MARIE-JOSÉE JASOR

Perturbations singulières de problèmes aux limites, non linéaires, « paraboliques dégénérés-hyperboliques »

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 2 (1998), p. 267-291

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_2_267_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 2, 1998

Perturbations singulières de problèmes aux limites, non linéaires, "paraboliques dégénérés-hyperboliques"(*)

MARIE-JOSÉE JASOR[1]

RÉSUMÉ. — On étudie ici, dans un domaine borné, un problème de perturbations singulières pour une classe d'équations paraboliques non linéaires dégénérées du second ordre lorsque les effets de la diffusion sont négligeables devant ceux de la convection. Ce travail est effectué pour des conditions de bord de type mêlé. On établit, dans un espace approprié, la convergence de la suite de solutions de ces problèmes vers la solution entropique du problème hyperbolique non linéaire du premier ordre. Compte tenu du caractère non linéaire de l'équation et du type de condition au bord considéré, les estimations obtenues sur cette suite de solutions sont de type local. On utilise pour cela la notion de fonctions à variation bornée et une classe de fonctions, introduite par F. Mignot et J.-P. Puel pour étudier des problèmes hyperboliques linéaires du premier ordre, ayant pour principale propriété celle de s'annuler dans un voisinage de la surface définissant la couche limite.

ABSTRACT. — This work is devoted to singular perturbations problems in some bounded domain which are governed by degenerated nonlinear parabolic equations of the second order. Diffusion effects are negligible front of convection effects and mixed boundary conditions are taken into account. In an appropriated space, we establish that these "parabolic" solutions converge to the entropic solution of the associated hyperbolic reduced problem. Then, the principal difficulty is to find sufficient estimates allowing the above result. In that aim, we specially use a space of functions having bounded variation and a certain class of functions introduced by F. Mignot et J.-P. Puel in order to study linear hyperbolic problems of first order whose principal property is to vanish in a neighbourhood of the boundary layer surface.

(*) Reçu le 10 juin 1995, accepté le 31 mars 1998

(1) Université de Pau et des Pays de l'Adour, URA 1204 CNRS, Avenue de l'Université, F-64000 Pau (France)
e-mail : jasor@ucfma.univ-bpclermont.fr

0. Introduction

Ce travail a pour objet l'étude de problèmes de perturbations singulières pour les équations paraboliques dégénérées :

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\nu(S_\varepsilon)\overrightarrow{B}\big) = \varepsilon\,\Delta A(S_\varepsilon) \quad \text{sur }]\,0\,,T\,[\,\times\Omega\,,\ \varepsilon>0\,, \qquad (1_\varepsilon)$$

lorsque la dérivée de A s'annule au plus en un ensemble fini de points de $[\,0\,,1\,]$. $\overrightarrow{B}$ est un champ vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq n \leq 3$, de divergence nulle, Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ et T un réel strictement positif. S_ε est supposée vérifier une condition de bord mêlée soit :

$$S_\varepsilon = 0 \text{ sur }]\,0\,,T\,[\,\times\Gamma_e\,, \quad \frac{\partial A(S_\varepsilon)}{\partial n} = 0 \text{ sur }]\,0\,,T\,[\,\times(\Gamma\setminus\Gamma_e)\,.$$

En ingénierie pétrolière, ces équations fournissent un modèle simplifié de l'écoulement de fluides (l'eau et l'huile) incompressibles non miscibles en milieu poreux, lors de la récupération assistée d'huile par injection d'eau. Dans ce cadre physique, S_ε représente la saturation réduite de l'huile, $0 \leq S_\varepsilon \leq 1$. $-\overrightarrow{B}$ est un gradient de pression, par exemple le gradient de la *pression globale fictive* introduite dans [4], ν la fraction de flux de l'huile et la fonction A dépend de la différence de pression capillaire entre les phases. Enfin, Γ_e correspond à la partie de Γ où sont implantés les puits d'injection d'eau. Le coefficient ε est en général petit (c.-à-d. les effets de la capillarité entre les deux phases sont négligeables). Le cas limite $\varepsilon = 0$ correspond à la situation où les effets de la capillarité sont totalement négligés. Le but de notre étude est donc de comparer le modèle obtenu lorsque ε est strictement positif où (1_ε) est une équation parabolique dégénérée, au modèle obtenu lorsque $\varepsilon = 0$ où (1_0) est alors une équation hyperbolique non linéaire du premier ordre. Divers travaux ont été publiés sur l'étude du comportement de la famille de solutions $\left(S_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ quand $\varepsilon \to 0^+$ dans le cas où au moins l'une des deux applications A ou ν est linéaire. Cependant, dans le cas doublement non linéaire et dégénéré envisagé ici, cette étude n'a été faite, à notre connaissance, que pour Ω intervalle réel [15] ou pour des conditions aux limites du type Dirichlet homogène [9]. Le travail développé ici pour des conditions aux limites de type mêlé, mieux adaptées à la réalité physique, s'étend en fait à d'autres types de conditions aux limites (par exemple de type unilatéral). La classe des problèmes pouvant être traités par les méthodes proposées est donnée en conclusion de cet article.

Hypothèses générales et cadre fonctionnel

Ω est supposé de classe $\eta^{(4),1}$ [19]. $\vec{n}$ désigne le vecteur normal extérieur défini en presque tout point de Γ. On note

$$\begin{aligned} \forall\, t \in\,]0\,,T[\,, \quad Q_t &=]0\,,t[\, \times \Omega\,, \quad \Sigma_t = [0\,,t] \times \Gamma \\ Q &=]0\,,T[\, \times \Omega\,, \quad \Sigma = [0\,,T] \times \Gamma\,. \end{aligned}$$

$\vec{B}$ désigne un champ vectoriel de $\left(C^2(\overline{\Omega})\right)^n$ qui vérifie : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. On définit alors deux parties de Γ :

- $\Gamma_- = \left\{x \in \Gamma \mid \vec{B} \cdot \vec{n} < 0\right\}$ qui représente la partie de Γ où les caractéristiques de l'opérateur hyperbolique $v \longrightarrow \vec{B} \cdot \nabla v$ sont *rentrantes*,
- Γ_e une partie ouverte de Γ qui contient la fermeture de Γ_-.

On suppose en plus que Γ_- est de $d\Gamma$-mesure strictement positive. Γ_e est donc aussi de $d\Gamma$-mesure non nulle.

Enfin, les deux fonctions numériques A et ν vérifient les propriétés :

- ν est lipschitzienne, croissante sur $[0\,,1]$, nulle en 0,
- A est de classe C^1 sur $[0\,,1]$, strictement croissante et nulle en 0.

V désigne l'espace $\left\{v \in H^1 \mid v\big|_{\Gamma_e} = 0\right\}$ muni du produit scalaire :

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

où la dérivation est prise au sens des distributions. Γ_e étant de $d\Gamma$-mesure strictement positive, la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. Identifiant $L^2(\Omega)$ à son dual, on dispose des inclusions $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$, l'inclusion de V dans $L^2(\Omega)$ étant continue à image dense. On note $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ la dualité V, V'.

Pour terminer, on désigne par $\mathrm{BV}(Q)$ l'espace des fonctions localement intégrables sur Q dont les dérivées premières sont des mesures de Radon bornées sur Q. On rappelle que $\mathrm{BV}(Q) \cap L^1(Q)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{\mathrm{BV} \cap L^1} = \|u\|_{L^1} + TV_Q(u)$$

où

$$TV_Q(u) =$$
$$= \sup\left\{\int_Q u \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,,\ \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1}) \in \big(C_0^1(Q)\big)^{n+1},\ \|\varphi\|_\infty \le 1\right\}$$

et

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{1\le i\le n+1}\left(\sup_{(t,x)\in Q}\big(|\varphi_i(t,x)|\big)\right).$$

On utilisera différentes propriétés de cet espace, et principalement la compacité de l'injection canonique de $\mathrm{BV}(Q)\cap L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$. On peut trouver par exemple ces propriétés dans [2], [5] et [20].

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème variationnel (P_ε) associé à (1_ε) défini comme suit.

