ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES DENY

Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 83-99

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__83_0>

SUR LA DÉFINITION DE L'ÉNERGIE EN THÉORIE DU POTENTIEL

Par Jacques DENY (Strasbourg).

La théorie du potentiel newtonien dans R^3 est l'étude des intégrales de Stieltjès de la forme :

$$U^\mu(x) = \int K(x-y)d\mu(y),$$

où K, le noyau newtonien, est la fonction semi-continue inférieurement $K(x) = |x|^{-1}$. La notion suivante joue dans cette étude un rôle capital :

Définition (I). — *L'énergie de la mesure positive μ est la quantité positive (finie ou infinie) :*

$$\int U^\mu d\mu = \iint K(x-y)d\mu(x)d\mu(y)\ (^1).$$

Ces définitions du potentiel et de l'énergie s'étendent immédiatement au cas d'un noyau K qui n'est plus le noyau newtonien, mais une fonction définie sur $R^m (m \geqslant 1)$, positive, symétrique

$$[K(x) = K(-x)],$$

semi-continue inférieurement.

J'ai proposé deux autres définitions de l'énergie d'une mesure positive[2] ; la première repose sur cette propriété du noyau newtonien : pour que l'intégrale figurant dans (I) soit finie, il faut et il suffit que la fonction (semi-continue inférieurement)

$$I(x) = \iint K(x+y-z)d\mu(y)d\mu(z),$$

(1) L'énergie potentielle, considérée par les physiciens, est la moitié de cette quantité.

(2) *Les potentiels d'énergie finie* (*Acta Mathematica*, 82, 1950, p. 107-183). Cet article sera noté (AM).

soit finie et *continue* pour tout x; l'énergie est alors $I(o)$. Cette condition est trivialement suffisante; d'autre part elle est évidemment réalisée si μ est à support compact et à densité continue. Le cas général est un peu moins immédiat, mais nous verrons à la fin de cette étude une démonstration valable dans des cas bien plus étendus que le cas newtonien (cas des noyaux « réguliers »).

Observons que si la fonction $K(x)$ est sommable sur tout compact, et s'il existe une mesure composée $K * \mu * \check{\mu}$ (3), celle-ci a pour densité la fonction $I(x)$, qui est alors sommable sur tout compact. Cette remarque nous permet d'étendre la définition de l'énergie au cas où le noyau n'est plus une fonction, mais une *mesure positive et symétrique* K :

Définition (II). — *μ est d'énergie finie si la mesure $K * \mu * \check{\mu}$ est bien définie et est à densité continue f; l'énergie de μ est alors la quantité $f(o)$, notée aussi $\mathrm{Sp}\, K * \mu * \check{\mu}$; dans les autres cas μ est d'énergie infinie.*

Supposons maintenant que le noyau K admette une transformée de Fourier (4) qui soit une fonction positive $\mathcal{K}$, sommable sur tout compact. Si μ est à densité continue et à support compact, et si $\mathcal{M}$ désigne la fonction (à valeurs complexes) transformée de μ, la fonction continue (du type positif) $K * \mu * \check{\mu}$ a pour transformée la fonction sommable $\mathcal{K}|\mathcal{M}|^2$, et on a :

$$\mathrm{Sp}\, K * \mu * \check{\mu} = \int \mathcal{K}(x)|\mathcal{M}(x)|^2 dx \ (5).$$

Dans le cas considéré cette remarque conduit à une troisième définition de l'énergie :

Définition (III). — *μ est d'énergie finie lorsqu'elle admet une transformée de Fourier qui est une fonction $\mathcal{M}$ de carré sommable par rapport à la mesure de densité $\mathcal{K}$; l'énergie est alors la quantité $\int \mathcal{K}|\mathcal{M}|^2 dx$; dans les autres cas μ est d'énergie infinie.*

(3) $\check{\mu}$ désigne la mesure symétrique de μ ; pour les définitions et propriétés du produit de composition de deux ou plusieurs mesures positives, voir H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel (Bull. Soc. Math. de France,* 69, 1941, p. 71-96).

(4) La transformation de Fourier doit être entendue ici au sens généralisé de M. L. Schwartz, qui s'appuie sur sa théorie des distributions. *Act. Sc. et Ind.*, nos 1091 et 1122.

(5) dx désigne la mesure de Lebesgue dans R^m. Pour les propriétés concernant la transformation de Fourier et les distributions du type positif qui viennent d'être utilisées, je renvoie à l'ouvrage de M. L. Schwartz dont je suppose connu l'essentiel.

Dans l'article précité j'ai admis prématurément l'identité des définitions (II) et (III) (6), du moins lorsque K satisfait en outre à une condition simple qui sera rappelée prochainement. Or si cette identité est évidente *lorsque μ est à support compact,* le cas général est beaucoup plus délicat. Le but essentiel de cette note est de montrer que, pour la classe étendue des noyaux considérés, toute mesure d'énergie finie pour la définition (II) est d'énergie finie pour la définition (III), et surtout que l'espace des mesures positives d'énergie finie pour la définition (II), normées par la racine carrée de l'énergie, est *complet.*

On sait que cet énoncé sert de base à M. H. Cartan dans sa théorie du potentiel newtonien (7). L'énoncé analogue, relatif à la définition (III), n'est qu'une transposition du théorème de Fischer-Riesz sur l'espace des fonctions de carré sommable par rapport à une mesure positive, obtenue à l'aide de la théorie des distributions.

Je terminerai par quelques remarques sur l'identité des définitions (I) et (II) dans les cas usuels. Je n'ai pu réussir à élucider, dans le cas général, la question de savoir s'il existe ou non des mesures positives d'énergie finie pour (III) et non pour (II). S'il existait de telles mesures, elles posséderaient des propriétés tout à fait paradoxales, qui devraient inciter à les exclure d'une théorie du potentiel : ce sont évidemment les définitions (I) ou (II) qu'il convient d'envisager dans une telle théorie. La transformation de Fourier, si on y fait appel, ne doit jouer qu'un rôle auxiliaire, et d'ailleurs commode.

