MARCEL BRELOT

Compléments à la théorie de J. Deny

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 113-120
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__113_1>

COMPLÉMENTS A LA THÉORIE DE J. DENY

par **Marcel BRELOT.**

---

1. Nous allons essentiellement étendre la théorie précédente à l'espace rendu compact par adjonction d'un point à l'infini, le compact E de Deny pouvant alors contenir ce point à l'infini. Nous en profiterons pour apporter d'autres petits compléments, en soulignant l'intérêt qu'il y aurait à approfondir le cas où le potentiel de masses sur E serait supposé non pas nul sur $\complement E$ mais seulement

constant sur chacun des domaines composant $\complement E$. Par exemple, au moins si E est d'intérieur vide et assez régulier, le potentiel précédent sera encore nul sur $\complement E$; et il s'ensuivra que l'on peut alors, dans le système total de Deny (théorème 3) remplacer les $h(x-a_p)$ par une constante.

2. Conservons les notations de l'article précédent et, comme introduction, avec les hypothèses de Deny, signalons, vu l'importance de son théorème 1, *quelques autres démonstrations de ce théorème-clef.* On remarquera que le cas de a à l'infini peut se déduire par inversion du cas de a à distance finie où nous allons nous placer.

α) Pour x au voisinage de a et y sur E, $h(x-y)$ se développe selon

$$h(y-a)+\sum_{n=1}^{\infty}|x-a|^n|y-a|^{-(m-2+n)}Z_n^{x,y}$$

où Z_n polynome non nul par rapport au cos de l'angle des directions $x-a$, $y-a$ est, relativement à chacune de ces directions, une des fonctions de Laplace d'ordre n complètement définies à un facteur près par un axe de révolution sur l'autre direction. L'intégration en $d\mu_y$ donne U^μ et les conditions de Deny sont évidemment suffisantes. D'autre part, la nullité de U^μ au voisinage de a entraîne celle de $\int Z_n^{x,y}|y-a|^{-(m-2+n)}d\mu_y$ quelle que soit la direction $x-a$; comme toute fonction de Laplace d'ordre n est combinaison linéaire homogène de fonctions de même ordre de révolution [1], les conditions de Deny sont bien nécessaires.

On pourrait traiter de même directement le cas de a à l'infini.

β) Pour écrire que $\int h(x-y)d\mu_y$ est nul au voisinage de $x=a$, il n'y a qu'à annuler en a cette fonction et ses dérivées par rapport aux coordonnées de x. Mais remarquons que ces dérivées s'obtiennent en dérivant sous $\int$ et que les dérivées par rapport aux coordonnées de x, prises en a, de $h(x-y)$ sont aussi, au signe près, les dérivées de $h(a-y)$ par rapport aux coordonnées de y. Or ces dernières dérivées sont, pour l'ordre n, de la forme $\Phi_n^a(y)$ et l'on sait que tout Φ_n^a est combinaison linéaire homogène de ceux de

[1] Voir sur les polynomes harmoniques un mémoire à paraître en collaboration avec Choquet.

même ordre obtenus par n dérivations de $h(a-y)$, d'où le résultat.

γ) Tout potentiel U^{ν} de masses ν situées dans une boule $D_a^{r_0}(|x-a)|<r_0)$ admet pour $|x-a|>\rho>r_0$ un développement uniformément convergent $\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^a(x)$. Réciproquement un Φ ou même un tel développement V uniformément convergent pour $|x-a|>\rho$ vaut pour $|x-a|>r>\rho$ un potentiel de masses ν situées dans $\overline{D}_a^r(|x-a|\leqslant r)$; en effet, modifions et prolongeons V selon W en prenant pour W dans $D_a^r(|x-a|<r)$ l'intégrale de Poisson relative à cette sphère et à la donnée-frontière V; alors W est localement différence de deux fonctions sousharmoniques car si on lui ajoute la fonction sousharmonique, nulle hors D_a^r égale dans D_a^r à $K[h(x-a)-h(r)]$ pour $K>0$ assez grand, on obtient une fonction sousharmonique [2] au voisinage des points $|x-a|=r$. Prenons alors le potentiel U^{ν} des masses ν associées [2 bis] à W. On voit que $U^{\nu}-W$ harmonique dans R^m admet au voisinage de l'infini un développement de même type que V, donc est nul.