DÉFINITION.— *Trouver S_ε telle que*

$$0 \le S_\varepsilon \le 1 \textit{ p.p. dans } Q\,,\quad \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T\,;V')\,, \tag{1}$$

$$A(S_\varepsilon) \in L^\infty(0,T\,;V)\cap H^1(Q)\,, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\forall\, v\in V \textit{ p.p. } t\in\,]\,0\,,T\,[\,,\\ \left\langle \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}\,, v\right\rangle + \varepsilon\big(\big(A(S_\varepsilon), v\big)\big) + \\ -\int_\Omega \nu(S_\varepsilon)\overrightarrow{B}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \nu(S_\varepsilon)v\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0\,,\end{gathered} \tag{3}$$

$$S_\varepsilon(0\,,\cdot\,) = S_0 \quad \textit{p.p. dans } \Omega \tag{4}$$

où S_0 est un élément donné de V tel que $0\le S_0\le 1$ p.p. dans Ω.

Le résultat principal, établi à la section 3, est la convergence dans $L^p(Q)$ (pour tout $p\in[\,1\,,+\infty\,[\,$) de la suite de solutions $\big(S_\varepsilon\big)_{\varepsilon>0}$ vers la solution S du problème aux limites, non linéaire, hyperbolique du premier ordre relatif à l'équation (1_0) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\nu(S)\overrightarrow{B}\big) = 0\\ S\big|_\Gamma = 0\\ S(0\,,\cdot\,) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\end{cases} \tag{1_0}$$

satisfaisant la condition appropriée d'entropie. La notion de solution entropique de ces problèmes est définie dans [10] pour le problème de Cauchy et dans [2] pour le problème aux limites avec conditions de Dirichlet lorsque Ω est borné. On sait que ces problèmes ont des solutions peu régulières qui sont obtenues par la méthode de viscosité artificielle et définies dans l'espace $\mathrm{BV}(Q)$.

La difficulté essentielle est ici, de trouver des estimations suffisantes pour la suite $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, afin d'établir ce résultat de convergence, les méthodes de [2] n'étant pas directement applicables compte tenu du caractère non linéaire et dégénéré de l'équation (1_ε). Aussi, de façon analogue au cas unidimensionnel [15] ou au cas de conditions aux limites de type Dirichlet homogène [9], on cherchera tout d'abord à la section 1 des estimations a priori pour le problème (1_ε) non dégénéré (c.-à-d. sous l'hypothèse $\exists\, \delta > 0, \forall\, r \in [0\,,1]$, $A'(r) \geq \delta$). Sachant que le cas non dégénéré fournit une approximation du cas dégénéré, on en déduit à la section 2 des estimations dans le cas dégénéré. Cependant, les méthodes utilisées ici sont nouvelles vu les difficultés dues au manque de régularité dans le cas multidimensionnel des solutions de (1_ε) associées à des conditions aux limites de type mêlé. Aussi, on parvient à obtenir des estimations de type local dans $\mathrm{BV}(Q)$ moyennant l'utilisation de fonctions-poids décroissantes le long des caractéristiques de l'opérateur $v \mapsto \overrightarrow{B}\cdot\nabla v$, introduites dans [18] pour étudier des perturbations d'équations hyperboliques linéaires du premier ordre.

1. Estimations a priori dans le cas non dégénéré

Pour les raisons évoquées dans l'introduction, on va supposer ici que les équations (1_ε) sont non dégénérées. Cela revient à écrire (dans les sections 1 et 2 et uniquement dans celles-ci) que A' vérifie :

$$\exists\, \delta > 0\,,\ \forall\, r \in [0\,,1]\,, \quad A'(r) \geq \delta\,.$$

On dispose, en utilisant les résultats de [6], du résultat suivant.

PROPOSITION 1.1 (Existence et unicité). — *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (P_ε) admet une solution unique S_ε telle que :*

$$S_\varepsilon \in L^\infty(0,T\,;V) \quad et \quad \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(Q)\,. \tag{1.1}$$

En outre, si S_ε (resp. $\widehat{S_\varepsilon}$) désigne la solution de (P_ε) relative à la donnée initiale S_0 (resp. $\widehat{S}_0$), alors :

$$\forall\, t \in [0\,,T]\,, \quad \int_\Omega \big(S_\varepsilon(t,x) - \widehat{S_\varepsilon}(t,x)\big)^+ \, \mathrm{d}x \le \int_\Omega \big(S_0(x) - \widehat{S_0}(x)\big)^+ \, \mathrm{d}x \quad (1.2)$$

Estimation a priori de $\partial S_\varepsilon/\partial t$ dans $L^1(Q)$

Il découle du résultat (1.2) et de sa démonstration le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1.— *Si on suppose $A(S_0)$ dans $W^{2,1}(\Omega)$, il existe $C > 0$, indépendante de ε, telle que*

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \forall\, h \in \,]0\,,T[\,,\ \forall\, t \in [0\,,T-h]\,, \quad \|S_\varepsilon(t+h) - S_\varepsilon(t)\|_{L^1} \le Ch \quad (1.3)$$

$$\forall\, \varepsilon < 1\,, \quad \left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T\,;\,L^1(\Omega))} \le C\,. \quad (1.4)$$

Estimation a priori de ∇S_ε dans $\left(L^1_{\mathrm{loc}}(Q)\right)^n$

Les résultats classiques de régularité sur les problèmes elliptiques, (1.1) et les travaux de O. A. Ladyzenskaya et N. N. Ural'Ceva [12] permettent d'énoncer la propriété de régularité qui suit.

PROPOSITION 1.2.— *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$A(S_\varepsilon) \in L^2\big(0,T\,;\, H^{3/2-\eta}(\Omega)\big) \quad \textit{pour tout } \eta > 0$$

et

$$\Delta A(S_\varepsilon) \in L^2(Q)\,.$$

De plus, $A(S_\varepsilon) \in L^2\big(0,T\,;\,H^2(\Omega')\big)$ pour tout ouvert Ω' inclus dans Ω vérifiant

$$\begin{cases} \Omega' \textit{ est connexe de classe } W^2_q\,,\ q > 3 \\ \overline{\Omega'} \subset \Omega \cup \Gamma_\varepsilon \textit{ et } \partial\Omega \cap \partial\Omega' \subset \Gamma \setminus \mathcal{V}(\overline{\Gamma \setminus \Gamma_e}) \end{cases} \quad (\mathrm{P}_1)$$

$\mathcal{V}(\overline{\Gamma \setminus \Gamma_e})$ désignant un voisinage de $\Gamma \setminus \Gamma_e$ dans Γ.

Le manque de régularité sur Q de S_ε nous amène à prendre en considération $\nabla A(S_\varepsilon)$ au lieu de ∇S_ε et à chercher des estimations de type local à partir du résultat de régularité énoncé dans la proposition 1.2. Pour occulter le manque de régularité de $A(S_\varepsilon)$ au voisinage de $\Gamma \setminus \Gamma_e$, on introduit la classe de fonctions φ définie par F. Mignot et J.-P. Puel [18], liée à l'opérateur linéaire $v \mapsto \overrightarrow{B} \cdot \nabla v$. Ces fonctions vérifient la propriété (A_1) :

(i) $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, p.p. dans Ω, et il existe $\Omega'(\varphi)$ un ouvert inclus dans Ω ayant la propriété (P_1) définie à la proposition 1.2 tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\Omega}'$,

(ii) $\overrightarrow{B} \cdot \nabla\varphi \leq 0$ p.p. dans Ω,

(iii) $\varphi = 0$ p.p. sur $\{x \in \Gamma \mid \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} > 0\}$.

Sous l'hypothèse (H) “pour presque tout x de Ω la caractéristique de l'opérateur $v \mapsto \overrightarrow{B} \cdot \nabla v$ passant par x rencontre Γ_- ”, elles possèdent aussi la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 1.1

(i) Il existe un ensemble de mesure nulle $Z \subset \Omega$ tel que, pour tout $x \in (\Omega \setminus Z) \cup \Gamma_-$, il existe φ satisfaisant (A_1) telle que $\varphi(x) \neq 0$.