1. Rappel de résultats relatifs à la définition (III).

Je reprends avec quelques simplifications, et éventuellement quelques précisions, les résultats principaux du chapitre I de mon travail précité (AM), auquel je renverrai le plus souvent pour les démonstrations. Celles-ci sont d'ailleurs des conséquences faciles des définitions et de la théorie des distributions sphériques (8), dont je suppose connus les éléments.

Hypothèses relatives au noyau [*condition* (A)]. — K est une mesure, ou même plus généralement une distribution du type positif, dont la transformée de Fourier est une *fonction* $\mathcal{K}$ (nécessairement posi-

(6) P. 135, note 1.
(7) *Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945, p. 74-106.
(8) Ces distributions sont appelées maintenant « tempérées » par M. Schwartz.

tive et à croissance lente) dont *l'inverse* $1/\mathcal{K}$ *est également une fonction à croissance lente ;* autrement dit, il existe un nombre $q > 0$ avec :

$$\int \frac{\mathcal{K}(x)}{(1+|x|^2)^q} dx > \infty, \qquad \int \frac{dx}{\mathcal{K}(x)(1+|x|^2)^q} < \infty.$$

Cette hypothèse a pour but d'entraîner les théorèmes 1 et 1 *bis* ; d'autre part elle est facile à vérifier pour des noyaux très importants dans la pratique [9], d'où son intérêt, malgré son aspect artificiel.

Distributions d'énergie finie. — La distribution T est dite d'énergie finie si elle satisfait à la définition (III) de l'introduction, c'est-à-dire si :

a) T est sphérique.

b) Sa transformée de Fourier $\mathcal{T} = \mathcal{F}(T)$ est une fonction de carré sommable par rapport à la mesure de densité $\mathcal{K}$.

On posera :

$$||T||^2 = \int \mathcal{K}|\mathcal{T}|^2 dx$$

(énergie de T) [10].

Proposition 1. — Pour que T soit identiquement nulle, il faut et il suffit que $||T|| = 0$ (c'est évident).

Théorème 1. — *L'espace $\mathfrak{W}$ des distributions d'énergie finie, normées par la racine carrée de l'énergie, est complet.*

C'est une conséquence immédiate du théorème de Fischer-Riesz et de la remarque suivante : si $\mathcal{T}$ est une fonction de carré sommable par rapport à la mesure de densité $\mathcal{K}$, elle est à croissance lente [c'est essentiellement ici qu'intervient la condition (A)], donc sphérique ; $T = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{T})$ est donc par définition une distribution d'énergie finie [11].

Proposition 2. — Si T_n converge *fortement* vers T (au sens de la norme-énergie), T_n converge vers T au sens des distributions sphériques.

(9) Par exemple le noyau d'ordre α : $|x|^{\alpha - m}$ $(0 < \alpha < m)$, et aussi la solution élémentaire de l'équation $\Delta U - a^2 U = 0$.

(10) Lorsque K et T sont des mesures positives, il s'agit bien de la définition provisoire (III); je conserve cependant la notation $||T||^2$, la considération de l'espace $\mathfrak{W}$ qui va être défini se révélant utile même dans les cas classiques.

(11) (AM), p. 119-120.

Il suffit de vérifier que $\mathcal{F}(T_n)$ converge vers $\mathcal{F}(T)$ au sens des distributions sphériques [12].

THÉORÈME 1 *bis* (corollaire du théorème 1 de la proposition 2) : *Les ensembles suivants sont fermés dans l'espace* $\mathcal{W}$:

$\mathcal{W}_E$, *ensemble des distributions d'énergie finie portées par un fermé* E *de* R^m (c'est-à-dire dont le support est contenu dans E) ; $\mathcal{W}_E$ est donc une *variété linéaire fermée* de $\mathcal{W}$.

$\mathcal{E}$, *ensemble des mesures positives d'énergie finie.*

$\mathcal{E}_E$, *ensemble des mesures de* $\mathcal{E}$ *portées par le fermé* E ($\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_E$ sont donc des ensembles *convexes* et *complets* de $\mathcal{W}$) [13].

Potentiels d'énergie finie. — Si $T \in \mathcal{W}$, la fonction $\mathcal{U} = \mathcal{K}\mathcal{T}$ est à croissance lente [14] ; c'est donc la transformée d'une distribution sphérique :

$$U^T = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{K}\mathcal{T}),$$

qu'on appellera *potentiel engendré* par T.

Si T est *à support compact,* on a :

$$U^T = K * T \ [15].$$

PROPOSITION 3. — Si T_n converge fortement vers T, U^{T_n} converge vers U^T au sens des distributions sphériques [16].

Fonction d'énergie ; fonction d'énergie mutuelle [17]. — Soient T et $T' \in \mathcal{W}$, $\mathcal{T} = \mathcal{F}(T)$, $\mathcal{T}' = \mathcal{F}(T')$; la fonction $\mathcal{K}\mathcal{T}\overline{\mathcal{T}'}$ est sommable

(12) (AM) p. 120-121.

(13) De même l'ensemble des distributions *réelles* d'énergie finie est fermé.

(14) (AM), p. 121-122 : on a en effet

$$\int |\mathcal{U}|(1+|x|^2)^{-q/2}dx \leqslant \int \mathcal{K}(1+|x|^2)^{-q}dx \int \mathcal{K}|\mathcal{T}|^2 dx < \infty.$$

Il est intéressant d'observer que ce résultat est indépendant de la condition (A) relative à $1/\mathcal{K}$; cette remarque permettrait de faire une étude plus générale que celle du texte, dans laquelle on porterait son attention sur les potentiels eux-mêmes, et non sur les distributions qui les engendrent.

