ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JOËL BENOIST

# Espace de liberté d'un sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série*, tome 5, nº 4 (1996), p. 553-576

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_4_553_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 4, 1996

# Espace de liberté d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n(*)}$

JOËL BENOIST[1]

**RÉSUMÉ.** — A un sous-ensemble convexe de $C$ de $\mathbb{R}^n$, nous associons un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui peut être défini aussi bien à partir d'une famille d'ensembles contenus dans $C$ que d'une famille d'ensembles contenant $C$. Dans cet article, nous étudions en détail les propriétés de cette application.

**ABSTRACT.** — To a convex subset $C$ of $\mathbb{R}^n$, we associate a vector subspace of $\mathbb{R}^n$ which can be defined either by a family of subsets contained in $C$ or by a family of subsets which contains $C$. In this article, we study in detail the properties of this application.

## 1. Notations

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien réel de dimension finie $n$. $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{A}$), $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_F$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_S$ désigneront respectivement l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. affines non vides) de $E$, l'ensemble des convexes de $E$ non vides quelconques, fermés, bornés, compacts puis enfin symétriques par rapport à l'origine de $E$. Si $A \in \mathcal{A}$, $\vec{A}$ désignera le sous-espace vectoriel associé à $A$ et $p_A$ la projection orthogonale sur $A$. Pour $X \subset E$ nous notons $\operatorname{int} X$, $\overline{X}$, $X^*$, $\operatorname{vect} X$ (resp. $\operatorname{aff} X$) et $X^\perp$ respectivement l'intérieur de $X$, la fermeture de $X$, la frontière de $X$, l'espace vectoriel (resp. affine) engendré par $X$ et l'orthogonal de $X$. Si $r \geq 0$, $B_L(x, r)$ sera la trace de la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$ sur le sous-espace affine $\{x\} + L$. Pour $C \in \mathcal{C}$, on note $\operatorname{ir} C$ l'intérieur relatif de $C$ et on définit le cône asymptote de $C$,

(*) Reçu le 3 mars 1995

(1) U.R.A. n° 1586, Université de Limoges, 123 rue A.-Thomas, F-87060 Limoges (France)

noté $C_\infty$, par $C_\infty = \{d \in E \mid \overline{C} + \{d\} \subset \overline{C}\}$ ; remarquons que cette dernière définition coïncide avec celle donnée dans [10] seulement pour $C \in \mathcal{C}_F$.

## 2. Espace de liberté d'un convexe

L'espace de liberté associé à un convexe non vide $C$ de $E$, noté $\ell(C)$, est défini par la formule

$$\ell(C) = (C - C)_\infty \,.$$

Comme $C - C \in \mathcal{C}_S$, $\ell(C) \in \mathcal{L}$; nous définissons ainsi une application $\ell$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{L}$. Nous avons les premières propriétés suivantes qui se déduisent de la définition de $\ell(C)$ et des résultats de [10] sur le cône asymptote.

PROPOSITION 1.— *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

*(i)* $C_1 \subset C_2$ *entraîne* $\ell(C_1) \subset \ell(C_2)$ *;*

*(ii)* $C \subset \mathcal{L}$ *si et seulement si* $\ell(C) = C$ *;*

*(iii)* $C \in \mathcal{C}_B$ *si et seulement si* $\ell(C) = \{0\}$ *;*

*(iv) si* $C_2 \in \mathcal{C}_B$, $\ell(C_1 + C_2) = \ell(C_1)$ *;*

*(v)* $\operatorname{vect}(C_\infty) \subset \ell(C) \subset \overrightarrow{\operatorname{aff} C}$ *;*

*(vi) si* $C \in \mathcal{C}_S$, $\ell(C) = C_\infty$ *; si* $C$ *est un cône convexe non vide,* $\ell(C) = \operatorname{vect} C$ *;*

*(vii)* $\ell(C) = \ell(-C) = \ell(\overline{C}) = \ell(\operatorname{ir} C) = \ell(C - C)$ *;*

*(viii) si* $E'$ *désigne un autre espace euclidien de dimension finie et* $A : E \to E'$ *une application linéaire, alors* $\ell(A(C)) = A(\ell(C))$ *; en particulier*

*(a)* $\ell(C) = L + \ell(p_{L^\perp}(C))$ *si* $L \in \mathcal{L}$ *vérifie* $L \subset \operatorname{vect}(C_\infty)$ *;*

*(b)* $\ell(C_1 + C_2) = \ell(C_1) + \ell(C_2)$.

*Preuve*

(i) et (ii) sont évidentes.

(iii) est une conséquence immédiate de [10, théorème 8.4].

(iv) Nous avons $\ell(C_1 + C_2) = ((C_1 - C_1) + (C_2 - C_2))_\infty$ et puisque $C_2 - C_2 \in \mathcal{C}_C$, d'après [10, corollaire 9.1.2 et théorème 8.4],

$$\ell(C_1 + C_2) = (C_1 - C_1)_\infty = \ell(C_1)\,.$$

(v) Choisissons $c \in C$ ; on a $C - \{c\} \subset C - C$, donc

$$C_\infty = \big(C - \{c\}\big)_\infty \subset \big(C - C\big)_\infty = \ell(C)\,.$$

Comme $\ell(C) \in \mathcal{L}$, on déduit $\operatorname{vect}(C_\infty) \subset \ell(C)$. Pour la deuxième inclusion $C \subset \operatorname{aff} C$, donc $C - C \subset \operatorname{aff} C - \operatorname{aff} C = \overrightarrow{\operatorname{aff} C}$ ce qui implique $\ell(C) \subset \overrightarrow{\operatorname{aff} C}$.

(vi) Supposons que $C \in \mathcal{C}_S$. Choisissons $c \in C$ ; on a $C - \{c\} \subset C - C \subset 2C$, donc

$$C_\infty = \big(C - \{c\}\big)_\infty \subset \big(C - C\big)_\infty \subset \big(2C\big)_\infty = C_\infty\,.$$

Ainsi $\ell(C) = C_\infty$. Supposons que $C$ soit un cône convexe non vide. Alors $C - C \in \mathcal{L}$ et donc $\ell(C) = \big(C - C\big)_\infty = C - C = \operatorname{vect}(C)$.

(vii) Il est clair que $\ell(C) = \ell(-C)$. D'après (i), $\ell(C) \subset \ell(\overline{C})$. Réciproquement, comme $\overline{C} - \overline{C} \subset \overline{C - C}$, on a

$$\big(\overline{C} - \overline{C}\big)_\infty \subset \big(\overline{C - C}\big)_\infty = \big(C - C\big)_\infty$$

et donc $\ell(\overline{C}) \subset \ell(C)$. Alors on a aussi, d'après [10, théorème 6.3], $\ell(\operatorname{ir} C) = \ell(\overline{\operatorname{ir} C}) = \ell(\overline{C})$. Enfin, comme $C - C \in \mathcal{C}_S$, $\ell(C - C) = \big(C - C\big)_\infty$ d'après (vi).

(viii) C'est une conséquence de [10, théorème 9.1].

(a) Soit $L \in \mathcal{L}$ vérifiant $L \subset \operatorname{vect}(C_\infty)$. Comme $\operatorname{vect}(C_\infty) \subset \ell(C)$, on a aussi $L \subset \ell(C)$. On utilise alors la décomposition $E = L \oplus L^\perp$, ce qui permet d'écrire

$$\ell(C) = p_L\big(\ell(C)\big) + p_{L^\perp}\big(\ell(C)\big)\,,$$

soit $\ell(C) = L + p_{L^\perp}\big(\ell(C)\big)$. En choisissant $A = p_L{}^\perp$ et en appliquant la formule $\ell\big(A(C)\big) = A\big(\ell(C)\big)$, on conclut $\ell(C) = L + \ell\big(p_{L^\perp}(C)\big)$.