(ii) Il existe une suite $(\varphi_n)_n$ satisfaisant (A_1) telle que $(\varphi_n)_n$ tende vers 1 partout sur Γ_- et presque partout sur Ω.

On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2.— *On suppose l'hypothèse (H) vérifiée. Pour toute fonction φ vérifiant (A_1), il existe $C(\varphi)$ constante strictement positive indépendante de ε mais dépendante de φ telle que :*

$$\forall\, \varepsilon < 1\,, \quad \left\|\varphi^2 \,\nabla S_\varepsilon\right\|_{(L^\infty(0,T\,;\,L^1(\Omega)))^n} \leq C(\varphi)\,. \tag{1.5}$$

La démonstration de ce théorème longue et technique fait l'objet de la section 2.

2. Démonstration du théorème 1.2

Il suffit d'établir le résultat lorsque A et ν appartiennent à $C^2([\,0\,,\,1\,])$ avec alors A^{-1} dans $C^2([\,0\,,\,A(1)\,])$ et par suite $\nu \circ A^{-1} \in C^2([\,0\,,\,A(1)\,])$. En effet, l'utilisation de suites régulières approchant A et ν permet ensuite de conserver une estimation de ∇S_ε dans $\left(L^\infty\left(0,T\,;\,L^1_{\text{loc}}(\Omega)\right)\right)^n$ pour A et ν respectivement dans $C^1([\,0\,,\,1\,])$ et $C^0([\,0\,,\,1\,])$.

On considère le changement de fonction $u = A(S_\varepsilon)$ et on note

$$\Psi = A^{-1} \quad \text{et} \quad g = \nu \circ \Psi .$$

On se propose donc d'établir que, pour toute fonction φ vérifiant (A_1), $\varphi^2 \nabla S_\varepsilon$ (c.-à-d. $\varphi^2 \nabla \Psi(u)$) est borné dans $\big(L^\infty(0,T\,;\, L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))\big)^2$ indépendamment de ε et de la constante de viscosité δ. On fixe φ et Ω' un ouvert satisfaisant (P_1) tels que

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Omega'} \quad \text{et} \quad \Gamma' \setminus \Gamma'_e \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}\varphi$$

(avec $\Gamma' = \partial\Omega'$ et $\Gamma'_e = \Gamma' \cap \Gamma_e$ de $\mathrm{d}\Gamma'$-mesure non nulle). On pose ensuite :

- $\forall\, t \in \,]0\,,T\,[$,

$$\begin{aligned} Q'_t &= \,]0\,,t\,[\, \times \Omega' , \quad \Sigma'_t = [\quad , t\,] \times \Gamma' \\ Q' &= \,]0\,,T\,[\, \times \Omega' , \quad \Sigma' = [0\,,T\,] \times \Gamma' \text{ et } \Sigma'_e = [\,0\,,T\,] \times \Gamma'_e , \end{aligned}$$

- $\mathcal{V}' = \{v \in H^1(\Omega') \mid v\,|_{\Gamma'_e} = 0\}$,
- $Z_m = H^m(\Omega') \cap \mathcal{V}'$ muni de la norme usuelle de $H^m(\Omega')$,
- $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$|\xi| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{1/2} ,$$

- pour $\eta > 0$,

$$I_\eta\big(|\xi|\big) = \int_0^{|\xi|} sg_\eta(r)\,\mathrm{d}r ,$$

  où sg_η est l'approximation lipschitzienne impaire de la fonction sg_0 définie pour r positif par $sg_\eta(r) = \min(r/\eta, 1)$.

Pour finir, on introduit la fonction test w_j définie pour presque tout t dans $]\,0\,,T\,[$ par

$$w_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\,(\varphi^2 v_j) , \quad \forall\, j = 1, \ldots, n , \quad \text{avec } v_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\, I_\eta\big(|\nabla u|\big) .$$

On remarquera que d'après la proposition 1.2, $u|_{\Omega'}$ est dans $W(0,T\,;\, Z_2, L^2(\Omega'))$ (ce qui n'est pas le cas de S_ε) et que par conséquent

$$\varphi^2 v_j \in L^2(0,T\,;\, H^1(\Omega')) \cap L^\infty(Q)$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées [5]. On remarquera aussi que pour toute fonction $v \in L^2(0,T\,;\, V)$, $\varphi^2 v \in L^2(0,T\,;\, H_0^1(\Omega'))$.

Pour établir l'estimation recherchée sur $\varphi^2\,\nabla\Psi(u)$, on considère l'égalité vérifiée par u dans $L^2(Q')$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(u) + \operatorname{div}\big(g(u)\overrightarrow{B}\big) - \varepsilon\,\Delta u = 0 \tag{2.1}$$

que l'on multiplie scalairement par dans $\sum_{j=1}^{n} w_j$ dans $L^2(Q'_t)$. Il vient :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(u)w_j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,+\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\operatorname{div}\big(g(u)\overrightarrow{B}\big)w_j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\Delta u\,w_j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=0\,.\end{aligned}\tag{2.2}$$

On est conduit à transformer chaque terme de (2.2) par des techniques essentiellement basées sur des intégrations par parties. L'objet des trois lemmes suivants est de justifier les transformations effectuées sur chaque terme de (2.2).

LEMME 2.1.— $\forall\, t \in\,]\,0\,,T\,]$, *on a*

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(u)w_j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\le\\&\quad\le-\int_{\Omega'}\Psi'(u(t))I_\eta\Big(\big|\nabla u(t)\big|\Big)\varphi^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega'}\Psi'(u(0))I_\eta\Big(\big|\nabla u(0)\big|\Big)\varphi^2\,\mathrm{d}x\,+\\&\qquad+\left(\int_{Q'_t}\left|\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi'(u)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right)\frac{\eta}{2}\,.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Preuve.— On va démontrer (2.3), dans un premier temps, pour $v \in \mathcal{D}\big([\,0\,,T\,]\,;\,Z_2\big)$. On pose :

$$\widehat{w_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\,(\varphi^2\widehat{v_j}) \quad \text{avec } \widehat{v_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\,I_\eta\big(|\nabla v|\big)\,,\ 1 \le j \le n\,.$$

Après une intégration par parties par rapport à la variable d'espace, Ψ étant de classe C^2, on a, $\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,[$,

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \frac{\partial}{\partial t}\, \Psi(v)\widehat{w_j}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \frac{\partial}{\partial t}\, \Psi'(v) \frac{\partial v}{\partial x_j}\, \varphi^2 \widehat{v_j}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s + \int_{Q'_t} \Psi'(v)\varphi^2 \frac{\partial}{\partial t}\, I_\eta\big(|\nabla v|\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s\,.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ensuite, après une intégration par parties par rapport à t du deuxième terme du membre de droite de (2.4) et après avoir remarqué que

$$\forall\, r \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \le rsg_\eta(r) - I_\eta(r) \le \frac{\eta}{2}, \tag{2.5}$$

on aboutit à (2.3) pour $v \in \mathcal{D}\big([\,0\,,T\,]\,;Z_2\big)$. On en déduit le résultat du lemme grâce à la densité de $\mathcal{D}\big([\,0\,,T\,]\,;Z_2\big)$ dans $W\big(0,T\,;Z_2, L^2(\Omega')\big)$ et à la continuité de l'injection de $W\big(0,T\,;Z_2, L^2(\Omega')\big)$ dans $\mathcal{C}\big([\,0\,,T\,]\,;\mathcal{V}'\big)$ (cf. [14]). □

