ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT CAMPBELL

Comportement des fonctions de Mathieu associées pour les grandes valeurs des paramètres

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 113-121

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__113_0>

COMPORTEMENT DES FONCTIONS DE MATHIEU ASSOCIÉES POUR LES GRANDES VALEURS DES PARAMÈTRES

par **R. CAMPBELL** (Lille).

Les fonctions habituelles de la physique mathématique : celles de Legendre (ou fonctions sphériques), et celles de Bessel (ou du cylindre circulaire), que l'on rencontre dans la théorie du potentiel, ont toutes été étudiées pour les grandes valeurs des paramètres dont elles dépendent. Leurs représentations asymptotiques sont d'un usage tout à fait courant. Les fonctions de Mathieu, et de Mathieu associées, qui s'introduisent, les unes dans la théorie dn potentiel des cylindres elliptiques ou hyperboliques. les autres dans l'étude des vibrations des quadriques de révolution (et de leurs cas limites très usuels comme les plaques circulaires ou les fils rectilignes) sont encore aujourd'hui assez peu utilisées, en raison de l'insuffisance de leurs tabulations. Néanmoins plusieurs études ont été consacrées déjà aux comportements asymptotiques des fonctions de Mathieu (1). L'objet de celle-ci est d'aborder le problème, jusqu'ici non encore entrèpris, du comportement asymptotique des fonctions dites « de *Mathieu associées* ».

Rappelons seulement comment l'équation des vibrations $\nabla^2 p = -k^2 p$ conduit à celle de Mathieu associée. Le Laplacien étant supposé écrit avec les variables des coordonnées semi-polaires, on y fait le changement :

$$\rho + iz = f\,\mathrm{ch}\,(\xi + i\eta), \qquad x + iy = \rho e^{i\varphi}.$$

(1) Goldstein, Asymptotic expansions for the Mathieu caracteristic numbers (*Proc. Royal. Soc. Edinbourgh*, t. 49, p. 210, 1929).
Voir aussi « Mathieu Functions » (Trans. Cam. Math. Soc, t. 23, p. 303).
Ince, Mathieu Functions for large parameters (*Journal of the London Math. Soc*, t. 2, p. 46, 1926).
Marshall, *Asymptotic representation of Mathieu Functions* (D. Zürich, 1909).

Si on en cherche alors, selon un procédé usuel, des solutions de la forme

$$p = \rho^m \mathrm{U}(\xi)\mathrm{V}(\eta)e^{im\varphi}$$

on tombe sur l'équation, dite de Mathieu associée :

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{d\xi^2} - (2m+1)\,\mathrm{tg}\,\xi\,\frac{d\mathrm{U}}{d\xi} + (k^2f^2\sin^2\xi + a)\mathrm{U} = 0 \qquad (\mathrm{M_A})$$

(où a est une constante qui s'introduit comme dans toute séparation de variables), et sur une autre équation, dite « modifiée » de la précédente, et qu'on en déduit en y changeant a en $-a$ et ξ en $i\eta$.

Dans la suite, nous supposerons que $f = 1$ et nous poserons $m + \frac{1}{2} = \nu$ pour nous conformer à l'usage. Les fonctions de Mathieu associées sont les solutions de période 2π de l'équation précédente. On en a donné ailleurs des procédés de calcul [1]. Nous nous bornons ici à les étudier dans le cas où les quantités ν, k^2, et a sont des infiniment grands. Dans le cas où k^2 seul (et peut-être a qui en dépend) est infiniment grand, l'étude se réduit à celle des fonctions de Mathieu ordinaires, qui a été traitée par Ince et Goldstein (art. cités)

Dans le cas où ν seul est infiniment grand, le problème se réduit à celui du comportement asymptotique des fonctions de Legendre associées, ou des fonctions ultra-sphériques, Ce problème a lui aussi été résolu [2].

Nous supposons donc, dans cette étude, que k^2 et ν sont des infiniment grands simultanés, et *de même ordre*. Le paramètre a est alors à déterminer lui-même en fonction des deux autres pour que les solutions obtenues soient périodiques. Nous emploierons, pour traiter ce problème, une méthode due à Horn et qui est relative à des équations de la forme

$$\frac{d^2y}{d^2x} - \chi(x)y = 0. \qquad (\mathrm{H})$$

(1) Voir Ince, « Associated Mathieu Functions » *Proc. Ed. M. Soc*, t. 41, 1922-23).
Humbert (Pierre), On Mathieu Functions of higher order (*Ibid.*, t. 40).
Campbell (Robert), Sur les fonctions de Mathieu associées (*Bull. soc. Math. de France*, 1950, t. IV).