(b) On applique la formule $\ell\big(A(C)\big) = A\big(\ell(C)\big)$ avec $C = C_1 \times C_2$ et $A : E \times E \to E$ définie, pour $(x_1, x_2) \in E \times E$, par $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. □

Le théorème suivant justifie l'appellation "espace de liberté" et donne deux caractérisations différentes de $\ell(C)$.

Pour $L \in \mathcal{L}$, on note

$$L^- \text{ (resp. } L^+) = \big\{L' \in \mathcal{L} \mid L' \subset L \text{ (resp. } L \subset L')\big\}\,.$$

THÉORÈME 2.— *Nous avons les égalités suivantes :*

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C) \overset{\text{def}}{=} \big\{L \in \mathcal{L} \mid \exists\ K \in \mathcal{C}_C\,,\ C \subset K + L\big\} = \ell(C)^+ \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(C) \overset{\text{def}}{=} \big\{L \in \mathcal{L} \mid \forall\ r > 0\,,\ \exists\ x \in C\,,\ B_L(x, r) \subset C\big\} = \ell(C)^-\,. \tag{2.2}$$

*Preuve*

*Étape 1.*— Montrons que si $C \in \mathcal{C}_S$ alors

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C) = C_{\infty}^{+} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\text{int}}(C) = C_{\infty}^{-}.$$

Comme $\mathcal{L}_{\text{ext}}(\overline{C}) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$ et $(\overline{C})_{\infty} = C_{\infty}$, nous pouvons nous ramener à $C$ fermé. Soit $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$; il existe $K \in \mathcal{C}_C$ tel que $C \subset K + L$, ce qui implique $C_{\infty} \subset (K+L)_{\infty} = L$ et $L \in C_{\infty}^{+}$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que $C_{\infty} \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$. Comme $C_{\infty} \in \mathcal{L}$, $C_{\infty}$ est la partie linéaire de $C$ (voir [10, p. 65]), et donc $C = C_{\infty} + C'$ où

$$C' \stackrel{\text{def}}{=} C \cap (C_{\infty})^{\perp}.$$

Alors, d'après [10, théorème 8.4], $C' \in \mathcal{C}_C$ et donc $C_{\infty} \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$.

Soit $L \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$; pour $r > 0$, il existe $x \in C$ tel que $B_L(x, r) \subset C$. Ceci entraîne

$$B_L(0, 2r) = B_L(x, r) - B_L(x, r) \subset C - C \subset 2C$$

soit $B_L(0, r) \subset C$. Ainsi $L \subset C$ et donc $L \in C_{\infty}^{-}$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que $C_{\infty} \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$; pour cela montrons que $C_{\infty} \subset C$. Soit $d \in C_{\infty}$; si nous choisissons un élément $x$ dans $\operatorname{ir} C$ qui est non vide, alors $\{x\} + \mathbb{R}_{+}d \subset C$ et donc

$$\mathbb{R}d = (\{x\} + \mathbb{R}_{+}d) - (\{x\} + \mathbb{R}_{+}d) \subset C - C \subset 2C \quad \text{et} \quad d \in C.$$

*Étape 2.*— Montrons que si $C \in \mathcal{C}$ alors

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C - C) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(C) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{rint}(C - C) = \mathcal{L}_{\text{int}}(C).$$

Soit $c \in C$; comme $C - \{c\} \subset C - C$, on a

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C - C) \subset \mathcal{L}_{\text{ext}}(C - \{c\}) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(C).$$

Inversement, soit $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$; il existe $K \in \mathcal{C}_C$ tel que $C \subset K + L$, ce qui implique $C - C \subset (K - K) + L$. Comme $K - K \in \mathcal{C}_C$, $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C - C)$. Soit $c \in C$; comme $C - \{c\} \subset C - C$, on a

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(C) = \mathcal{L}_{\text{int}}(C - \{c\}) \subset \mathcal{L}_{\text{int}}(C - C).$$

Inversement, soit $L \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C - C)$ et choisissons une base orthonormée $(e_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ de $L$. Pour $r > 0$, il existe $x \in E$ tel que $B_L(x, 2r) \subset C - C$; puisque $C - C \in \mathcal{C}_S$, on déduit que

$$B_L(0, 2r) \subset C - C\,.$$

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe $(a_i, b_i) \in C^2$ tel que $2re_i = b_i - a_i$, ou en d'autres termes, il existe

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad \text{tel que } c_i + [-r\,,\, r]e_i \subset C\,.$$

Par convexité nous obtenons alors

$$B_L\left(\frac{c_1 + \cdots + c_p}{p}, \frac{r}{p}\right) \subset C$$

et ainsi $L \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$.

*Étape 3.*— Vu que $C - C \in \mathcal{C}_S$, la conclusion est une conséquence immédiate des deux premières étapes. □

Nous donnons comme exemple d'application le corollaire suivant. Remarquons que la partie (i) de ce corollaire est un résultat dû à Clark [5] (voir aussi les articles de Klee [8] et de Thorp–Whitley [11] pour le cas de la dimension infinie).

COROLLAIRE 3.— *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

*(i)* *$C$ contient des boules de rayon arbitrairement grand si et seulement si $C$ n'est pas contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles ;*

*(ii)* *si pour un élément $L$ de $\mathcal{L}$ il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in C$, $B_L(x, r) \not\subset C$, alors nous pouvons trouver un hyperplan vectoriel $H$ qui ne contient pas $L$ et un convexe compact $K$ tel que $C \subset K + H$ ;*

*(iii)* *si, pour un élément $L$ de $\mathcal{L}$, $\sup_{x\in C} d(x, L) = +\infty$ avec $d(x, L) = \inf_{l\in L} \|x - l\|$, alors il existe une droite vectorielle $D$, $D \cap L = \{0\}$, telle que l'on puisse trouver des segments de longueur arbitrairement grande dans la direction donnée par $D$.*

*Preuve*

(i) $C$ contient des boules de rayon arbitrairement grand est équivalent à $\mathcal{L}_{\text{int}}(C) = \mathcal{L}$ ; $C$ n'est pas contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles est équivalent à $\mathcal{L}_{\text{ext}}(C) = E$. Et, d'après le théorème 2, ces deux dernières assertions sont équivalentes à $\ell(C) = E$.

(ii) Si $L \notin \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$ alors, d'après (2.2), $L \not\subset \ell(C)$ et donc il existe une droite vectorielle $D$ telle que

$$D \cap \ell(C) = \{0\} \quad \text{et} \quad D \subset L\,.$$

On peut alors choisir un hyperplan vectoriel $H$ tel que $D \cap H = \{0\}$ et $\ell(C) \subset H$. On a alors le résultat souhaité.

(iii) Nous passons par la contraposée. On suppose donc que, pour toute droite vectorielle $D$ de $\mathcal{L}_{\text{int}}(C)$, $D \subset L$. Donc, d'après le théorème 2, $\ell(C) \subset L$ et $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$. □

## 3. Localisation d'un convexe

Nous étudions dans cette section la localisation des centres $x$ que l'on trouve dans la définition de $\mathcal{L}_{\text{int}}(C)$ pour $L = \ell(C)$. Soit $X \subset E$ ; on dira que $X$ localise $C$ si, pour tout $r > 0$, il existe $x \in X$ tel que $B_{\ell(C)}(x, r) \subset C$.