LEMME 2.2.— $\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,]$, *on a*

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \operatorname{div}\big(g(u)\overrightarrow{B}\big) w_j\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s \le \\
&\quad \le -\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \nabla g(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\, \overrightarrow{B} \varphi^2 v_j\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s + \\
&\quad + \left(\int_{Q'_t} \big|\nabla g'(u) \cdot \overrightarrow{B}\big|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s + \int_{\Sigma'_e} \big|g'(0)\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\big|\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}s \right) \frac{\eta}{2} + \\
&\quad + 2 \int_{Q'_t} \varphi g'(u)\, I_\eta\big(|\nabla u|\big) \overrightarrow{B} \cdot \nabla\varphi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Preuve.— Dans un premier temps, on montre (2.6) pour v dans $L^2(0,T\,;Z_m)$, avec $m \ge 3$. La régularité de v entraîne que $g(v) \in L^2\big(0,T\,;C^1(\overline{\Omega'})\big)$. En intégrant par parties par rapport à la variable d'espace, grâce à la règle de dérivation de la composée d'applications [5] et au fait que $H^1 \cap L^\infty$ est une algèbre, on obtient $\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,]$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \operatorname{div}\big(g(v)\overrightarrow{B}\big)\widehat{w_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \\
&= -\int_{Q'_t} \nabla g'(v)\cdot\overrightarrow{B}\varphi^2|\nabla v| sg_\eta\big(|\nabla v|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\quad - \int_{Q'_t} g'(v)\varphi^2\nabla I_\eta\big(|\nabla v|\big)\cdot\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t} \nabla g(v)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\overrightarrow{B}\varphi^2\widehat{v_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Sigma'_e} \big(\nabla g(v)\cdot\overrightarrow{B}\big)\varphi^2\widehat{v_j}n_j\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Si on applique à nouveau la formule de Green au deuxième terme d second membre de l'égalité (2.7), il vient, $\forall\, t\in\,]\,0\,,T\,[$,

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q'_t} g'(v)\varphi^2\nabla I_\eta\big(|\nabla v|\big)\cdot\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_{Q'_t} \varphi^2 I_\eta\big(|\nabla v|\big)\nabla g'(v)\cdot\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + 2\int_{Q'_t} \varphi g'(v)\, I_\eta\big(|\nabla v|\big)\overrightarrow{B}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\quad - \int_{\Sigma'_e} g'(0)\varphi^2 I_\eta\big(|\nabla v|\big)\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Par conséquent, les résultats (2.5), (2.7), (2.8), (A_1), le fait que g soit croissante et l'implication

$$
v|_{\Gamma'_e} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial n}\,n_i \text{ sur } \Gamma'_e \text{ et } |\nabla v| = \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \text{ sur } \Gamma'_e\right)
\tag{2.9}
$$

permettent d'établir (2.6) pour tout $v\in L^2(0,T\,;\,Z_m)$ avec $m\geq 3$. Pour finir la démonstration de ce lemme, on utilise la densité de Z_m dans Z_2, donc celle de $L^2(0,T\,;\,Z_m)$ dans $L^2(0,T\,;\,Z_2)$. □

LEMME 2.3.— *$\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,]$, on a*

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \Delta u w_j \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &\leq \\
\leq \int_{Q'_t} \Delta\varphi^2 I_\eta(|\nabla u|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &+ C\int_{\Sigma'_e} \varphi^2 \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s + \\
-2\int_{\Sigma'_e} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} I_\eta\left(\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\right) \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s &
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

avec C une constante strictement positive, dépendant uniquement de Ω.

Preuve.— On démontre (2.10), dans un premier temps, pour $v \in L^2(0,T\,;\, Z_m)$, avec m tel que $H^m(\Omega') \subset C^2(\overline{\Omega'})$ (si on se réfère à [19], on trouve qu'il suffit par exemple de choisir $m \geq 4$). En intégrant par parties par rapport à x dans Ω', on trouve pour tout $t \in \,]\,0\,,T\,]$,

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \Delta v \widehat{w_j} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \\
= \sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \varphi^2 \widehat{v_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &- \sum_{j=1}^{n} \int_{\Sigma'_e} \Delta v\, \varphi^2 \widehat{v_j}\cdot n_j \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Si on effectue ensuite une intégration par parties par rapport à x pour le premier terme du membre de droite de (2.11), on obtient, $\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,]$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \varphi^2 \widehat{v_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \\
= -\int_{Q'_t} \nabla\varphi^2 \cdot \nabla I_\eta(|\nabla v|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &- \sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \varphi^2 \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\cdot \nabla\widehat{v_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \ldots + \\
+\sum_{j=1}^{n} \int_{\Sigma'_e} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \varphi^2 \widehat{v_j}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\,. &
\end{aligned}
$$

En faisant une autre intégration par parties par rapport à x pour le premier terme du second membre et en tenant compte du fait que $\partial\varphi/\partial n\Big|_{\Gamma'\setminus\Gamma'_e} = 0$ (par choix de Ω'), on obtient l'égalité qui suit : $\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,]$,

$$
\begin{aligned}
-\int_{Q'_t} \nabla\varphi^2 \cdot \nabla I_\eta(|\nabla v|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \\
= \int_{Q'_t} \Delta\varphi^2 I_\eta(|\nabla v|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &- 2\int_{\Sigma'_e} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} I_\eta(|\nabla v|)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Par conséquent, d'après (2.9), (2.11) et (2.12), on peut écrire, $\forall\, t \in \,]\,0\,,T\,]$,

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\Delta v\widehat{w_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\varphi^2\nabla\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\cdot\nabla\widehat{v_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_{Q'_t}\Delta\varphi^2 I_\eta(|\nabla v|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s +$$

$$-2\int_{\Sigma'_e}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,I_\eta\left(\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|\right)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s +$$

$$+\int_{\Sigma'_e}\varphi^2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}-\Delta v\right]\frac{sg_\eta([\partial v/\partial n])}{[\partial v/\partial n]}\,\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\,.$$

On tient compte alors du fait que I_η est une fonction positive et convexe et du fait que, puisque $v \in L^2(0,T\,;C^2(\overline{\Omega'}))$, on a l'égalité :

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}-\Delta v\right| \le C\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \quad \text{p.p. } t\in\,]\,0\,,T\,[\,,\ \text{p.p. sur } \Gamma'_e$$

où C est une constante dépendant seulement de Γ. On en déduit que (2.10) est vraie pour tout v dans $L^2(0,T\,;Z_m)$. Comme précédemment, on conclut à l'aide de la densité de $L^2(0,T\,;Z_m)$ dans $L^2(0,T\,;Z_2)$. □

On va pouvoir maintenant transformer l'égalité (2.2). On obtient moyennant l'utilisation des lemmes 2.1, 2.2 et 2.3, pour tout $\eta > 0$ et tout $t \in \,]\,0\,,T\,]$, l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega'}\Psi'(u(t))I_\eta\left(|\nabla u(t)|\right)\varphi^2\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \int_{\Omega'}\Psi'(u(0))I_\eta\left(|\nabla u(0)|\right)\varphi^2\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{n}\int_{Q'_t}\nabla g(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\overrightarrow{B}\varphi^2 v_j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s +$$

$$+2\int_{Q'_t}\varphi g'(u)I_\eta(|\nabla u|)\overrightarrow{B}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \left(\int_{\Sigma'_e}|g'(0)\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\right)\frac{\eta}{2} +$$

$$+\varepsilon\int_{Q'_t}\Delta\varphi^2 I_\eta(|\nabla u|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \varepsilon\, C\int_{\Sigma'_e}\varphi^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s +$$

$$+\left(\int_{Q'_t}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(u)\right| + |\nabla g'(u)\cdot\overrightarrow{B}|\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right)\frac{\eta}{2} +$$

$$-2\varepsilon\int_{\Sigma'_e}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,I_\eta\left(\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\right)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s \tag{2.13}$$

avec $C > 0$ indépendante de ε et δ.

