JEAN KUNTZMANN

# Notions de grille et de tube

*Annales de l'institut Fourier*, tome 2 (1950), p. 197-205
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__197_0>

# NOTIONS DE GRILLE ET DE TUBE

par J. KUNTZMANN (Grenoble).

Les notions dont le calcul numérique s'occupe habituellement, fonction, etc. ne paraissent pas lui être spécialement adaptées. Nous présentons ici deux notions nouvelles répondant à ce besoin.

**Lemme sur les intervalles.**

Deux ou plusieurs intervalles sont dits *sécants* s'ils ont au moins un point commun. Pour que $n$ intervalles soient sécants, il faut et il suffit qu'ils soient sécants deux à deux.

En effet, si les intervalles $i_1$, $i_2$, $i_3$, ..., $i_n$ sont sécants deux à deux, les deux premiers ont en commun un intervalle $j_{12}$ (qui peut être réduit à un point). L'un des intervalles $i_1$ par exemple n'a aucun point à droite de $j_{12}$, l'autre n'a aucun point à gauche de $j_{12}$ ; $i_3$ est sécant pour $j_{12}$, en effet dans le cas contraire il est à droite ou à gauche de $j_{12}$ et par suite n'a pas de point commun soit avec $i_1$, soit avec $i_2$. On continue le raisonnement avec $i_4$, ..., $i_n$.

Remarque. — Le même raisonnement est valable dans le plan pour les rectangles à côtés parallèles à $Ox$ et $Oy$. Il suffit de remarquer que l'intersection de deux rectangles est un rectangle dont les projections sont les intersections des projections.

**Grille.** — Une grille s'obtient en considérant un ensemble fini de valeurs de $x$, à chacune desquelles on fait correspondre non pas une valeur $f(x)$ mais un *intervalle d'incertitude* (de longueur en principe indépendante de la valeur considérée). En général, nous nous donnerons cet intervalle par sa valeur centrale et sa demi-longueur $i$ que nous appellerons *l'incertitude*. *Exemples*. Résultats de mesures.

**Tube.** — Un tube s'obtient en considérant une variable $x$ parcourant un intervalle et en faisant correspondre à chaque valeur de $x$, non pas une valeur de $f(x)$, mais un certain *intervalle d'incertitude* (en principe de longueur indépendante de $x$). Nous appellerons encore *incertitude* et nous désignerons par $i$ la demi-longueur de cet intervalle. *Exemples.* Graphique d'un appareil enregistreur.

Nous appellerons *fonction* un tube dont l'incertitude est nulle.

**Opérations élémentaires sur les tubes et les grilles.**

On dit qu'un tube, une grille A *contient* un tube, une grille B si chaque intervalle d'incertitude de B est contenu dans l'intervalle d'incertitude correspondant de A.

Remarque. — Une grille ne peut contenir un tube.

On dit que deux tubes, deux grilles, un tube et une grille sont *compatibles* si les intervalles d'incertitude relatifs à une même valeur de $x$ ont une partie commune dès qu'ils existent tous deux.

D'après le lemme sur les intervalles, pour que $n$ grilles ou tubes soient compatibles dans leur ensemble, il faut et il suffit qu'ils soient compatibles deux à deux.

# I

## GRILLES OU TUBES PARTICULIERS

**Grille ou tube nul.**

Une grille, un tube sont dits *nuls* s'ils sont compatibles avec la fonction identiquement nulle.

**Grille ou tube polynomial de degré *n*.**

Une grille, un tube sont dits *polynomiaux de degré n* s'ils sont compatibles avec un polynome de degré $n$. En particulier, on parlera de grille ou tube constant, linéaire, quadratique, etc.

**Grille ou tube localement polynomial de degré *n*.**

Un tube sera dit L-*polynomial de degré n* si toute section de longueur L est polynomiale de degré $n$.

Pour une grille, on comptera soit la longueur de l'intervalle, soit le nombre de points consécutifs. Une grille sera dite L-polynomiale (ou N-polynomiale) de degré $n$ si toute section de longueur L, ou toute section formée de N points consécutifs est polynomiale de degré $n$ ($N \geqslant n+2$).

**Caractérisation des grilles polynomiales de degré *n*.**

On suppose la grille donnée par son incertitude et par les milieux d'intervalles :

$$m_1, m_2, \ldots, m_n.$$

On forme avec les différences $n^{\text{èmes}}$ divisées un tableau à $n+1$ entrées. Une condition nécessaire et suffisante pour que la grille soit polynomiale de degré $n$ est que les intervalles d'incertitude de ces différences divisées soient sécants.