(2) Voir Hobson, Spherical Harmonics, p. 308

La fonction de x dépendant d'un paramètre, au second degré [1]. Une première approximation de la solution de (H) quand le paramètre est infiniment grand, est fournie par l'expression :

$$y = \chi^{-\frac{1}{4}} e^{\pm \int \chi^{1/2} dx}.$$

Telle quelle, elle ne fait pas intervenir directement les valeurs propres $a = a\ (k^2,\ \nu)$. On ne les fait apparaître que si la constante a est elle-même supposée développée par rapport aux puissances décroissantes de ν. Le terme de plus haut degré en ν doit alors être du second degré au plus, ce qu'on vérifie du reste sur les formules asymptotiques des fonctions de Mathieu ordinaires et de Legendre associées, qui sont des cas particuliers des nôtres. Supposons donc a et k^2 développés par rapport à ν :

$$k^2 = \alpha\nu^2 + \beta\nu + \gamma + \frac{\delta}{\nu} + \frac{\zeta}{\nu^2} + \cdots \qquad (1)$$

$$a = A\nu^2 + B\nu + C + \frac{D}{\nu} + \frac{E}{\nu^2} + \cdots \qquad (2)$$

(α, β, γ, δ... sont donnés ; A, B, C sont à déterminer).

La méthode de Horn supposant l'équation à étudier écrite sous la forme normale, nous écrivons désormais l'équation de Mathieu associée sous la forme suivante en prenant x pour variable et y pour fonction :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[a + \nu^2 + \frac{\nu(1-\nu)}{\sin^2 x} + k^2 \cos^2 x\right] y = 0 \qquad (M_A^N)$$

ou, en tenant compte de (1):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\nu^2\chi_0(x) + \nu\chi_1(x) + \chi_2(x) + \nu^{-1}\chi_3(x) + \nu^{-2}\chi_4(x) + \cdots] y = 0.$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_0(x) &= A + \alpha \cos^2 x - \cot^2 x \\ \chi_1(x) &= B + \beta \cos^2 x + 1 + \cot^2 x \\ \chi_2(x) &= C + \gamma \cos^2 x. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

[1] Cf. Horn, *Math. Annalen*, 1899, p. 340 et aussi Jeffreys, Approximate solutions (*Proc. London Math. Soc.*, t. 23, 1924).

La solution de Horn cherchée s'écrit sous la forme :

$$y_1 = \varphi(x) e^{\nu\omega(x)} \left[1 + \frac{f_1(x)}{\nu} + \frac{f_2(x)}{\nu^2} + \dots + \frac{f_p(x)}{\nu^p} + \dots \right]$$

l'équation de ω' est immédiatement fournie par le terme en ν^2 :

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \chi_0(x) = 0. \tag{1}$$

Ce que nous cherchons ici, c'est une forme [valable pour ν très grand] des intégrales périodiques (2π) en x, intégrales dont l'existence ne va pas de soi, mais a par ailleurs été prouvée [1]. On doit donc déterminer ω (x) pour qu'il soit périodique, ce qui exige que $\omega'(x)$ soit un carré parfait, soit : $4\alpha = (A + \alpha + 1)^2$, équation, dans le plan des (A, α), d'une conique qu'il est plus commode de représenter sous la forme paramétrique :

$$\alpha = \theta^2 \qquad A = -(\theta - 1)^2.$$

On en tire aussitôt :

$$\frac{d\omega}{dx} = \varepsilon\left(\theta \sin x + \frac{1}{\sin x}\right)$$

$$e^{\nu\omega(x)} = e^{-\varepsilon\nu\theta \cos x} \left| \operatorname{tg}^{\varepsilon} \frac{x}{2} \right|^{\nu} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Il y a lieu de s'inquiéter des zéros possibles de ω', la théorie précédente n'étant pas valable si χ_0 s'annule et exigeant, dans ce cas, qu'on recherche le prolongement analytique de la solution à travers la valeur singulière qui annule χ_0. Ici, ω' ne s'annule que si :

$$\theta \sin^2 x = -1.$$

ce qui n'est possible, pour x réel, que si θ est plus petit que -1.