(15) Pour éviter des risques de confusion, j'emploierai le symbole * seulement lorsque le produit de composition peut être défini directement, sans l'usage de la transformation de Fourier, c'est-à-dire, dans toute cette partie, seulement lorsque toutes les distributions, sauf une, sont à support compact.

(16) Démonstration directe toute semblable à celle de la proposition 2 ; cf. également (AM), p. 123, dernières lignes.

(17) Ces notions, qui ne sont pas précisées dans (AM) s'avèreront utiles pour la comparaison des définitions (II) et (III).

(inégalité de Schwarz), c'est donc la transformée d'une fonction continue $J_{T,T'}$ définie partout par :

$$J_{T,T'}(x) = \int e^{2i\pi x.y}\mathcal{K}(y)\mathcal{T}(y)\bar{\mathcal{T}}'(y)dy,$$

et qu'on appellera fonction d'énergie mutuelle de T et T'; en particulier

$$J_{T,T}(x) = I_T(x),$$

sera dite fonction d'énergie de T.

I_T est du type positif, et on a évidemment :

$$||T||^2 = I_T(o) = \mathrm{Sp}\, I_T.$$

Si T et $T' \in \mathcal{W}$ sont à support compact, on a :

$$J_{T,T'} = K * T * \tilde{T}\ (^{18}),$$

et en particulier :

$$I_T = K * T * \tilde{T} = U^{T*\tilde{T}}$$

d'où facilement la

Proposition 4. — Pour qu'une T à support compact soit d'énergie finie, il faut et il suffit que la distribution $K * T * \tilde{T}$ soit une fonction continue ; on a alors :

$$||T||^2 = \mathrm{Sp}\, K * T * \tilde{T}.$$

Si T et $T' \in \mathcal{W}$, et si T' est à support compact, on a :

$$J_{T,T'} = U_T * \tilde{T}'\ (^{19}).$$

Proposition 5. — Si T_n et T'_n convergent fortement vers T et T' (respectivement), la fonction J_{T_n, T'_n} converge uniformément (dans l'espace R^m tout entier), vers $J_{T,T'}$.

Montrons d'abord que I_{T_n} converge uniformément vers I_T ; en effet, par application des inégalités de Schwarz et de Minkowski :

(18) D'après $\mathcal{F}^{-1}(\bar{\mathcal{T}}') = \tilde{T}'$, distribution imaginaire conjuguée de la symétrique de T'

(19) Car $J_{T,T'} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{K}\mathcal{T}\bar{\mathcal{T}}') = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}\bar{\mathcal{T}}')$.

$$
\begin{aligned}
|I_{T_n}(x) - I_T(x)| &= \left| \int e^{2i\pi x . y} \mathcal{K}(y) \{ |\mathcal{T}_n(y)|^2 - |\mathcal{T}(y)|^2 \} dy \right|, \\
&\leqslant \int \mathcal{K}(y) |\mathcal{T}_n - \mathcal{T}| [|\mathcal{T}_n| + |\mathcal{T}|] dy, \\
&\leqslant \left\{ \int \mathcal{K} |\mathcal{T}_n - \mathcal{T}|^2 dy \right\}^{1/2} \left\{ \int \mathcal{K} [|\mathcal{T}_n| + |\mathcal{T}|]^2 dy \right\}^{1/2}, \\
&\leqslant ||T - T_n|| (||T|| + ||T_n||),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat, $||T_n||$ étant uniformément borné.

La proposition 5 s'en déduit immédiatement en écrivant :

$$4J_{T,\, T'} = I_{T+T'} + I_{T-T'} + iI_{T-iT'} - iI_{T+iT'}.$$

Produit scalaire de deux distributions d'énergie finie. — Avec la définition ordinaire du produit scalaire dans les espaces de Hilbert, celui-ci n'est autre que :

$$(T,\, T') = \int \mathcal{K} \mathcal{T} \overline{\mathcal{T}}' = \mathrm{Sp}\, J_{T,\, T'}.$$

Proposition 6. — Toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D})$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact) est une distribution d'énergie finie ; si T est une distribution quelconque de $\mathcal{W}$ on a :

$$(T,\, \varphi) = U^T(\overline{\varphi}).$$

La première partie résulte de la proposition 4 ; soit d'autre part $T \in \mathcal{W}$; comme φ est à support compact on a :

$$(T,\, \varphi) = \mathrm{Sp}\, J_{T,\, \varphi} = \mathrm{Sp}\, U^T * \tilde{\varphi} = U^T(\overline{\varphi})\ \text{[20]}.$$

Proposition 7. — Les fonctions $\varphi \in (\mathcal{D})$ sont denses dans $\mathcal{W}$.

D'après la proposition 1 et le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que si $T \in \mathcal{W}$ est telle que $(T,\, \varphi) = 0$ pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, on a $||T|| = 0$; or, d'après la proposition 6, l'hypothèse entraîne $U^T(\overline{\varphi}) = 0$ pour toute $\overline{\varphi} \in (\mathcal{D})$, d'où $U^T = 0$, d'où

$$||T||^2 = \int \mathcal{U} \overline{\mathcal{T}} = 0\ \text{[21]}.$$

[20] Voici une autre démonstration : si $\psi = \mathcal{F}(\varphi)$ on a

$$(T,\, \varphi) = \int \mathcal{K} \mathcal{T} \overline{\psi} = \int \mathcal{U} \overline{\psi} = U^T(\overline{\varphi})$$

(c'est la relation de Parseval, qui joue un rôle capital dans la théorie de M. L. Schwartz).