En effet, les intervalles d'incertitude des différences premières contiennent les différences premières du polynôme. Les intervalles d'incertitude des différences secondes contiennent les différences secondes du polynôme, etc. Pour les différences $n^{\text{èmes}}$ le polynôme se réduit à une constante, donc les intervalles d'incertitude sont sécants.

Inversement, on peut supposer démontré, que si les intervalles d'incertitude des différences $n-1^{\text{èmes}}$ sont sécants, la grille est polynomiale de degré $n-1$. Or, si les intervalles d'incertitude des différences $n^{\text{èmes}}$ sont sécants, on peut par addition d'un polynôme de degré $n$ se ramener au cas où ces intervalles contiennent tous zéro. Cela revient à dire que les intervalles d'incertitude des différences $n-1^{\text{èmes}}$ sont sécants donc que la nouvelle grille est polynomiale de degré $n-1$. La grille proposée est bien polynomiale de degré $n$.

**Calcul pratique.**

Montrons maintenant comment on peut opérer pratiquement pour reconnaître avec le moins de calcul possible si une grille est polynomiale de degré $n$ ou non,

Remarquons d'abord que si $n$ n'est pas fixé à priori, on en obtiendra une borne inférieure en formant seulement certaines différences. Supposons, par exemple, que la grille soit équidistante (c'est-à-dire que les valeurs de $x$ soient équidistantes), on pourra former les différences ordinaires. Pour que la grille soit polynomiale de degré $n$, il faut que les différences $n+1^{\text{èmes}}$ soient toutes inférieures à $2^{n+1}i$.

Pour rendre le critère plus efficace, on aura souvent intérêt à prendre des points régulièrement espacés aussi écartés que la grille le permet.

Supposons $n$ fixé. On peut soustraire de la grille des polynomes convenables de degré $n$ au plus de manière à ramener autant que possible les intervalles d'incertitude à contenir zéro.

Si l'on peut effectivement ramener tous les intervalles d'incertitude à contenir zéro, la grille est bien polynomiale de degré $n$. Dans le cas contraire, on découvrira assez vite des intervalles d'incertitude de différences $n^{\text{èmes}}$ qui ne sont pas sécants et la grille n'est pas polynomiale de degré $n$. Dans l'un et l'autre cas, l'habileté du calculateur joue un rôle essentiel.

Nous allons traiter quelques exemples.

Soit la grille :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0 | 1/2 | $-1/2$ | 0 | $-1$ | $-1/2$ | $-1/2$ | 0 | 0 |

avec $i=1/2$. On demande si cette grille est quadratique.

Cherchons des différences secondes aussi grandes que possible avec une faible incertitude et des différences secondes aussi faibles que possible avec une faible incertitude. Par exemple :

$$\delta(2,\ 5,\ 8) \quad \text{donne} \quad (1/36,\ 9/36)$$
$$\delta(0,\ 2,\ 5) \quad \text{donne} \quad (-19/60,\ 1/60)$$

qui est non sécant avec le premier, donc la grille n'est pas quadratique.

*Même problème, mais en enlevant le point $x=0$.*

Multiplions par 36 et enlevons de chaque terme $x^2/36$.

On trouve alors une grille linéaire. La grille proposée est compatible par exemple, avec :

$$\frac{x^2-13x+22}{36}.$$

*Mêmes données que plus haut, mais en cherchant si la grille est cubique.*

Tenant compte des résultats trouvés plus haut, nous multiplions par 720 et formons $\delta(0,\ 2,\ 5,\ 8)$.

On trouve l'intervalle d'incertitude :

$$(-51,\ -1).$$

Cherchons un polynome du 3ᵉ degré donnant comme différence divisée relative à ces quatre points $-1$, soustrayons ce polynome de la grille et déterminons la parabole du deuxième degré compatible avec les intervalles d'incertitude de :

$$0, \quad 2, \quad 5, \quad 8.$$

On vérifie qu'elle est compatible avec tous les autres ; la grille proposée est donc cubique et compatible par exemple, avec :

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 194x + 360}{720}.$$

**Caractérisation de tubes.**

Sous la forme où ils ont été donnés, les critères s'appliquent immédiatement au problème de reconnaître si un tube est polynomial de degré $n$.

Par exemple en formant les différences de $\sin x$ de 15 degrés en 15 degrés de 0 à 90 degrés, on se rend compte que si l'incertitude est $1/2 \,.\, 10^5$ le tube n'est polynomial que pour un degré au moins égal à 5.

