

PHILIPPE BÉNILAN

HAMIDOU TOURÉ

Solution entropique pour une équation parabolique-hyperbolique non linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 3, n° 1 (1994), p. 63-80

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_1_63_0

© Université Paul Sabatier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solution entropique pour une équation parabolique–hyperbolique non linéaire^(*)

PHILIPPE BÉNILAN ET HAMIDOU TOURÉ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Nous donnons ici une version abstraite via la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1 d'un résultat récent de Escobedo, Vasquez et Zuazua pour l'équation $u_t = \Delta_x u - \partial_y f(u)$. Nous précisons ensuite les différentes formes possibles de la condition entropique et donnons une formule de représentation des solutions.

ABSTRACT. — We give an abstract version, using semi group theory in L^1 , of a recent result of Escobedo, Vasquez and Zuazua on equation $u_t = \Delta_x u - \partial_y f(u)$. Then we make precise different form of the entropy condition and give a representation formula for the solution.

Introduction

Nous considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u = L_x u - \partial_y f(u) + w & \text{pour } (t, x, y) \in Q =]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

associé à un opérateur L , générateur d'un C_0 -semi-groupe linéaire sous-markovien sur $L^1(\Omega, B, \mu)$, où $T > 0$, $w \in L^1(Q)$, $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$; (Ω, B, μ) désigne un espace mesuré et f une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de L à $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ est symétrique. Nous désignerons par L_x l'extension de L à $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

(*) Reçu le 1 juillet 1993

(1) Équipe de Mathématiques, U.R.A. C.N.R.S. 741, Université de Franche-Comté, F-25030 Besançon Cedex (France)

Sous l'hypothèse f lipschitzienne strictement croissante, d'inverse lipschitzienne, dans la première partie, nous associons à L_x et f , un opérateur A de $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ défini par

$$Au = -L_x u + \partial_y f(u) \quad (2)$$

pour $u \in D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R}, L^1(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, D(L))$.

Nous montrons alors que A est $s - T$ -accrétif, sous-markovien à domaine dense et vérifie la "condition d'image".

Dans la seconde partie, grâce à la théorie générale des équations d'évolution dans un espace L^1 , nous considérons une notion de solution entropique pour le problème (1) généralisant celle de Kruskov, pour laquelle nous obtenons un problème bien posé.

La dernière partie est consacrée à la formule de représentation des solutions entropiques de (1) lorsque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $v \equiv 0$.

Ces résultats développés dans le cadre abstrait de la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ s'applique naturellement au cas des opérateurs différentiels. Prenant $L = \Delta$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et $w = 0$, nous retrouvons, par des techniques totalement différentes, les résultats de Escobedo, Vasquez et Zuazua [EVZ] pour le problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u - \partial_y f(u) & \text{sur }]0, \infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les résultats abstraits s'appliquent évidemment à d'autres exemples d'opérateurs L , par exemple au problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u - \partial_y f(u) + w & \text{sur }]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R} \\ \lambda u + (1 - \lambda) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

1. Solutions intégrales

Dans cette section on suppose

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lipschitzienne croissante} \\ \text{avec } \beta = f^{-1} \text{ lipschitzienne et } f(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

On définit l'opérateur A dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ par

$$Au = -L_x u + \partial_y f(u) \quad (1.2)$$

avec

$$D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R}, L^1(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, D(L)), \quad (1.3)$$

où $D(L)$ est muni naturellement de la norme du graphe.

Puisque f est lipschitzienne et $f(0) = 0$, pour $u \in D(A)$ on a $f(u) \in W^{1,1}(\mathbb{R}, L^1(\Omega))$ et donc $Au \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ est bien défini. Étant donné que $D(L)$ est dense dans $L^1(\Omega)$, il est clair que :

$$D(A) \text{ est dense dans } L^1(\Omega \times \mathbb{R}). \quad (1.4)$$

L'opérateur L étant générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions linéaires positives sur $L^1(\Omega)$, $-L$ est $s - T$ -accréatif dans $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\int \alpha L u \, d\mu \leq 0, \quad \forall u \in D(L), \alpha \in L^\infty(\Omega), \alpha \in \text{sign}^+ u, \quad (1.5)$$

où sign^+ est le graphe d'Heaviside :

$$\text{sign}^+ r = \begin{cases} \{1\} & \text{si } r > 0 \\ [0, 1] & \text{si } r = 0 \\ \{0\} & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Étant donné $u, \bar{u} \in D(A)$, on a presque partout $x \in \Omega$ $f(u(x, \cdot))$, $f(\bar{u}(x, \cdot)) \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ et donc

$$\int_{[u(x, \cdot) > \bar{u}(x, \cdot)]} (\partial_y f(u(x, \cdot)) - \partial_y f(\bar{u}(x, \cdot))) \, dy = 0$$

$$\partial_y f(u(x, \cdot)) - \partial_y f(\bar{u}(x, \cdot)) = 0 \quad \text{p.p. sur } [u(x, \cdot) = \bar{u}(x, \cdot)].$$

Il en résulte immédiatement, grâce au théorème de Fubini, que l'opérateur A est $s - T$ -accréatif dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \iint \alpha (Au - A\bar{u}) \, d\mu \, dy \geq 0, \\ \forall u, \bar{u} \in D(A), \alpha \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}), \alpha \in \text{sign}^+(u - \bar{u}). \end{cases} \quad (1.6)$$

En particulier pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est une bijection de $D(A)$ sur $R(I + \lambda A)$ et $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ est une T -contraction pour la norme $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \|(J_\lambda w - J_\lambda \bar{w})^+\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R})} \leq \|(w - \bar{w})^+\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R})}, \\ \forall w, \bar{w} \in R(I + \lambda A), \end{cases} \quad (1.7)$$

où pour $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max(r, 0)$.