THÉORÈME 4.— *Soit $A \in \mathcal{A}$ ; si $A$ localise $C$, alors*

$$\overline{p_{\vec{A}^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C\,.$$

*La réciproque est vraie sous la condition $A \cap \operatorname{ir} C$ est non vide.*

*Preuve*

[⇒] On suppose que $A$ localise $C$. Posons

$$p = p_{\vec{A}^\perp} \quad \text{et} \quad C_1 = p(C)\,;$$

d'après (2.1), il existe $K \in \mathcal{C}_C$ tel que

$$C_1 \subset K + \ell(C_1)\,. \tag{3.1}$$

Écrivons $A = \{a\} + \vec{A}$. Comme $A$ localise $C$, pour tout $r > 0$, il existe $x \in \vec{A}$ tel que

$$B_{\ell(C)}(a + x, r) \subset C \tag{3.2}$$

Montrons que $\{p(a)\} + p(\ell(C)) \subset C_1$. Soit $z \in \{p(a)\} + p(\ell(C))$ ; il existe $v \in \ell(C)$ tel que $z = p(a) + p(v)$. En prenant $r = \|v\|$ dans la relation (3.2), on déduit l'existence de $x \in \vec{A}$ tel que $B_{\ell(C)}(a + x, r) \subset C$. Or

$$z = p(a + x + v) \quad \text{et} \quad a + x + v \in B_{\ell(C)}(a + x, r) ;$$

ainsi $z \in C_1$. En combinant cette inclusion avec la relation (3.1) et en utilisant la proposition 1(viii), on obtient

$$\{p(a)\} + \ell(C_1) \subset \overline{C_1} \subset K + \ell(C_1) .$$

La partie linéaire du convexe $\overline{C_1}$ est donc $\ell(C_1)$ et, d'après [10, p. 65] on déduit $\overline{C_1} = \ell(C_1) + K'$ où $K' = \overline{C_1} \cap \ell(C_1)^{\perp}$ est un convexe compact non vide de $E$. Ainsi $\overline{C_1} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$.

[$\Leftarrow$] Nous supposons que $A \cap \operatorname{ir} C \neq \emptyset$ et que $\overline{C_1} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Il existe donc $L \in \mathcal{L}$ et $K \in \mathcal{C}_C$ tels que $\overline{C}_1 = L + K$ ; alors clairement $L = \ell(C_1)$. Ainsi

$$\overline{C_1} = \ell(C_1) + K . \tag{3.3}$$

Comme $A \cap \operatorname{ir} C \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in \operatorname{ir} C$ tel que $A = \{x_0\} + \vec{A}$. D'après [10, théorème 6.6],

$$y_0 \stackrel{\text{def}}{=} p(x_0) \in \operatorname{ir} C_1$$

et par la relation (3.3), $y_0 \in \ell(C_1) + \operatorname{ir} K$ (utiliser [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]); on peut donc écrire $y_0 = \ell_0 + k_0$ avec $\ell_0 \in \ell(C_1)$ et $k_0 \in \operatorname{ir} K$ ; en particulier, il existe $r_0 > 0$ tel que $B_{\overrightarrow{\operatorname{aff} K}}(k_0, r_0) \subset \operatorname{ir} K$. Soit $r > 0$; d'après (2.2), il existe $x \in C$ tel

$$B_{\ell(C)}(x, r_1) \subset C , \tag{3.4}$$

où

$$r_1 = \max\left\{2r; \left(1 + \frac{\mathrm{d}}{r_0}\right) r\right\} ,$$

$d$ désignant le diamètre de $K$. Comme $p(x) \in C_1$, d'après la relation (3.3), il existe $k \in K$ et $\ell \in \ell(C_1)$ tel que $p(x) = k + \ell$. Nous allons maintenant envisager deux cas.

*Cas 1.*— $k = k_0$.

Considérons l'élément

$$y' = (2\ell_0 - \ell) + k_0\,, \quad y' \in \ell(C_1) + \operatorname{ir} K = \operatorname{ir} C_1 \subset C_1$$

(utiliser la relation (3.3) et [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]); alors il existe $x' \in C$ tel que $y' = p(x')$. Ainsi nous avons, grâce à la relation (3.4),

$$B_{\ell(C)}\left(\frac{x+x'}{2}\,,\, r\right) = \frac{1}{2}\,\{x'\} + \frac{1}{2}\,B_{\ell(C)}(x, 2r) \subset C$$

et $p\big((x+x')/2\big) = y_0$ soit $(x+x')/2 \in A$. Dans ce cas, nous avons le résultat souhaité.

*Cas 2.*— $k \neq k_0$.

Considérons le point $y' = k' + \ell'$ avec

$$k' = k_0 + r_0 \frac{k_0 - k}{\|k_0 - k\|} \quad \text{et} \quad \ell' = \ell_0 + r_0 \frac{\ell_0 - \ell}{\|k_0 - k\|}\,;$$

$k' \in B_{\overrightarrow{\operatorname{aff} K}}(k_0, r_0) \subset \operatorname{ir} K$ et $\ell' \in \ell(C_1)$ ce qui implique

$$y' \in \ell(C_1) + \operatorname{ir} K = \operatorname{ir}\big(\ell(C_1) + K\big) = \operatorname{ir} \overline{C_1} = \operatorname{ir} C_1 \subset C_1$$

(utiliser [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]). Par conséquent, il existe $x' \in C$ tel que $p(x') = y'$. Posons

$$\lambda = \frac{r_0}{r_0 + \|k_0 - k\|} \in \left]\frac{r_0}{r_0 + d}\,,\, 1\right[\,.$$

On a

$$B_{\ell(C)}\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\,,\, \lambda r_1\big) = \lambda B_{\ell(C)}(x, r_1) + (1-\lambda)\{x'\}\,,$$

et comme $C$ est convexe, d'après la relation (3.4),

$$B_{\ell(C)}\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\,,\, \lambda r_1\big) \subset C$$

et en particulier $B_{\ell(C)}\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\,,\, r\big) \subset C$ car $r < \lambda r_1$. Il ne reste plus à vérifier que $\lambda x + (1-\lambda)x' \in A$. Ceci résulte de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} p\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) &= \lambda p(x) + (1-\lambda)p(x') = \lambda y + (1-\lambda)y' \\ &= \big(\lambda k + (1-\lambda)k'\big) + \big(\lambda \ell + (1-\lambda)\ell'\big) \\ &= k_0 + \ell_0 = p(x_0)\,. \ \square \end{aligned}$$

Nous déduisons entre autre les propriétés suivantes.

COROLLAIRE 5.— *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

*(i)* *$C$ peut être localisé par un point si et seulement si* $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$ ;

*(ii)* *soient* $(x_1, x_2) \in C \times \operatorname{ir} C$ *et* $L \in \mathcal{L}$; *si* $\{x_1\} + L$ *localise* $C$, *alors* $\{x_2\} + L$ *localise* $C$ ;

*(iii)* *soit* $x \in \operatorname{ir} C$ ; *alors le sous-espace affine* $\{x\}+\ell(C)$ *localise* $C$. *Il n'est pas possible dans tous les cas de localiser* $C$ *par un sous-espace affine de dimension inférieure; pour s'en convaincre, il suffit de prendre* $E = \mathbb{R}^n$ *et*

$$C = \operatorname{co}\{(t,\, t^2,\, \ldots,\, t^n) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \ ;$$

*(iv)* *si* $A \in \mathcal{A}$ *est de dimension minimale parmi les sous-espaces affines localisant* $C$, *alors* $\vec{A} \subset \ell(C)$.

*Preuve*

(i) C'est une conséquence immédiate du théorème 4 et du fait que l'intérieur relatif d'un convexe non vide est non vide.

(ii) C'est une conséquence immédiate du théorème 4.