Or, la nullité de U^{μ} dans D (théorème 1) équivaut à la nullité de $\int U^{\mu}d\nu$ pour toutes les distributions de masses ν d'un voisinage fixé arbitrairement petit de a c'est-à-dire à $\int U^{\nu}d\mu=0$. Ce qui précède montre alors l'équivalence avec les conditions de Deny.

On peut traiter directement de façon analogue le cas de a à l'infini.

3. Cette dernière méthode va se prêter facilement à l'extension de la théorie de Deny à l'espace compact $\overline{R}^m$ déduit de R^m par adjonction d'un point à l'infini noté $\mathcal{R}_m$.

Rappelons quelques notions fondamentales dans $\overline{R}^m$ [3]: une fonction u définie dans Ω ouvert y est *sousharmonique* si elle est sousharmonique au sens classique hors $\mathcal{R}_m$ et si lorsque $\mathcal{R}_m \in \Omega$, elle est en $\mathcal{R}_m$, $\neq +\infty$, semi continue supérieurement et majorée par la

(2) Car la fonction F ainsi obtenue est l'enveloppe supérieure des deux fonctions harmoniques obtenues par prolongement à travers la surface sphérique des fonctions harmoniques F considérées de chaque côté. Voir plus loin dans un cas plus général une variante de cette représentation potentielle de V.

(2 bis) La connaissance de W détermine dans un voisinage ouvert ω de tout point la distribution de masses dont le potentiel y vaut W à une fonction harmonique près; on en déduit une mesure unique dans R^m (associée à W) qui coïncide dans chacun de ces ω avec la distribution correspondante précédente.

(3) Voir sur cette introduction de $\mathcal{R}_m$ mon article des Annales de l'École N. S., 61, p. 301 (1944).

moyenne sur toute sphère de centre arbitraire contenue ainsi que son extérieur dans Ω.

Définition immédiate de la surharmonicité, L'*harmonicité*, obtenue par conjonction équivaut pour ce qui concerne $\mathcal{R}_m$ à ce que u y soit finie continue et, au voisinage, de la forme $K + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^a(x)$ ($a \neq \mathcal{R}_m$, quelconque).

Pour généraliser le potentiel, on introduit pour a, x, y de $\overline{R^m}$, x et y étant distincts de a, la fonction symétrique $h_a(x, y)$ de x, y définie comme suit :

1° si $a = \mathcal{R}_m$ $h_a(x, y) = h(x - y)$;
2° si $a \neq \mathcal{R}_m$ $h_a(x, y) = h(x - y) - h(x - a) - h(y - a)$ si x et y sont $\neq \mathcal{R}_m$,
$h_a(\mathcal{R}_m, y) = h_a(y, \mathcal{R}_m) = -h(y - a)$ si $y \neq \mathcal{R}_m$,
$h_a(\mathcal{R}_m, \mathcal{R}_m) = -h(\infty)$.

Si a et y sont $\neq \mathcal{R}_m$, $h_a(x, y)$ est harmonique de x au voisinage de $\mathcal{R}_m$. On notera que

$$h_a(x, y) - h_b(x, y) = h_a(x, b) - h_b(a, y)$$
$$= h_a(b, y) - h_b(x, a) \quad (x, y \text{ distincts de } a \text{ et } b).$$

On saura alors définir hors a un *potentiel-h_a* noté U_a^μ (pour toute mesure μ pour laquelle $h_a(x, y_0)$ sera sommable-μ au voisinage de a) ; si $\mu \leqslant 0$, il est sousharmonique, et harmonique hors du noyau fermé des masses ; toute fonction sousharmonique dans un ouvert ω vaut localement, à une fonction harmonique près, un potentiel-h_a où a n'est pas adhérent à ω (la mesure associée étant unique). Si un domaine ω de frontière assez régulière contient le noyau fermé de masses μ et si a est extérieur à ω, le flux entrant $\int \frac{dU_a^\mu}{dn} ds$ vaut le produit de la masse totale par un coefficient φ_m (4).

