ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LÉONCE FOURÈS

Groupes fuchsiens et revêtements

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 49-71
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__49_0>

GROUPES FUCHSIENS ET REVETEMENTS

par **Léonce FOURÈS** (Marseille) [1].

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier un groupe G, Fuchsien ou Fuchsoïde, contenant des transformations elliptiques. Le groupe G pourra opérer dans l'intérieur d'un cercle C ou dans le plan pointé, mais nous emploierons toujours le langage se rapportant au cercle. Malgré l'utilisation constante du « vocabulaire analytique », (Groupes Fuchsiens, Surfaces de Riemann, etc...) les démonstrations sont valables non seulement pour un groupe de transformations homographiques mais aussi pour tout groupe d'homéomorphismes du cercle sur lui-même, à condition que ce groupe soit proprement discontinu [2] et admette des domaines fondamentaux D_ν possédant les propriétés suivantes [3] :

a) tout cercle $C' \subset C$ est recouvert par un nombre fini de domaines fondamentaux D_ν.

b) Soit P appartenant à la frontière de *n* domaines fondamentaux $(n \geqslant 1)$; il existe un voisinage simplement connexe $v(P)$ séparé par les frontières des D_ν en *n* composantes seulement de telle manière qu'il existe un homéomorphisme de $v(P)$ sur un cercle dans lequel les frontières des D_ν intérieures à $v(P)$ se représentent suivant des rayons. Un tel voisinage $v(P)$ sera appelé voisinage élémentaire. (Dans le cas des groupes Fuchsoïdes de transformations homographiques, cette dernière condition est réalisée avec des domaines fondamentaux limités par des arcs de cercle.)

(1) Ce travail a été fait pendant un séjour à l'Institute for advanced study (Princeton).

(2) Voir FATOU, *Fonctions algébriques*, t. II, p. 69, où sont en évidence des groupes discrets qui ne sont pas proprement discontinus.

(3) Nous appellerons de tels groupe H-Fuchsoïdes.

Nous avons pris soin de rejeter à la fin de nos démonstrations l'introduction de la structure conforme pour mettre en évidence son rôle secondaire dans ces questions malgré le changement de terminologie qui en résulte dans les énoncés finaux.

Nous rattachons l'étude du groupe G à celui des revêtements ramifiés d'une certaine surface. Je rappelle ici les définitions que nous avons adoptées pour les revêtements ramifiés (1) :

a) t désigne une représentation continue d'une surface $\mathcal{S}$ dans une autre S de sorte que si $M \in S$, $t^{-1}(M)$ soit un ensemble isolé.

Définition 1. — $P \in S$ est couvert sans ramification par $\Delta \subset \mathcal{S}$ (pour t) s'il existe un voisinage $V(P) \subset S$ tel que $E_{V,\Delta} = \Delta \cap t^{-1}[V(P)]$ ne soit pas vide et que toute composante connexe de $E_{V,\Delta}$ soit représentée biunivoquement par t sur $V(P)$.

$(\mathcal{S}, t)$ est un revêtement de S relativement non ramifié si tout point $P \in S$ est couvert sans ramification par $\mathcal{S}$ (pour t).

Définition 2. — $P \in S$ est couvert avec ramification par $\Delta \subset \mathcal{S}$ s'il existe $V(P)$ tel que :

1° $E_{V,\Delta}$ ne soit pas vide.

2° Γ_i désignant une composante connexe quelconque de $E_{V,\Delta}$

$$\mathfrak{L}_i = \Gamma_i \cap t^{-1}(P) \qquad \text{n'est pas vide.}$$

3° $\Gamma_i^* = \Gamma_i - \mathfrak{L}_i$. (Γ_i^*, t) est un revêtement relativement non ramifié de $V^*(P) = V(P) - P$.

(Si $M \in V^*(P)$, $t^{-1}(M)$ a n points dans Γ_i^*, où n est indépendant de M et est appelé l'ordre du revêtement (Γ_i^*, t), ou l'ordre de ramification du revêtement (Γ_i, t) de $V(P)$.)

$(\mathcal{S}, t)$ est un revêtement de S relativement ramifié si tout point $P \in S$ est couvert avec ou sans ramification par $\mathcal{S}$ (pour t).

Définition 3. — $P \in S$ est régulièrement couvert par $\mathcal{S}$ (pour t), s'il existe $V(P) \subset S$ tel que toutes les composantes connexes Γ_i de $E_{V,\mathcal{S}}$ recouvrent P avec le même ordre de ramification fini.

Si tout point $P \in S$ est régulièrement couvert par $\mathcal{S}$ (pour t), $(\mathcal{S}, t)$ est un revêtement régulièrement ramifié de S.

(1) L. Fourès, Recouvrements de surfaces de Riemann, *Ann. Ec. N. S.*, t. 69, 1952, p. 183. Aux indications bibliographiques il conviendrait d'ajouter R. H. Fox : Recent developments of knot theory at Princeton, Proceedings of the International Congress 1950 (Cambridge), t. II, p. 453.

b) Dans les définitions 1, 2, 3 remplaçons les surfaces S et $\mathcal{S}$ par deux surfaces de Riemann R et $\mathcal{R}$ et t par une représentation φ assujettie aux mêmes conditions que t, et en outre conforme biunivoque en tout point où t était seulement biunivoque.

On démontre alors le théorème suivant (5).

Théorème. — *Soit* $(\mathcal{R}, \varphi)$ *un revêtement de* R *relativement ramifié :*

a. *Les points où* φ *n'est pas biunivoque sont isolés ;*

b. *Soit* $P = \varphi(\mathfrak{T})$ *: il est possible de trouver sur* R *et* $\mathcal{R}$ *des voisinages* $V(P)$ *et* $\mathcal{V}(\mathfrak{T})$ *dont les paramètres* z *et* ζ *obtenus par les uniformisantes locales* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont tels que* $T.\varphi.\mathfrak{T}^{-1} = k\zeta^n$.

Le premier chapitre est consacré à la construction d'une surface de Riemann R et d'une projection ψ de C sur R, invariante par les fonctions de G, de sorte que (C, ψ) soit un revêtement régulièrement ramifié de R.

Dans le deuxième chapitre nous étudions le groupe de Poincaré de R et montrons qu'il est isomorphe au quotient de G par un certain sous-groupe de G, que nous déterminons.

CHAPITRE I

I. — *Points fixes des transformations elliptiques.*

A. — Soient D_λ et D_μ deux polygones fondamentaux pour le groupe G et $\varphi_{\lambda,\mu}$ la transformation de G qui représente D_λ sur D_μ : $D_\lambda \xrightarrow{\varphi_{\lambda,\mu}} D_\mu$. Soit D_λ^* la frontière de D_λ : un sommet de D_λ est soit un point de D_λ^* frontière pour au moins trois polygones fondamentaux (au moins deux s'il s'agit d'un point sur la circonférence de C), soit un point fixe de transformation elliptique ; un côté de D_λ est une portion connexe de D_λ^* limitée par deux sommets consécutifs. $s_{i,\mu}$ désignera le côté de D_μ image par $\varphi_{\lambda,\mu}$ du côté $s_{i,\lambda}$ de D_λ. Les côtés de D_λ, intérieurs à C se répartissent par paires de côtés

(5) L. Fourès, *loc. cit.*, p. 185. Ce théorème permet d'identifier ces définitions à celles de Stoïlow : *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthiers-Villars, 1938.

congruents : $s_{i,\lambda}$ est congruent à $s_{i',\lambda}$ s'il existe une fonction de G, $\varphi_{i(\lambda)}$ telle que

$$(1) \qquad s_{i',\lambda} = \varphi_{i(\lambda)}(s_{i,\lambda}).$$

On a alors $\varphi_{i(\lambda)}^{-1} = \varphi_{i'(\lambda)}$.

$$s_{i',\mu} = \varphi_{1,\mu}(s_{i',1}) = \varphi_{1,\mu}\cdot\varphi_{i(1)}(s_{i,1}) = \varphi_{1,\mu}\cdot\varphi_{i(1)}\cdot\varphi_{\mu,1}(s_{i,\mu}) = \varphi_{i(\mu)}(s_{i,\mu})$$

d'où la relation

$$(2) \qquad \varphi_{i(\mu)} = \varphi_{1,\mu}\cdot\varphi_{i(1)}\cdot\varphi_{\mu,1}.$$

En particulier : si $D_\mu = \varphi_{i(1)}(D_1)$ $\varphi_{1,\mu} = \varphi_{i(1)}$ et d'après (2) : $\varphi_{i(\mu)} = \varphi_{i(1)}$. D'après (2) également :

$$(3) \qquad \varphi_{i(\mu)}^{n} = \varphi_{1,\mu}\cdot\varphi_{i(1)}^{n}\cdot\varphi_{\mu,1}, \qquad \text{et} \qquad \varphi_{i(1)}^{p} = \varphi_{\mu,1}\cdot\varphi_{i(\mu)}^{p}\cdot\varphi_{1,\mu} \qquad (3')$$

donc si $\varphi_{i(1)}$ est elliptique de période n : $\varphi_{i(1)}^{n} = 1$, $\varphi_{i(\mu)}$ est elliptique de période $\leqslant n$ d'après (3) donc de période n d'après (3').