Cherchons s'il est bien polynomial de degré 5 (dans toute la suite on prend pour $x$ une unité égale à 10 degrés).

En partant de l'interpolation donnée par Willers [1] (p. 87) (avec une faute de signe) et en continuant à travailler empiriquement le tube obtenu, on trouve comme écarts entre :

$$10^5 \sin x$$

et

$$\begin{aligned} 16\,667x - 635{,}46x(x-3) - 72{,}6x(x-3)(x-4{,}5) \\ + 2{,}7x(x-3)(x-4{,}5)(x-6) + 19 - 4x \\ + 0{,}091(x-0{,}3)(x-2{,}25)(x-4{,}6)(x-6{,}6)(x-8{,}95) \\ - 0{,}025(x-0{,}3)(x-2{,}25)(x-6{,}5)(x-9) \end{aligned}$$

pour $x$ variant de 0,5 en 0,5

$$\begin{array}{ccccccccc} -1{,}3 & 1{,}2 & 1 & 0{,}3 & -0{,}5 & -0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}5. \end{array}$$

A ce degré d'avancement, formons des différences 5ièmes divisées. Choisissons d'après l'allure de la grille :

$$\delta(0, \quad 1, \quad 3, \quad 4{,}5, \quad 7, \quad 9)$$

d'une part, et

$$\delta(0{,}5, \quad 2{,}5, \quad 4{,}5, \quad 7, \quad 8, \quad 9)$$

de l'autre.

(1) *Practical Analysis Dover Publications*, 1947.

En utilisant une table de $\sin x$ à 7 décimales, on trouve comme intervalle d'incertitude pour ces différences cinquièmes divisées (en gardant comme incertitude pour les valeurs de $\sin x$ : $1/2\,10^5$)

$$0{,}0999423 \pm 0{,}0069958$$

et

$$0{,}0805198 \pm 0{,}0104027.$$

Ces deux intervalles n'étant pas sécants, le tube considéré n'est pas polynomial de degré cinq.

Montrons que le même tube est polynomial de degré 5 si l'on se limite à l'intervalle $(0,60)$ degrés. Prenons sur cet intervalle les abscisses de Tchebicheff d'ordre 6.

L'interpolation en ces points donne une erreur majorée par :

$$\frac{\sin 60^0}{32 \,.\, 6!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6,$$

quantité qui est de l'ordre de $1/12 \,.\, 10^5$.

## II

## INSERTION DE VALEURS DANS UNE GRILLE

Soit une grille possédant certains caractères ; insérer dans cette grille la valeur $a$ de $x$, c'est déterminer une valeur centrale :

$$m(a)$$

et un intervalle d'incertitude de longueur $2i'$ tels que la grille complétée par cet intervalle possède encore les mêmes caractères. (On obtient ainsi une grille dont tous les intervalles d'incertitude n'ont pas la même longueur.)

On peut faire des insertions simultanées de valeurs :

$$a, \quad b, \quad c, \quad \text{etc.} ;$$

Si l'on a déterminé séparément des insertions relatives à $a$, $b$, $c$, il n'est pas certain que les intervalles correspondants forment une insertion simultanée. Une insertion de $a$ est dite *non restrictive* si elle forme avec n'importe quelle autre insertion (relative à une valeur quelconque $b$) une insertion simultanée.

### Insertions dans une grille polynomiale de degré *n*.

Le problème est visiblement possible et même avec une incertitude aussi petite que l'on veut pour une insertion ordinaire.

Pour une insertion non restrictive on utilisera le théorème suivant :

Les valeurs prises pour un polynome de degré $n$ compatible avec une grille polynomiale de degré $n$ forment un intervalle I. En effet, d'après la formule d'interpolation de Lagrange ces valeurs sont bornées et les arbitraires qui y figurent rationnellement parcourent des intervalles. La propriété en résulte. On obtient les insertions non restrictives en prenant un intervalle d'incertitude contenant I.

**Emploi des formules d'interpolation pour les insertions.**

Pour les $n+1$ valeurs de la variable

$$x_0, \quad x_1, \quad x, \quad \ldots, \quad x_n$$

appartenant à la grille, on applique la formule d'interpolation en utilisant comme valeurs de la fonction des valeurs quelconques des intervalles d'incertitude. Toutes les valeurs trouvées forment un intervalle définissant une insertion non restrictive. Le centre de cet intervalle s'obtient en appliquant la formule d'interpolation aux valeurs centrales. La quantité $i'$ s'obtient en prenant la formule d'interpolation et en y remplaçant les valeurs de la fonction par $\pm i$. Le signe à prendre est $+$ pour les deux points qui encadrent $x$ puis alternativement — et $+$ en s'écartant de $x$ vers la droite et vers la gauche.