Ajoutons une *notion* un peu *nouvelle* : une fonction u harmonique dans $\omega - a$ (ω ouvert contenant a) sera dite *d'allure potentielle en* a, si pour un $y_0 \neq a$ (et alors pour tout $y_0 \neq a$) u est hors a, dans un voisinage ouvert de a, la somme d'une fonction harmonique dans ce voisinage (a inclus) mais nulle en a, et de $K h_a(x, y_0)$ (K C^{te} convenable). Cela signifie, si $a = \mathcal{R}_m$ (5) que u se développe à l'infini

(4) φ_m est le flux de $h(x)$ entrant dans D_O^r.

(5) Lorsque $m \geqslant 3$ c'est ce qu'on appelait, pour la fonction, la condition d'être *régulière et nulle* à l'infini.

selon $Kh(x-a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n^{a_0}(x)$ ($a_0 \neq \mathcal{R}_m$ quelconque) et si $a \neq \mathcal{R}_m$ que u est la somme de $-Kh(x-a)$ et d'une fonction tendant vers o quand $x \to a$.

D'après cela, grâce aux développements canoniques uniques des fonctions harmoniques, toute fonction harmonique dans $\overline{R}^m - a$, d'allure potentielle en a, est nulle.

Cette dénomination se justifie par le fait que tout potentiel-h_a de masses hors d'un voisinage de a est d'allure potentielle en a (avec le coefficient K égal à la masse totale) et que, réciproquement, toute fonction harmonique u dans $\omega - a$ d'allure potentielle en a est dans tout ω' ouvert ($\overline{\omega}' \subset \omega$) un potentiel-$h_a$ de masses situées hors ω'.

La première partie est facile. Pour la réciproque on introduira ω_1' ouvert dont la frontière ne contienne pas $\mathcal{R}_m$ et tel que $\overline{\omega}' \subset \omega_1' \subset \overline{\omega}_1' \subset \omega$. On partira de u dans ω_1' et on prolongera par exemple par une constante ; en faisant ensuite plusieurs médiations spatiales successives à rayon assez petit, on obtiendra une fonction v, localement différence de fonctions sousharmoniques dans $\overline{R}^m - a$ et égale à u dans ω' ; si ν est la mesure associée on voit que $U_a^\nu - v$ est harmonique dans $\overline{R}^m - a$ et d'allure potentielle en a donc nulle.

De cette réciproque résulte aisément que si a_0 est hors d'un ouvert ω, toute fonction harmonique dans ω vaut dans $\omega'(\overline{\omega}' \subset \omega)$ un potentiel-h_{a_0} de masses situées hors ω' et de total nul.

4. Extension du théorème 1.

THÉORÈME I'. — *Soient μ une mesure sur un compact E de $\overline{R}^m$, D un domaine (non vide) du complémentaire $\complement E$, $a \in D$ et $b \in \complement E$ ($a \neq b$).*

α) *Pour que $U_a^\mu = C^{te}$ dans D, ce qui entraîne aussitôt $U_a^\mu = 0$ dans D, il faut et suffit que $\int V d\mu = 0$ pour toute V harmonique dans $\overline{R}^m - a$, ou seulement du type ; C^{te} ou $\Phi_n^a (n \geqslant 1)$.*

β) *Pour que $U_b^\mu = C^{te}$ dans D il faut et suffit que $\int V_1 d\mu$ soit nul pour toute V_1 harmonique dans $\overline{R}^m - a$ et nulle en b ou seulement pour les $\Phi_n^a - \Phi_n^a(b)$ $(n \geqslant 1)$.*