[21] Cette démonstration très simple m'a été communiquée par M. L. Schwartz ; on

Remarque. — La question se pose de savoir si les fonctions positives de $(\mathcal{D})$ sont denses dans $\mathcal{E}$ ([22]). Une réponse affirmative montrerait l'identité de définition (II) et (III) de l'énergie d'une mesure positive dans le cas d'un noyau positif (cf. § 3).

Proposition 8. — Soit μ_n une suite de mesures positives portées par un compact fixe, et convergeant vaguement vers ε (masse $+1$ en o); soit $T \in \mathcal{W}'$; la distribution $T_n = T * \mu_n$ converge fortement vers T ([23]).

Si en particulier $\mu_n \in (\mathcal{D})$, T_n est indéfiniment dérivable; ce procédé de « régularisation » est d'un emploi commode.

2. Lemmes relatifs au produit de composition des mesures positives.

Les lemmes suivants seront utiles pour la comparaison des définitions (II) et (III); ils sont faciles à établir mais comme ils ne sont pas tout à fait classiques, la démonstration en sera brièvement esquissée. Nous nous bornerons au cas des mesures de Radon dans R^m, bien que l'extension aux groupes localement compacts soit le plus souvent immédiate.

Soit $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^+_{R^m}$ l'ensemble des fonctions définies sur R^m, à valeurs réelles et $\geqslant 0$, continues et à support compact (nulles hors d'un compact). Le produit de composition des deux mesures positives λ et μ « a un sens » si la quantité bien définie

$$\iint f(x+y)d\lambda(x)d\mu(y)$$

est finie pour toute $f \in \mathcal{C}^+$; c'est alors une fonction additive de f, soit $\nu(f)$, qui détermine une mesure de Radon positive ν, notée $\lambda * \mu$ ou $\mu * \lambda$; on sait qu'il en est ainsi lorsque l'une des mesures λ ou μ est à support compact, et aussi lorsque λ et μ sont toutes deux de masse totale finie $\left(\int d\lambda < \infty, \int d\mu < \infty\right)$.

trouvera dans (AM), p. 126, une autre démonstration, basée sur les opérations de projection et de régularisation, qui permet une construction d'une suite $\varphi_n \in (\mathcal{D})$ convergeant fortement vers une $T \in \mathcal{W}'$ donnée.

([22]) Le procédé de régularisation montre que les mesures de $\mathcal{E}$ *à support compact* peuvent être approchées, au sens de la norme, par de telles fonctions; mais la question de savoir si les mesures positives à support compact sont denses dans $\mathcal{E}$ semble assez délicate.

([23]) (AM) p. 124; il suffit d'observer que la fonction continue et bornée $\mathcal{F}(\mu_n)$ converge partout vers $+1$, la convergence étant uniforme sur tout compact.

LEMME 1. — Soient λ_n et μ_n deux mesures positives croissantes [24], convergeant vaguement [25] vers les mesures respectives λ et μ. Si $\lambda_n * \mu_n$ a un sens et est majoré par une mesure positive α, $\lambda * \mu$ a un sens et est limite vague de la suite croissante $\lambda_n * \mu_n$.

En effet pour toute $f \in \mathcal{C}^+$ le nombre croissant :

$$\lambda_n * \mu_n(f) = \iint f(x+y) d\lambda_n(x) d\mu_n(y),$$

qui est majoré par $\alpha(f) = \int f d\alpha$ admet une limite finie $\beta(f)$, $0 \leqslant \beta(f) \leqslant \alpha(f)$; comme évidemment $\beta(f_1) + \beta(f_2) = \beta(f_1 + f_2)$ il existe une mesure de Radon β telle que $\beta(f) = \int f d\beta$, et $\lambda_n * \mu_n$ converge vaguement vers β.

D'autre part $f(x+y)$ étant une fonction semi-continue inférieurement dans l'espace produit $R^m \times R^m$, et les mesures λ_n et μ_n étant croissantes, il est bien connu qu'on a [26] :

$$\iint f(x+y) d\lambda(x) d\mu(y) = \lim \iint f(x+y) d\lambda_n(x) d\mu_n(y) = \int f d\beta,$$

ce qui montre bien que le produit de composition $\lambda * \mu$ a un sens et n'est autre que la mesure β.

LEMME 2. — Soient λ_n et μ_n deux mesures positives convergeant vaguement vers les mesures respectives λ et μ ; si le produit de composition $\lambda_n * \mu_n$ a un sens et converge vaguement vers la mesure positive α, $\lambda * \mu$ a un sens et est majoré par α.

En effet, soit $f \in \mathcal{C}^+$; comme $f(x+y)$ est semi-continue inférieurement dans $R^m \times R^m$, on a :

$$\begin{aligned}\iint f(x+y)\, d\lambda(x) d\mu(y) &\leqslant \lim \iint f(x+y) d\lambda_n(x) d\mu_n(y), \\ &= \lim \int f d(\lambda_n * \mu_n) = \int f d\alpha,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(24) C'est-à-dire $\lambda_{n+p} - \lambda_n$ et $\mu_{n+p} - \mu_n$ sont des mesures positives quel que soit $p > 0$.

(25) La mesure *positive* μ_n converge vaguement vers μ si $\int f d\mu_n$ tend vers $\int f d\mu$ pour toute $f \in \mathcal{C}^+$; pour les résultats principaux relatifs à la convergence vague, cf. l'article de M. Cartan cité en (3).

(26) Il suffit d'observer que dans $R^m \times R^m$ la mesure $\lambda_n \times \mu_n$ « produit tensoriel » de λ et μ converge vaguement vers $\lambda \times \mu$, car les nombres $\lambda_n \times \mu_n(g)$ convergent vers $\lambda \times \mu(g)$ pour toutes les g de la forme $f_1(x) f_2(y)$, qui forment un système total dans $\mathcal{C}^+_{R^m \times R^m}$.

