ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SIGERU MIZOHATA

Systèmes kowalewskiens

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 283-292
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__283_0>

SYSTEMES KOWALEWSKIENS

par **Sigeru MIZOHATA.**

Les équations hyperboliques classiques jouissent d'une propriété caractéristique : les perturbations se propagent avec une vitesse finie. Or, dans le mémoire [2], M. SCHWARTZ a démontré que, dans le cas où les coefficients ne dépendent que de t et si le système kowalewskien est tel que le problème de Cauchy homogène soit uniformément bien posé dans $(\overrightarrow{a,\ b})$ pour l'espace $(\mathcal{S}')$, le système jouit de cette propriété (p. 36, Théorème VI). Nous cherchons diverses extensions de ce théorème aux cas où les coefficients dépendent de x et de t. Plus précisément, nous nous posons le problème : étant donné un système kowalewskien, dans quelles conditions peut-on dire que le problème de Cauchy est bien posé dans $(\mathcal{E}')$? Nous sommes obligés de nous borner aux cas où des coefficients sont analytiques en x.

1. Considérons un système matriciel d'ordre un :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k(x,\ t)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_k} + \mathrm{B}(x,\ t)\mathrm{U}. \tag{1, 1}$$

On suppose A_k et B analytiques en x et bornés, fonctions continues de t à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{0'}_x)$: $\mathcal{E}^0_x$ est l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. $\mathcal{E}^{0'}_x$ est l'espace des mesures à support compact. $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{0'}_x)$ est muni de la topologie image de Fourier de la topologie faible de $\mathcal{E}^{0'}_x$.

Par transformation de Fourier (en x), on obtient le système équivalent

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{U} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k * 2i\pi y_k \mathfrak{U} + \nu * \mathfrak{U}. \tag{1, 2}$$

PROPOSITION 1, 1. — *Le système* (1, 1) *admet au plus* une *solution tempérée pour des conditions initiales données.*

Une transformation de Fourier montre que cette proposition est un cas particulier de la

PROPOSITION 1, 2. — *Le système* (1, 2) *admet au plus* une *solution distribution à croissance exponentielle pour des conditions initiales données.*

Démonstration. — Supposons $\mathfrak{U}(t_0) = 0$, montrons $\mathfrak{U}(t) \equiv 0$. Soit l'intervalle $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$. Pour t dans cet intervalle, les mesures μ_k, ν, ont des supports dans $|y| \leqslant \rho$, et une masse $\leqslant$ M. Supposons démontré que $(\mathfrak{U} * \alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{D}$ de support dans la boule $|y| \leqslant 1$,

$$(1,\ 3) \qquad |(\mathfrak{U} * \alpha)(t,\ y)| \leqslant \frac{|t - t_0|^m}{m\,!} m_{\mathrm{L}}(\alpha)\,\Lambda(|y|)$$

où $\Lambda(r)$ est une fonction croissante, et $m_{\mathrm{L}}(\alpha)$ la borne supérieure des modules des dérivées d'ordre $\leqslant$ L de α.

Majorons le produit de convolution avec α du second membre de (1, 2).

$$(1,\ 4) \qquad \begin{aligned} |(\nu * \mathfrak{U} * \alpha)(t,\ y)| &\leqslant \mathrm{M} \sup_{|y-z| \leqslant \rho} |(\mathfrak{U} * \alpha)(t,\ z)| \\ &\leqslant \mathrm{M} \frac{|t - t_0|^m}{m\,!} m_{\mathrm{L}}(\alpha)\,\Lambda(|y| + \rho). \end{aligned}$$

Le produit $\mu_k * 2i\pi y_k \mathfrak{U} * \alpha$ s'écrit

$$(1,\ 5) \qquad \mu_k * 2i\pi y_k(\mathfrak{U} * \alpha) - \mu_k * \mathfrak{U} * 2i\pi y_k \alpha.$$

Le 1er terme de (1, 5) se majore par

$$(1,\ 6) \qquad \begin{aligned} &2\pi\mathrm{M} \sup_{|y-z| \leqslant \rho} |z_k(\mathfrak{U} * \alpha)(t,\ z)| \\ &\qquad \leqslant 2\pi\mathrm{M} \frac{|t - t_0|^m}{m\,!} m_{\mathrm{L}}(\alpha)(|y| + \rho)\,\Lambda(|y| + \rho). \end{aligned}$$