(iii) La première partie est une conséquence immédiate du théorème 4 et de (2.1). Pour la deuxième partie, il suffit de vérifier qu'aucun hyperplan $M$ de $\mathbb{R}^n$ ne localise $C$. Sinon, d'après le théorème 4, il existe $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|d\| = 1$ tel que $\overline{p_{\mathbb{R}d}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Or $p_{\mathbb{R}d}(C) = \operatorname{co} X$, où

$$X = p_{\mathbb{R}d}\Big(\{(t,\, t^2,\, \ldots,\, t^n) \mid t \in \mathbb{R}_+\}\Big) \ ;$$

comme $X$ est connexe dans un espace de dimension un, $X$ est convexe et $p_{\mathbb{R}d}(C) = X$. Ainsi $\overline{X} \in \mathcal{L}+\mathcal{C}_C$ ; ceci entraîne que $\overline{X}$ est un convexe compact ou bien $\overline{X} = \mathbb{R}d$. On a donc prouvé que $X$ est borné ou bien est égal à $\mathbb{R}d$. Or, par le calcul, nous avons :

$$X = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} d_i t^i \right) d \mid t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

qui n'est ni un ensemble borné (faire tendre $t \to +\infty$), ni égal à $\mathbb{R}d$ (utiliser le fait que $t \in \mathbb{R}_+$). On aboutit donc à une contradiction.

(iv) C'est une conséquence directe de (ii) et de la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 3.1.— *Soient $x \in \operatorname{ir} C$ et $L \in \mathcal{L}$. Si $\{x\} + L$ localise $C$, alors $\{x\} + \big(L \cap \ell(C)\big)$ localise $C$.*

*Preuve.*— La preuve de cette proposition commence par les deux lemmes suivants.

LEMME 3.1.— *Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors l'application $\varphi : E \to E_1 \times E_2$ définie par $\varphi(x) = \big(p_{E_1}(x), p_{E_2}(x)\big)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

*Preuve.*— Il est clair que $\varphi$ est linéaire. Comme $\dim E = \dim(E_1 \times E_2)$, il suffit de vérifier que $\varphi$ est injective. Soit $x \in E$ tel que $p_{E_1}(x) = p_{E_2}(x) = 0$; alors

$$x \in E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp} = \big(E_1 + E_2\big)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}\,.$$

Ainsi $\varphi$ est un isomorphisme. Remarquons en fait que

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2) = \big(\{x_1\} + E_1^{\perp}\big) \cap \big(\{x_2\} + E_2^{\perp}\big)\,. \ \square$$

LEMME 3.2.— *Si $E = E_1 \oplus E_2$ et si $C$ est un convexe de $E$ vérifiant*

$$\overline{p_{E_1}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C \quad \textit{et} \quad \overline{p_{E_2}(C)} \in \mathcal{C}_C\,,$$

*alors $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$.*

*Preuve*

*Étape 1.*— Par hypothèse, il existe $K_1 \in \mathcal{C}_C$ et $L_1 \in \mathcal{L}$ tels que $\overline{p_{E_1}(C)} = L_1 + K_1$. Remarquons que $L_1 + K_1 \subset E_1$ ce qui implique

$$L_1 = \ell(L_1 + K_1) \subset \ell(E_1) = E_1\,,$$

soit $L_1 \subset E_1$. D'une part, $p_{E_1}(C) \subset L_1 + K_1$ ce qui implique

$$C \subset \big(L_1 + E_1^{\perp}\big) + K_1 \quad \text{et} \quad L_1 + E_1^{\perp} \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)\,.$$

D'autre part, il existe $K_2 \in \mathcal{C}_C$ tel que $p_{E_2}(C) \subset K_2$ ce qui implique

$$C \subset E_2^{\perp} + K_2 \quad \text{et} \quad E_2^{\perp} \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)\,.$$

Grâce à la relation (2.1), on conclut

$$(L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(\overline{C}),$$

ce qui s'écrit $\overline{C} \subset \big((L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp\big) + K$ pour un certain sous-ensemble $K$ de $\mathcal{C}_C$.

*Étape 2.*— Soit $x_0 \in \operatorname{ir} C$ ; montrons que

$$\{x_0\} + \big((L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp\big) \subset \overline{C}.$$

Pour cela prenons un élément $d \in (L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp$. Nous avons $d \in E_2^\perp$ et il existe $\ell_1 \in L_1$ tel que $d - \ell_1 \in E_1^\perp$. On vérifie aisément que $d = \varphi^{-1}(\ell_1, 0)$. Nous avons $p_{E_1}(x_0) \in \operatorname{ir}\big(p_{E_1}(C)\big)$ [2, théorème 6.6] et donc $p_{E_1}(x_0) \in L_1 + \operatorname{ir} K_1$ (utiliser [10, corollaire 6.6.2 et théorème 6.3]). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{E_1}(x_0) + n\ell_1 \in p_{E_1}(C).$$

Ainsi, il existe un élément $c_n \in C$ tel que

$$c_n = \varphi^{-1}\big(p_{E_1}(c_n), p_{E_2}(c_n)\big) = \varphi^{-1}\big(p_{E_1}(x_0) + n\ell_1, p_{E_2}(c_n)\big).$$

En divisant par $n$,

$$\frac{c_n}{n} = \varphi^{-1}\left(\ell_1 + \frac{p_{E_1}(x_0)}{n}, \frac{p_{E_2}(c_n)}{n}\right)$$

et en faisant $n \to +\infty$, $d = \varphi^{-1}(\ell_1, 0) \in C_\infty$. On conclut alors que $x_0 + d \in \overline{C}$.

*Étape 3.*— Des deux inclusions obtenues dans les étapes 1 et 2, on déduit que $(L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp$ est la partie linéaire de $\overline{C}$ et, d'après [2, p. 65],

$$\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C. \ \square$$

*Continuation de la preuve de la proposition*

D'après (2.1), $\overline{p_{\ell(C)^\perp}(C)} \in \mathcal{C}_C$ et d'après le théorème 4, $\overline{p_{L^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Pour conclure, il suffit de montrer que (utiliser à nouveau le théorème 5) :

$$\overline{p_{(\ell(C)\cap L)^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C.$$

On a
$$\left(\ell(C) \cap L\right)^{\perp} = L^{\perp} + \ell(C)^{\perp} = L^{\perp} \oplus E_2'$$

où $E_2'$ est un sous-espace vectoriel de $\ell(C)^{\perp}$. Nous allons nous placer dans l'espace euclidien $E' = L^{\perp} + \ell(C)^{\perp}$ et appliquer le lemme 3.2 dans cet espace avec la décomposition $E' = E_1' \oplus E_2'$, où $E_1' = L^{\perp}$, et avec le convexe $C' = p_{E'}(C)$. Vérifions les hypothèses, c'est-à-dire avec des notations évidentes,
$$\overline{p_{E_1'}(C')} \in \mathcal{L}' + \mathcal{C}_C' \quad \text{et} \quad \overline{p_{E_2'}(C')} \in \mathcal{C}_C' .$$

On a
$$\overline{p_{E_1'}(C')} = \overline{p_{E_1'}\left(p_{E'}(C)\right)} = \overline{p_{L^{\perp}}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$$

et comme $\overline{p_{E_1'}(C')} \subset E'$, on démontre aisément que
$$\overline{p_{E_1'}(C')} \in \mathcal{L}' + \mathcal{C}_C' .$$

D'autre part,
$$\begin{aligned}\overline{p_{E_2'}(C')} &= \overline{p_{E_2'}\left(p_{E'}(C)\right)} = \overline{p_{E_2'}(C)} \\ &= \overline{p_{E_2'}\left(p_{\ell(C)^{\perp}}(C)\right)} \subset \overline{p_{E_2'}\left(\overline{p_{\ell(C)^{\perp}}(C)}\right)} \in \mathcal{C}_C\end{aligned}$$

et comme $\overline{p_{E_2'}(C')} \in E'$ on a aussi $\overline{p_{E_2'}(C')} \in \mathcal{C}'$. En appliquant le lemme 3.2, on conclut $\overline{C'} \in \mathcal{L}' + \mathcal{C}'$, ce qui implique $\overline{p_{(\ell(C)\cap L)^{\perp}}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}$. □

Si $C \in \mathcal{C}_F$, notons
$$\mathcal{D}(C) = \left\{\{x\} + \mathbb{R}_+ d \mid x \in C \text{ et } d \in C_\infty \setminus \{0\}\right\}$$

l'ensemble des demi-droites incluses dans $C$ et
$$\mathcal{I}(C) = \left\{D \in \mathcal{D}(C) \mid D \text{ localise } C\right\} .$$

La proposition 6 donne des propriétés relatives à $I(C)$.