Ce lemme est bien connu lorsque λ_n et μ_n sont portées par des compacts fixes ; on a alors $\alpha = \lambda * \mu$ (et d'ailleurs la convergence vague de $\lambda_n * \mu_n$ est assurée)(27). D'après le lemme I il en est encore ainsi lorsque les mesures λ_n et μ_n sont croissantes, mais il est évident que dans le cas général on peut avoir l'inégalité stricte $\lambda * \mu < \alpha$(28). Le lemme exprime donc une sorte de semi-continuité inférieure du produit de composition relativement à la convergence vague.

Lemme 3. — Soit μ une mesure positive, $\check{\mu}$ la mesure symétrique. Si le produit de composition $\mu * \check{\mu}$ a un sens, c'est une mesure du type positif.

C'est bien connu et c'est d'ailleurs une conséquence immédiate de la définition(29) lorsque μ est à support compact. Dans le cas général soit μ_n la restriction de μ à la boule $|x| \leqslant n$; d'après le lemme I $\mu_n * \check{\mu}_n$ converge vaguement vers $\mu * \check{\mu}$; si donc f est une fonction (à valeurs complexes) continue et à support compact, on a bien :

$$\int (f * \tilde{f}) d(\mu * \check{\mu}) = \lim \int (f * \tilde{f}) d(\mu_n * \check{\mu}_n) \geqslant 0 \text{ (30)}.$$

Lemme 4. — Soient λ et μ deux mesures positives du type positif ; si le produit de composition $\lambda * \mu$ a un sens, c'est une mesure du type positif.

C'est également bien connu si λ et μ sont à support compact, ou plus généralement sont de masse totale finie. Dans le cas général il suffit d'observer que les mesures

$$\lambda_n = \lambda \, exp\,(-|x|^2/n), \qquad \mu_n = \mu \, exp\,(-|x|^2/n)$$

sont du type positif et de masse totale finie(31) ; on achève alors comme pour le lemme 3.

(27) H. Cartan, *loc. cit.*

(28) Il suffit par exemple de prendre, dans R^1, $\lambda_n = dx$ (mesure de Lebesgue), $\mu_n = \varepsilon_n$ (masse $+1$ au point $x = n$) ; on a $\alpha = dx > \lambda * \mu = 0$

(29) La mesure α est dite du type positif si $\int (f * \tilde{f}) d\alpha \geqslant 0$ pour toute f continue à support compact ; on a posé $\tilde{f}(x) = \overline{f}(-x)$.

(30) La démonstration s'étend lorsqu'on remplace R^m par un groupe localement compact qui est réunion dénombrable de compacts.

(31) En effet puisque la mesure positive λ est du type positif, elle est à croissance lente (L. Schwartz, *loc. cit.*) ; on a donc $\int exp\,(-|x|^2/n) d\lambda < \infty$. D'autre part le produit de λ par la fonction $exp\,(-|x|^2/n)$, qui est à décroissance rapide et du type positif, est aussi du type positif, comme cela résulte par exemple de la théorie des distributions sphériques. La démonstration indiquée n'est évidemment valable que pour le groupe R^m.

3. Comparaison des définitions (II) et (III) dans le cas d'un noyau positif. Le théorème de H. Cartan pour la définition (II).

Définition. — Le noyau K est désormais une mesure positive satisfaisant à la condition (A) du § 1. On désignera par $\mathcal{E}'$ l'ensemble des mesures positives μ telles que le produit de composition $K * \mu * \check{\mu}$ ait un sens[32] et soit de la forme $f(x)dx$, où f est une fonction continue.

$\mathcal{E}'$ est donc l'ensemble des mesures positives d'énergie finie pour la définition (II); d'après la proposition 4 il y a identité entre les mesures de $\mathcal{E}'$ à support compact et celles de $\mathcal{E}$ à support compact[33]. Nous allons voir que toute mesure de $\mathcal{E}'$ est dans $\mathcal{E}$, et que $\mathcal{E}'$ est complet pour la norme-énergie, avec l'une quelconque des définitions (II) ou (III); d'une façon précise :

Théorème 2 [34]. — *$\mathcal{E}'$ est identique à l'ensemble des mesures de $\mathcal{E}$ qui sont limites fortes de mesures positives d'énergie finie à support compact; c'est donc un espace complet pour la norme-énergie* [35].

Soient d'autre part λ et μ deux mesures quelconques de $\mathcal{E}'$:

1° *Le potentiel* U^μ (distribution définie au § 1 à l'aide de la transformation de Fourier) *n'est autre que le produit de composition* $K * \mu$ [36].

(32) Le produit de composition des trois mesures positives λ, μ, ν « a un sens » si $\lambda * \mu = \alpha$ a un sens et s'il en est de même de $\alpha * \nu$; alors $\mu * \nu$ a un sens, et on a l'associativité $(\lambda * \mu) * \nu = \lambda * (\mu * \nu)$.

(33) Rappelons que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des mesures positives d'énergie finie pour la définition (III), ensemble complet pour la norme-énergie (théorème 1 *bis*).

(34) Le théorème 2 est énoncé sans démonstration dans H. Cartan et J. Deny, *Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique* (*Acta de Szeged*, 12, 1950, p. 83), et utilisé systématiquement. Dans le chapitre II de (AM) il y a confusion entre les définitions (II) et (III) (l'identité de ces deux définitions n'étant évidente, rappelons-le, que dans le cas des mesures à support compact). Chaque fois que dans un énoncé de ce chapitre (II) de (AM) il est question d'une mesure *positive* d'énergie finie, on doit sous-entendre qu'il s'agit d'une mesure de $\mathcal{E}'$, les démonstrations correspondantes n'étant pleinement justifiées que grâce au théorème 2 ci-dessus.