Le 2e terme de (1, 5) se majore par

$$(1,\ 7) \qquad \begin{aligned} &2\pi\mathrm{M} \sup_{|y-z| \leqslant \rho} |(\mathfrak{U} * y_k \alpha)\,(t,\ z)| \\ &\qquad \leqslant 2\pi\mathrm{M} \frac{|t - t_0|^m}{m\,!} m_{\mathrm{L}}(y_k \alpha)\,\Lambda\,(|y| + \rho). \end{aligned}$$

La formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre $\leqslant$ L de $y_k\alpha$ donne

$$m_L(y_k\alpha) \leqslant (|y| + L)\, m_L(\alpha). \tag{1, 8}$$

D'où la majoration du 2e terme de (1, 5) :

$$2\pi M \frac{|t - t_0|^m}{m\,!} m_L(\alpha)\,(|y| + L)\Lambda(|y| + \rho). \tag{1, 9}$$

On en déduit la majoration du 2e membre de (1, 2) :

$$\begin{gathered} h \frac{|t - t_0|^m}{m\,!} m_L(\alpha)\,(|y| + \rho + L)\Lambda(|y| + \rho), \\ h = M\left(\frac{1}{\rho + L} + 2\pi n + 2\pi n\right). \end{gathered} \tag{1, 10}$$

Alors, comme $\mathcal{U}(t_0) = 0$, donc $(\mathcal{U} * \alpha)(t_0, y) \equiv 0$, et la majoration du 2e membre de (1, 2) donne une nouvelle majoration de $(\mathcal{U} * \alpha)$:

$$\left\{\begin{aligned} &|(\mathcal{U} * \alpha)(t, y)| \leqslant \frac{|t - t_0|^{m+1}}{(m + 1)\,!} h m_L(\alpha)\,(|y| + \lambda)\Lambda(|y| + \lambda), \\ &\lambda = L + \rho, \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \end{aligned}\right. \tag{1, 11}$$

Revenons maintenant à l'hypothèse initiale : $\mathcal{U}$ est une distribution à croissance au plus exponentielle.

Elle s'écrit donc, pour un L convenable :

$$\mathcal{U} = \sum_{|l| \leqslant L} D^l \mathcal{U}_l(t, y) \tag{1, 12}$$

$\mathcal{U}_l(t, y)$ continue en t et y, admettant la majoration

$$|\mathcal{U}_l(t, y)| \leqslant A e^{C|y|}, \qquad \text{pour} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{1, 13}$$

La dérivée D^l (par rapport aux variables y) est à prendre au sens des distributions.

Alors si $\alpha \in \mathcal{D}$ a son support dans $|y| \leqslant 1$:

$$\begin{gathered} |(\mathcal{U} * \alpha)(t, y)| = \Big|\sum_{|l| \leqslant L} D^l \alpha * \mathcal{U}_l\Big| \\ \leqslant c_L m_L(\alpha) \sup_{|y - z| \leqslant 1} |\mathcal{U}_l(t, z)| \leqslant c_L A m_L(\alpha) e^{(C|y| + 1)} \leqslant K m_L(\alpha) e^{C|y|}, \end{gathered} \tag{1, 14}$$

où c_L est le nombre des dérivées d'ordre $\leqslant$ L.

Donc $(\mathfrak{U} * \alpha)$ admet une majoration du type (1, 3) avec $m = 0$, et

$$(1,\ 15) \qquad \Lambda(r) = \mathrm{K}e^{\mathrm{C}r}.$$

On en déduit, de proche en proche, des majorations pour les diverses valeurs de m :

$$\begin{aligned}(1,\ 16) \qquad |(\mathfrak{U} * \alpha)(t,\ y)| &\leqslant \mathrm{K}\frac{|t-t_0|^m}{m\,!}h^m m_{\mathrm{L}}(\alpha) \\ &\times (|y|+\lambda)(|y|+2\lambda)\ \ldots\ (|y|+m\lambda)e^{\mathrm{C}(|y|+m\lambda)} \\ &\leqslant \mathrm{K}m_{\mathrm{L}}(\alpha)\frac{h^m|t-t_0|^m}{m\,!}(|y|+m\lambda)^m e^{\mathrm{C}(|y|+m\lambda)}\end{aligned}$$

pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

La formule de Stirling donne la majoration suivante :

$$(1,\ 17) \qquad \lesssim \frac{\mathrm{K}m_{\mathrm{L}}(\alpha)}{\sqrt{2\pi m}}\left[\frac{h|t-t_0|}{m}e(|y|+m\lambda)\right]^m e^{\mathrm{C}(|y|+m\lambda)}.$$