PROPOSITION 6.— *Soit $C \in \mathcal{C}_F \setminus \mathcal{C}_C$ ; les assertions suivantes sont satisfaites :*

*(i)* $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\overline{p_{(C_\infty)^{\perp}}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$ ;

*(ii) si $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$, alors*

$$\{\{x\} + \mathbb{R}_+ d \mid x \in \operatorname{ir} C \text{ et } d \in (\operatorname{ir}(C_\infty)) \setminus \{0\}\} \subset \mathcal{I}(C)\ ;$$

*(iii) si $C$ est un cône*

$$\{\{x\} + \mathbb{R}_+ d \mid x \in C \text{ et } d \in (\operatorname{ir} C) \setminus \{0\}\} = \mathcal{I}(C)\ ;$$

*(iv) $C$ est continu (voir [7]) si et seulement si $\ell(C) = E$ et $\mathcal{I}(C) = \mathcal{D}(C)$.*

*Remarque* 7.— Supposons que $\ell(C) = E$. Avec les notations ci-dessus, le cône d'ouverture interne (*inner aperture*) introduit par Larman [9] est égal par définition à

$$\bigcap_{D \in \mathcal{I}(C)} \overrightarrow{D}\,,$$

où $\overrightarrow{D}$ désigne la demi-droite vectorielle associée à $D$. Cette définition a ensuite été étudiée par Brondsted [3] et Bair ([1], [2]). Remarquons que cette notion a permis à Larman [9] puis à Brondsted [4] d'obtenir des résultats sur l'intersection de convexes translatés.

*Preuve de la proposition 6*

(i) [$\Rightarrow$] Il existe $D = \{x\} + \mathbb{R}_+ d \in \mathcal{I}(C)$; en particulier $d \in C_\infty$. Posons $M = C_\infty^\perp$ et $C_1 = p_M(C)$. Comme $D \in \mathcal{I}(C)$, on a

$$\forall\, r > 0\,,\ \exists\, t_r \geq 0\,,\quad B_{\ell(C)}(x + t_r d\,,\, r) \subset C\,. \tag{3.5}$$

Montrons que

$$\{p_M(x)\} + p_M(\ell(C)) \subset C_1\,.$$

Soit $z = p_M(x) + p_M(v)$ avec $v \in \ell(C)$; $z = p_M(x + t_r d + v)$. Si l'on prend dans la relation (3.5) $r = \|v\|$, alors

$$x + t_r d + v \in B_{\ell(C)}(x + t_r d\,,\, r) \subset C$$

et donc $z \in C_1$. Ainsi, nous avons la double inclusion (utiliser la proposition 1(viii)) $\{p_M(x)\} + \ell(C_1) \subset C_1 \subset K + \ell(C_1)$ pour $K \in \mathcal{C}_C$ et donc

$$\{p_M(x)\} + \ell(C_1) \subset \overline{C_1} \subset K + \ell(C_1)\,.$$

De cette inclusion, on déduit que la partie linéaire de $\overline{C_1}$ est $\ell(C_1)$ et donc, d'après [10, p. 65],

$$\overline{C_1} = \ell(C_1) + (\overline{C_1} \cap \ell(C_1)^{\perp}) \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C\,.$$

[$\Leftarrow$] Posons encore ici $C_1 = p_{(C_\infty)^\perp}(C)$. Comme $C \neq \emptyset$; choisissons un élément $x$ dans $\operatorname{ir} C$; écrivons $x = y + z$ avec $y \in p_{(C_\infty)^\perp}(x)$ et $z = p_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(x)$; d'après [10, théorème 6.6], $y \in \operatorname{ir} C_1$. Comme $C \notin \mathcal{C}_C$, on peut choisir un élément $d \in \big(\operatorname{ir}(C_\infty)\big) \setminus \{0\}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(d, \varepsilon) \subset C_\infty$, ce qui entraîne, pour $t \geq 0$,

$$B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(td, t\varepsilon) \subset C_\infty\,. \tag{3.6}$$

Montrons alors que $D = \{x\} + \mathbb{R}_+ d \in \mathcal{I}(C)$, ce qui prouvera que $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe $L \in \mathcal{L}$ et $K \in \mathcal{C}_C$ tels que $\overline{C_1} = L + K$ ; ceci entraîne

$$\ell(\overline{C_1}) = \ell(C_1) = \ell(L + K) = \ell(L) = L\,,$$

ce qui permet d'écrire $\overline{C_1} = \ell(C_1) + K$. En prenant l'intérieur relatif de chaque côté de cette égalité, $\operatorname{ir} C_1 = \ell(C_1) + \operatorname{ir} K$ (utiliser [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]), et par conséquent

$$\{y\} + \ell(C_1) \subset C_1\,. \tag{3.7}$$

Envisageons désormais deux cas.

*Cas 1.—* $\ell(C_1) \neq \{0\}$.

Alors $\ell(C_1) = \mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_p\}$, où $1 \leq p \leq n-1$ et où $(e_i)_{i=1,\ldots,p}$ est une famille orthonormale. Soit $r > 0$; pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ (resp. $i \in \{p+1, \ldots, 2p\}$), d'après la relation (3.7), il existe $z_1 \in \mathrm{vect}(C_\infty)$ tel que

$$y + re_i + z_i \in C \quad (\text{resp. } y - re_{i-p} + z_i \in C)\,. \tag{3.8}$$

Prenons maintenant

$$t = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{r}{\sqrt{p}} + \sum_{i=1}^{2p} \|z_i\| + \|z\|\right)\;;$$

alors

$$B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}\left(z + td\,,\,\frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset \{z_1\} + C_\infty \quad \text{pour } i \in \{1, \ldots, 2p\}\,. \tag{3.9}$$

En effet, soit $y \in B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(z + td\,,\, r/\sqrt{p}) - \{z_i\}$. D'une part

$$\|y - z - td + z_i\| \leq \frac{r}{\sqrt{p}}$$

ce qui implique

$$\|y - td\| \leq \frac{r}{\sqrt{p}} + \|z\| + \|z_i\| \leq \varepsilon t\ ;$$

d'autre part $y + z_i - z - td \in \mathrm{vect}(C_\infty)$ ce qui implique

$$y - td \in \mathrm{vect}(C_\infty)\,.$$

Ainsi, d'après la relation (3.6), $y \in C_\infty$. On obtient, en combinant les relations (3.8) et (3.9) :

$$\begin{cases} \{x + td + re_i\} + B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}\left(0, \dfrac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C & i \in \{1, \ldots, p\} \\ \{x + td - re_{i-p}\} + B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}\left(0, \dfrac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C & i \in \{p+1, \ldots, 2p\}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Puisque $C$ est convexe, on déduit de la relation (3.10) :

$$\{x + td\} + B_{\ell(C_1)}\left(0, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) + B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}\left(0, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C\,,$$

et grâce à la proposition 1(viii),

$$B_{\ell(C)}\left(x + td\,,\, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C\,.$$

*Cas 2.*— $\ell(C_1) = \{0\}$.