B. — Soient $S_{i,1}$ et $S_{i',1}$ les deux composantes de $D^* - (s_{i,1} \cup s_{i',1})$. Si $S_{i,1}$ et $S_{i',1}$ contenaient chacune un point sur la circonférence de C, D_1 séparerait $C - D_1$ en au moins deux composantes connexes, l'une δ_1 contiguë à D_1 suivant $s_{i',1}$, l'autre δ'_1 contiguë à D_1 suivant $s_{i,1}$: les domaines $\varphi_{i(1)}^{p}(D_1)$ seraient dans δ_1 pour $p > 0$, et dans δ'_1 pour $p < 0$ ce qui est impossible lorsque $\varphi_{i(1)}$ est elliptique puisque $\varphi_{i(1)}^{-1} = \varphi_{i(1)}^{n-1}$. Dans la suite $\varphi_{i(1)}$ est une transformation elliptique de période n et nous supposerons de plus le numérotage des D_λ tel que :

$$D_2 = \varphi_{i(1)}(D_1)\,; \quad D_3 = \varphi_{i(2)}(D_2) = \varphi_{i(1)}(D_2) = \varphi_{i(1)}^{2}(D_1)\,; \quad \ldots,$$
$$D_n = \varphi_{i(1)}^{n-1}(D_1)\,; \quad D_1 = \varphi_{i(1)}(D_n)$$

$\Delta^1 = \bigcup_{\lambda=1}^{n}(D_\lambda \cup s_{i,\lambda})$ est limité par deux courbes fermées $S_i^1 = \bigcup_{\lambda=1}^{n} S_{i,\lambda}$ et $S_{i'}^1 = \bigcup_{\lambda=1}^{n} S_{i',\lambda}$. L'une de ces courbes, soit S_i^1 n'a pas de points sur la circonférence de C et est contenue dans la région intérieure à l'autre. Nous nous proposons de montrer que S_i^1 se réduit à un point : supposons le contraire. Il y a alors au moins un côté $s_{j,1} \subset S_i^1$ suivant lequel D_1 est contigu à D_μ. En transformant D_μ par $\varphi_{i(\mu)}$ et ses itérées successives on construit un domaine Δ^2 image de Δ^1 par $\varphi_{1,\mu}(\Delta^1)$.

a) $D_\mu \not\subset \Delta^1$ (*fig.* 1) alors $\Delta^1 \cap \Delta^2 = \emptyset$. Les frontières de Δ_2, soient $S_i^2 = \varphi_{1,\mu}(S_i^1)$ et $S_{i'}^2 = \varphi_{1,\mu}(S_{i'}^1)$ sont toutes deux intérieures à S_i^1, donc sont deux courbes fermées l'une intérieure à l'autre :

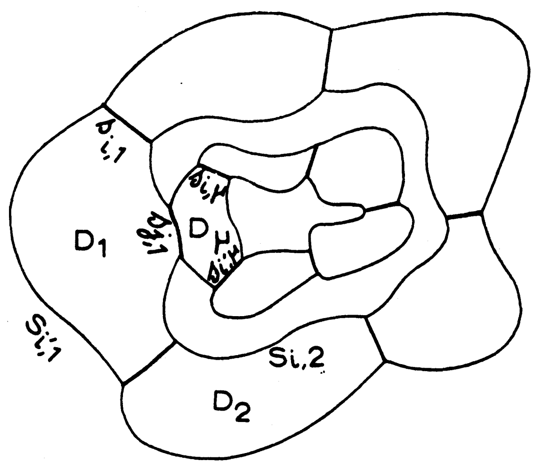

Fig. 1.

1er cas. — S_i^2 intérieure à $S_{i'}^2$ (cas de la figure 1). $\varphi_{\mu,1}$ représente alors biunivoquement, domaine fondamental sur domaine fondamental, l'intérieur de $S_{i'}^2$ sur l'intérieur de $S_{i'}^1$: le nombre des domaines fondamentaux devrait être le même à l'intérieur de $S_{i'}^1$ et de $S_{i'}^2$ ce qui est impossible puisque ce nombre est fini, que $S_{i'}^2$ est à l'intérieur de $S_{i'}^1$, et que D_1 n'est pas à l'intérieur de $S_{i'}^2$.

2e cas. — $S_{i'}^2$ intérieure à S_i^2. $\varphi_{\mu,1}$ représente alors biunivoquement, domaine fondamental sur domaine fondamental, l'intérieur de S_i^2 sur l'extérieur de S_i^1 ce qui est impossible puisque le nombre des domaines fondamentaux est fini à l'intérieur de S_i^2, infini à l'extérieur de S_i.

b) $D_\mu \subset \Delta^1$ entraîne $\Delta^1 = \Delta^2$. Traçons dans D_1 un arc α_1 joignant deux points congruents sur $s_{i,1}$ et $s_{i',1}$. Les images de α_1 par $\varphi_{i(1)}^p$ constituent une courbe fermée A invariante par $\varphi_{i(1)}$ qui réalise un homéomorphisme de l'intérieur $\mathfrak{a}$ de A sur lui-même. Si $\mu \neq 2$ ou n (*fig.* 2), $\delta_1^\mu = \mathfrak{a} \cap (D_1 \cup D_\mu \cup s_{j,1})$ sépare $\mathfrak{a}$ en au moins deux composantes, l'une contenant $\mathfrak{a} \cap D_2$, l'autre $\mathfrak{a} \cap D_{\mu+1}$. δ_1^μ est ouvert et les deux régions que l'on vient de définir n'ont pas de point frontière

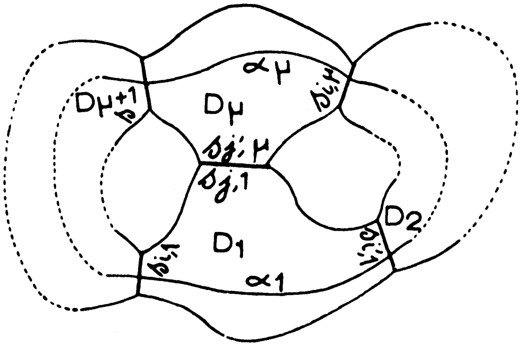

Fig. 2.

commun. $\varphi_{i(1)}(\partial_1^\mu) = \mathfrak{A} \cap (D_2 \cup D_{\mu+1} \cup s_{j,2})$ ne pourrait être connexe. On doit donc avoir soit $\mu = 2$ soit $\mu = n$. Si $\mu = n$, D_1 est contigu à D_n suivant $s_{j,1}$ donc à D_2 suivant $s_{j',1}$ et en permuttant les notations $s_{j',1}$ et $s_{j,1}$ on se ramène au cas $\mu = 2$. Soient donc D_1 et D_2 contigus suivant $s_{i',1} = s_{i,2}$ et $s_{j,1} = s_{j',2}$. Si $s_{j,1}$ et $s_{i',1}$ n'ont pas une extrémité commune ils sont séparés par un côté $s_{k,1}$ suivant lequel D_1 ne peut être contigu qu'avec D_2. Il en résulte qu'il ne peut y avoir de sommet de D_1 entre $s_{i',1}$ et $s_{j,1}$ (sur la partie de D_1^* qui contient $s_{k,1}$) et par conséquent $s_{i',1}$ et $s_{j,1}$ seraient un seul et même côté de D_1.

S_i^1 se réduit bien à un point qui est le point fixe de $\varphi_{i(1)}$.

THÉORÈME I. — *Si deux côtés s, s' du polygone fondamental* D *sont congruents par une transformation elliptique φ, s et s' ont pour extrémité commune le point fixe de φ.*

C. **Cycles elliptiques.** — Soient $A_1 A_2 \dots A_k$, k sommets du polygone fondamental, congruents par les fonctions de G et points doubles de transformations elliptiques. Par un procédé classique dû à Brahana([6]) et schématisé par les figures 3 et 4 on peut à partir du premier polygone fondamental en construire un autre dont les sommets elliptiques n'ont pas de congruents sur la périphérie de ce même polygone. Dans ces conditions les deux côtés du polygone issus d'un même sommet elliptique sont congruents par la transfor-

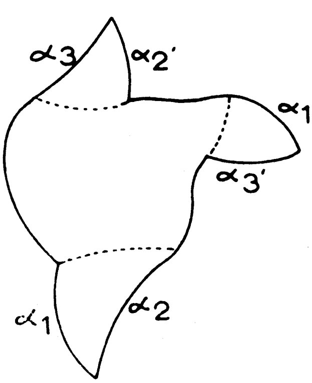

Fig. 3.