Soit alors λ une racine de ω' : $\theta = -\dfrac{1}{\sin^2 \lambda}$.

$x - \lambda$ étant un infiniment petit et ν un infiniment grand, nous ferons, pour opérer le prolongement analytique, des hypothèses supplémentaires : nous supposerons, dans ces approximations, que

(1) Voir articles déjà cités ; voir aussi à ce propos : Campbell (R.), Sur une expression remarquable des solutions de l'équation de Mathieu associée (*Bull. soc. Math. de France*. tome LXXVII, 1949, p. 1).

$\frac{x-\lambda}{\nu}$ est infiniment petit, mais que $\nu\,(x-\lambda)^2$ est infiniment grand. L'expression trouvée pour la solution de Horn qui est :

$$(\omega')^{-\frac{1}{2}} e^{\pm\int\left[\frac{\chi_1}{2\chi_0{}^{1/2}}+\nu\omega(x)\right]dx}$$

s'écrit alors, dans le voisinage de λ, en appliquant la formule de Taylor :

$$[\omega''(\lambda)]^{-\frac{1}{2}} e^{\nu\omega(\lambda)+\frac{\nu}{2}\omega''(\lambda)(x-\lambda)^2}(x-\lambda)^{\frac{\chi_1(\lambda)}{2\omega''(\lambda)}-\frac{1}{2}}. \qquad \text{(W)}$$

Or, cette dernière expression apparaît comme la formule asymptotique connue d'une *fonction de Weber,* que l'on sait prolonger analytiquement (¹). Il suffit, en effet, de poser $z=\sqrt{-2\nu\omega''(\lambda)}\,(x-\lambda)$ pour que l'expression (W) soit celle de $D_q(z)$, où q, ordre de cette fonction, vaut ici $\frac{\chi_1(\lambda)}{2\omega''(\lambda)}-\frac{1}{2}$.

Comme nous nous intéressons seulement aux fonctions de période 2π, les fonctions de Weber auxquelles elles se réduisent à la limite doivent être d'ordre entier : q doit donc être un entier N ; ce qui s'écrit, en posant

$$\theta=\frac{1}{r^2-1} \qquad (r>0)$$

$$B=-\beta r^2+\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)r+1}{r^2-1}.$$

équation qui détermine B et qui fait apparaître clairement l'infinité dénombrable des valeurs propres. L'équation connue

$$D_N(z)=(-1)^N D_N(-z)$$

relative aux fonctions de Weber, permet alors bien le prolongement analytique à travers la valeur $x=\lambda$. Il y aurait lieu naturellement d'effectuer aussi ce prolongement dans le cas où q n'est pas un entier, étude nécessaire pour le comportement asymptotique des solutions de période quelconque de l'équation de Mathieu associée. Ce calcul qui se fonderait sur l'équation (où *n n'est pas* entier) :

$$D_n(-z)=e^{n\pi i}D_n(z)-\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{(n-1)\frac{\pi i}{2}}D_{-n-1}(iz)$$

(¹) Voir, par exemple Whittaker, Modern Analysis, p. 347, et Weber (H.), *Math. Ann.* I (1869), pp. 1-36.

sortirait du cadre de cette étude, limitée aux fonctions de période 2π.

On peut trouver aussi la condition précédente entre B et β sans faire intervenir les fonctions de Weber. Il suffit d'écrire que, dans l'expression intégrée $\int \frac{\chi_1}{\omega'} dx$, les coefficients des termes logarithmiques sont entiers, ce qui est nécessaire pour la périodicité. Cette méthode, qui sera systématiquement utilisée plus loin, ne permet pas le prolongement analytique, mais s'applique par contre encore au cas où ω' n'a plus de racine.