Dans ce cas, d'après la proposition 1(viii), $\ell(C) = \mathrm{vect}(C_\infty)$. Soit $r > 0$; choisissons $t = r/\varepsilon$. D'après la relation (3.6), $B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(td, r) \subset C_\infty$ et donc

$$\{x\} + B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(td, r) \subset C\,.$$

Ainsi $B_{\ell(C)}(x + td, r) \subset C$.

(ii) Si $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$, d'après (i), $p_{(C_\infty)^\perp}(C) \in \mathcal{C}_C + \mathcal{L}$. En regardant ce que l'on a démontré en (i), on a le résultat.

(iii) Si $C$ est un cône, $\mathrm{vect}(C_\infty) = \mathrm{vect}\, C = \ell(C)$ (voir proposition 1(vi) et donc $p_{(C_\infty)^\perp}(C)$ est un cône qui est borné, ce qui implique $p_{(C_\infty)^\perp}(C) = \{0\}$. On est dans la situation du (i), dont $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$. Alors, d'après (ii),

$$\big\{\{x\} + \mathbb{R}_+ d \mid x \in \mathrm{ir}\, C \text{ et } d \in \big(\mathrm{ir}(C)\big) \setminus \{0\}\big\} \subset \mathcal{I}(C)\,,$$

puisque $C$ est un cône. En remarquant que pour un cône nous avons $\big((x \in C \text{ et } d \in \mathrm{ir}\, C) \Rightarrow x + d \in C\big)$, la première inclusion est démontrée. Réciproquement, soit $D = \{x\} + \mathbb{R}_+ d \in \mathcal{I}(C)$. Par définition, pour $r_1 = 1 + \|x\|$, il existe $t_1 \geq 0$ tel que

$$B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}\big(x + t_1 d\,,\, 1 + \|x\|\big) \subset C\,.$$

Comme $d \in C_\infty$, on peut supposer que $t_1 > 0$. Alors $B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(t_1 d, 1) \subset C$ et comme $C$ est un cône $B_{\mathrm{vect}(C_\infty)}(d, 1/t_1) \subset C$ ce qui exprime que $d \in \mathrm{ir}\, C_\infty = \mathrm{ir}\, C$.

(iv) On rappelle (voir [7]) qu'un rayon frontière du convexe fermé $C$ est une demi-droite qui est contenue dans la frontière de $C$ et qu'une asymptote est une demi-droite $\Delta$ contenue dans $E \setminus C$ tel que

$$\inf\big\{\|y - x\| \bigm| y \in \Delta \text{ et } x \in C\big\} = 0\,.$$

Un ensemble $C$ est continu si $C$ est un convexe fermé qui n'a ni asymptote, ni rayon frontière. Le résultat qui va nous servir ici est le suivant.

LEMME 3.3 (voir [7]).— *Soit $d \in C_\infty \setminus \{0\}$, $x \in C$ et $y \in E$ tels que la demi-droite $\Delta = \{y + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ ne rencontre pas $C$. Alors pour $u \in [x\,,\, y]$, la demi-droite $D = \{u + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ est une asymptote ou contient un rayon frontière.*

*Continuation de la preuve, partie (iv)*

[$\Rightarrow$] Supposons que $\ell(C) \neq E$. Comme $p_{\ell(C)^\perp}(C)$ est borné, il existe $y \in E$ tel que $\{y\} + \ell(C) \cap C = \emptyset$. En particulier pour $d \in C_\infty \setminus \{0\}$ (qui existe bien car $C \notin \mathcal{C}_C$), on a $\{y\} + \mathbb{R}_+ d$ ne rencontre pas $C$ et, si $x \in C$, le lemme donne une contradiction.

Soit maintenant $D = \{x\} + \mathbb{R}_+ d \in \mathcal{D}(C)$. En appliquant à nouveau le lemme on montre que $p_{\{d\}^\perp}(C) = \{d\}^\perp$. En appliquant le même type d'argument que dans la preuve de la proposition 6(i), on déduit $D \in \mathcal{I}(C)$.

[$\Leftarrow$] On suppose $\ell(C) = E$ et $\mathcal{I}(C) = \mathcal{D}(C)$.

Supposons qu'il existe un rayon frontière $D = \{x\}+\mathbb{R}_+d$. Alors $D \in \mathcal{D}(C)$ et donc $D \in \mathcal{I}(C)$; pour $r_1 = 1$ il existe $t_1 \geq 0$ tel que $B_E(x + t_1 d\,,\,1) \subset C$ et alors $x + t_1 d \in \operatorname{int} C$, ce qui contredit que $D \subset C^*$.

Supposons maintenant qu'il existe une asymptote $D = \{y\} + \mathbb{R}_+d$. Alors on montre facilement que $d \in C_\infty$. Soit $x \in C$; on a $\{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{D}(C)$ donc par hypothèse $\{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C)$. Par définition, pour $r_2 = \|y - x\|$, il existe $t_2 \geq 0$ tel que

$$B_E\big(x + t_2 d\,,\,\|y - x\|\big) \subset C\,.$$

Mais alors $y + t_2 d \in C \cap D$, ce qui entraîne à nouveau une contradiction.

Ainsi $C$ est continu. □

L'introduction de $\mathcal{I}(C)$ permet d'obtenir une condition suffisante pour que l'application $\ell$ soit stable par intersection.

PROPOSITION 8.— *Soient $C_1$, $C_2 \in \mathcal{C}_F$ tels que $\mathcal{I}(C_1) \cap \mathcal{I}(C_2) \neq \emptyset$. Alors*

$$\ell(C_1 \cap C_2) = \ell(C_1) \cap \ell(C_2)\,.$$

*Preuve.*— L'inclusion $\ell(C_1 \cap C_2) \subset \ell(C_1) \cap \ell(C_2)$ est une conséquence de la proposition 1(i). Réciproquement, par hypothèse il existe

$$D = \{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C_1) \cap \mathcal{I}(C_2)\,.$$

Soit $r > 0$; pour $i \in \{1, 2\}$, il existe $t_i \geq 0$ tel que $B_{\ell(C_i)}(x + t_i d, r) \subset C_i$. Comme $d \in (C_1)_\infty \cap (C_2)_\infty$, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$B_{\ell(C_i)}(x + t_0 d, r) \subset C_i$$

où $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$. Ceci implique $B_{\ell(C_1)\cap\ell(C_2)}(x + t_0 d, r) \subset C_1 \cap C_2$; ainsi $\ell(C_1) \cap \ell(C_2) \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C_1 \cap C_2)$ et, d'après (2.2),

$$\ell(C_1) \cap \ell(C_2) \subset \ell(C_1 \cap C_2)\,. \;\square$$

## 4. Ombre d'un convexe

Dans cette section, nous supposerons que $C \in \mathcal{C}$ vérifie $\ell(C)\} \neq E$ ou, en d'autres termes, grâce au corollaire 3(i),

$$r_C \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists\, x \in C\,,\ B_E(x,r) \subset C\} \in \mathbb{R}_+ .$$

On appellera le convexe borné $p_{\ell(C)^\perp}(C)$ l'ombre du convexe $C$. Le théorème suivant exprime que cette ombre donne une bonne information sur $C$ lui-même.

THÉORÈME 9.— *Si $A \in \mathcal{A}$ localise $C$, alors, pour tout $R \in \mathcal{C}_C$ inclus dans $\operatorname{ir}\big(p_{\ell(C)^\perp}(C)\big)$, pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ tel que*

$$\Big(R + \{x - p_{\ell(C)^\perp}(x)\}\Big) + B_{\ell(C)}(0,r) \subset C\,.$$

*Preuve.*— Nous allons faire une récurrence sur la dimension de l'espace $E$. Si $n = 1$, le résultat est facile à vérifier. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour un espace euclidien de dimension inférieure à $n-1$. Nous allons envisager deux cas.