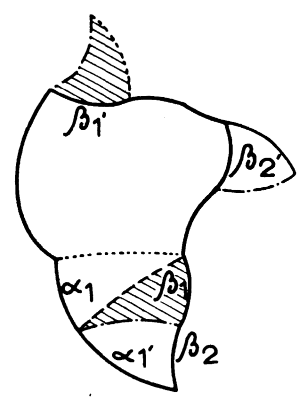

Fig. 4.

mation elliptique ayant ce sommet pour point double (α_1 et α_1' dans la figure 4). Nous supposerons toujours par la suite que les polygones fondamentaux sont du type ci-dessus.

([6]) BRAHANA, *Annals of Math.*, 23, 1923, p. 144.

II. — *Construction de la base.*

A. Le polygone de base. — Désignons par B_ν l'ensemble des points *intérieurs* aux arcs de D_ν^* représentés sur leurs congruents par une transformation elliptique. $\mathcal{B} = \bigcup B_\nu$. Soit Ω_ν l'ensemble des points fixes de transformations elliptiques sur D_ν^* et et $\Omega = \bigcup \Omega_\nu$. Posons $\mathcal{D} = \bigcup D_\nu$ et $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{B} \cup \Omega$ (*fig.* 5).

a) *Voisinage élémentaire dans* $\mathcal{C}$. — Un ouvert contenant M sera un voinage élémentaire de M, si suivant la position de M il satisfait à l'une des conditions suivantes :

1° Si $M \in \mathcal{D}$, il y a un D_ν et un seul tel que $M \in D_\nu$, il existe alors un ouvert $V^e(M)$ tel que $M \in V^e(M)$ avec $V^e(M) \subset D_\nu$;

2° Si $M \in \mathcal{B}$. Il y a deux D_ν soient D_μ et D_ν ayant M pour point frontière commun ; D_ν et D_μ sont contigus suivant $s_{i,\mu} = s_{i',\nu}$ où $s_{i,\mu} \in B_\mu$ et $s_{i',\nu} \in D_\nu^*$. Montrons que $s_{i',\nu} \in B_\nu$: $\varphi_{i'(\nu)} = \varphi_{\mu,\nu} \cdot \varphi_{i'(\mu)} \cdot \varphi_{\nu,\mu}$ or $\varphi_{i'(\mu)} = \varphi_{i(\mu)}^{-1}$ est elliptique donc aussi $\varphi_{i'(\nu)}$ et par suite $s_{i',\nu} \in B_\nu$. Un voisinage élémentaire $V^e(M)$ est un ouvert contenant M, satisfaisant à $V^e(M) \subset D_\mu \cup D_\nu \cup s_{i,\mu}$ et séparé par $s_{i,\mu}$ en deux composantes seulement.

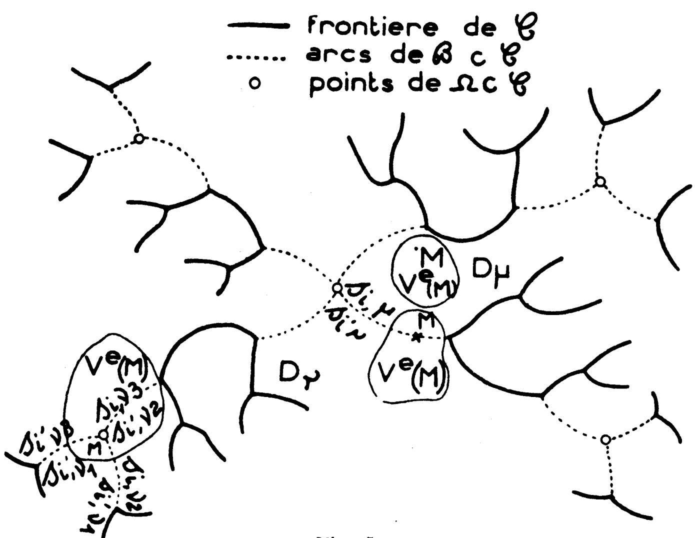

Fig. 5.

3° $M \in \Omega$. M point fixe de transformation elliptique de période *n*, est sommet commun à *n* domaines fondamentaux D_{ν_1}, D_{ν_2}, ..., D_ν

et extrémité commune de n côtés de $\mathcal{B}$, que nous noterons t_j pour $s_{i,\nu_j} = s_{i',\nu_{j-1}}$. Un voisinage élémentaire $V^e(M)$ est un ouvert contenant M, satisfaisant à :

$$V^e(M) \subset (D_{\nu_1} \cup D_{\nu_2} \cup \ldots \cup D_{\nu_n}) \cup (t_1 \cup t_2 \cup \ldots \cup t_n) \cup M$$

et séparé par les arcs t_j en n composantes seulement.

On remarquera que les voisinages élémentaires constituent une base pour les ouverts de $\mathcal{C}$.

b) *Voisinages élémentaires dans* Δ. — Soit $d_\nu = D_\nu \cup B_\nu \cup \Omega_\nu$ et f_ν une application continue de d_ν sur un ensemble Δ de sorte que f_ν prenne les mêmes valeurs pour deux points de d_ν congruents par une transformation elliptique de G et seulement pour ces points. Δ est connexe et d'après le théorème I est de genre zéro et même simplement convexe.

$f_\nu(D_\nu) = \delta$ $f_\nu(B_\nu) = \beta$ $f_\nu(\Omega_\nu) = \omega$ et $f(s_\lambda) = \sigma_\lambda$ si s_λ est un arc de B_ν.

On définira les voisinages élémentaires dans Δ d'une manière analogue à celle servant à définir les voisinages élémentaires dans $\mathcal{C}$.

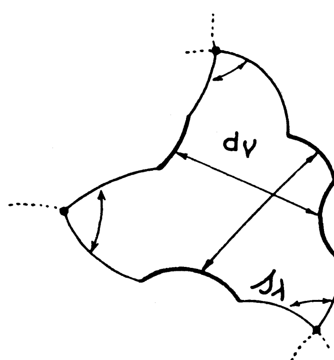

Fig. 6.

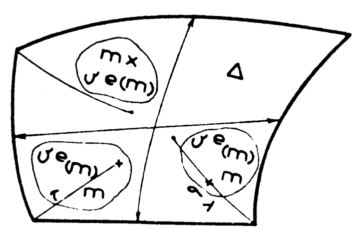

Fig. 7

1° Si $m \in \delta$, $v^e(m) \subset \delta$.

2° $m \in \beta$, $m \in \sigma_\lambda$, $v^e(m) \subset \delta \cup \sigma_\lambda$ en étant séparé par σ_λ en deux composantes seulement.

3° $m \in \omega$. Soit τ l'arc de β aboutissant en m, $v^e(m) \subset \delta \cup \tau \cup m$ sans être séparé en plusieurs composantes par τ.

Les voisinages élémentaires ainsi définis constituent une base pour les ouverts de Δ.

c) Expression de la continuité de f_ν. — f_ν étant continue, $f_{\nu}^{-1}[v^e(m)]$ est ouvert relativement à d_ν.

1° $m \in \delta$, $f_\nu^{-1}[v^e(m)]$ est un $V^e(m)$ où $M \in D_\nu$.

2° $m \in \beta$, $f_\nu^{-1}[v^e(m)]$ a deux composantes ouvertes dans d_ν, c'est-à-dire pouvant être obtenues par intersection de deux ouverts O_1 et O_2 avec d_ν. On peut supposer que O_1 et O_2 ne coupent chacun que deux domaines D_λ (y compris D_ν). $V_1 = O_1 \cap d_\nu$, $V_2 = O_2 \cap d_\nu$.

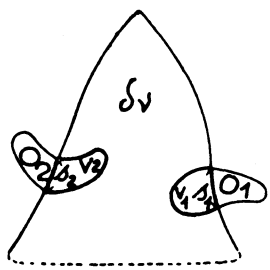

Fig. 8.

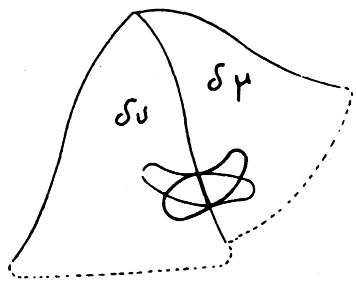

Fig. 9.

V_1 et V_2 contiennent respectivement les arcs s_1 et s_2 de B_ν tels que $f_\nu(s_1) = f_\nu(s_2)$. s_1 et s_2 sont congruents par $\varphi_{i(\nu)} = \varphi_{\nu,\mu} : \varphi_{\nu,\mu}(s_2) = s_1$. $\varphi_{\nu,\mu}(O_2) = O_3$, $\varphi_{\nu,\mu}(V_2) = V_3 = d_\mu \cap O_3$. $V_3 \cup V_1$ est un ouvert : $V_1 \cap D_\nu$ et $V_3 \cap D_\mu$ sont des ouverts dans C donc leurs points sont intérieurs à $V_1 \cup V_3$; $s_1 = V_1 \cap B_\nu = V_1 \cap V_3 = V_3 \cap B_\mu$; si $M \in s_1$, $M \in (O_1 \cap O_3)$ donc M est intérieur à un ouvert $W \subset (O_1 \cap O_3)$; soit $P \in W$, ou bien $P \in (d_\nu \cap O_1)$ ou bien $P \in (d_\mu \cap O_3)$ donc $P \in V_1 \cup V_3$ et $W \subset (V_1 \cup V_3)$.

