ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT GERBER

# Sur la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible

*Annales de l'institut Fourier*, tome 1 (1949), p. 157-162
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__157_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR LA REDUCTION A UN PRINCIPE VARIATIONNEL DES EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

par **R. GERBER** (Grenoble).

---

1. On sait qu'il n'est pas possible par la considération du champ des vitesses à un instant, d'opérer dans le cas général la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement non lent d'un fluide visqueux incompressible [1].

Il semble intéressant de voir si un tel principe ne pourrait pas être obtenu en envisageant non plus le fluide à une époque, mais en suivant une certaine masse $\mathcal{M}$ dans son mouvement.

Ayant défini un ensemble $\mathcal{E}$ de mouvements virtuels de $\mathcal{M}$ entre deux instants $t_0$ et $t_1$ on tentera de construire une fonction $\mathcal{L}$, définie sur $\mathcal{E}$, et telle que $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ soit stationnaire pour tout élément de $\mathcal{E}$ qui vérifie les équations indéfinies du mouvement.

On montrera qu'on aboutit également dans cette voie à un résultat négatif pour le cas général, du moins si on se limite à une certaine classe de fonctions $\mathcal{L}$.

De plus la méthode suivie nous conduira à exprimer avec les variables de Lagrange les équations de Navier pour un fluide visqueux incompressible et on indiquera une méthode rapide pour obtenir ces équations.

2. Soit un mouvement réel d'une masse $\mathcal{M}$ du fluide entre les époques $t_0$ et $t_1$, correspondant à certaines conditions initiales et aux limites et sous l'action de forces extérieures dépendant d'un potentiel. Notons $\mathcal{D}_t$ le domaine occupé à l'instant $t$, $\Sigma_t$ sa frontière (on pourra supprimer l'indice $t$) ; $\mathcal{D}_0$ et $\Sigma_0$ pour $\mathcal{D}_{t_0}$ et $\Sigma_{t_0}$. En particulier $\Sigma$ pourra

[1] Voir H. VILLAT. *Leçons sur les fluides visqueux*, p. 103.

être la paroi d'un vase déformable ou non, de volume constant enfermant le fluide. Supposons le mouvement de $\Sigma$ donné. On considèrera l'ensemble des mouvements virtuels de $\mathcal{M}$ entre $t_0$ et $t_1$ : 1° compatibles avec la condition d'incompressibilité ; 2° qui sont continus et pour lesquels si $\Sigma$ est une paroi limitant le fluide il y a adhérence à cette paroi ; 3° tels que les positions et les vitesses des éléments fluides pour $t_0$ et $t_1$ sont les mêmes que dans le mouvement réel.

D'une façon précise, l'espace étant rapporté à des axes rectangulaires $Ox_1x_2x_3$, $\mathcal{E}$ sera constitué par les fonctions vectorielles continues :

$$(1)\qquad \mathrm{OM} = f(\mathrm{P}, t)\big(\mathrm{P}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{D}_0 + \Sigma_0 ;\quad \mathrm{M}(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{D} + \Sigma ;\ t \in [t_0, t_1]\big)$$

satisfaisant à :

$$a)\qquad \Delta \equiv \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)}{\mathrm{D}(a_1, a_2, a_3)} = 1$$

(2) $b)$ $f$ se réduit à une fonction donnée de P et de $t$ pour :

$$\mathrm{P} \in \Sigma_0.$$

$c)$ $f$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ se réduisent à des fonctions données de P pour $t = t_0$ et $t = t_1$.

On notera $\mathrm{V}(u_1, u_2, u_3)$ le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial t}$. Les $x_i$ sont les variables d'Euler et les $a_i$ les variables de Lagrange.

3. Par analogie avec le principe d'Hamilton on fera figurer dans $\mathcal{L}$ l'expression $\mathcal{T} + \mathcal{U}$ où :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}_0} \rho \mathrm{V}^2 d\tau_0$$

($\rho$, densité, est une constante).

$$\mathcal{U} = \int_{\mathfrak{D}_0} \rho \mathrm{U} d\tau_0$$

(U, fonction donnée de M, potentiel des forces extérieures).