Faisons tendre m vers $+\infty$. Pour y fixé quelconque, lorsque m est assez grand, $|y| \leqslant m\lambda$ donc $|y| + m\lambda \leqslant 2m\lambda$, d'où

$$(1,\ 18) \qquad \lesssim \frac{\mathrm{K}m_{\mathrm{L}}(\alpha)}{\sqrt{2\pi m}}[2h|t-t_0|e\lambda e^{2\mathrm{C}\lambda}]^m.$$

Cette quantité tend vers 0 pour $m \to \infty$ si

$$(1,\ 19) \qquad |t-t_0| \leqslant \varepsilon = \frac{1}{2he\lambda e^{2\mathrm{C}}}.$$

On en déduit que $(\mathfrak{U} * \alpha)(t,\ y) \equiv 0$ pour $|t - t_0| \leqslant \varepsilon$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

La quantité ε est indépendante de t_0, donc on peut refaire le raisonnement à partir de $t_0 - \varepsilon$ et $t_0 + \varepsilon$, on voit ainsi que $(\mathfrak{U} * \alpha)\ (t,\ y) \equiv 0$ pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. C'est vrai quel que soit $(t_1,\ t_2)$, donc $\mathfrak{U} * \alpha \equiv 0$ pour tout t, et toute $\alpha \in \mathfrak{D}$, donc $\mathfrak{U} = 0$ c.q.f.d.

Proposition 1, 3. — *Si* U *est une solution tempérée de* (1, 1), *et si* $\mathrm{U}(t_0)$ *est dans* $\mathcal{E}'$, U *est dans* $\mathcal{E}'$ *pour tout t, et fonction différentiable de t à valeurs dans* $\mathcal{E}'$.

Corollaire. — *Si le problème de Cauchy est bien posé dans* $\mathcal{S}'$, *il est bien posé dans* $\mathcal{E}'$.

Démonstration. — Soit $U(t_0) = U_0 \in \mathcal{E}'$. $\mathfrak{U}_0$ est analytique entière de type exponentiel, ayant une majoration

$$(1,\ 20) \qquad |\mathfrak{U}_0(y)| \leqslant A e^{C|y|}.$$

Résolvons (1, 2) par approximations successives. Posons $\mathfrak{V}_0(t, y) = \mathfrak{U}_0(y)$, et

$$(1,\ 21) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathfrak{V}_j(t, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k * 2i\pi y_k \mathfrak{V}_{j-1} + \nu * \mathfrak{V}_{j-1} \\ \mathfrak{V}_j(t_0, y) = 0 \quad \text{pour} \quad j \geqslant 1, \end{cases}$$

ce qui se résout par

$$(1,\ 22) \qquad \mathfrak{V}_j(t, y) = \int_{t_0}^{t} (\cdots)\, d\tau.$$

Il est facile de majorer $\mathfrak{V}_j(t, y)$ pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *y complexe.*

La majoration de $\mathfrak{V}_j$ à partir de $\mathfrak{V}_{j-1}$ est en effet analogue à celle qui a été faite dans la proposition 2, mais plus simple, parce qu'ici il n'y a pas à régulariser.

Supposons démontrée la majoration

$$(1,\ 23) \qquad |\mathfrak{V}_{j-1}(t,\ y)| \leqslant \frac{|t - t_0|^{j-1}}{(j-1)\,!} \Lambda(|y|).$$

On a alors les majorations

$$(1,\ 24) \qquad |(\nu * \mathfrak{V}_{j-1})(t,\ y)| \leqslant M \sup_{|y-z| \leqslant \rho} |\mathfrak{V}_{j-1}(t,\ z)| \leqslant M \frac{|t - t_0|^{j-1}}{(j-1)\,!} \Lambda(|y| + \rho),$$

$$(1,\ 25) \qquad |(\mu_k * 2i\pi y_k \mathfrak{V}_{j-1})(t,\ y)| \leqslant 2\pi M \sup_{|y-z| \leqslant \rho} |z_k \mathfrak{V}_{j-1}(t,\ z)| \leqslant 2\pi M \frac{|t - t_0|^{j-1}}{(j-1)\,!} (|y| + \rho)\, \Lambda(|y| + \rho),$$

d'où la majoration du 2e membre de (1, 21) :

$$(1,\ 26) \qquad \begin{aligned} &\frac{|t - t_0|^{j-1}}{(j-1)\,!} k(|y| + \rho)\, \Lambda(|y| + \rho), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ &k = M\left(\frac{1}{\rho} + 2\pi n\right). \end{aligned}$$