3° $m \in \omega$. $M = f_\nu^{-1}(m)$. $V_\nu = f_\nu^{-1}[v^e(m)]$ est un ouvert de d_ν. Soient $D_{\nu_1} = D_\nu$, $D_{\nu_2} \dots D_{\nu_n}$ les *n* polygones fondamentaux ayant M pour sommet commun, $V_{\nu_1} V_{\nu_2} \dots V_{\nu_n}$ les images de V_{ν_1} dans D_{ν_1}, $D_{\nu_2} \dots D_{\nu_n}$. Pour démontrer que $V_{\nu_1} \cup V_{\nu_2} \cup \dots \cup V_{\nu_n}$ est un ouvert il suffira de montrer que M est intérieur à cet ensemble, cela en utilisant l'ouvert O_{ν_1} qui sert à définir V_{ν_1} comme ouvert relativement à d_ν, et les images O_{ν_i} de O_{ν_1} par les φ_{ν_1, ν_i}. $M \in \bigcap_i O_{\nu_i}$ et on termine comme dans le cas précédent.

d) Extension de f_ν. — Soit $M \in \mathcal{C}$. — 1° Si $M \in \mathcal{D}$, $M \in D_\mu$. Soit $M_\nu = \varphi_{\mu,\nu}(M) \in D_\nu$. Toute autre fonction de G représente M sur un domaine fondamental autre que D_ν. Posons $f(M) = f_\nu \circ \varphi_{\mu,\nu}(M)$.

2° Si $M \in \mathcal{B}$ il existe deux transformations de G, φ_1 et φ_2 représentant M sur B_ν et obtenues par représentation sur D_ν des deux domaines fondamentaux D_μ et $D_{\mu'}$ ayant M pour point frontière. La relation $\varphi_{\mu',\nu}=\varphi_{\mu,\nu}\circ\varphi_{\mu',\mu}$ montre que $\varphi_{\mu,\nu}(M)$ et $\varphi_{\mu',\nu}(M)$ sont congruents sur B_ν. Dans ces conditions

$$m=f(M)=f_\nu\circ\varphi_{\mu,\nu}(M)=f_\nu\circ\varphi_{\mu',\nu}(M).$$

3° $M\in\Omega$ est sommet commun de plusieurs domaines fondamentaux $D_{\mu_1}D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_n}$. φ_{μ_p,μ_1} est une transformation elliptique de point fixe M. Donc $\varphi_{\mu_p,\nu}=\varphi_{\mu_1,\nu}\circ\varphi_{\mu_p,\mu_1}$ est indépendant de p, donc aussi $m=f_\nu\circ\varphi_{\mu_p,\nu}(M)=f(M)$.

Il résulte de l'étude de la continuité faite en c) que l'image inverse d'un voisinage élémentaire dans Δ est la réunion de composantes qui sont chacune des voisinages élémentaires dans $\mathcal{C}$. Il en résulte que l'image inverse d'un ouvert dans Δ est un ouvert dans $\mathcal{C}$.

Si $M\in(\mathcal{D}\cap\mathcal{B})$, alors $m\in(\delta\cap\beta)$ et les ouverts $V^e(M)$ ou $V_3\cap V_1$ sont représentés biunivoquement par f sur $v^e(m)$; en d'autres termes toute composante connexe de $f^{-1}[v^e(m)]$ est appliquée par f topologiquement sur $v^e(m)$. Si $M\in\Omega$ donc $m\in\omega$, la composante de $f^{-1}[v^e(m)]$ contenant M comprend n « secteurs » V_{ν_i} où n est la période de la transformation elliptique de sommet M : m est couvert à l'ordre n par la composante connexe de $f^{-1}[v^e(m)]$ qui contient M (pour la représentation f).

Lemme 1. — *($\mathcal{C}_i$, f) est un revêtement régulièrement ramifié de Δ, ramifié seulement aux points de $f(\Omega)$; ($\mathcal{C}_i$ est une composante connexe quelconque de $\mathcal{C}$).*

e) Structure conforme de Δ. — Soient $m\in\Delta$ et $v(m)$ un voisinage élémentaire de M dans Δ. Soit $\mathcal{V}_0$ une composante arbitraire mais fixe de $f^{-1}(v)$: $\mathcal{V}_0=f_*^{-1}(v)$.

Une composante quelconque $\mathcal{V}_i$ de $f^{-1}(v)$ est représentée sur $\mathcal{V}_0$ par $f_*^{-1}\circ f$ qui est une fonction homographique de G.

1° Si $m\in\delta\cup\beta$, prenons comme uniformisante de $v(m)$ la représentation biunivoque $T\circ f_*^{-1}$ où T est l'uniformisante de $\mathcal{V}_0$. La structure conforme étant déjà définie sur $\mathcal{C}$, ces uniformisantes définissent une structure conforme cohérente sur $\Delta-\omega$ indépendante du choix de la détermination f_*^{-1}. ($\mathcal{C}_i-\Omega$, f) est un revêtement relativement non ramifié de $\Delta-\omega$.

2° Si $m\in\omega$, soit $\mathcal{V}(M)$ la composante connexe de $f^{-1}[v^e(m)]$ qui contient M : ($\mathcal{V}(M)-M$, f) est un revêtement relativement non ramifié de $v^e(m)-m$, avec la multiplicité n (où n est le nombre des polygones D_ν ayant M pour sommet commun). D'après le théorème cité dans l'introduction on peut déterminer une uniformisante locale de $v^e(m)$ cohérente avec la structure conforme déjà définie dans $\Delta - \omega$, par la relation $T\varphi\mathcal{T}^{-1} = k\zeta^n$ qui s'écrit ici $T = k[H[f_*^{-1}]]^n$ où T est l'uniformisante cherchée de $v^e(m)$, f_*^{-1} la détermination de f^{-1} qui associe $\mathcal{T}(M)$ à $v^e(m)$, et H l'uniformisante de $\mathcal{T}(M)$ qui n'est autre qu'une représentation conforme de $\mathcal{T}(M)$ sur un cercle, M se représentant sur l'origine. Ce résultat peut être obtenu directement: représentons conformément par F, le cercle C sur un cercle du plan z, M étant représenté à l'origine. La transformation elliptique φ de point fixe M se transpose en une rotation d'angle $2\frac{\pi}{n}$ qui reste encore une rotation d'angle $2\frac{\pi}{n}$ après représentation conforme K de $F(\mathcal{T}(M))$ sur un cercle; $[K\circ F\circ f_*^{-1}]^n$ définit alors une uniformisante de $v^e(m)$ cohérente avec la structure conforme déjà définie dans $\Delta - \omega$; si l'on remarque qu'à un facteur constant près $KF = H$ on retrouve l'expression précédente.

Nous appellerons Δ le polygone de base et sa structure conforme sera dite l'image par f de la structure conforme de $\mathcal{C}$.

B. — **Construction de la base.** — Désignons par $\tilde{D}_\nu$ la réunion de D_ν (ouvert) et de la partie de sa frontière qui est intérieure à C. Soit ψ_ν une application continue de $\tilde{D}_\nu$ sur une surface R′ de manière que $\psi_\nu(M) = \psi_\nu(M')$ si M et M′ sont congruents et seulement dans ce cas. $\psi_\nu\circ f_\nu^{-1}$ représente Δ biunivoquement sur un domaine $\Delta' \subset R'$, la fermeture de Δ' dans R′ étant R′. Les voisinages élémentaires dans R′ seront définis de la manière suivante :

1° $p\in\Delta'$, $v^e(p)$ est l'image par $\psi_\nu\circ f_\nu^{-1}$ d'un voisinage élémentaire dans Δ;

2° $p\in(R' - \Delta')$. En p aboutissent n arcs de la frontière de Δ' dans R′ et un ouvert contenant p sera un voisinage élémentaire si la frontière de Δ' dans R′ sépare $v(p)$ en n composantes seulement représentées sur des secteurs circulaires par une homéomorphie convenable de $v(p)$ sur un cercle.

On étend ensuite ψ_ν en une application continue ψ de C sur R′ de sorte que $\psi(M) = \psi(M')$ lorsque M et M′ sont congruents, comme on a fait l'extension de f_ν en f. Lorsque $p\notin\psi(\Omega)$ toute composante de $\psi^{-1}[v^e(p)]$ est représentée par ψ biunivoquement sur $v^e(p)$. Si $p\in\psi(\Omega)$ ($p\in\Delta'$), toute composante de $\psi^{-1}[v^e(p)]$ recouvre p avec la même multiplicité.