Résultats :

1° Si θ est extérieur, à l'intervalle $(-1, 0)$ on peut poser $\theta = \frac{1}{r^2 - 1}$, et supposer r positif. Quand θ est < -1, on pose $r = \cos\lambda$; quand θ est > 0 on pose $r = \operatorname{ch}\mu$; dans les deux cas, la condition qui fournit B en fonction de β s'écrit si $r^2 = s$:

$$B = -\beta s + \frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{s} + 1}{s - 1}. \tag{C}$$

La solution de Horn s'écrit :

$$H_{1,2} = \varepsilon\sqrt{|\sin x|}\left|\cot^{\varepsilon}\frac{x}{2}\right|^{\nu - \frac{1}{2}} \frac{(r + \varepsilon\cos x)^{N-1}}{(r - \varepsilon\cos x)^{N}} e^{\varepsilon[\nu\theta + \beta(1 - r^2)]\cos x}.$$

2° Si θ est intérieur à l'intervalle $(-1, 0)$ on changera simplement r en ir dans les résultats précédents. Le coefficient du terme logarithmique (qui s'écrit ici sous la forme $\operatorname{Arctg}\frac{\cos x}{r}$) dans l'expression intégrée devra être la moitié d'un entier imaginaire pur impair, ce qui fournit pour B la valeur donnée par (C), (s étant alors négatif).

3° Dans les cas particuliers limites $\theta = 0$ et $\theta = -1$ et aussi dans le cas où $\theta = 1$, la méthode ne s'applique plus. Si on veut obtenir les résultats comme limites de ceux obtenus précédemment, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur l'infinitude de ν comparée à celle de $\frac{1}{\theta}$ ou de $\frac{1}{\theta \pm 1}$.

Notons cependant que si $\theta = 0$, on retrouve, pour la valeur asymptotique des fonctions étudiées, une forme analogue à celle obtenue depuis longtemps pour l'expression $\cos^{\nu} x\, C_n^{\nu}(\sin x)$ (1) où C_n^{ν} désigne le polynôme habituel de Gegenbauer, auquel on sait que la fonction de Mathieu associée se réduit lorsque k devient petit (ce qui est bien le cas ici, où son ordre est inférieur à celui de ν) mais il est malaisé, dans cette formule asymptotique, de faire apparaître l'indice N, la condition (C) n'ayant plus de sens. D'ailleurs $\omega''(\lambda)$ étant nul, les fonctions de Weber ne permettent plus d'opérer le prolongement analytique — Lorsque θ vaut -1 la condition (C) devient: $B = -1$, et ne fait plus non plus apparaître l'infinité des valeurs propres.

Calcul des termes f_1, f_2, f_3, ... f_n.

La méthode de Horn donne pour f'_1 l'expression:

$$f'_1 = \frac{1}{\omega'}\left\{\omega\right\}_x + \frac{1}{2}\frac{\chi_1'^2}{\omega'^2} - \frac{\chi_2'}{4\omega'^3} - \frac{\chi_1\omega''}{\omega'^3} + \frac{1}{2}\frac{\chi_2}{\omega'}$$

$\{\omega\}_x$ désignant le schwarzien de ω. Le calcul de f_1 est déjà extrêmement compliqué. On peut néanmoins obtenir les termes suivants par une méthode générale en posant:

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \qquad f_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi}, \ldots \qquad f_n = \frac{\varphi_n}{\varphi}, \ldots$$

Les φ_i sont alors fournis par un système d'équations différentielles du premier ordre, dont la première a déjà été utilisée:

$$\begin{aligned}
&2\omega'\varphi' + \chi_1\varphi = 0\\
&2\omega'\varphi'_1 + \chi_1\varphi_1 = -\varphi'' - \varphi\,(\omega'' + C + \gamma\cos^2 x)\\
&2\omega'\varphi'_2 + \chi_2\varphi_2 = -\varphi''_1 - \varphi_1(\omega'' + C + \gamma\cos^2 x) - \varphi(D + \delta\cos^2 x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.}
\end{aligned}$$

Tous ces premiers membres admettent pour facteur intégrant commun l'expression: $e^{\int \frac{\chi_1 - \omega''}{2\omega'}dx}$, on intègre alors ce système très facilement de proche en proche. En annulant, à chaque intégration, les termes logarithmiques qui apparaissent dans les seconds membres, on écrit que le développement de la fonction obtenue est périodique. On détermine ainsi C; D, etc. en $f(\gamma, \delta\ldots)$.