D'où la majoration de $\mathfrak{V}_j$, $j \geqslant 1$:

$$(1,\ 27) \qquad |\mathfrak{V}_j(t,\ y)| \leqslant \frac{|t - t_0|^{j}}{j\,!} k(|y| + \rho)\, \Lambda(|y| + \rho).$$

Partant alors de la majoration (1, 20) pour $j=0$, on en déduit, de proche en proche, les majorations :

$$(1,\ 28)\quad |\mathfrak{V}_j(t,\ y)| \leqslant A\frac{|t-t_0|^j}{j\,!}k^j(|y|+\rho)\ldots(|y|+j\rho)e^{C(|y|+j\rho)}$$
$$\leqslant A\frac{|t-t_0|^j}{j\,!}k^j(|y|+j\rho)^j e^{C(|y|+j\rho)}$$
$$\underset{(j\to\infty)}{\lesssim} \frac{A}{\sqrt{2\pi j}}\left[\frac{|t-t_0|ke}{j}(|y|+j\rho)\right]^j e^{C(|y|+j\rho)}.$$

Montrons que la série $\sum_{j=0}^{\infty}\mathfrak{V}_j(t,\ y)$ converge uniformément sur tout compact en y, et majorons sa somme $\mathfrak{V}(t,\ y)$.

Il y a d'abord un nombre fini de termes pour lesquels $j\rho \leqslant |y|$ (fini et borné pour y borné). La somme des modules de ces termes est majorée par

$$(1,\ 29)\qquad \sum_{j=0}^{j\leqslant\frac{|y|}{\rho}}\frac{A|t-t_0|^j}{j\,!}k^j(2|y|)^j e^{2C|y|}$$
$$\leqslant A\exp\left[k|t-t_0|2|y|+2C|y|\right].$$

Considérons maintenant tous les termes pour lesquels $j\rho \geqslant |y|$. Dans ces termes, on peut majorer dans (1, 28) avec

$$(|y|+j\rho)\leqslant 2j\rho.$$

D'où la majoration de la somme des modules de ces termes :

$$(1,\ 30)\qquad \sum_{j\geqslant\frac{|y|}{\rho}}^{\infty}\frac{A}{\sqrt{2\pi}}[|t-t_0|ke2\rho e^{2C\rho}]^j$$

quantité majorée par $\sum_{j=1}^{\infty}$ donc par $\frac{A}{\sqrt{2\pi}}$, si $|t-t_0|ke\,2\rho e^{2C\rho}\leqslant\frac{1}{2}$ ou encore par

$$(1,\ 31)\qquad \frac{A}{\sqrt{2\pi}},\qquad \text{si}\qquad |t-t_0|\leqslant\eta=\frac{1}{4ek\rho e^{2C\rho}}.$$

On en déduit bien que la série $\sum_{j=0}^{\infty}\mathfrak{V}_j(t,\ y)$ converge uniformément pour $|y|$ borné et $|t-t_0|<\eta$, et qu'elle y représente une fonction $\mathfrak{V}(t,\ y)$ holomorphe entière en y, de type exponentiel $\leqslant 2k\eta+2C$ (d'après (29)). Comme η est indépendant de t_0, on peut recommencer à partir de $t_0 - \eta$ et $t_0 + \eta$, on en déduit que $\mathfrak{V}(t, y)$ existe pour tout t, et qu'elle est analytique entière de type exponentiel en y. On voit immédiatement que $\mathfrak{V}$ est solution de (1, 2), avec la condition initiale $\mathfrak{V}(t_0, y) = \mathfrak{U}_0(y)$.

Par ailleurs, on suppose l'existence d'une autre solution $\mathfrak{U}(t)$ tempérée en y, avec $\mathfrak{U}(t_0) = \mathfrak{U}_0(y)$. Les 2 solutions $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont des distributions à croissance exponentielle pour y réel, donc elles sont confondues d'après la proposition 1, 2, ayant la même valeur initiale $\mathfrak{U}(y)$ pour $t = t_0$. Donc $\mathfrak{U}(t)$ est une fonction $\mathfrak{U}(t, y) = \mathfrak{V}(t, y)$ analytique entière de type exponentiel, et $U(t)$ est dans $\mathcal{E}'_x$ pour tout t, fonction différentiable de t à valeurs dans $\mathcal{E}'_x$. c.q.f.d.