*Cas 1.*— $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$

Alors il existe $L \in \mathcal{L}$ et $K \in \mathcal{C}_C$ tels que $\overline{C} = L + K$. On montre que $L = \ell(C)$ et que l'on peut choisir $K = p_{\ell(C)^\perp}(C)$. D'après [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2],

$$\operatorname{ir} C = \operatorname{ir} \overline{C} = L + \operatorname{ir} K\,.$$

Choisissons un élément $x$ dans $A$ qui est non vide; on a $x - p_{\ell(C)^\perp}(x) \in \ell(C)$. Donc

$$R + \{x - p_{\ell(C)^\perp}(x)\} + B_{\ell(C)}(0,r) \subset \operatorname{ir} K + L = \operatorname{ir} C \subset C\,.$$

*Cas 2.*— $\overline{C} \notin \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$.

Nous allons décomposer la preuve en trois étapes.

*Étape 1.*— Montrons tout d'abord qu'il existe $e_n \in C_\infty \cap \vec{A}$, $\|e_n\| = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in A$ tel que $B_{\ell(C)}(x_k, k) \subset C$. Si une sous-suite de $(x_k)$ converge vers un élément $\overline{x}$, alors on aura

$$\{\overline{x}\} + \ell(C) \subset \overline{C}$$

et $\ell(C) = \ell(\overline{C})$ est la partie linéaire de $\overline{C}$ ce qui implique que $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Ceci est impossible. Ainsi nous avons $\lim_{k \to +\infty} \|x_k\| = +\infty$ ; en toute généralité nous pouvons supposer que la suite $(x_k / \|x_k\|)$ converge vers un élément $e_n$ de $E$, $\|e_n\| = 1$. Comme $x_k \in A \cap C$, nous déduisons que $e_n \in \vec{A} \cap C_\infty$
[10, théorème 8.2].

*Étape 2.*— Posons

$$E' = \{e_n\}^\perp , \quad C = p_{E'}(C) \quad \text{et} \quad A' = A \cap E'$$

et vérifions que les hypothèses du théorème sont satisfaites dans l'espace euclidien $E'$ où nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque $\dim E' = n - 1$. D'après la proposition 1(viii),

$$\ell(C) = \ell(C') + \mathbb{R} e_n .$$

Montrons que $A'$ localise $C'$. Soit $r > 0$ ; il existe $x \in A$ tel que $B_{\ell(C)}(x, r) \subset C$. Soit alors

$$z' \in B_{\ell(C')}(x', r) \quad \text{où } x' \stackrel{\text{def}}{=} p_{E'}(x) \in A'$$

d'après l'étape 1 ; $z' - x' \in \ell(C')$ et $\|z' - x'\| \leq r$. Posons

$$z \stackrel{\text{def}}{=} z' + (x - x') ;$$

on a

$$z - x \in \ell(C') \subset \ell(C) \quad \text{et} \quad \|z - x\| \leq r ,$$

donc $z \in C$ et alors $z' = p_{E'}(z) \in C'$. Ainsi $B_{\ell(C')}(x', r) \subset C'$ et $A'$ localise $C'$.

Posons $C_1 = p_{\ell(C)^\perp}(C)$ et notons

$$\varepsilon = \inf_{r \in R} d\big(r , (\operatorname{aff} C_1) \setminus (\operatorname{ir} C_1)\big) > 0 .$$

Alors

$$R' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y \in \operatorname{aff} C_1 \mid d(y,R) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \mathcal{C}_C$$

et vérifie $R \subset \operatorname{ir} R'$ et $R' \subset \operatorname{ir} C_1$.

Remarquons enfin que $\ell(C)^\perp = \ell(C')^{\perp_{E'}}$ et alors

$$R' \subset \operatorname{ir}\big(p_{\ell(C)^\perp}(C)\big) = \operatorname{ir}\big(p_{\ell(C)^\perp}(C')\big) = \operatorname{ir}\big(p_{\ell(C')^{\perp_{E'}}}(C')\big).$$

*Étape 3.*— Nous allons dans cette étape appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure. Il existe $x'_{r+1} \in A'$ tel que

$$K'_1 \stackrel{\text{def}}{=} R' + \left\{ x'_{r+1} - p_{\ell(C')^{\perp_{E'}}}(x'_{r+1}) \right\} + B_{\ell(C')}(0\,,\, r+1) \subset C'.$$

La fonction convexe $\phi$ définie, pour $z \in E'$, par

$$\phi(z) = \inf\{ t \geq 0 \mid z + te_n \in \overline{C} \}$$

est donc à valeurs finies sur $K'_1$. On a, grâce à [10, corollaire 6.6.2],

$$\operatorname{ir} K'_1 = \operatorname{ir} R' + \left\{ x_{r+1} - p_{\ell(C)^\perp}(x'_{r+1}) \right\} + \operatorname{ir} B_{\ell(C')}(0\,,\, r+1) \supset K'_2.$$

D'après [10, théorème 10.1], $\phi$ est alors continue sur le compact

$$K'_2 = R + \left\{ x'_{r+1} - p_{\ell(C)^\perp}(x'_{r+1}) \right\} + B_{\ell(C')}(0,r).$$

Il existe donc $t_0 \geq 0$ tel que $K'_2 + [t_0\,, +\infty[\, e_n \subset \overline{C}$; et en posant $x = x'_{r+1} + (r + t_0)e_n$, qui est bien un élément de $A$ d'après l'étape 1, on a

$$R + \left\{ x - p_{\ell(C)^\perp}(x) \right\} + B_{\ell(C')}(0,r) + [-r\,, +\infty[\, e_n \subset \overline{C}$$

et en particulier, nous déduisons $R + \left\{ x - p_{\ell(C)^\perp}(x) \right\} + B_{\ell(C)}(0,r) \subset \overline{C}$. □

Nous donnons comme exemple d'application le corollaire suivant.

Corollaire 10.— *Si $\ell(C) \neq E$, alors :*

*(i) $C$ est contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles distants de $d$ telle que $C$ contienne des*

*segments perpendiculaires aux deux hyperplans et de longueur arbitrairement proche de d ;*

*(ii) nous sommes dans l'une des situations suivantes :*

*(S1) C est contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles distants de $2r_C$ ;*

*(S2) il existe $A \in \mathcal{A}$ de dimension $n-2$ tel que*

$$\lim_{r \to r_C^-} \sup_{\{x \in C | B_E(x,r) \subset C\}} d(x, A) = 0 .$$

*Preuve*

(i) Posons $C_1 = p_{\ell(C)^\perp}(C)$ et notons $d$ le diamètre de $\overline{C_1}$. Comme $\overline{C_1}$ est compact, il existe $y_1$, $y_2 \in \overline{C_1}$ tel que $\|y_1 - y_2\| = d$. Nous allons envisager deux cas.

*Cas 1.*— $d = 0$

Alors $C_1$ est réduit à un point et tout hyperplan contenant $C_1 + \ell(C)$ répond à la question.

