX, § 11.