2. Indiquons une autre extension étroitement liée au théorème de Cauchy-Kowalewsky.

Supposons pour (1, 1) que les coefficients $A_k(x, t)$, $B(x, t)$ soient analytiques en x et bornés, fonctions continues de t à valeurs dans $\mathcal{A}(D_\varepsilon)$; $\mathcal{A}(D_\varepsilon)$ est l'espace des fonctions analytiques $a(z)$ bornées définies sur D_ε : $(z = x + ix'$; $x \in R^n$, $|x'| < \varepsilon)$. On le munit de la norme $\|a(z)\| = \sup\limits_{z \in D_\varepsilon} |a(z)|$.

Lemme 2, 1. — *Désignons par* M *un nombre tel que*

$$\|A_k(z, t)\| \leqslant M, \quad \|B(z, t)\| \leqslant M, \quad \text{pour} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Alors il existe des nombres τ, η $(< \varepsilon)$ *et* β *tels que, étant donnée une condition initiale quelconque pour* $t = t_0$: $U_0(x) \in \mathcal{A}(D_\varepsilon)$, *alors* (1, 1) *admet une et une seule solution* $U(x, t)$ *définie dans* $|t - t_0| < \tau$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *continûment différentiable en* t *à valeurs dans* $\mathcal{A}(D_\eta)$, *et on a*

$$(2, 1) \qquad |U(x, t)| \leqslant \beta . \sup_{|\zeta - x| \leqslant \varepsilon} |U_0(\zeta)|,$$
$$x \in R^n, \qquad |t - t_0| < \tau, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

τ, η *et* β *sont indépendants de* t_0.

Démonstration. — On résout (1, 1) par approximations successives :

Posons $U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t) + \cdots + U_i(x, t) + \cdots$
avec $U_0(x, t) = U_0(x)$,

$$(2, 2) \quad \frac{d}{dt} U_i(x, t) = \sum_k A_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} U_{i-1}(x, t) + B(x, t) U_{i-1}(x, t),$$

$U_i(x, t_0) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Par la méthode de série majorante, on constate facilement (2, 1).

En effet,

$$A_k(z, t) \ll \left(m_{ij}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon' - \rho}\right), \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sum_j m_{ij}^{(k)} \leqslant M,$$
$$\rho = z_1 + z_2 + \cdots + z_n,$$

$$U_0(z) = (u_i(z)), \quad u_i(z) \ll L \frac{1}{\varepsilon' - \rho} \quad (i = 1, \ldots, N),$$

d'où

$$U_1(z, t) \ll |t - t_0| ML \left[\frac{n}{(\varepsilon' - \rho)^3} + \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^2}\right]$$
$$\ll |t - t_0| LM(n + \varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^3},$$

$$U_2(z, t) \ll \frac{|t - t_0|^2}{2!} LM^2(n + \varepsilon)\left[\frac{3n}{(\varepsilon' - \rho)^5} + \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^4}\right]$$
$$\ll \frac{|t - t_0|^2}{2!} LM^2(n + \varepsilon)(3n + \varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^5},$$

de proche en proche, on aura

$$U_p(z, t) \ll \frac{|t - t_0|^p}{p!} LM^p(n + \varepsilon)(3n + \varepsilon) \ldots (\overline{2p - 1} . n + \varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^{2p+1}},$$
$$p = 1, 2, \ldots.$$

La série majorante est convergente si

$$\frac{|t - t_0|}{(\varepsilon' - \rho)^2} < \sigma \frac{p + 1}{(2p + 1)n + \varepsilon} \cdot \frac{1}{M} \quad (p = 0, 1, \ldots),$$

où $\sigma < 1$, à fortiori si $< \sigma \frac{1}{2nM}$. Alors, la série $\sum_{p=0}^{\infty} U_p(z, t)$ se majore par $L \sum_{p=0}^{\infty} \sigma^p = L \frac{1}{1 - \sigma}$, ce qui achève la démonstration autour $z = 0$. Dans cette démarche, on voit facilement la démonstration de l'unicité. c.q.f.d.

Alors, pour (1, 1) on a

Proposition 2, 1. — *Si le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans $\mathcal{S}'$, il l'est dans $\mathcal{E}'$.*

Démonstration. — Supposons d'abord $U(x, t_0) \in (\mathcal{D})_x$, $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$. Notons

$$(2, 3) \qquad U_\delta(x) = U(x, t_0) \underset{(x)}{*} (2\pi\delta)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta}\right),$$

alors, lorsque $\delta \to 0$, $U_\delta(x) \to U(x, t_0)$ pour la topologie $(\mathcal{S}')$.