(35) Dans tout ce paragraphe, quand nous parlerons, sans préciser davantage, d'énergie, de convergence forte, etc., c'est de la définition (III) qu'il s'agira; de même nous continuerons à attribuer à la notation $\|\mu\|^2$ le même sens qu'au § 1.

(36) Puisque par hypothèse $K * \mu * \check{\mu}$ a un sens, il en est de même (a fortiori) de $K * \mu$.

2° *Le produit scalaire* (λ, μ) *n'est autre que la trace du produit de composition* $K * \lambda * \check{\mu}$, *qui a également un sens et est une mesure positive à densité continue ; en particulier :*

$$||\mu||^2 = \mathrm{Sp}\, K * \mu * \check{\mu}.$$

Nous subdiviserons la démonstration en quatre parties :

a) *Si* $\mu \in \mathcal{E}'$, *elle est d'énergie finie et est limite forte de ses restrictions* μ_n *aux boules* $B_n(|x| \leqslant n)$.

Pour simplifier le langage, convenons de dire, avec M. Schwartz, qu'une mesure (plus généralement une distribution) est une « fonction » si elle est de la forme $f(x)dx$, f étant une fonction sommable sur tout compact. Ceci posé, la mesure $K * \mu_n * \check{\mu}_n$, qui est du type positif (lemmes 3 et 4), et est majorée par la fonction continue $K * \mu * \check{\mu}$; est elle-même une fonction continue ([37]) ; μ_n est donc d'énergie finie (proposition 4) et $||\mu_n||^2 = \mathrm{Sp}\, K * \mu_n * \check{\mu}_n$ est bornée par $\mathrm{Sp}\, K * \mu * \check{\mu}$.

De cette remarque, et de la relation immédiate

$$||\mu_{n+p} - \mu_n||^2 \leqslant ||\mu_{n+p}||^2 - ||\mu_n||^2,$$

il résulte aussitôt que $\{\mu_n\}$ constitue une suite de Cauchy, donc converge fortement vers une certaine mesure $\mu_0 \in \mathcal{E}$ (car $\mathcal{E}$ est complet) ; d'après la proposition 2, μ_n converge vaguement vers μ_0 ([38]), qui est donc identique à μ ; μ est donc limite forte de ses restrictions μ_n.

b) *Si* $\mu \in \mathcal{E}$ *est limite forte de mesures* μ_n *à support compact, on a* $\mu \in \mathcal{E}'$.

Montrons d'abord que le produit de composition $K * \mu$ a un sens : en effet la distribution U^{μ} étant limite, au sens des distributions sphériques, des mesures positives $U^{\mu_n} = K * \mu_n$ (proposition 3), c'est une mesure positive et $K * \mu_n$ converge vaguement vers U^{μ} ; le lemme 2 montre alors que $K * \mu$ a un sens et est majoré par U^{μ}.

Considérons maintenant la fonction d'énergie

$$I_{\mu_n} = K * \mu_n * \check{\mu}_n = U^{\mu_n} * \check{\mu}_n ;$$

On peut d'ailleurs montrer que cette mesure est alors de la forme $K * \mu = U(x)dx$, la fonction $U(x)$ étant sommable sur tout compact [cf. (AM), p. 138], mais ce fait ne sera pas utilisé ici.

([37]) Théorème de M. Godement ; pour la référence et une autre démonstration, utilisant les distributions, cf. (AM), p. 135, note ([2]).

([38]) Si la mesure positive μ_n converge au sens des distributions sphériques vers T, T est une mesure positive, et limite vague de μ_n (L. Schwartz, *loc. cit.*).

elle converge uniformément vers $I_\mu = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{K}|\mathcal{M}|^2)$, où $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mu)$ est la transformée de Fourier de μ (proposition 5). I_μ est donc une fonction positive et la mesure $U^{\mu_n} * \check{\mu}_n$ converge vaguement vers $I_\mu dx$. La convergence vague de U^{μ_n} vers U^μ et le lemme 2 montrent alors que $U^\mu * \check{\mu}$ a un sens et est majoré par $I_\mu dx$.

Puisque $K * \mu \leqslant U^\mu$, le produit de composition $K * \mu * \check{\mu}$ a un sens et est majoré par $I_\mu dx$; mais comme il est du type positif (lemmes 3 et 4) et que I_μ est continue, c'est aussi une fonction continue, et il est bien établi que $\mu \in \mathcal{E}'$.

c) *Si* $\mu \in \mathcal{E}'$, *on a* $U^\mu = K * \mu$.

On a seulement montré que $K * \mu \leqslant U^\mu$, mais si on considère à nouveau les restrictions μ_n de μ aux boules B_n, le lemme 1 montre que les mesures croissantes $U^{\mu_n} = K * \mu_n$ convergent vers $K * \mu$, et comme d'autre part U^{μ_n} converge vaguement vers U^μ (en vertu de la convergence forte de μ_n vers μ, établie en *a*), on a bien

$$U^\mu = K * \mu.$$

d) *Si* λ *et* $\mu \in \mathcal{E}'$, $K * \lambda * \check{\mu}$ *a un sens et n'est autre que* $J_{\lambda,\mu} dx$, *où* $J_{\lambda,\mu}$ *est la fonction d'énergie mutuelle de* λ *et* μ.

En effet les restrictions λ_n et μ_n de λ et μ à B_n convergeant fortement vers λ et μ, la fonction continue $J_{\lambda,\mu}$ converge uniformément vers $J_{\lambda,\mu} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{K}\mathcal{L}\overline{\mathcal{M}})$, où $\mathcal{L} = \mathcal{F}(\lambda)$, $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mu)$, (proposition 5); $J_{\lambda_n,\mu_n} dx = K * \lambda_n * \check{\mu}_n = U^{\lambda_n} * \check{\mu}_n$ converge donc vaguement vers $J_{\lambda,\mu} dx$, qui se trouve être une mesure positive. Mais U^{λ_n} converge vaguement vers U^λ (d'après *c*), donc $U^\lambda * \check{\mu}$ a un sens (lemme 2), donc $U^{\lambda_n} * \check{\mu}_n$ converge vaguement vers $U^\lambda * \check{\mu}$ (lemme 1). On a donc bien $J_{\lambda,\mu} dx = U^\lambda * \check{\mu} = K * \lambda * \check{\mu}$.