On sait le rôle joué dans le cas des mouvements lents par la fonction de dissipation $\psi$ définie en variables d'Euler par :

$$(3)\qquad \psi(\mathrm{V}) = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2$$

L'intégrale $\mu \int_{\mathcal{D}} 2\psi d\tau$ (où $\mu$ est le coefficient de viscosité) représente la chaleur dissipée par unité de temps et à l'instant $t$ par effet de viscosité. On introduira dans $\mathcal{L}$ la quantité :

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} dt \mu \int_{\mathcal{D}} 2\psi d\tau \tag{4}$$

qui représente la chaleur ainsi dissipée dans la masse $\mathcal{M}$ entre $t_0$ et $t_1$ et qui est homogène à l'expression $\mathcal{T} + \mathcal{U}$.

Enfin les fonctions $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ étant liées par $(2, a)$ on fera figurer dans $\mathcal{L}$ l'expression $\Delta$ au moyen d'un multiplicateur $\lambda$, fonction indéterminée des $x_i$.

On prendra donc $\mathcal{L}$ sous la forme :

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \mathcal{T} + \mathcal{U} + \alpha Q + \int_{\mathcal{D}_0} \lambda \Delta d\tau_0 \right) dt \tag{5}$$

($\alpha$ facteur numérique) ou

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho U + \lambda \Delta + 2\alpha\mu \int_{t_0}^{t} \psi dt \right). \tag{6}$$

4. La fonction $\psi$ définie par (3) en variables d'Euler est supposée exprimée dans cette formule (6) avec les variables de Lagrange. Pour faire ce changement de variables on remarque que $g$ étant une fonction des $x_i$ ou des $a_i$ qui sont liés par (1) on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{D(g, x_2, x_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{D(g, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \quad \left( \text{en vertu de } \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = 1 \right)$$

et les expressions obtenues par permutations circulaires pour

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_3}.$$

Alors :

$$\Psi = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) \tag{7}$$

avec :

$$A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{D\left(\frac{\partial x_1}{dt}, x_2, x_3\right)}{D(a_1, a_2, a_3)}$$

$$B_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{D\left(x_1, x_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)}{D(a_1, a_2, a_3)} + \frac{D\left(x_1, \frac{\partial x_3}{\partial t}, x_3\right)}{D(a_1, a_2, a_3)} \tag{8}$$

et les expressions analogues obtenues par permutations pour $A_2$, $A_3$, $B_2$, $B_3$.

Les formules (7) et (8) montrent que $\Psi$ se présente en variables de Lagrange comme une fonction des $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ et des $\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}$. Il s'introduira donc dans le calcul de la variation des expressions :

$$X_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial \Psi}{\partial\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)}, \qquad Y_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial \Psi}{\partial\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}\right)}.$$

Explicitons le calcul de $Y_1$ ; on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial a_1}\right)} = 2A_1 \frac{D(x_2, x_3)}{D(a_2, a_3)} + B_2 \frac{D(x_1, x_2)}{D(a_2, a_3)} - B_3 \frac{D(x_1, x_3)}{D(a_2, a_3)}$$

et les deux égalités déduites de celle-ci par permutations circulaires sur les $a_i$ dans les deux membres.

On trouve alors :

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2\frac{D(A_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} + \frac{D(B_2, x_1, x_2)}{D(a_1, a_2, a_3)} - \frac{D(B_3, x_1, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \\ &= 2\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

ou compte tenu de (8) et de $\sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ traduisant l'incompressibilité :

$$Y_1 = \Delta u_1 \tag{10}$$

(étant le Laplacien par rapport aux $x_i$).