En désignant toujours par C toute constante indépendante de ε et δ on a les majorations suivantes :

1) comme ν est de classe C^1 sur $[0\,,1]$ et $g = \nu \circ \Psi$, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \int_{Q'_t} \nabla g(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\, \vec{B}\, \varphi^2 v_j \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| \leq C \int_{Q'_t} \varphi^2 \big|\nabla \Psi(u)\big| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,,$$

2) ainsi que

$$\left|\varepsilon \int_{Q'_t} \Delta\varphi^2 I_\eta\big(|\nabla u|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| \leq \varepsilon \big\|\Delta\varphi^2\big\|_\infty \int_{Q'_t} I_\eta\big(|\nabla u|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\ ;$$

3) grâce à (A_1), on a

$$\int_{Q'_t} \varphi g'(u) I_\eta\big(|\nabla u|\big)\vec{B} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leq 0\ ;$$

4) après avoir remarqué l'inégalité $\partial u/\partial n \leq 0$ sur Σ'_e, appliqué la formule de Green par rapport à x et utilisé ensuite (2.1), (A_1) et l'estimation (1.4) sur $\partial S_\varepsilon/\partial t$, on a alors

$$\varepsilon \int_{\Sigma'_e} \varphi \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s \leq C\big(1 + \varepsilon\|\Delta\varphi\|_\infty\big)\ .$$

Alors on obtient, à partir de (2.13), après passage à la limite sur η,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} \Psi'\big(u(t)\big)\big|\nabla u(t)\big|\varphi^2\,\mathrm{d}x \leq \\
&\qquad \leq \int_{\Omega'} \Psi'\big(u(0)\big)\big|\nabla u(0)\big|\varphi^2\,\mathrm{d}x + C\int_{Q'_t} \varphi^2\big|\nabla\Psi(u)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad\quad + C(\varphi)\left(\varepsilon\int_{Q'_t} |\nabla u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + 1\right)
\end{aligned}$$

où $C(\varphi)$ est une constante dépendant de φ mais indépendante de ε et δ. Puisque $S_\varepsilon = \Psi(u)$, il vient , $\forall\, t \in\,]\,0\,, T\,]$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \big|\nabla S_\varepsilon(t)\big|\varphi^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega'} |\nabla S_0|\varphi^2\,\mathrm{d}x + C\int_{Q'_t} \varphi^2|\nabla S_\varepsilon|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
+ \varepsilon\, C(\varphi)\int_{Q'_t} \big|\nabla A(S_\varepsilon)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + C(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

On utilise alors l'estimation hilbertienne suivante.

LEMME 2.4.— *La solution S_ε de (P_ε) vérifie*

$$\varepsilon \int_Q \left|\nabla F(S_\varepsilon)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leq C$$

où $F(r) = \int_0^r \sqrt{A'(s)}\,\mathrm{d}s$ et où C est une constante indépendante de ε et δ.

Preuve.— La fonction $w = \int_0^{S_\varepsilon} \nu(s)\,\mathrm{d}s$ est dans $L^\infty(0,T;\,V) \cap L^\infty(Q)$ et vérifie $\nabla w = \nu(S_\varepsilon)\nabla S_\varepsilon$. Par utilisation de la formule de Green et de l'égalité div $\overrightarrow{B} = 0$, il vient :

$$-\int_\Omega \nu(S_\varepsilon)\overrightarrow{B}\cdot\nabla S_\varepsilon\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\left(\int_0^{S_\varepsilon} \nu(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\sigma = 0 \quad \text{p.p. } t \in \,]\,0\,,T\,[\,, \tag{2.14}$$

En utilisant le fait que ν est une fonction croissante sur $[\,0\,,1\,]$, $S_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\,V)$ avec $S_\varepsilon \geq 0$ et $\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n} \geq 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_-$, (2.14) donne :

$$-\int_\Omega \nu(S_\varepsilon)\overrightarrow{B}\cdot\nabla S_\varepsilon\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\nu(S_\varepsilon)S_\varepsilon\mathrm{d}\sigma \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in \,]\,0\,,T\,[\,.$$

Si cette dernière propriété est appliquée à (3) pour le choix loisible $v = S_\varepsilon$, on trouve

$$\int_\Omega \left|S_\varepsilon(t)\right|^2 \mathrm{d}x + 2\varepsilon \int_{Q_t} \left|\nabla F(S_\varepsilon)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leq \int_\Omega \left|S_0\right|^2 \mathrm{d}x \quad \text{p.p. } t \in [\,0\,,T\,]\,.$$

On en déduit l'estimation recherchée. □

On termine alors la démonstration du théorème 1.2 à l'aide du lemme de Gronwall.

3. Estimations a priori pour la suite $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

On revient à l'étude du problème dégénéré (P_ε). On rappelle le résultat classique d'existence (cf. par exemple [4] et [6]).

PROPOSITION 3.1.— *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (P_ε) admet au moins une solution S_ε telle que*

$$S_\varepsilon \in C([\,0\,,T\,];\,L^2(\Omega))\,, \quad A(S_\varepsilon) \in C_s([\,0\,,T\,];\,V)\,.$$

De plus, pour tout $\varepsilon < 1$, S_ε satisfait les estimations,

$$\left\| \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T\,;V')} \leq C \;\; et \;\; \varepsilon^{1/2} \| A(S_\varepsilon) \|_{H^1(Q)} + \varepsilon \| A(S_\varepsilon) \|_{L^\infty(0,T\,;V)} \leq C\,.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la solution de la proposition 3.1 est définie par la méthode de viscosité artificielle, comme limite dans $L^p(Q)$, $p \in [1\,, +\infty[$, d'une suite de solutions de problèmes régularisés non dégénérés notés $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\delta})_{\delta>0}$; obtenus en remplaçant dans (P_ε), A par $A_\delta = A + \delta I_d$.

Les estimations hilbertiennes de S_ε données à la proposition 3.1 ne sont évidemment pas suffisantes pour étudier le comportement de la suite (S_ε) lorsque $\varepsilon \mapsto 0^+$. Cependant, à partir des résultats de la section 1 (théorèmes 1.1 et 1.2) que l'on peut appliquer aux solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\delta})$, on obtient, en utilisant notamment la s.c.i. de la variation pour la convergence dans L^1, le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1.— *Si on suppose $S_0 \in W^{2,1}(\Omega)$ et $A(S_0) \in W^{2,1}(\Omega)$, (P_ε) admet au moins une solution S_ε satisfaisant les propriétés de la proposition 3.1. De plus :*

$$\begin{cases} S_\varepsilon \in \mathrm{BV}\big(0,T\,;\, L^1(\Omega)\big) \\ \forall\, \varepsilon < 1\,,\ \forall\, h \in \,]\,0\,,T\,[\,,\ \forall\, t \in [\,0\,,T-h\,]\,, \\ \| S_\varepsilon(t+h) - S_\varepsilon(t) \|_{L^1(\Omega)} \leq Ch \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $C > 0$ constante indépendante de ε. Pour toute fonction φ satisfaisant (A_1) :

$$\varphi^2 S_\varepsilon \in \mathrm{BV}(Q) \;\; et \;\forall\, \varepsilon < 1\,, \quad \| \varphi^2 S_\varepsilon \|_{L^\infty(0,T\,;\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^1(\Omega))} \leq C(\varphi) \tag{3.2}$$

avec $C(\varphi) > 0$ constante indépendante de ε mais dépendant a priori de φ.

Remarque 3.1.— Étant donné que pour toute fonction φ satisfaisant (A_1), il existe Ω' un ouvert ayant la propriété (P_1) tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\Omega'}$, (3.2) implique qu'alors S_ε est borné dans $\mathrm{BV}(Q') \cap L^1(Q')$ indépendamment de ε, où $Q' = \,]\,0\,,T\,[\, \times \Omega'$.

Unicité.— Le problème d'unicité de la solution pour les équations paraboliques dégénérées a fait l'objet de nombreuses publications, principalement dans le cas du problème de Cauchy. Diverses techniques ont été utilisées et adaptées à ces équations. On peut citer [1], [3], [8], [11], [13] et [16]. La principale difficulté de ces problèmes est la conjonction du manque de régularité de $\partial S_\varepsilon/\partial t$ et du caractère non linéaire de l'équation. Les méthodes citées ci-dessus ne permettent plus de conclure ici, dans le cas de conditions aux limites de type mêlé, à cause de la présence du terme de bord dans la formulation variationnelle de (P_ε). On dispose cependant ici d'un résultat d'unicité obtenu à partir des travaux de [7]. Pour cela, on fait l'hypothèse que

$$\nu \circ A^{-1} \in C^{0,1/2}([\,0\,,A(1)\,]) \tag{H1}$$

THÉORÈME 3.2.— *Sous (H1), le problème (P_ε) admet une solution unique dans* $\mathrm{BV}(0,T\,;\,L^1(\Omega))$

On va pouvoir maintenant passer à l'étude du comportement de la famille S_ε lorsque $\varepsilon \mapsto 0^+$.