*Cas 2.*— $d \neq 0$

Posons $p = (y_2 - y_1)/\|y_2 - y_1\|$; pour tout $z \in C_1$,

$$p \cdot y_1 \leq p \cdot z \leq p \cdot y_2$$

et donc, pour $x \in C$,

$$p \cdot y_1 \leq p \cdot x \leq p \cdot y_2 .$$

Les deux hyperplans $H_i = \{e \in E \mid p \cdot e = p \cdot y_i\}$ $(i = 1, 2)$ sont donc parallèles et distants de $d$. Considérons maintenant le segment $B_t = t\{y\} + (1-t)[y_1 , y_2]$, où $t \in \,]0, 1[$ et où $y \in \operatorname{ir} C_1$. En appliquant le théorème 9 avec $A = E$, $R = B_t \subset \operatorname{ir} C_1$ et $r = 1$, nous obtenons

$$B_t + \left\{x_t - p_{\ell(C)^\perp}(x_t)\right\} \subset C$$

et le résultat est prouvé.

(ii) Nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 4.1.— *Soit $C'$ un convexe compact non vide de l'espace euclidien $E_1$ de dimension finie $n_1$. On définit une fonction concave $r_1$ sur $C'$ par*

$$r_1(x) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid B_{E_1}(x,r) \subset C'\} = d(x, \overline{E_1 \setminus C'}).$$

*Notons alors*

$$\overline{r_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{r_1(x) \mid x \in C'\}, \quad S_1 = \arg\max\{r_1(x) \mid x \in C'\}$$

*et enfin, pour $x \in C'$,*

$$I_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} B_{E_1}^{\cdot}(x\,,\, r_1(x))^* \cap C'^*.$$

*Alors, nous avons :*

*(a) $S_1$ est un convexe compact non vide et $\dim S_1 \leq n_1 - 1$;*

*(b) si $x \in \operatorname{int} C'$, alors $x \in S_1$ est équivalent à $x \in \operatorname{co} I_1(x)$;*

*(c) si $\dim S_1 = n_1 - 1$, $C'$ est dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans parallèles et distants de $2\,\overline{r_1}$.*

*Preuve*

(a) Le fait que $S_1$ soit un convexe compact non vide est classique. Si $\operatorname{int} S_1 \neq \emptyset$, alors il existe $x \in S_1$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B_{E_1}(x,\varepsilon) \subset S_1$; alors $B_{E_1}(x\,,\, \overline{r_1} + \varepsilon) \subset C'$ ce qui contredit la définition de $\overline{r_1}$.

(b) Soit $x \in \operatorname{int} C'$; comme la fonction $-r_1$ est convexe sur $C'$, on a $x \in S_1$ si et seulement si $0 \in \partial(-r_1)(x)$, où $\partial(-r_1)$ désigne la sous-différentielle au sens de l'analyse convexe de la fonction $-r_1$. Notons alors $\partial^c$ la sous-différentielle au sens de Clarke. D'une part, d'après [6, propositions 2.2.7 et 2.3.1], nous avons

$$\partial(-r_1)(x) = \partial^c(-r_1)(x) = -\partial^c r_1(x)\,;$$

d'autre part, nous avons $\partial^c r_1(x) = \overline{\operatorname{co}}(\{x\} - I_1(x))$ (utiliser par exemple les arguments que l'on trouve dans la preuve du théorème 2.5.6 de [6]). Nous obtenons donc

$$\partial(-r_1)(x) = -\overline{\operatorname{co}}(\{x\} - I_1(x))$$

et on conclut en remarquant que $I_1(x)$ est compact.

(c) Si $\overline{r_1} = 0$, alors $\operatorname{int} C' = \emptyset$ et $C'$ est contenu dans l'hyperplan affine $\operatorname{aff} C'$ et le résultat est prouvé dans ce cas.

Nous supposons désormais que $\overline{r_1} > 0$. Choisissons un élément $x$ dans $\operatorname{ir} S_1$ qui est non vide. Posons $(\operatorname{aff} S_1)^{\perp} = \mathbb{R}d$, $\|d\| = 1$ et vérifions l'inclusion

$$I_1(x) \subset \left\{x + \overline{r_1}d; x - \overline{r_1}d\right\}.$$

Soit $z \in I_1(x)$; notons $z_1 = p_{\operatorname{aff} S_1}(z)$. Alors pour $\lambda \in \left]0\,,\,1\right[$,

$$\begin{aligned}\left\|z - \left((1-\lambda)x + \lambda z_1\right)\right\|^2 &= \left\|z - x\right\|^2 + \lambda^2\left\|x - z_1\right\|^2 + 2\lambda(z - x)\cdot(x - z_1)\\ &= \overline{r_1}^2 + \lambda(\lambda - 2)\left\|x - z_1\right\|^2.\end{aligned}$$

Si $x \neq z_1$, alors $z \in \operatorname{int} B_{E_1}\left((1-\lambda)x + \lambda z_1\,,\,\overline{r_1}\right)$ ; comme, pour $\lambda$ assez petit, $(1-\lambda)x + \lambda z_1 \in S_1$, on déduit $z \in \operatorname{int} C'$ ce qui est impossible. Donc $x = z_1$ et ceci entraîne $z \in \{x + \overline{r_1}d\,;\, x - \overline{r_1}d\}$.

Compte tenu de (b), comme $x \in \operatorname{int} C'$ (car $\overline{r_1} > 0$), il vient alors

$$I_1(x) = \{x + \overline{r_1}d\,;\, x - \overline{r_1}d\}.$$

Les deux hyperplans

$$\left\{y \in E_1 \mid d\cdot y = d\cdot x + \overline{r_1}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{y \in E_1 \mid d\cdot y = d\cdot x - \overline{r_1}\right\}$$

satisfont alors aux conditions demandées.

*Continuation de la preuve, partie (ii)*

Nous allons appliquer le lemme 4.1 avec

$$E_1 = \ell(C)^{\perp} \quad \text{et} \quad C' = \overline{p_{\ell(C)^{\perp}}(C)}.$$

Constatons que grâce au théorème 9, nous avons $\overline{r_1} = r_C$. Deux situations seulement peuvent alors se produire (utiliser la partie (a) du lemme 4.1).

*Première situation.*— $\dim S_1 = n_1 - 1$

Dans ce cas, en utilisant la partie (c) du lemme 4.1 on vérifie (S1)

*Deuxième situation.*— $\dim S_1 < n_1 - 1$

Dans ce cas, en prenant un sous-espace affine de dimension $n-2$ contenant $(\operatorname{aff} S_1) + \ell(C)$ (ce qui est possible car $\dim\left((\operatorname{aff} S_1) + \ell(C)\right) \leq n-2$), on montre facilement que (S2) est vérifiée. □

## Références

[1] BAIR (J.) .— *A geometric description of the inner aperture of a convex set*, Acta Math., **38**, 1-4 (1981) , pp. 237-240.

[2] BAIR (J.) .— *Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **35**, n° 2 (1983), pp. 177-187.

[3] BRONDSTED (A.) .— *The inner aperture of a convex set*, Pacific J. Math., **72**, n° 2 (1977) , pp. 335-340.

[4] BRONDSTED (A.) .— *Intersections of translates of convex sets*, Mathematatika, **24** (1977), pp. 122-129.

[5] CLARK (C.) .— *On convex sets of finite width*, J. London Math. Soc., **43** (1968), pp. 513-516.

[6] CLARKE (F.) .— *Optimization and nonsmooth Analysis*, New York, John Wiley (1983).

[7] GALE (D.) et KLEE (V.) .— *Continuous convex sets*, Math. Scand., **7** (1959), pp. 379-391.

[8] KLEE (V.) .— *On a question of Colin Clark concerning three properties of convex sets*, Canadian Math. Bull. (1972), pp. 535-537.

[9] LARMAN (D. G.) .— *On the inner aperture and intersections of convex sets*, Pacific J. Math., **55** (1974), pp. 219-232.

[10] ROCKAFELLAR (R. T.) .— *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

[11] THORP (E.) and WHITLEY (R.) .— *Partially bounded sets of infinite width*, J. Reine Angew. Math., **248** (1971), pp. 117-122.