Il reste à tirer les conséquences évidentes :

$$(\lambda, \mu) = J_{\lambda,\mu}(o) = \operatorname{Sp} K * \lambda * \check{\mu},$$

et en particulier

$$\|\mu\|^2 = \operatorname{Sp} K * \lambda * \check{\mu},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Remarques. — $\mathcal{E}'$ étant un sous-ensemble complet de $\mathcal{E}$, et les définitions (II) et (III) de l'énergie étant identiques pour les mesures de $\mathcal{E}'$, on a montré que l'espace des mesures positives d'énergie finie pour la définition (II), normées par la racine carrée de l'énergie, est complet, ce qui constitue le théorème de M. Cartan pour la définition (II) (39). On s'est servi du théorème analogue pour la définition (III) (théorème 1 *bis*), dont la démonstration était presque immédiate.

Ces deux théorèmes ne seraient pas distincts si on avait l'identité $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Nous laisserons cette question ouverte ; pour y répondre affirmativement, il faudrait montrer que si $\mu \in \mathcal{E}$, la restriction de μ à B_n, ou même seulement la mesure $\mu_n = \mu\, exp\,(-|x|^2/n)$ est d'énergie uniformément bornée (40).

4. Identité des définitions (I) et (II) dans le cas d'un noyau régulier.

Dans un article récent l'identité des deux premières définitions de l'énergie a été établie lorsque le noyau satisfait à des hypothèses de régularité assez restrictives (41) ; je désire reprendre ici cette question par une méthode plus simple et permettant de s'affranchir de quelques-unes de ces restrictions.

Les noyaux que nous allons considérer sont des fonctions positives et semi-continues inférieurement (s. c. i.) ; à toute mesure positive μ on peut associer la fonction définie partout, s. c. i.,

$$V^\mu(x) = \int K(x-y)d\mu(y).$$

Nous supposerons également que le noyau satisfait à la condition suivante :

Condition (B). — *Pour toute mesure positive μ à support compact et telle que la restriction de $V^\mu(x)$ au support de μ soit continue, la fonction $V^\mu(x)$ est continue dans l'espace R^m tout entier.*

Le noyau $|x|^{\alpha-m}$ $(0 < \alpha < m)$ satisfait à cette condition : c'est le théorème bien connu de MM. Evans et Vasilesco. Ce résultat a été

(39) Voir note (7) ; l'énoncé de M. Cartan concerne le potentiel newtonien et la définition (I) de l'énergie ; il reste à s'assurer de l'identité des définitions (I) et (II) dans le cas de noyaux présentant quelques caractères de régularité ; c'est l'objet du § 4.

(40) Voici un problème généralisant celui du texte : si les transformées de Fourier $L\mu$ et M de deux mesures positives sphériques λ et μ sont des « fonctions » dont le produit ordinaire LM est sommable sur tout compact et sphérique, le produit de composition $\lambda * \mu$ a-t-il un sens et a-t-on $\lambda * \mu = \mathcal{F}^{-1}$ (LM) ? En cas de réponse affirmative (ce qui est d'ailleurs assez peu probable) l'étude précédente serait superflue et l'identité des définitions (II) et (III) évidente.

(41) H. Cartan et J. Deny, article cité en (34).

étendu récemment par M. Kametani aux noyaux $K(x) = K(r)$ qui sont des fonctions de la seule distance $|x| = r$ uniquement supposées continues et décroissantes pour $r > 0$ ([42]).

THÉORÈME 3. — *Soit* $K(x)$ *un noyau positif satisfaisant aux conditions* (A) *et* (B). *Pour qu'une mesure positive* μ *soit dans* $\mathcal{E}'$ *il faut et il suffit que l'intégrale*

$$(1) \qquad \iint K(x-y)d\mu(x)d\mu(y)$$

soit finie ; ce nombre est alors égal à l'énergie $||\mu||^2 = \mathrm{Sp}\, K * \mu * \check{\mu}$.

Montrons d'abord que si $\mu \in \mathcal{E}'$, (1) est finie. D'après le théorème 2, les mesures d'énergie finie à support compact sont denses dans $\mathcal{E}'$: d'après la proposition 8, il en est de même des mesures de la forme $f(x)dx$, où $f(x) \geqslant 0$ est une fonction continue à support compact. Or pour une telle mesure l'intégrale (1) est la valeur en o de la fonction continue $\iint K(x+y-z)d\mu(y)d\mu(z)$; c'est donc $\mathrm{Sp}\, K * \mu * \check{\mu}$, ou encore $||\mu||^2$ (théorème 2). Dans le cas général μ est limite forte, donc limite vague, d'une suite de mesures μ_n du type précédent ; la semi-continuité inférieure de K entraîne alors :

$$\iint K(x-y)d\mu(x)d\mu(y) \leqslant \lim \iint K(x-y)d\mu_n(x)d\mu_n(y)$$
$$= \lim ||\mu_n||^2 = ||\mu||^2 < \infty.$$

Soit maintenant μ une mesure positive telle que l'intégrale (1) soit finie :

Si μ est à support compact et si la fonction

$$V^\mu(x) = \int K(x-y)d\mu(y)$$

est continue, on sait que $\mu \in \mathcal{E}'$ et on a, d'après le théorème 2 :

$$U^\mu = K * \mu = V^\mu(x)dx,$$

([42]) On trouvera une démonstration et de nombreuses références dans l'article récent : K. KUNUGUI, *Étude sur la théorie du potentiel généralisé* (*Osaka Math. Journal*, 2, 1950, p. 63-102). Dans l'article précité de H. CARTAN et J. DENY, on trouvera une condition suffisante qui s'applique au cas d'un noyau qui ne dépend pas seulement de r.

d'où $\|\mu\|^2 = \mathrm{Sp}\, U^\mu * \check{\mu} = \int V^\mu(x)d\mu(x) = \iint K(x-y)d\mu(x)d\mu(y)$.