4. Convergence de la suite (S_ε)

THÉORÈME 4.1.— *La famille de solutions $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des problèmes (P_ε) étudiés est compacte dans $C([\,0\,,T\,]\,;L^1(\Omega))$. Chaque fonction limite S vérifie :*

$$S \in \mathrm{BV}(Q') \cap L^\infty(Q)\,, \quad 0 \le S \le 1 \ \textit{p.p. dans } Q\,,$$

$$S \in C([0,T]\,;L^1(\Omega)) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\nu(S)\overrightarrow{B}\big) = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(Q)\,, \tag{4.2}$$

$$S(0,\cdot) = S_0 \quad \textit{p.p. dans } \Omega \tag{4.3}$$

où $Q' = \,]\,0\,,T\,[\, \times \Omega'$ avec Ω' un ouvert quelconque, vérifiant (P_1).

Preuve.— Puisque S_ε prend ses valeurs dans $[\,0\,,1\,]$, on sait qu'il existe une sous-suite extraite de $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ notée $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $S \in [\,0\,,1\,]$, tels que :

$$S_\varepsilon \text{ converge } *\text{-faiblement vers } S \text{ dans } L^\infty(Q)\,.$$

Or, on a aussi établi, d'après le théorème 3.1 que pour toute fonction φ vérifiant (A_1) il existe $C(\varphi) > 0$ indépendante de ε telle que :

$$\forall\, \varepsilon \leq 1\,, \quad \left\|\varphi^2 S_\varepsilon\right\|_{L^\infty(0,T\,;\,\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^1(\Omega))} \leq C(\varphi)\,.$$

· Le fait que $\left(S_\varepsilon\right)_\varepsilon$ soit uniformément équicontinue de $[\,0\,,T\,]$ dans $L^1(\Omega)$ (cf. (3.1)) assure, à partir de (3.2) et de la compacité de l'injection de $\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ (grâce au théorème d'Ascoli) que pour toute fonction φ satisfaisant (A_1),

$$\varphi^2 S_\varepsilon \text{ converge vers } \varphi^2 S \text{ dans } \mathcal{C}\big([\,0\,,T\,]\,;\,L^1(\Omega)\big)\,.$$

Alors, en utilisant la suite $\left(\varphi_k\right)_k$ vérifiant la propriété 1.1(ii), on obtient que

$$S_\varepsilon \longmapsto S \quad \text{dans } \mathcal{C}\big([\,0\,,T\,]\,;\,L^1(\Omega)\big)\,.$$

On en déduit les résultats (4.1) à (4.3). □

Remarque 4.1.— On peut établir le résultat de compacité dans $\mathcal{C}\big([\,0\,,T\,]\,;\,L^1(\Omega)\big)$ en prenant appui sur des travaux récents de P. Bénilan et R. Gariepy (à paraître au J. Diff. Eq.) permettant de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon \in L^\infty\big(0,T\,;\,W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ puisque $A(S_\varepsilon) \in L^\infty(0,T\,;\,V)$ avec A fonction strictement croissante dont la dérivée s'annule sur un ensemble Lebesgue négligeable puisque fini ici. La suite (S_ε) est donc bornée dans $L^\infty\big(0,T\,;\,W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap L^1(\Omega)\big)$ et équicontinue de $[\,0\,,T\,]$ dans $L^1(\Omega)$ d'où la propriété de compacité dans $\mathcal{C}\big([\,0\,,T\,]\,;\,L^1(\Omega)\big)$.

On va maintenant apporter quelques précisions sur la notion de solution entropique associée à (4.2) et (4.3) tenant compte de la croissance de ν. Tout d'abord on rappelle la définition de cette solution.

DÉFINITION 4.1.— *Une fonction $S \in \mathrm{BV}(Q)\cap L^\infty(Q)$ est la solution entropique du problème (P_0) associé à (4.2) et (4.3) si :*

- *pour toute fonction $\Phi \in C^2\big(\,]\,0\,,T\,[\,\times\overline{\Omega}\big)$, Φ positive à support compact dans $]\,0\,,T\,[\,\times\,\overline{\Omega}$ et pour tout $k \in [\,0\,,1\,]$,*

$$\int_Q \left(|S-k|\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \big|\nu(S)-\nu(k)\big|\overrightarrow{B}\cdot\nabla\Phi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\, + \\ + \int_\Sigma \big|\nu(S)-\nu(k)\big|\Phi\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s \geq 0$$

- $S(0,\,\cdot\,) = S_0$ *p.p. dans* Ω.

On remarque que, pour ce problème, comme $S \geq 0$ la condition de bord s'écrit en notant γS la trace de S sur Σ au sens de $\mathrm{BV}(Q)$ (cf. [20]) :

$$\max_{k\in[0,\gamma S]}\left\{\left[\nu(k)-\nu(\gamma S)\right]\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\right\}=0 \quad \text{p.p. sur } \Sigma\,. \tag{4.4}$$

Par conséquent, comme ν est croissante sur $[0\,,1]$, avec $\nu(0)=0$ et par définition de Γ_-, (4.4) devient :

$$\nu(\gamma S)=0 \quad \text{p.p. sur }]0\,,T[\,\times\Gamma_-\,. \tag{4.5}$$

Ainsi, la fonction ν étant croissante, à partir de [2], on va montrer que le problème (P_0) associée à (4.2), (4.3) et (4.5) est équivalent au problème (P_0^*) répondant à la définition suivante.

DÉFINITION 4.2.— *Une fonction $S\in L^\infty(Q)$ est solution de (P_0^*) si :*

- $S\in\mathrm{BV}(Q')$ *et si pour tout ouvert Ω' vérifiant (P_1), pour toute fonction $\Phi\in C^2(]0\,,T[\,\times\overline{\Omega})$, Φ positive à support compact dans $]0\,,T[\,\times\overline{\Omega'}$ telle que $\Phi=0$ sur $\Sigma'\setminus\Sigma'_e$ et pour tout $k\in[0\,,1]$,*

$$\begin{aligned}\int_{Q'}\left(|S-k|\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\left|\nu(S)-\nu(k)\right|\overrightarrow{B}\cdot\nabla\Phi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,+&\\ +\int_{\Sigma'}\left|\nu(S)-\nu(k)\right|\Phi\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\geq 0&\end{aligned} \tag{4.6}$$

- $S(0,\cdot)=S_0$ *p.p. dans Ω.*

THÉORÈME 4.2.— *(P_0^*) admet une solution unique. Cette solution est l'unique solution du problème (P_0).*

Preuve.— Si S est solution de (P_0), alors S vérifie : pour tout ouvert Ω' satisfaisant (P_1), $S\in\mathrm{BV}(Q')$ et, $\forall\,\Phi\in C^2(]0\,,T[\,\times\overline{\Omega})$, $\Phi\geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\,]0\,,T[\,\times\overline{\Omega'}$, $\Phi=0$, sur $\Sigma'\setminus\Sigma'_e$, $\forall\,k\in[0\,,1]$,

$$\begin{aligned}\int_{Q}\left(|S-k|\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\left|\nu(S)-\nu(k)\right|\overrightarrow{B}\cdot\nabla\Phi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,+&\\ +\int_{\Sigma}\left|\nu(S)-\nu(k)\right|\Phi\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\geq 0\,.&\end{aligned}$$

Or, par la propriété (P_1),

$$\int_{\Sigma} \left|\nu(S) - \nu(k)\right| \Phi \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, d\sigma \, ds = \int_{\Sigma'} \left|\nu(S) - \nu(k)\right| \Phi \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, d\sigma \, ds .$$

Ainsi, S est la solution de (P_0^*).