THÉORÈME 2. — *Étant donné dans un cercle* C *un groupe H-Fuchsoïde d'homéomorphismes contenant des transformations elliptiques, il existe une surface* R′ *et une projection* ψ *de* C *sur* R′ *de sorte que* (C, ψ) *soit un revêtement de* R′ *régulièrement ramifié aux points images par* ψ *des transformations elliptiques du groupe.*

Désignons par R la surface de Riemann obtenue en introduisant dans l'intérieur de R′ la structure conforme image par ψ de la structure conforme de C (dans le cas où G est un groupe Fuchsoïde). On écrira $R = C \bmod G$ ou $R = \frac{C}{G}$. R contient alors une image conforme biunivoque de Δ que nous appellerons encore Δ.

THÉORÈME 2 *bis*. — *Étant donné dans un cercle* C *un groupe Fuchsien* G *de transformations homographiques, contenant des transformations elliptiques, il existe une surface de Riemann* R *et une projection Riemannienne* ψ *de* C *sur* R *de sorte que* (C, ψ) *soit un revêtement de* R *régulièrement ramifié aux points images par* ψ *des points fixes des transformations elliptiques de* G.

C. — **Le revêtement universel de R.** — Pour construire le revêtement universel de R on peut utiliser le système des courbes tracées sur R (ou R′) et limitant Δ (resp Δ') simplement connexe. Ce système de courbes comprend au plus une infinité dénombrable de côtés associés par paires. On juxtaposera des polygones identiques à Δ suivant les côtés homologues(7) et cette opération se poursuivra indéfiniment. Par passage à la limite on obtiendra un cercle $\mathfrak{C}$ et une projection $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{C}$ sur R de sorte que ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{f}$) est le revêtement universel de R. Le groupe Fuchsoïde des transformations de $\mathfrak{C}$ par lesquelles $\mathfrak{f}$ est invariante, ou plus brièvement le groupe de revêtement universel de R sera noté G^*. Nous utiliserons la même notation G^* pour le groupe fondamental de R′ qui peut s'obtenir par le même procédé que pour R′, à ceci près que le groupe Fuchsoïde G^* est remplacé par un groupe H-Fuchsoïde. Dans la suite, d'ailleurs nous étudions les relations algébriques entre G et G et la structure conforme de C n'intervient plus.

(7) Cette méthode est utilisée dans la démonstration des théorèmes d'uniformisation par BIEBERBACH, *Funktionentheorie*, t. II ; dans « Sur la théorie des surfaces de Riemann » *Ann. Éc. N. Sup.*, 1951, j'appelle « lois de la soudure » les principes qui codifient cette juxtaposition des polygones identiques.

CHAPITRE II

I. — Les générateurs d'un groupe H-Fuchsoïde.

A. — **Construction des générateurs.** — Nous étudions un groupe G (qui peut être aussi bien le groupe G*) avec les notations de la première partie.

1° *Développement de* $\varphi_{1,n}$. — Supposons pour simplifier l'écriture que le numérotage des domaines D_i soit tel que

$$\varphi_{1(1)}=\varphi_{1,2},\qquad \varphi_{2(2)}=\varphi_{2,3},\qquad \ldots,\qquad \ldots,\qquad \varphi_{n(n)}=\varphi_{n,n+1}.$$

Dans ces conditions

$$\varphi_{1,3}=\varphi_{2,3}\cdot\varphi_{1,2}=\varphi_{1,2}\cdot\varphi_{2(1)}\cdot\varphi_{2,1}\cdot\varphi_{1,2}=\varphi_{1(1)}\cdot\varphi_{2(1)}.$$

Supposons que :

$$(1)\qquad \varphi_{1,n}=\varphi_{1(1)}\cdot\varphi_{2(1)}\cdot\ldots\cdot\varphi_{n-1(1)}.$$

On en déduit

$$\varphi_{1,n+1}=\varphi_{n,n+1}\cdot\varphi_{1,n}=\varphi_{1,n}\cdot\varphi_{n(1)}\cdot\varphi_{n,1}\cdot\varphi_{1,n}=\varphi_{1,n}\cdot\varphi_{n(1)}$$
$$=\varphi_{1(1)}\cdot\varphi_{2(1)}\cdot\ldots\cdot\varphi_{n(1)}.$$

L'expression (1) constitue un développement de φ_i suivant les $\varphi_{i(1)}$. D'une manière générale soit $\Gamma(1, i_n)$ une chaîne de n domaines contigus joignant les domaines D_1 et D_{i_n}: $D_1=D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_n}$. D_{i_j} est contigu à $D_{i_{j+1}}$ suivant $s_{\lambda'_j,i_j}=s_{\lambda_j,i_{j+1}}$ de sorte que $\varphi_{i_j,i_{j+1}}=\varphi_{\lambda_j(i_j)}$

$$(2)\qquad \varphi_{1,n}=\varphi_{\lambda_1(1)}\cdot\varphi_{\lambda_2(1)}\cdot\ldots\cdot\varphi_{\lambda_{n-1}(1)}.$$

Ainsi à toute chaîne $\Gamma(1, n)$ joignant le domaine D_1 au domaine D_n on a associé un développement de $\varphi_{1,n}$. Inversement étant donné un développement arbitraire :

$$\varphi_{j_1(1)}\cdot\varphi_{j_2(1)}\cdot\ldots\cdot\varphi_{j_n(1)}$$

on peut constituer une chaîne de domaines $D_1, D_{\nu_1}, D_{\nu_2}, \ldots, D_{\nu_n}$ de la manière suivante :

$$D_{\nu_1}=\varphi_{j_1(1)}(D_1)\,;\qquad D_{\nu_2}=\varphi_{j_2(\nu_2)}(D_{\nu_1})\,;\qquad \ldots;\qquad D_{\nu_n}=\varphi_{j_n(\nu_{n-1})}(D_{\nu_{n-1}})$$

et d'après ce qui précède la fonction φ_{1,ν_n} peut se développer suivant :

$$\varphi_{1,\nu_n} = \varphi_{j_1} \cdot \varphi_{j_2} \cdot \cdots \cdot \varphi_{j_n}$$

On dira que la chaîne $\Gamma(1, \nu_n) = (D_1, D_{\nu_1}, \ldots, D_{\nu_n})$ et le développement $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_n}$ sont associés.

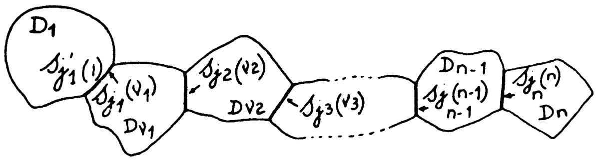

Fig. 10.

2° *Produit.* — Soient $\varphi_{1,\mu} = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k}$ et $\varphi_{1,\nu} = \varphi_{j_1} \cdot \varphi_{j_2} \cdots \varphi_{j_l}$ où φ_{i_m} (resp. φ_{j_m}) est écrit pour $\varphi_{i_{m(1)}}$ (resp. $\varphi_{j_{m(1)}}$).

Soit $D_\lambda = \varphi_{1,\nu} \cdot \varphi_{1,\mu}(D_1) = \varphi_{1,\lambda}(D_1) = \varphi_{1,\nu}(D_\mu)$.

On peut obtenir D_λ comme image de D_μ par $\varphi_{1,\nu}$ en construisant l'image par $\varphi_{1,\nu}$ de toute la chaîne $\Gamma(1, \mu)$. On obtient alors une chaîne $\Gamma(1, \lambda)$ à laquelle on associe le développement suivant de $\varphi_{1,\lambda}$:

$$\varphi_{1,\lambda} = \varphi_{j_1} \cdot \varphi_{j_2} \cdots \varphi_{j_l} \cdot \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k};$$

d'où la formule :

$$(3) \qquad \operatorname{dev} \varphi_{1,\lambda} = \operatorname{dev}(\varphi_{1,\nu} \cdot \varphi_{1,\mu}) = (\operatorname{dev} \varphi_{1,\nu})(\operatorname{dev} \varphi_{1,\mu}).$$

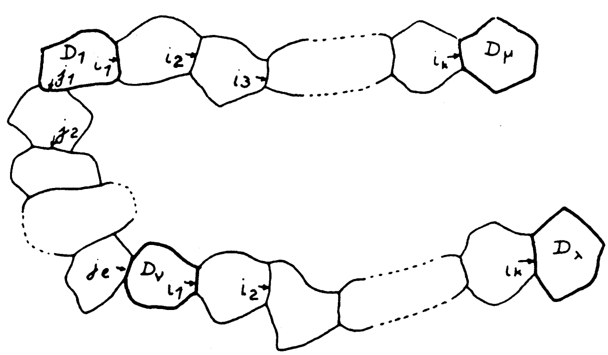

Fig. 11.