Un polynome de degré $n$ pouvant être considéré comme un polynome de degré au plus égal à $n'$ ($n' > n$) les formules d'interpolation de degré $n' > n$ fournissent également une solution au problème, si la grille contient au moins $n'+1$ points.

Sur le problème de rendre $i'$ aussi petit que possible, lorsqu'on utilise des points consécutifs d'une grille équidistante, voir par exemple : Tietze, Eine Bemerkung zur interpolation, Zeit. math. phys. 64 1916, p. 76.

Il faut remarquer qu'on ne minimise pas $i'$ en interpolant sur des points consécutifs.

Soit par exemple une grille polynomiale de degré 5 formée des 13 valeurs :

$$0, \quad 1, \quad \ldots, \quad 12.$$

Si l'on interpole entre points consécutifs 0, 1, ..., 5 on trouve pour $x = 0{,}5$ $i' = 2{,}99\, i$.

Si l'on interpole aux points 0, 1, 4, 8, 11, 12, on trouve :

$$i' = 1{,}23 i.$$

**Insertions dans une grille localement polynomiale de degré $n$.**

Considérons une grille $G_1$ formée des valeurs :

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_r$$

et polynomiale de degré $n$ sur toute section comportant $n+2$ points. Soit $x$ une valeur comprise entre $a_p$ et $a_n$. Si l'on interpole aux points :

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n$$

et aux points ;

$$a_p, \quad a_{p+1}, \quad \ldots, \quad a_{p+n}$$

on obtient deux intervalles d'incertitude. Montrons que ces intervalles sont sécants.

Leurs longueurs ne dépendent que des points $a_0$, $a_1$, $a_{n+p}$ et de l'incertitude de la grille. L'écart de leurs centres s'écrit :

$$\begin{aligned}(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)\delta(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \\ + (x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_{n+1})\delta(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}) \\ \ldots + (x - a_p)(x - a_p)\ldots(x - a_{n+p-1})\delta(a_{p-1}, a_{n+p}).\end{aligned}$$

Considérons la grille $G_2$ qui correspond aux mêmes valeurs

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{n+p}$$

à la même incertitude et aux valeurs centrales :

$$+i, \qquad -i, \qquad +i, \qquad -i, \qquad \text{etc.}$$

Pour cette nouvelle grille, chaque terme de l'écart est maximum en valeur absolue et ils ont tous le même signe. Cette grille réalise donc le maximum de l'écart. Or c'est une grille nulle et toutes les interpolations y sont bien compatibles.

Par contre, il se peut qu'aucun de ces intervalles ne laisse à la grille son caractère localement polynomial. Soit par exemple la grille d'incertitude 1 :

$$\begin{array}{rcccccc} x = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & -15 & -1 & 1 & -1 & 1 & 15. \end{array}$$

Elle donne quand on interpole pour $x = 2{,}5$ avec les points 1, 2, 3

$$\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right),$$

qui n'est pas une insertion respectant le caractère quadratique de la section :

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5$$

(la seule parabole du second degré compatible avec cette grille est) :

$$2 + 4(x - 2)(x - 4)$$

et elle n'est pas compatible avec l'intervalle :

$$\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right).$$

L'interpolation ordinaire ne résout donc pas le problème de l'insertion dans une grille localement polynomiale. Nous appellerons *intervalle total d'interpolation* la réunion des divers intervalles d'interpolation. Si l'on prend comme intervalle d'incertitude un intervalle contenant l'intervalle total d'interpolation, on réalise une insertion *non restrictive*.

Soit une grille localement polynomiale de degré $n$ et équidistante, déterminons un intervalle contenant l'intervalle total d'interpolation.

*1er cas — n impair.* — On interpole en prenant $\frac{n+1}{2}$ points à droite et autant à gauche. On adopte cette valeur avec comme incertitude la somme de l'incertitude correspondant à l'interpolation avec $n$ points à gauche et de l'écart des valeurs centrales de ces deux interpolations.

Pour $n = 3$ on trouve ainsi $2{,}625\ i$ pour un milieu d'intervalle.

*2e cas — n pair.* — On prend l'interpolation de Bessel comme valeur centrale. L'incertitude s'obtient en ajoutant l'incertitude de l'interpolation avec $n$ points à gauche et l'écart maximum des valeurs centrales de ces deux interpolations.

(Parvenu aux Annales en décembre 1950.)