Unicité de la solution de (P_0^*).— Considérons u et v, deux solutions de (P_0^*). Soit un ouvert quelconque vérifiant (P_1), $Q' = \left]0, T\right[\times \overline{\Omega}'$ et $\Phi \in \mathcal{D}(Q')$. Par la méthode de S. N. Krüzkov, il vient

$$\int_{Q'} \left(|u - v| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left|\nu(u) - \nu(v)\right| \overrightarrow{B} \cdot \nabla \Phi \right) dx \, ds \geq 0 .$$

Soient $\Psi \in \mathcal{D}(\left]0, T\right[)$, $\Psi \geq 0$, φ ayant la propriété (A_1), $\varphi = 0$ sur $\Gamma' \setminus \Gamma'_e$ et $\rho_\sigma \in C^2(\overline{\Omega'})$ défini par :

- $\rho_\sigma \equiv 1$ sur Γ', $\rho_\sigma \equiv 0$ sur $\left\{x \in \Omega' \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma') \geq \sigma\right\}$;
- $0 \leq \rho_\sigma \leq 1$ sur Ω' et $\left|\lambda \rho_\sigma\right|_{L^\infty} \leq c/\sigma$ (c est une constante indépendante de σ, cf. [2]).

Par le choix $\Phi = \Psi(1 - \rho_\sigma)\varphi$, il vient comme $\overrightarrow{B} \cdot \nabla\varphi \leq 0$ p.p. dans Ω' :

$$\int_{Q'} |u - v| \Psi'(t) \big(1 - \rho_\sigma(x)\big) \varphi \, dx \, ds \geq$$

$$\geq \int_{Q'} \left|\nu(u) - \nu(v)\right| \overrightarrow{B} \cdot \nabla \rho_\sigma \varphi(x) \Psi(t) \, dx \, ds .$$

Par la propriété des traces dans $BV(Q')$, on obtient lorsque $\delta \to 0^+$:

$$\int_{Q'} |u - v| \Psi'(t) \varphi(x) \, dx \, ds \geq \int_{\Sigma'} \left|\nu(u) - \nu(v)\right| \varphi(x) \Psi(t) \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, dx \, ds .$$

Or, par la propriété (A_1)(iii),

$$\int_{\Sigma'} \left|\nu(u) - \nu(v)\right| \varphi(x) \Psi(t) \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, dx \, ds =$$

$$= \int_{\Sigma'_e} \left|\nu(u) - \nu(v)\right| \varphi(x) \Psi(t) \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, dx \, ds .$$

D'où, d'après [2, p. 1032],

$$\int_{Q'} |u - v| \Psi'(t) \varphi(x) \, dx \, ds \geq 0 .$$

En choisissant une suite (φ_n) telle que $\varphi_n \mapsto 1$ p.p. dans Ω (prop. 1.1(ii)), il vient :

$$\forall\, \Psi \in \mathcal{D}(]\,0\,,T\,[)\,,\ \Psi \geq 0\,,\qquad \int_{Q'} |u-v|\Psi'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \geq 0$$

d'où $u = v$ p.p. dans Q.

Conclusion.— La solution de (P_0) est solution de (P_0^*) et est l'unique solution de (P_0^*). Les problèmes (P_0) et (P_0^*) sont donc équivalents. □

THÉORÈME 4.3.— *La suite $\left(S_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ converge dans $L^p(Q)$, pour tout p dans $[\,1\,,+\infty\,[$ et dans $\mathcal{C}([\,0\,,T\,]\,;L^1(\Omega))$ vers l'unique solution entropique de (P_0^*), donc de (P_0).*

Preuve.— D'après le théorème 4.1, il existe une suite extraite de $\left(S_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ notée encore (S_ε), convergente dans $\mathcal{C}([\,0\,,T\,]\,;L^1(\Omega))$ vers une fonction S vérifiant (4.1), (4.2) et (4.3). Pour établir que S est solution de (P_0^*), il suffit donc d'établir (4.6). On se donne $k \in [\,0\,,1\,]$, un ouvert Ω' et une fonction $\Phi \geq 0$ ayant les propriétés de la définition 4.2 et la suite $(S_{\varepsilon,\delta})$ de solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\delta})$ convergeant vers S_ε. Puis, on multiplie l'égalité :

$$\frac{\partial S_{\varepsilon,\delta}}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\nu(S_{\varepsilon,\delta})\overrightarrow{B}\big) - \varepsilon\,\Delta A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

par la fonction test pour $v_\varepsilon = -sg_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\Phi$ pour $\eta > 0$.

Après avoir intégré par parties, on a

$$\begin{aligned}
&\int_Q I_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\, + \\
&\qquad + \int_Q [\nu(S_{\varepsilon,\delta}) - \nu(k)]\,sg_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\overrightarrow{B}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\, + \\
&\qquad + \int_Q [\nu(S_{\varepsilon,\delta}) - \nu(k)]\,sg'_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\Phi\overrightarrow{B}\cdot\nabla S_{\varepsilon,\delta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \\
= \quad &\varepsilon\int_Q A'_\delta(S_{\varepsilon,\delta})\Phi\big|\nabla S_{\varepsilon,\delta}\big|^2 sg'_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\, + \qquad\qquad (4.7)\\
&\qquad + \varepsilon\int_Q sg_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\nabla A_\delta(S_{\varepsilon,\delta})\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\, +
\end{aligned}$$

$$- \varepsilon \int_{\Sigma'} \frac{\partial}{\partial n} A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) sg_\eta(S_{\varepsilon,\delta} - k)\Phi \, d\sigma \, ds +$$

$$+ \int_{\Sigma'} \nu(k) sg_\eta(k) \Phi \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, d\sigma \, ds \, .$$

On remarquera d'abord que le premier terme du second membre de (4.7) est positif, puisque, si on fait tendre η vers zéro, les deux premiers termes de (4.7) donnent (parce que ν est croissante) le premier terme de (4.6) avec $S_{\varepsilon,\delta}$ au lieu de S, le troisième terme tend vers zéro d'après le lemme de Sacks. La limite des autres termes restant est facilement obtenue. On a donc

$$\int_Q \left(|S_{\varepsilon,\delta} - k| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left|\nu(S_{\varepsilon,\delta}) - \nu(k)\right| \overrightarrow{B} \cdot \nabla \Phi \right) dx \, ds \geq$$

$$\geq \int_{\Sigma'} \nu(k) \Phi \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, d\sigma \, ds + \varepsilon \int_Q sg(S_{\varepsilon,\delta} - k) \nabla A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) \cdot \nabla \Phi \, dx \, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_{\Sigma'_e} \frac{\partial}{\partial n} A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) sg(k) \Phi \, d\sigma \, ds \, . \tag{4.8}$$

On remarque ensuite que pour $\lambda > 0$ fixé

$$\varepsilon \int_{\Sigma'_e} \frac{\partial}{\partial n} A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) \Phi \, d\sigma \, ds =$$

$$= - \int_{Q'} S_{\varepsilon,\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho_\lambda \, dx \, ds - \int_{Q'} \nu(S_{\varepsilon,\delta}) \operatorname{div}(\rho_\lambda \Phi \overrightarrow{B}) \, dx \, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_{Q'} \nabla A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) \cdot \nabla(\Phi \rho_\lambda) \, dx \, ds$$

où ρ_λ a été défini dans la preuve du théorème 4.2.

De plus, en utilisant l'estimation hilbertienne classique de $\varepsilon^{1/2} A_\delta(S_{\varepsilon,\delta})$ dans $L^2(0,T\,;\,V)$, on trouve

$$\varepsilon^{1/2} \left| \int_{Q'} \left(sg(S_{\varepsilon,\delta} - k) \nabla A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) \cdot \nabla \Phi + \nabla A_\delta(S_{\varepsilon,\delta}) \cdot \nabla(\Phi \rho_\lambda) \right) dx \, ds \right| \leq$$

$$\leq C \left|\nabla \Phi\right|_{L^\infty}$$

où C ne dépend ni de δ ni de ε.