Pour que $U_b^\mu = 0$ dans D, il faut et suffit que la condition précédente soit réalisée et qu'en outre $U_b^\mu(a) = 0$, ou encore que $\int W d\mu = 0$ pour toute W harmonique dans $\overline{R}^m - a - b$ d'allure potentielle en b, La condition $U_a^\mu = 0$ dans D équivaut à $\int U_a^\mu d\nu = 0$ ou $\int U_a^\nu d\mu = 0$ quelle que soit ν chargeant un ouvert fixé de $D - a$ et admettant un U_a^ν. Comme toute V vaut sur E un potentiel-h_a de masses ν de ce type, il est nécessaire que $\int V d\mu = 0$. Réciproquement, partons de cette condition : si $a \neq \mathcal{R}_m$, un potentiel U_a^ν de masses ν situées dans un D_a^r assez petit se développe sur E en série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^a(x) + C^{te}$ d'où $\int U_a^\nu d\mu = 0$. Raisonnement analogue si $a = \mathcal{R}_m$.

La condition $U_b^\mu = C^{te}$ dans D équivaut à $\int U_b^\mu d\nu = 0$ ou $\int U_b^\nu d\mu = 0$ quelle que soit ν chargeant un ouvert fixé de D (mais non b), de total nul et admettant un U_b^ν. V_1 valant un tel potentiel hors d'un voisinage de a, on trouve bien la condition nécessaire $\int V_1 d\mu = 0$. Réciproquement un tel potentiel U_b^ν se développe si $a \neq \mathcal{R}_m$ suivant $\sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n^a(x) - \Phi_n^a(b)]$ d'où la suffisance. Raisonnement analogue si $a = \mathcal{R}_m$ et β s'achève sans difficulté.

Remarques. — Soit toujours μ *chargeant le compact* E *et soient* a, b *distincts dans* $\complement E$.

α) *Si la masse totale est nulle* $U_a^\mu(x) - U_b^\mu(x) = U_a^\mu(b) = -U_b^\mu(a)$.

β) *La condition* $U_b^\mu = 0$ *dans* $\complement E$ *est indépendante de* b.

La condition que U_b^μ *est constante dans chacun des domaines composants* δ_i *de* $\complement E$ *est indépendante de* b *; elle équivaut à ce que, pour chaque* δ_i *le* U_a^μ *d'un point* a *de ce domaine soit nul dans ce domaine.*

Le théorème I' fournit des conditions équivalentes en choisissant un a dans chaque $\delta_i(a_0 \in \delta_0, \dots a_i \in \delta_i \dots)$ et dans δ_0 un b qui pourra coïncider avec a_0.

5. Ces conditions s'interprètent aussi très simplement par la théorie du balayage ou de l'*extrémisation* développée dans $\overline{R}^m$ [6] et dont on va rappeler quelques notions :

Si $\mu \leq 0$ charge le compact E, considérons $U_a^\mu (a \in \complement E)$. Il existe une fonction sousharmonique maxima égale à U_a^μ sur $\complement E$ (et qui ne dépend donc que de la valeur de U_a^μ sur $\complement E$) ; c'est un potentiel

(6) Voir mon article du *J. de Math.*, 24 (1945).

U_a^ν dont $\nu \leqslant 0$ dite « mesure extrémisée relativement à E » est indépendante de a; elle a même total de masses, ne charge que l'ensemble des points-frontière stables (points de la frontière $\overset{*}{E}$ où $\complement E$ n'est pas effilé) et $\mu = \nu$ si μ ne charge que cet ensemble.

On définit par différence l'extrémisation d'une mesure quelconque. On notera encore μ' l'extrémisée de μ et en particulier ε'_x l'extrémisée de la masse unité ε_x en $x \in E$.

Soit enfin $f \in \mathcal{C}$ (ensemble des fonctions finies continues sur $\overset{*}{E}$), F un prolongement borné continu et Ω_n un ouvert décroissant de limite E. La solution généralisée $H_F^{\Omega_n}$ du problème de Dirichlet a, sur E, une limite (indépendante du prolongement et de la suite Ω_n) soit K_f dite extrémale et valant $\int f d\varepsilon'_x$; on sait de plus que quelle que soit μ chargeant E: $\int K_f d\mu = \int f d\mu' = \int K_f d\mu'$ (ce qui contient le lemme 2); on pourra étendre le lemme 3 de Deny en montrant que la continuité de K_f sur E équivaut à $K_f = f$ sur $\overset{*}{E}$.