En vertu du lemme 2, 1, il existe une et une seule solution holomorphe en z $U_\delta(z, t)$, $|t - t_0| \leqslant \tau$, $z \in D_\eta$; $U_\delta(z, t_0) = U_\delta(z)$, telle qu'on ait (2, 1).

Soit $x \notin S[U(x, t_0)]$(1) $\equiv S(U_0)$, alors dans (2, 3) en remplaçant x par $x + ix'$,

(2, 4) $|U_\delta(x + ix')|$

$$\leqslant \exp\left(+\frac{x'^2}{2\delta}\right)(2\pi\delta)^{-\frac{n}{2}} \int_{S(U_0)} \cdots \int \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\delta}\right] |U(\xi, t_0)|\, d\xi$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in R^n} |U(\xi, t_0)| \exp\left(\frac{x'^2}{2\delta}\right)(2\pi\delta)^{-\frac{n}{2}} \int_{S(U_0)} \cdots \int \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\delta}\right] d\xi,$$

et désignons distance $[x, S(U_0)] = d_x$, alors

$$\int_{S(U_0)} \cdots \int \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\delta}\right] d\xi \leqslant \int_{|\xi| \geqslant d_x} \cdots \int \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta}\right) d\xi$$

$$\leqslant k_n (2\pi\delta)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{d_x}{\sqrt{\delta}}\right)^{n-2} \exp\left(-\frac{d_x^2}{2\delta}\right) \text{(2)}$$

pour $\delta \leqslant d_x^2$.

(1) $S(T)$ désigne le support de T.

(2) $\int_{|\xi| \geqslant d_x} \cdots \int \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta}\right) d\xi$, par le changement :

$$\xi = \sqrt{\delta}\xi', \quad = \sqrt[n]{\delta} \int_{|\xi'| \geqslant \frac{d_x}{\sqrt{\delta}}} \cdots \int \exp\left(-\frac{\xi'^2}{2}\right) d\xi' \quad \text{d'où,} \quad = S_{n-1} \int_{\frac{d_x}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1}\, dr,$$

où S_{n-1} est l'aire de la sphère unitaire dans R^n $(S_0 = 2)$. Or, par l'intégration par parties,

$$I_{n,t} = \int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1}\, dr$$

$$= (t^{n-2} + (n-2)t^{n-4} + (n-2)(n-4)t^{n-4} + \cdots) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$+ \begin{cases} 1.3\ldots(n-2) \displaystyle\int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr & (n, \text{ impair}) \\ 0 & (n, \text{ pair}). \end{cases}$$

Comme

$$\int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \int^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \frac{dr}{r^2} \leqslant \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

on voit que $I_{n,t} \leqslant k'_n t^{n-2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ pour $t \geqslant 1$. En faisant $t = \frac{d_x}{\sqrt{\delta}}$, on a l'inégalité écrite.

On a donc

$$(2,\ 5)\quad |U_\delta(x+ix')| \leqslant k_n\left(\frac{d_x}{\sqrt{\delta}}\right)^{n-2} \exp\left(-\frac{d_x^2 - x'^2}{2\delta}\right) \sup_{\xi \in R^n} |U(\xi, t_0)|.$$

Prenons $x + ix'$ dans D_ε, alors, pour tout compact K_x dans R^n tel que dist $(K_x, S(U_0)) > \varepsilon$, $U_\delta(x+ix')$ converge uniformément vers 0 lorsque $\delta \to 0$. Or, (2, 1) montre que $U_\delta(x, t) \to 0$, uniformément sur K_x et $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. Donc, comme le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans $(\mathcal{S}')$, $U_\delta(x, t) \to U(x, t)$ pour la topologie $(\mathcal{S}')$ pour $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, d'où $U(x, t) \equiv 0$ sur K_x.

Donc, les supports de $U(x, t)$ pour $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ sont contenus dans le ε-voisinage du support de $U(x, t_0)$. Comme ε et τ sont indépendants de t_0 et de $U(x, t_0)$, nous pouvons refaire ce raisonnement à partir de $t_0 - \tau$ et de $t_0 + \tau$. D'où la proposition pour $U_x(t_0) \in (\mathcal{D})_x$.

Le cas $U(t_0) \in (\mathcal{E}')_x$ se traite en prenant une suite régularisante. c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Leray, Hyperbolic differential equations (Cours de Princeton) 1954.

[2] L. Schwartz, Les équations d'évolution liées au produit de composition, *Ann. Inst. Fourier* (1950), pp. 19-49.