Aussi, λ étant fixé, à l'aide des convergences assurées, quand $\delta \to 0^+$ par la sous-suite $(S_{\varepsilon,\delta})$ et quand $\varepsilon \to 0^+$ par la sous-suite (S_ε), on trouve

$$\int_Q \left\{ |S - k| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left|\nu(S) - \nu(k)\right| \overrightarrow{B} \cdot \nabla \Phi \right) dx \, ds - \int_{\Sigma'} \nu(k) \Phi \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \, d\sigma \, ds \geq$$

$$- \int_{Q'} \left(S \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho_\lambda + \nu(S) \nabla(\Phi \rho_\lambda) \cdot \overrightarrow{B} \right) dx \, dx \, .$$

Maintenant, on fait tendre λ vers zéro dans le second membre de l'inégalité. Le premier terme tend vers zéro et le second terme a pour limite $-\int_{\Sigma'} \nu(\gamma S)\Phi \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s$ car S est dans $\mathrm{BV}(Q')$, $\overrightarrow{B} \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^n$ et ρ_λ tend vers 0 partout sur Ω'. On aboutit alors à (4.6). La solution limite S est ainsi l'unique solution de (P_0). Par conséquent, toute la suite $\left(S_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ converge vers S dans $L^1(Q)$. L'utilisation du théorème de convergence dominée assure alors la convergence dans $L^p(Q)$, pour tout $p \in [1\,, +\infty[$, de $\left(S_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ vers S. Ceci achève la démonstration du théorème 4.3. □

En guise de conclusion, on remarquera que les techniques développées dans ce travail permettent de dire de façon plus générale que les résultats obtenus restent vrais pour tout problème parabolique régi par l'équation :

$$\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\nu(S_\varepsilon \overrightarrow{B})\big) = \varepsilon\,\Delta A(S_\varepsilon)\,, \tag{1_ε}$$

avec la condition $S_\varepsilon\big|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$ et $\overline{\{x \in \Gamma \mid \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n} < 0\}} \subset \Gamma_\varepsilon$ admettant une solution dans $W\big(0,T;\, V, L^2(\Omega)\big)$ au sens faible, c'est-à-dire telle que, p.p. $t \in\,]0\,, T[\,,\ \forall\, \Phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}\,, \Phi \right\rangle - \int_\Omega \nu(S_\varepsilon)\overrightarrow{B}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_\Omega \nabla A(S_\varepsilon)\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{2_ε}$$

C'est par exemple, le cas des problèmes à effets de puits (ou d'extrémité), lors des écoulements eau-huile des problèmes décrits dans l'introduction ([4], [6] et [17]). Par l'intermédiaire de conditions de bord unilatérales sur la zone de production (notée Γ_s), on traduit le fait que, pour ces problèmes, l'eau ne peut sortir par cette zone tant que sa saturation n'est pas maximale. Ce type de problème est modélisé par le système $(\mathcal{K}_\varepsilon)$ non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } S_\varepsilon \text{ telle que } 0 \le S_\varepsilon \le 1 \text{ p.p. dans } Q\,, \\ \dfrac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T\,;\, V')\,,\ A(S_\varepsilon) \in L^\infty(0,T\,;\, V \cap K) \\ \forall\, v \in K\,,\ \text{p.p. } t \in\,]0\,, T[\,, \\ \left\langle \dfrac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}\,, v - A(S_\varepsilon) \right\rangle - \displaystyle\int_\Omega \big(\nu(S_\varepsilon) - \nu(1)\big)\overrightarrow{B}\cdot\nabla\big(\nu - A(S_\varepsilon)\big)\,\mathrm{d}x + \\ \qquad\qquad + \varepsilon\big(\big(A(S_\varepsilon)\,, v - A(s_\varepsilon)\big)\big) \ge 0 \\ S_\varepsilon(0,\,\cdot\,) = S_0 \text{ p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

où $K = \{v \in V \mid v \ge 0 \text{ sur } \Gamma_s\}$.

L'interprétation (formelle) des contraintes en saturation sur $]0, T[\times \Gamma_s$ est la suivante :

$$\begin{cases} S_\varepsilon \geq 0, \ \dfrac{\partial}{\partial n} A(S_\varepsilon) + \big(\nu(S_\varepsilon) - \nu(1)\big) \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} \geq 0 \\ S_\varepsilon \left(\dfrac{\partial}{\partial n} A(S_\varepsilon) + \big(\nu(S_\varepsilon) - \nu(1)\big) \right) \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} = 0 . \end{cases}$$

K étant un cône convexe fermé de sommet 0, toute solution de $(\mathcal{K}_\varepsilon)$ vérifie l'égalité (1_ε) au sens de $\mathcal{D}'(Q)$ et (2_ε). On peut ainsi appliquer à la suite $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ le résultat de convergence du théorème 4.3.

Bibliographie

[1] ANTONTSEV (S. N.) and DOMANSKI (A. B.) .— *Uniqueness of Generalized Solutions of Degenerate Problem Two Phase Filtration*, Int. Sbornik (editor), Numerical methods mechanics continuum medium, Collection Sciences Research **15**, n° 6 (1984), pp. 15-28 (en russe).

[2] BARDOS (C.), LE ROUX (A.-Y.) and NEDELEC (J.-C.) .— *First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions*, Comm. in Part. Diff. Equ. **4**, n° 9 (1979), pp. 1017-1034.

[3] BÉNILAN (P.) .— *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay, France, 1972.

[4] CHAVENT (G.) and JAFFRE (J.) .— *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Stimulation*, Studies in mathematics and its applications, North-Holland, **17** (1986).

[5] EVANS (L. C.) and GARIEPY (R. F.) .— *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[6] GAGNEUX (G.) .— *Sur des problèmes unilatéraux dégénérés de la théorie des écoulements diphasiques en milieu poreux*, Thèse de Doctorat d'Etat, Besançon, France, 1982.

[7] GAGNEUX (G.) and MADAUNE-TORT (M.) .— *Sur la question d'unicité pour des inéquations des milieux poreux*, C.R. Acad. Sci. Paris, série 1, **314** (1992), pp. 605-608.

[8] GAGNEUX (G.) and MADAUNE-TORT (M.) .— *Three-dimensional solutions of non-linear degenerate diffusion-convection processes*, Euro. J. of Applied Mathematic **2** (1991), pp. 171-187.

[9] JASOR (M.-J.) .— *Perturbations singulières d'équations non linéaires de diffusion-convection, modélisant des écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux*, Thèse de doctorat, Pau, 1992.

[10] KRŬSKOV (S. N.) .— *First Order Quasilinear Equations with Several Independent variables*, Math. Sbornik **81** (123), pp. 228-255; Math. USSR Sbornik **10** (1970), pp. 217-243.

[11] LADYZENSKAYA (O. A.) .— *Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques*, Moscou, 1953.

[12] LADYZENSKAYA (O. A.) and URAL'CEVA (N. N.) .— *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1968.

[13] LIONS, (J.-L.) .— *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[14] LIONS (J.-L.) and MAGENES (E.) .— *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

[15] MADAUNE-TORT (M.) .— *Un résultat de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles dégénérées*, Annali di Matematica pura e applicata, t. IV, **CXXXI** (1982), pp. 117-143.

[16] MADAUNE-TORT (M.) .— *Un théorème d'unicité pour des inéquations variationnelles paraboliques dégénérées*, Comm. in Part. Diff. Eq. **7**, n° 4 (1982), pp. 433-468.

[17] MARLE (C.) .— *Cours de production, Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*, Technip, Paris, **4** (1972).

[18] MIGNOT (F.) and PUEL (J.-P.) .— *Un résultat de perturbations singulières dans les inéquations variationnelles (passage du 2ème au 1er ordre)*, Lect. Notes in Math., **594**, Singular Perturbations and Boundary Layer Theory, Lyon (1976), pp. 365-399.

[19] NECAS (J.) .— *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967.

[20] VOL'PERT, (A. I.) .— *The spaces* BV *and Quasilinear Equations*, Math. USSR Sbornik **2**, n°2 (1967), pp. 225-267.