Si μ est seulement supposée à support compact E, la fonction $V^\mu(x)$ est s. c. i., donc mesurable pour μ, et il existe pour tout $n > 0$, un compact $F_n \subset F$ avec $\mu(F - F_n) < 1/n$ et tel que la restriction de $V^\mu(x)$ à F_n soit continue (théorème de Lusin). Soit μ_n la restriction de μ à F_n; la restriction de $V^\mu(x)$ à F_n étant continue, $V^{\mu_n}(x)$ est continue dans tout R^m [condition (B)] (43). D'autre part μ_n converge fortement, donc vaguement, vers une mesure de $\mathcal{E}'$ qui n'est autre que μ (44). On a donc bien montré que $\mu \in \mathcal{E}'$ et de plus (K étant s. c. i. et les mesures μ_n croissantes) :

$$\|\mu\|^2 = \lim \|\mu_n\|^2 = \lim \iint K(x-y)d\mu_n(x)d\mu_n(y)$$
$$= \iint K(x-y)d\mu(x)d\mu(y).$$

Si enfin μ est quelconque, il suffit de considérer la restriction μ_n de μ à la boule $|x| \leqslant n$: on vient de voir que $\mu_n \in \mathcal{E}'$ et on achève comme précédemment.

Le théorème 3 est donc démontré ; il va nous permettre d'établir un résultat annoncé dans l'introduction. Soient en effet λ et μ deux mesures de $\mathcal{E}'$; en appliquant le théorème 3 aux mesures λ, μ et $\lambda + \mu$ (qui est aussi dans $\mathcal{E}'$), et tenant compte de

$$\|\lambda + \mu\|^2 = \|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2 + 2(\lambda, \mu),$$

il vient

$$(\lambda, \mu) = \iint K(x-y)d\lambda(x)d\mu(y). \tag{2}$$

Observons maintenant que la fonction partout définie $I(x)$ associée à μ (voir l'Introduction) peut s'écrire, compte tenu de la symétrie du noyau :

$$I(x) = \iint K(x+y-z)d\mu(y)d\mu(z) = \iint K(y-z)d\mu(y)d\mu^x(z)$$

(43) En effet en écrivant $V^\mu(x) = V^{\mu_n}(x) + V^{\mu-\mu_n}(x)$, on voit que la restriction de $V^\mu(x)$ à F_n, qui est une fonction continue, est la somme de deux fonctions s. c. i. ; chacune de ces dernières fonctions est donc continue.

(44) Une suite *croissante* de mesures positives d'énergie uniformément bornée est une suite de Cauchy, d'après une remarque déjà faite au § 3 (démonstration de *a*).

où μ^x est la mesure déduite de μ par la translation x. D'après (2) et le théorème 2 on a donc, en posant $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mu)$:

$$\mathrm{I}(x) = (\mu, \mu^x) = \int \mathcal{K}(y) |\mathcal{M}(y)|^2 e^{2i\pi x \cdot y} dy \qquad (^{45})$$

de sorte que $\mathrm{I}(x)$ *est partout égale à la fonction d'énergie* $\mathrm{I}_\mu(x)$, définie au § 1. Elle est donc *continue* dans tout R^m (46).

(Parvenu aux Annales en décembre 1950.)

Addendum : Lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{F}(\mathrm{K})$ présente certains caractères de régularité, il est possible de montrer entièrement l'identité des définitions (II) et (III). C'est le cas du noyau $|x|^{\alpha - m}$ $(0 < \alpha < m)$, $(\mathcal{K}(x) = \mathrm{C}_\alpha |x|^{-\alpha})$ et de la solution élémentaire de

$$\Delta u - a^2 u = 0 \left[\mathcal{K}(x) = \mathrm{C}(a^2 + 4\pi^2 |x|^2)^{-1}\right].$$

Principe de la démonstration : Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{U}'$, $\mathrm{T}_n = \mathrm{T} \exp(-\pi |x|^2/n^2)$. Il suffit de montrer que T_n est d'énergie finie et converge fortement vers T (car si T est une mesure positive, T_n sera dans $\mathcal{E}'$; cf. fin du § 3), et pour cela que $\| \mathrm{T}_n \|$ est uniformément bornée (pour $n > 1$). Or, d'après un calcul facile : $\| \mathrm{T}_n \|^2 \leqslant \int \mathcal{K}_n |\mathcal{T}|^2 dx$, où

$$\mathcal{K}_n(x) = \int \mathcal{K}(t - x) n^m \exp(-\pi n^2 |t|^2) dt$$

est majoré par $\mathrm{A}\mathcal{K}(x)$ dans les deux exemples ci-dessus (c'est élémentaire dans le second cas ; dans le premier cela résulte d'un lemme de M. Frostman).

(45) Car si $\mathcal{F}(\mu) = \mathcal{M}(y)$, $\mathcal{F}(\mu^a) = \mathcal{M}(y) e^{2i\pi a \cdot y}$.

(46) On peut également observer que, $\mathcal{K}|\mathcal{M}|^2$ étant sommable, $\mathrm{I}(x)$ tend uniformément vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini : c'est le théorème de Riemann-Lebesgue.