La formule (3) est d'ailleurs évidente si l'on se rappelle que le développement est un véritable produit d'éléments de G. On écrira de la même façon

$$\varphi_{\mu,1} = \varphi_{1,\mu}^{-1} = \varphi_{i_k}^{-1} \cdot \varphi_{i_{k-1}}^{-1} \cdots \varphi_{i_1}^{-1}.$$

3° *Règle de calcul.* — Si dans le développement de ψ deux facteurs consécutifs ont pour produit l'unité, on obtient encore un développement de ψ en retirant ces deux facteurs du premier développement :

$$\psi = A \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j \cdot B = A \cdot B \qquad \text{si} \qquad \varphi_i \cdot \varphi_j = 1.$$

Bien que cette règle de calcul soit une évidence nous aurons à nous referer à cette opération formelle que nous appellerons brièvement simplification.

4° *Le domaine de référence.* Soit $\varphi_{1,n}$ développé suivant les $\varphi_{i(1)}$ et $\Gamma(1, n)$ la chaîne associée à ce développement. Désignons par D_0 un domaine quelconque, étranger ou non à cette chaîne. Prenons D_0 comme domaine de référence et introduisons une chaîne arbitraire $\Gamma(0, 1)$, joignant D_0 à D_1.

$$\varphi_{1,n} = \varphi_{1(1)} \cdot \varphi_{2(1)} \cdots \varphi_{k(1)} = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_{1(0)} \cdot \varphi_{2(0)} \cdots\cdots \varphi_{k(0)} \cdot \varphi_{1,0}$$

puisque $\varphi_{i(1)} = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_{i(0)} \cdot \varphi_{1,0}$.

Or $\varphi_{0,1}$ admet un développement suivant les $\varphi_{j(0)}$, associé à $\Gamma(0, 1)$ et $\varphi_{1,0}$ admet le développement inverse du précédent.

$$(4) \qquad \varphi_{1,n} = \Pi\, \varphi_{i(0)}.$$

Au développement (4) correspond une nouvelle chaîne $\Gamma(0, m)$ qu'il est facile de construire d'après la relation

$$\varphi_{1,n} = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_{1(0)} \cdot \varphi_{2(0)} \cdots \varphi_{n(0)} \cdot \varphi_{1,0}.$$

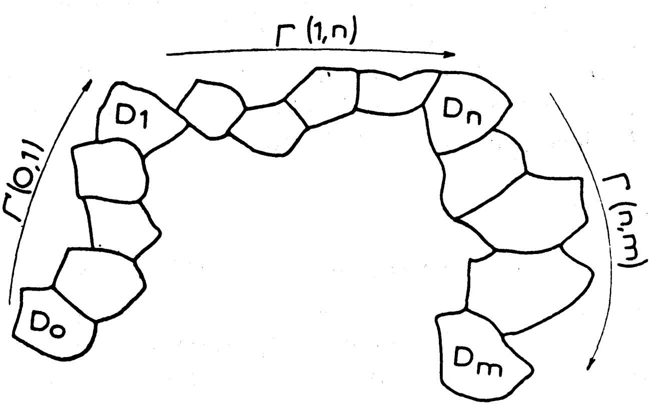

Fig. 12.

Désignons par $\Gamma(n, m)$ la chaîne issue de D_n et congruente à $\Gamma(1, 0)$, inverse de $\Gamma(0, 1)$. On obtient

$$\Gamma(0, m) = \Gamma(0, 1) + \Gamma(1, n) + \Gamma(n, m).$$

Théorème 3. — *Les $\varphi_{i(0)}$ constituent un système de générateurs du groupe* G.

B. — **Les relations fondamentales.** 1° Soit P un sommet d'un polygone fondamental où viennent se rencontrer les côtés s_{i_1,j_1}, s_{i_2,j_2}, ..., s_{i_k,j_k} dans cet ordre avec la disposition usuelle: $s_{i'_l,j_{l-1}} = s_{i_l,j_l}$.

Formons le développement de $\varphi_{j_1,j_1} = 1$ associé à la chaîne des domaines

$$D_{j_1}, \quad D_{j_2}, \quad \ldots, \quad D_{j_k}, \quad D_{j_1}$$

$$\varphi_{0,j_1} \cdot \varphi_{i_1(0)} \cdot \varphi_{i_2(0)} \cdots \varphi_{i_k(0)} \cdot \varphi_{j_1,0} = 1$$

ou

$$\varphi_{i_1(0)} \cdot \varphi_{i_2(0)} \cdots \varphi_{i_k(0)} \cdot \varphi_{j_1,0} = \varphi_{j_1,0}$$

$$(5) \qquad \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} = 1$$

que nous écrirons $F_P = 1$.

(5) et toutes les relations analogues obtenues à partir de tous les sommets d'un polygone fondamental quelconque constituent les relations fondamentales [8] de G. Autour d'un sommet elliptique nous aurons $\varphi_i^{(n)} = 1$.

2° Le système des relations $F_P = 1$ est complet.

a) *L'opération* U. — $\psi \in G$ étant écrit sous la forme $\psi = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_m}$ où les φ_{i_k} sont des générateurs, nous appellerons opération U l'opération formelle qui consiste à introduire dans l'écriture de ψ, entre deux générateurs une expression de la forme $\varphi_{\lambda,\mu} \cdot F \cdot \varphi_{\mu,\lambda}$ où F représente un produit de relations fondamentales de G (pour le système de générateurs φ_i). Le développement utilisé pour $\varphi_{\mu,\lambda}$ est l'inverse du développement utilisé pour $\varphi_{\lambda,\mu}$. Puisque

$$\varphi_{\lambda,\mu} \cdot F \cdot \varphi_{\mu,\lambda} = 1$$

on peut énoncer :

Lemme B1. — *ψ n'est pas changé par l'opération* U.

b) *Réduction des chaînes.* — Soit $\psi = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} = 1$ et (Γ) la chaîne des domaines D_i, issue de D_0 représentée par ce développement de ψ. (Γ) est une chaîne fermée puisque $\psi = 1$.

α) Supposons que la chaîne (Γ) limite une région intérieure (Γ^0) contenant donc un nombre fini de domaines fondamentaux. Introduisons provisoirement une numérotation particulière des domaines

(8) Cf. Fatou, *ouvrage cité*, p. 143. On doit remarquer que le nombre des relations fondamentales obtenues n'est pas minimum (Fatou, p. 197).

D_i, telle que $D_1D_2D_3$ soient trois domaines consécutifs de (Γ) et $D_4D_5D_6D_7$ des domaines de (Γ^0) répartis comme l'indique la figure 13. Notons aussi provisoirement $\varphi^{5,6}$ le générateur défini par

$$\varphi^{5,6} = \varphi_{5,0} \cdot \varphi_{5,6} \cdot \varphi_{0,5} \qquad \text{ou} \qquad \varphi_{5,6} = \varphi_{0,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi_{5,0}.$$

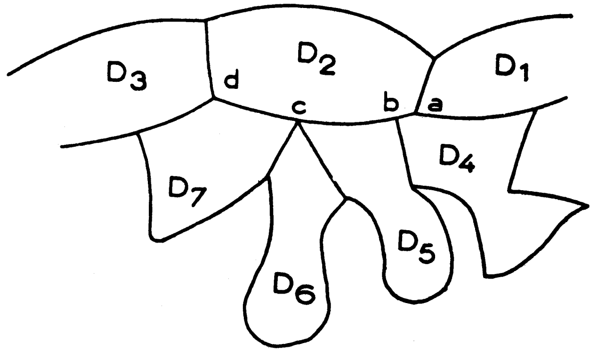

Fig. 13.

Avec ces notations nous pouvons écrire

$$(6) \qquad \psi = A \cdot \varphi^{1,2} \cdot \varphi^{2,3} \cdot B,$$

où A et B représentent des produits de générateurs. Écrivons les relations fondamentales en a, b, c, d

$$F_a = \varphi^{2,1} \cdot \varphi^{1,4} \cdot \varphi^{4,2} = 1$$
$$F_b = \varphi^{2,4} \cdot \varphi^{4,5} \cdot \varphi^{5,2} = 1$$
$$F_c = \varphi^{2,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi^{6,7} \cdot \varphi^{7,2} = 1$$
$$F_d = \varphi^{2,7} \cdot \varphi^{7,3} \cdot \varphi^{3,2} = 1$$

$$(7) \qquad \psi = A \cdot \varphi^{1,2} \cdot F_a \cdot F_b \cdot F_c \cdot F_d \cdot \varphi^{2,3} \cdot B$$
$$\psi = A \cdot \varphi^{1,2} \cdot \varphi^{2,1} \cdot \varphi^{1,4} \cdot \varphi^{4,2} \cdot \varphi^{2,4} \cdot \varphi^{4,5} \cdot \varphi^{5,2} \cdot \varphi^{2,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi^{6,7} \cdot \varphi^{7,2} \cdot \varphi^{2,7} \cdot \varphi^{7,3} \cdot \varphi^{3,2} \cdot \varphi^{2,3} \cdot B$$
$$\psi = A \cdot \varphi^{1,4} \cdot \varphi^{4,5} \cdot \varphi^{5,6} \cdot \varphi^{6,7} \cdot \varphi^{7,3} \cdot B.$$

Une opération U convenable effectuée sur (6) a permis de remplacer le développement (6) de ψ par le développement (7), dont la chaîne associée contient seulement des domaines de (Γ) et de (Γ^0) sans contenir D_2.