6. **Arrivons aux résultats essentiels de Deny en généralisant et complétant d'abord le lemme 1.**

La condition $U_b^\mu = 0$ *dans* $\complement E$ *équivaut à* $\mu' = 0$ *ou* $\mu = \lambda - \lambda'$, λ *ne chargeant pas l'ensemble des points-frontière stables.*

La condition que U_b^μ *est constante dans chaque domaine composant* δ_i *de* $\complement E$ *équivaut à ce que* μ *soit d'extrémisée nulle relativement à chaque* $\complement \delta_i$.

Soit $\mathcal{G}$ la variété linéaire fermée engendrée par les fonctions harmoniques dans $\overline{R}^m - a_i$ du type : constante ou $\Phi_n^{a_i} (n \geqslant 1)$.

Soit $\mathcal{F}$ la variété analogue engendrée par les $\Phi_n^{a_i} - \Phi_n^{a_i}(b)$ $(n \geqslant 1)$ ($b \in \complement E$ et distinct des a_i) et par les $h_b(a_i, x)$.

Soit $\mathcal{F}_p$ la variété engendrée par les $h_{a_p}(a_i, x) (i \neq p)$, la C^{te} et par tous les $\Phi_n^{a_i}(n \geqslant 1)$.

Les raisonnements de Deny donnent alors :

THÉORÈME 2′. — *$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_p$ sont identiques au sous-espace de $\mathcal{C}$ orthogonal à la variété $\mathfrak{M}$ des mesures sur $\overset{*}{E}$ d'extrémisée nulle (relativement à E).*

THÉORÈME 2″. — *$\mathcal{G}$, contenue dans $\mathcal{F}$, est identique au sous-espace de $\mathcal{C}$ orthogonal à la variété $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}$ des mesures sur $\overset{*}{E}$ dont les extrémisées relativss aux $\complement \delta_i$ sont toutes n ulles.*

L'identité $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ équivaut à celle de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ *et aussi à ce que tout* U_b^μ (pour un b ou tout b de $\complement E$) *constant sur chaque* δ_i *soit nul sur* $\complement E$; *elle aura donc lieu si* $\complement E$ *est connexe* (7).

Enfin les théorèmes 3 et 4 se conservent sous la forme :

Pour que $\mathcal{F} \equiv \mathcal{C}$ *il faut et suffit que* E *n'ait pas de points-frontière instables.*

$\mathcal{F}$ *est formée des fonctions de* $\mathcal{C}$ *égales à leurs extrémales* (ou encore dont l'extrémale est continue).

Sans approfondir les conditions d'identité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, signalons *que* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont identiques à* $\mathcal{C}$ *lorsque* E *est d'intérieur vide, que les domaines composants* δ_i *sont en nombre fini, et que chacun n'est effilé en aucun de ses points-frontière.*

En effet soit dans ces conditions U_b^μ constant sur chaque δ_i ; s'il n'y était pas nul, soit Δ la partie de $\complement E$ où il serait nul, Δ_1 le reste. On verra que $\overset{*}{\Delta} \cap \overset{*}{\Delta}_1$ est non polaire, donc contient des points où U_b^μ est déterminé. L'existence d'une pseudo-limite en un tel point Q est incompatible avec le fait que Q est point-frontière d'un δ_i où $U_b^\mu = 0$ et d'un δ_j où $U_b^\mu \neq 0$, ces δ_i et δ_j n'étant pas effilés en Q.

Lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont identiques à $\mathcal{C}$, on dispose donc pour $\mathcal{C}$ d'un système total plus simple : les $\Phi_n^{a_i} (n \geqslant 1)$ et la C$^{\text{te}}$.

Signalons seulement pour terminer qu'on pourrait faire des études intermédiaires entre celles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et qu'on peut étendre à $\overline{R}^m$ l'étude complémentaire de Deny (n° 5 et théorème 5).

(Manuscrit reçu en mars 1950.)

(7) Ce cas est à rapprocher d'un résultat (corollaire 1 du théorème 2 de mon mémoire, *Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945) que l'on retrouve ici grâce au théorème 3 étendu.