Nous n'avons effectué que le calcul de f_1 qui s'écrit:

$$f_1 = \frac{\gamma\zeta}{2} + \left[\zeta M_4 + (M_3 - 4sM_2)\frac{u}{8s^2}\right]\frac{1}{u^2 - s} - \left[\zeta^2 M_5 + \frac{M_3 u}{4s}\right]\frac{1}{(u^2 - s)^2}$$

(1) Cf. Hobson, *Spherical Harmonics*, p. 308.

la condition entre C et γ s'écrit elle-même :

$$8s^2M_1 - 4sM_2 + 3M_3 = 0.$$

Les coefficients $M_i (1 \leqslant i \leqslant 5)$ proviennent de la décomposition de la fraction rationnelle $f_1(u)$ en éléments simples et valent

$$M_1 = C + \gamma + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\zeta + \frac{1}{2}\beta L\zeta^2 - 2\beta^2\zeta^3 - \beta^2\zeta^4$$

$$M_2 = \frac{1}{4}(3 - L^2)\zeta + \frac{1}{2}L\beta\zeta^3$$

$$M_3 = \frac{1}{4}(L^2 + 13)\zeta^2$$

$$M_4 = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\beta\zeta s + \frac{1}{2}\zeta^2$$

$$M_5 = -\frac{3}{4} + \frac{L}{2}.$$

Dans ces expressions : $s = r^2$ (r réel ou imaginaire pur) :

$$\zeta = s - 1 ; \qquad u = \cos x ; \qquad L = 1 + \left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{s}.$$

En donnant à ε ses 2 valeurs ± 1, on a ainsi obtenu 2 solutions de Horn asymptotiques, H_1 et H_2, et qui sont des solutions périodiques de l'équation (M_Λ^N) pour les grandes valeurs des paramètres. Il reste à déterminer quelle combinaison linéaire $A_1 H_1 + A_2 H_2$ de ces 2 solutions il faut former pour obtenir la représentation asymptotique d'une fonction de Mathieu associée proprement dite. Nous utiliserons pour calculer A_1 et A_2 un résultat que nous avons déjà obtenu. On a calculé la valeur pour η très grand de la fonction $Ceh_N^\nu(\eta)$ (Rappelons que cette fonction, dite modifiée, s'obtient en remplaçant, dans la fonction de Mathieu associée $ce_N^\nu(x)$, x par $i\eta$).

On a trouvé :

$$\lim_{\eta \to 8} ceh_N^\nu(\eta)$$
$$= \left(\frac{2}{k}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \left[\sum_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu(1)\right] \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\nu\theta \operatorname{ch}\eta - \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\frac{\pi}{2}\right] e^{-\frac{\eta}{2}}$$

$c_n^\nu(z)$ désignant le polynôme habituel de Gegenbauer. Si, dans les solutions de Horn, on ne conserve dans l'exponentielle que le terme qui contient ν et si on change x en $i\eta$ et a en $-a$ (c'est-à-dire θ en $i\theta$) elles deviennent elles-mêmes pour $|\eta|$ très grands :

$$\left.\begin{matrix} H_1(\eta) \\ H_2(\eta) \end{matrix}\right\} = e^{\pm\frac{\pi i}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)} \operatorname{th}^{\pm\left(\nu-\frac{1}{2}\right)} \frac{\eta}{2} e^{\frac{\eta}{2} \mp i\nu\theta \operatorname{ch}\eta}.$$

La combinaison linéaire $A_1H_1 + A_2H_2$ qui s'identifie à (4) s'obtient alors immédiatement. Elle est :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} R_N^\nu (H_1 - H_2) & \text{si } \eta > 0 \text{ (c.-à-d. si } \quad 0 < x < \pi) \\ \dfrac{1}{2} R_N^\nu (H_1 e^{-\pi i\nu} + H_2 e^{+\pi i\nu}) & \text{si } \eta < 0 \text{ (c.-à-d. si } -\pi < x < 0). \end{cases}$$

On peut enfin déterminer R_N^ν à partir de (4) ; si on remplace k par son développement (1) et si on applique la formule de Stirling, on obtient :

$$R_N^\nu = \sum_0^\infty A_N^\nu C_N^\nu(1) \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\beta\right)}.$$

(Parvenu aux Annales en juin 1950.)