β) La chaîne (Γ) ne limite pas de région intérieure. Écrivons la suite des domaines constituant cette chaîne

$$(8) \qquad (\Gamma) = D_iD_j \ldots D_kD_i$$

correspondant au développement de ψ. Supposons que (Γ) n'ait pas de sous-chaîne fermée, c'est-à-dire qu'à part D_i aucun domaine D_l ne se rencontre plusieurs fois dans la suite (8). Nous dirons qu'un domaine est périphérique pour (Γ) s'il est contigu à un domaine n'appartenant pas à (Γ). Il y a toujours au moins un domaine périphérique autre que D_i. Soit avec des notations convenables D_2 un tel domaine. Si D_2 n'est contigu qu'à un seul domaine D_3 c'est que le développement de ψ peut s'écrire $\psi = A \,.\, \varphi^{3,2} \,.\, \varphi^{2,3} \,.\, B$ que l'on simplifie : $\psi = A \,.\, B$.

La chaîne associée au nouveau développement de ψ ne contient pas de nouveau domaine et ne contient plus D_2.

Supposons D_2 contigu à D_1 et D_3 (dans l'écriture de la chaîne (8) associée au développement de ψ) de sorte que $\psi = A \,.\, \varphi^{1,2} \,.\, \varphi^{2,3} \,.\, B$. La frontière de D_2 est séparée par les arcs de contact de D_2 avec D_1 et D_3 en deux plages dont l'une (d'après l'hypothèse β) et une seulement (puisque D_2 est périphérique) doit appartenir à la frontière d'autres domaines de (Γ). Soient $D_1 D_4 D_5 D_6 D_7 D_3$ (*fig.* 13) les domaines de (Γ) contigus à D_2. Comme dans le cas α on peut en transformant le développement de ψ par une opération U convenable écrire ψ de telle manière que la chaîne associée au nouveau développement de ψ ne contienne plus D_2 sans contenir de nouveaux domaines.

γ) Reprenons le développement de ψ

$$\psi = \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k} = 1 \tag{9}$$

et soit (Γ) la chaîne fermée correspondante.

i) Par une suite d'opérations U effectuées sur (9) on peut remplacer (9) par une expression (9′) dont la chaîne associée (Γ') ne limite pas de région intérieure (d'après α).

ii) Etant donné une chaîne fermée, sans sous-chaîne fermée, et ne limitant pas de région intérieure, on peut par une suite d'opérations U sur l'expressions de ψ, faire disparaître d'après β, tous les domaines de cette chaîne un par un sauf l'un d'entre eux choisi arbitrairement.

iii) Dans la chaîne (Γ') remplaçons d'après *ii*) toute sous-chaîne fermée par son domaine extrême : ainsi une chaîne

$$(\Gamma') : \qquad D_\alpha \ldots D_{\alpha'} D_i D_j \ldots D_k D_i D_{\beta'} \ldots D_\beta$$

dans laquelle $D_i D_j \ldots D_k D_i$ ne contient pas de sous-chaîne fermée, sera transformée en la chaîne

$$(\Gamma'') : \qquad D_\alpha \ldots D_{\alpha'} D_i D_{\beta'} \ldots D_\beta$$

(Γ'') sera à son tour remplacée par une nouvelle chaîne (Γ''') dont le nombre de domaines qui la compose est inférieur à celui des domaines qui composent (Γ''). Par itération finie de ces opérations on réduit (Γ) à son domaine initial d'où la propriété pour le système des relations fondamentales $F_P = 1$ d'être complet :

LEMME B2. — *Le système de relations fondamentales* $F_P = 1$ *est complet, en d'autres termes : par une suite finie convenable d'opérations* U *effectuées sur l'expression de* ψ, *et l'application de la seule règle de simplification, on peut réduire formellement l'expression de* ψ *à l'identité.*

C. — Pour le groupe G^* nous appelerons Φ_i les générateurs, en écrivant Φ_i pour $\Phi_{i(0)}$ où $\Phi_{i(0)}$ associe deux côtés congruents de Δ_0. La relation fondamentale obtenue en considérant la chaîne des polygones Δ_ν ayant $\mathfrak{P}$ pour sommet commun, se notera $\mathcal{F}_P = 1$.

II. — L'homomorphisme de G sur G*.

A. — **L'homomorphisme T.** — φ_i associe sur la frontière de D_0 les côtés $s_{i,0}$ et $s_{i',0}$; si φ_i n'est pas elliptique il y a sur la frontière de Δ_0 deux arcs $\sigma_{i,0}$ et $\sigma_{i',0}$ respectivement images par ψ (avec les notations du théorème 2) de $s_{i,0}$ et $s_{i',0}$. Les deux arcs $\sigma_{i,0}$ et $\sigma_{i',0}$ sont congruents par un générateur de G^* que nous notons $\Phi_{i(0)}$.

A un élément de G qui s'écrit

$$x = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_n}$$

faisons correspondre l'élément de G^* qui s'écrit

$$X = T(x) = \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \ldots \Phi_{i_n}$$

si φ_{i_λ} est elliptique, par convention $\Phi_{i_\lambda} = 1$.

Remarquons que si $\varphi_{i_{p+1}} = \varphi_{i_p}^{-1}$ on a aussi $\Phi_{i_{p+1}} = \Phi_{i_p}^{-1}$ donc $T(x)$ ne change pas lorsqu'on simplifie l'expression de x (en retirant le produit $\varphi_{i_p} \cdot \varphi_{i_{p+1}}$).

T est une transformation définie sur un groupe libre, mais pour montrer que T est aussi une application de G il faut étudier les transformées des relations fondamentales.

1° Transformation des relations fondamentales. Soit P un sommet d'un polygone D_{j_1}. En P aboutissent les côtés s_{i_1, j_1} ; s_{i_2, j_2} ; ... ; s_{i_k, j_k}

dans cet ordre ; la relation fondamentale définie en P s'écrit

$$(5) \qquad \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_k} = 1.$$

Si P est un point fixe d'une transformation elliptique φ_i, (5) se réduit à $\varphi_i^n = 1$, et comme $T(\varphi_i) = 1$, $T[\varphi_i^n] = [T(\varphi_i)]^n = 1$.
Si dans (5) φ_{i_μ} est elliptique, $s_{i_\mu, 0}$ a pour image dans Δ_ν un arc $\sigma_{i_\mu, \nu}$ joignant un sommet de Δ_ν à un point intérieur de Δ_ν, image du point fixe de $\varphi_{i_{\mu(0)}}$.

En $\mathfrak{L}$, image quelconque de P aboutissent les côtés de même indice qu'en P et dans le même ordre :

$$\sigma_{i_1, \nu_1}; \qquad \sigma_{i_2, \nu_2}; \qquad \ldots; \qquad \sigma_{i_k, \nu_k}$$

mais certains de ces côtés σ_{i_μ, ν_μ} par exemple ne séparent pas deux domaines fondamentaux. La relation fondamentale $\mathcal{F}_P$ définie en $\mathfrak{L}$ s'écrira

$$(9) \qquad \Phi_{i_1} \cdot \Phi_{i_2} \cdots\cdots \Phi_{i_k} = 1$$

où certains des générateurs Φ doivent être réduits à l'identité : Φ_{i_μ} qui fait passer du domaine Δ_{ν_μ} au domaine $\Delta_{\nu_{\mu+1}} = \Delta_{\nu_\mu}$ « à travers » le côté σ_{i_μ, ν_μ} intérieur à Δ_{ν_μ} ; φ_{i_μ} est nécessairement elliptique puisque σ_{i_μ, ν_μ} est un arc intérieur à Δ_{ν_μ} ; mais on a précisément $T(\varphi_{i_\mu}) = 1$ lorsque φ_{i_μ} est elliptique.

Le premier membre de (9) s'obtient donc en transformant formellement par T le premier membre de (5).

Inversement une relation fondamentale de G^* s'obtient à partir d'un sommet d'un polygone fondamental Δ_ν, mais ce sommet est l'image d'un sommet d'un D_ν. Toutes les relations fondamentales de G^* s'obtiennent donc par transformation des relations fondamenmentale de G. Toutefois une relation fondamentale de G^* peut être la transformée par T de deux relations fondamentales distinctes de G : Nous n'aurons pas à faire de distinction.