On aurait dit de même :

$$Y_i = \Delta u_i. \tag{11}$$

Le calcul des $X_i$ ne présente pas de difficulté mais conduit à des expressions assez longues. Par exemple sans expliciter les jacobiens :

$$\begin{aligned} X_1 = 2\frac{D(A_2, u_2)}{D(x_1, x_2)} + 2\frac{D(A_3, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_1, u_3)}{D(x_1, x_2)} \\ + \frac{D(B_1, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_2, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_3, u_1)}{D(x_1, x_2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

5. Passons au calcul de la variation $\delta\mathfrak{L}$ due à une variation

$\delta f(\delta x_1, \delta x_2, dx_3)$. Cette variation $\delta f$ vérifie les conditions aux limites :

$$(13) \quad \delta f \equiv 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}\delta f \equiv 0 \text{ pour } t = t_0 \text{ et } t = t_1 \text{ ; } \delta f \equiv 0 \text{ pour } P \in \Sigma_0.$$

$\mathcal{L}$ étant donnée par (5) on a :

$$(14) \quad \delta\mathcal{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \Bigg\{ \rho \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\delta x_i$$
$$+ 2\alpha\mu \int_{t_0}^{t} \sum_j \left( \frac{\partial \Psi}{\delta\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)} \delta\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial \Psi}{\delta\left(\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}\right)} \delta\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}\right) \right) dt \Bigg\}$$

ou après des intégrations par parties et compte tenu des relations (13) :

$$(15) \quad \delta\mathcal{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \Bigg\{ \left( -\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + 2\alpha\mu Y_i \right) \delta x_i$$
$$+ \int_{t_0}^{t} 2\alpha\mu \left( -\frac{\partial Y_i}{\partial t} + X_i \right) \delta x_i dt \Bigg\}.$$

En se reportant à l'expression (11) de $Y_i$ en variables d'Euler on constate que la première parenthèse, quand on y fait $\lambda = -p$, $\alpha = \frac{1}{2}$ représente la composante suivant $Ox_i$ du premier membre de l'équation indéfinie du mouvement d'un fluide visqueux incompressible :

$$-\rho\gamma + \operatorname{grad}(\rho U - p) + \mu \Delta V = 0.$$

Ainsi pour un élément de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation indéfinie du mouvement $\delta\mathcal{L}$ se réduit à :

$$(16) \qquad \delta\mathcal{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^{t} \sum_i \mu \left( -\frac{\partial Y_i}{\partial t} + X_i \right) \delta x_i dt$$

où les variations $\delta x_i$ s'annulent pour $P \in \Sigma_0$ et pour $t = t_0$ ou $t = t_1$ et sont liées entre elles par :

$$(17) \qquad \delta \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta x_i \equiv 0.$$

Compte tenu de cette relation (17) et des expressions (11) et (12) des $X_i$ et $Y_i$, on peut voir que cette forme (16) de $\delta\mathcal{L}$ ne doit pas être nulle dans le cas général.

Ainsi on vérifiera sur l'exemple suivant que $\delta\mathcal{L}$ ne s'annule pas :

mouvement réel plan non permanent à trajectoires rectilignes donné par :

$$(18) \qquad u_1 = e^{x_2+t}, \quad u_2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = a_1 + e^{a_2+t} - e^{a_2}, \quad x_2 = a_2$$

(les équations indéfinies du mouvement sont satisfaites si $\mu = \rho$, et avec $p - \rho U =$ constante).

Supposons : $\mathfrak{D}_0$ défini par : $0 \leqslant a_1 \leqslant 1$ ; $0 \leqslant a_2 \leqslant 1$ ; $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$.

Prenons pour variation $\delta f(\delta x_1, \delta x_2)$ :

$$(19) \qquad \delta x_1 = t(1-t)\frac{D(x_1, \Phi^2)}{D(a_1, a_2)};$$

$$\delta x_2 = -t(1-t)\frac{D(\Phi^2, x_2)}{D(a_1, a_2)} \quad \text{avec} \quad \Phi = a_1 a_2 (1-a_1)(1-a_2)$$

qui satisfait à (13) et (17).

Dans l'intégrale (16) ne figure, compte tenu de la forme des $u_i$, que le terme $-\frac{\partial Y_1}{\partial t}\delta x_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial t}\cdot \delta x_1$ et on s'assure que cette intégrale est non nulle.

Enfin, il pourra se faire que pour certains mouvements particuliers $\delta \mathfrak{L}$ s'annule ; par exemple si les $X_i$ et $\frac{\partial Y_1}{\partial t}$ sont identiquement nuls, ce qui serait le cas pour un mouvement à la Poiseuille :

$$u_1 \equiv u_1(x_2, x_3) \qquad u_2 \equiv u_3 \equiv 0.$$