

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURENT SCHWARTZ

Un lemme sur la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 17-18

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__17_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

UN LEMME
SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS VECTORIELLES
D'UNE VARIABLE RÉELLE

par Laurent SCHWARTZ (Nancy).

Soit E un espace vectoriel, muni de deux topologies distinctes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_1 plus fine que \mathcal{T}_2 . Soit d'autre part $t \rightarrow f(t)$ une application de la droite réelle dans E , supposée continuement différentiable pour la topologie la moins fine \mathcal{T}_2 , mais telle que sa dérivée $f'(t)$ soit continue pour la topologie la plus fine \mathcal{T}_1 . Nous allons supposer que les topologies \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 vérifient la propriété suivante : (P) *Quel que soit le \mathcal{T}_1 -voisinage de $0, V_1$, de E , il existe un \mathcal{T}_1 -voisinage W_1 , tel que l'enveloppe convexe \mathcal{T}_2 -fermée de tout \mathcal{T}_1 -compact C_1 de W_1 soit dans V_1 .*

Alors la dérivée $f'(t)$ est aussi la dérivée de $f(t)$ pour la topologie la plus fine \mathcal{T}_1 .

En effet, en vertu de la \mathcal{T}_1 -continuité de $f'(t)$, quel que soit V_1 , il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que $|t - t_0| \leq \epsilon$ entraîne

$$[f'(t) - f'(t_0)] \in W_1.$$

Mais alors on peut écrire

$$[f(t) - f(t_0)]/(t - t_0) = (t - t_0)^{-1} \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau,$$

l'intégrale étant valable pour la topologie \mathcal{T}_2 .

Quand τ parcourt l'intervalle (t_0, t) , $f'(\tau)$ décrit un \mathcal{T}_1 -compact $C_1 \subset f'(t_0) + W_1$, et l'intégrale du second membre reste dans l'enveloppe convexe \mathcal{T}_2 -fermée de ce compact, donc dans $f'(t_0) + V_1$ en vertu de la propriété (P). Cela prouve bien que $f'(t)$ est la dérivée pour la topologie \mathcal{T}_1 la plus fine.

Voici deux cas importants pour lesquels la propriété (P) est vérifiée :

1° \mathcal{T}_1 possède un système fondamental de voisinages de 0 convexes qui sont \mathcal{T}_2 -fermés. Alors on peut prendre $W_i = V_i$. En particulier \mathcal{T}_2 pourra être la topologie faible associée à \mathcal{T}_1 .

2° Dans \mathcal{T}_1 , l'enveloppe convexe fermée de tout compact C_i est faiblement compacte. Elle est alors aussi \mathcal{T}_2 -faiblement compacte, donc \mathcal{T}_2 -fermée, et on peut encore prendre $W_i = V_i$. En particulier (P) sera toujours vérifiée si E est \mathcal{T}_1 -complet.

(Parvenu aux Annales en février 1951.)