Lemme A1. — *Les relations fondamentales de* G^* *s'obtiennent en transformant par* T *les relations fondamentales de* G.

Corollaire. — $X = T(x)$ *est inchangé par l'opération* U *effectuée sur* x.

En effet $T(\varphi_{\lambda, \mu})$ et $T(\varphi_{\mu, \lambda})$ ont des développements inverses comme $\varphi_{\lambda, \mu}$ et $\varphi_{\mu, \lambda}$, et F_α se transforme par T en $\mathcal{F}_\alpha$ qui est une relation fondamentale de G^* ;

$$T[\varphi_{\lambda, \mu} \cdot F_\alpha \cdot \varphi_{\mu, \lambda}] = T(\varphi_{\lambda, \mu}) \cdot \mathcal{F}_\alpha \cdot T(\varphi_{\mu, \lambda}) = 1.$$

2° X est indépendant du développement de x.

Soient $x = y$ que nous distinguons par deux développements distincts $xy^{-1} = 1$. Le corollaire ci-dessus et le lemme B2 prouvent que $T(xy^{-1}) = T(1) = 1$. D'autre part si

$$x = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_k} \quad \text{et} \quad z = \varphi_{j_1} \varphi_{j_2} \dots \varphi_{j_l}$$
$$T(xz) = \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \dots \Phi_{i_k} \Phi_{j_1} \Phi_{j_2} \dots \Phi_{j_k} = T(x) \cdot T(z)$$

donc $T(x^{-1}) = [T(x)]^{-1}$ qui doit être regardée comme une identité entre deux développements, le développement de x étant le même dans les deux membres.

$$T(xy^{-1}) = T(x) \cdot T(y^{-1}) = T(x) \cdot [T(y)]^{-1} = 1$$

donc

$$T(x) = T(y)$$

Théorème 4. — *La transformation* T *définie en* A *est un homomorphisme de* G *sur* G*.

B. — **Le noyau de l'homomorphisme T.** — 1° *Le sous-groupe invariant* K. — Soit K le sous-groupe engendré par les transformations elliptiques de G.

$h \in K$ si $h = \psi_{i_1} \cdot \psi_{i_2} \dots \psi_{i_k}$ où les ψ_{i_l} sont des transformations elliptiques de G, soit alors $\psi \in G$

$$h' = \psi^{-1} \cdot h \cdot \psi = \psi^{-1} \cdot \psi_{i_1} \cdot \psi \cdot \psi^{-1} \cdot \psi_{i_2} \cdot \psi \cdot \psi^{-1} \dots \psi\psi^{-1} \cdot \psi_{i_k} \cdot \psi.$$

Chaque produit $\psi^{-1} \cdot \psi_{i_j} \cdot \psi$ est elliptique (les points fixes de ψ_{i_j} sont transformés par ψ^{-1} en les points fixes de $\psi^{-1} \cdot \psi_{i_j} \cdot \psi$ à l'intérieur de C) donc $h' \in K$ et K est un sous-groupe invariant.

Corollaire B1. Si $\psi_j \cdot \psi_l \in K$ et $\psi_i \in K$ alors $\psi_j \psi_i \psi_l \in K$.

Corollaire B2. Si $\psi_j \cdot \psi_i \cdot \psi_l \in K$ et $\psi_i \in K$ alors $\psi_j \psi_l \in K$.

2° K $\subset$ noyau de T. Soit ψ_1 elliptique, P_1 son point double sommet du polygone D_1. D'après le chapitre 1, 1re partie, les deux côtés de D_1 aboutissant en P_1 sont congruents par ψ_1.

$\varphi_{1(0)} = \varphi_{1,0} \cdot \psi_1 \cdot \varphi_{0,1}$ est un générateur elliptique de G.

$$\psi_1 = \varphi_{0,1} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_{1,0}$$
$$\operatorname{dev} \psi_1 = (\operatorname{dev} \varphi_{0,1}) \cdot \varphi_1 \cdot (\operatorname{dev} \varphi_{1,0})$$

d'où

$$T(\psi_1) = 1$$

T étant un homomorphisme tout produit de transformations elliptiques, donc tout élément de K est représenté par T sur l'identité de G*.

Nous allons prouver maintenant que le noyau de T ne contient pas d'autre élément que ceux de K.

3° *Représentant réduit.* — Soit $\psi \in G$ développé en un produit de générateurs

$$(10) \qquad \psi = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_k$$

$$(11) \qquad \Psi = T(\psi) = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_k$$

dans cette écriture non simplifiée de Ψ certains facteurs peuvent être égaux à l'identité et du fait de leur suppression dans (11), deux facteurs consécutifs dans la nouvelle écriture de Ψ peuvent être inverses l'un de l'autre. Leur suppression du développement de Ψ conduit encore à un développement de Ψ. La suppression des facteurs correspondant dans (10) fournit le développement d'un élément ψ' que nous appellerons représentant réduit de $T^{-1}(\Psi)$. Le développement de ψ' est tel que son transformé par T n'est susceptible d'aucune réduction par la simple application de la règle $\varphi_i \varphi_i^{-1} = 1$.

Soit ψ_1 obtenu à partir de ψ par suppression dans (10) d'une expression de la forme $\theta . \varphi_{i_1} . \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k} . \theta^{-1}$ où θ est un produit de générateurs, et où les φ_{i_j} sont des générateurs elliptiques.

$$\psi = A . \theta . \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k} . \theta^{-1} . B \qquad \psi_1 = A . B$$

$$\varphi_{i_1} . \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k} \in K \quad \text{donc} \quad \theta . \varphi_{i_1} . \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k} . \theta^{-1} \in K$$

et d'après le corollaire B_1 si $\psi_1 \in K$ on a aussi $\psi \in K$.
ψ' est obtenu à partir de ψ par répétition finie de l'opération ci-dessus qui a fait passer de ψ à ψ_1. Si $\psi' \in K$ on a $\psi \in K$.

4° *L'opération* U *sur* Ψ. — Soit $\Psi = \mathcal{A} . \mathcal{B}$ (où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux produits de générateurs) ; soit ψ' le représentant réduit de $T^{-1}(\Psi)$: $\psi' = A . B$.

$$(12) \qquad \Psi = \mathcal{A} . \mathcal{E} . \mathcal{F}_\alpha . \mathcal{E}^{-1} . \mathcal{B}$$

où $\mathcal{E}$ est un produit de générateurs et $\mathcal{F}_\alpha$ une relation fondamentale de G^*, transformée par T d'une relation fondamentale F_α de G, qui n'est pas nécessairement unique. Soit E un représentant réduit de $T^{-1}(\mathcal{E})$.

$$\psi' = A . E . F_\alpha . E^{-1} . B$$

simplifions alors l'écriture (12) et considérons le représentant réduit ψ'' de $T^{-1}(\Psi)$ avec la nouvelle écriture de Ψ :

si $\qquad \psi'' \in K, \quad \psi' \in K \quad$ et $\quad \psi \in K.$

5° *Supposons maintenant* $T(\psi) = 1$. — $\Psi = T(\psi) = 1$. D'après le lemme B2 on peut réduire formellement le développement (11) à l'identité. Le représentant réduit de $T^{-1}(1)$ est l'identité de G donc est un élément de K et par suite $\psi \in K$.

THÉORÈME 5. — *Le noyau de l'homomorphisme* T *de* G *sur* G^* *est le sous-groupe de* G *engendré par les transformations elliptiques de* G.

En reprenant les notations de la première partie, et en désignant de nouveau par R′ la surface intervenant dans le théorème 2, on peut énoncer.

THÉORÈME 6. — *Le groupe de Poincaré de* R′ *est isomorphe au quotient du groupe* G *par le sous-groupe engendré par les transformations elliptiques de* G.

C. — **Comparaison des groupes et des revêtements.** — Soit G un groupe H-Fuchsoïde opérant dans C et ne possédant pas de transformations elliptiques. Soit $S = C/G$.

a) G est le groupe de Poincarré de S. Il existe une application continue f de C sur S, invariante par les homéomorphismes de G, et telle que

(C, f) est un revêtement non ramifié de S.

b) Soit g un sous-groupe de G. $\Sigma = C/g$. Il existe une application continue φ de C sur Σ, invariante seulement par les homéomorphismes de g, et telle que (C, φ) est un revêtement non ramifié de Σ.

On peut alors déterminer une application continue ψ de Σ sur S telle que

(Σ, ψ) est un revêtement non ramifié de S.

c) Soit G^* une extension de G telle que G soit isomorphe au quotient de G^* par le sous-groupe engendré par les transformations elliptiques de G^*. Soit $S^* = C/G^*$. Il existe une application continue f^* de C sur S^*, invariante par les homéomorphismes de G^*, telle que

(C, f^*) est un revêtement régulièrement ramifié de S^*, le groupe de Poincarré de S^* étant isomorphe à G.