Notons que l'on a également le "principe du maximum"

$$\inf_{\text{ess}} w \leq J_\lambda w \leq \sup_{\text{ess}} w, \quad \forall w \in R(I + \lambda A). \quad (1.8)$$

En effet, L étant générateur d'un semi-groupe sous-markovien on a

$$\int p(u) Lu \, d\mu \leq 0, \quad \forall u \in D(A), \forall p \in \mathcal{P}_0,$$

où $\mathcal{P}_0 = \{p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \mid p' \geq 0, p(0) = 0\}$. Il est clair d'autre part que

$$\begin{aligned} \int p(u(x, \cdot)) \partial_y f(u(x, \cdot)) \, dy &= 0, \\ \forall u \in D(A) \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), p(0) &= 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\iint p(u) Au \, d\mu \, dy \geq 0, \quad \forall u \in D(A), p \in \mathcal{P}_0 \quad (1.9)$$

ce qui implique immédiatement (1.8) (cf. par exemple [BC]).

Le résultat principal de cette section est la vérification de la "condition d'image" permettant d'appliquer la théorie des semi-groupes non linéaires.

THÉORÈME 1. — *Pour tout $\lambda > 0$, $R(I + \lambda A)$ est dense dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$. Plus précisément*

$$R(I + \lambda A) \supset L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^2(\Omega \times \mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}; L^1(\Omega)). \quad (1.10)$$

Remplaçant L , f par λL , λf respectivement, on peut toujours supposer $\lambda = 1$. On va utiliser le lemme suivant.

LEMME 1. — *Étant donné*

$$w \in BV_{\text{loc}}([0, \infty[; L^1(\Omega)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty[; L^2(\Omega)),$$

il existe $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}([0, \infty[; L^1(\Omega))$ unique tel que $u(0) = 0$ et p.p. $y \in (0, \infty)$, $u(\cdot, y) \in D(L)$ et

$$u(\cdot, y) - Lu(\cdot, y) + \partial_y f(u(\cdot, y)) = w(\cdot, y). \quad (1.11)$$

De plus pour tout $R > 0$,

$$c \|\partial_y f(u)\|_{L^2(\Omega \times]0, R])}^2 \leq C \|w\|_{L^2(\Omega \times]0, R])}^2 \quad (1.12)$$

et

$$c \|\partial_y f(u)\|_{L^1(\Omega \times]0, R])} \leq \|w(0+)\|_{L^1(\Omega)} + \|\partial_y w\|_{M(\Omega \times]0, R])}, \quad (1.13)$$

où

$$0 < c \leq \beta' \leq C < \infty \quad (1.14)$$

et

$$\|\partial_y w\|_{M(\Omega \times]0, R])} = \lim_{h \downarrow 0} \int_0^{R-h} \int \frac{|w(x, y+h) - w(x, y)|}{h} d\mu dy \quad (1.15)$$

est la variation totale de w par rapport à $y \in [0, R[$.

Preuve du lemme. — L'opérateur $B = (I - L)\beta$ de $L^1(\Omega)$ défini par $Bv = (I - L)\beta v$ avec $D(B) = \{v \in L^1(\Omega) \mid \beta(v) \in D(L)\}$ est m -accrétif dans $L^1(\Omega)$. En fait d'après (1.5), on a

$$\begin{aligned} \int \alpha(Bv - B\bar{v}) &\geq \int \alpha(\beta(v) - \beta(\bar{v})) = \int (\beta(v) - \beta(\bar{v}))^+ \geq \\ &\geq c \int (v - \bar{v})^+ \end{aligned} \quad (1.15')$$

pour tout $v, \bar{v} \in D(B)$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha \in \text{sign}^+(v - \bar{v}) = \text{sign}^+(\beta(v) - \beta(\bar{v}))$ où c est donné par (1.14); donc $B - cI$ est s - T -accrétif et a fortiori B est accrétif. D'autre part pour $w \in L^1(\Omega)$, l'équation $v - Bv = w$ est équivalente à $u + f(u) - Lu = w$ qui admet une solution puisque f est lipschitzienne.

Étant donné $w \in BV_{\text{loc}}([0, \infty[; L^1(\Omega))$, utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires ([B1], [BCP]), considérons la bonne solution v du problème d'évolution

$$\frac{dv}{dy} + Bv \ni w \quad \text{sur } [0, \infty[, \quad v(0) = 0. \quad (1.16)$$

On a $v \in \text{Lip}_{\text{loc}}([0, \infty[; L^1(\Omega))$. Plus précisément puisque $B - cI$ est accréatif,

$$\begin{aligned} \|v(y+h) - v(y)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_0^h e^{-c(y+h-z)} \|w(z)\|_{L^1(\Omega)} dz + \\ &+ \int_0^h e^{-c(y-z)} \|w(z+h) - w(z)\|_{L^1(\Omega)} dz. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Supposons maintenant de plus $w \in L^2_{\text{loc}}([0, \infty[; L^2(\Omega))$. On a alors $v \in W^{1,2}_{\text{loc}}([0, \infty[; L^2(\Omega))$ et, pour tout $R > 0$,

$$c \left\| \frac{dv}{dy} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, R])}^2 \leq C \|w\|_{L^2(\Omega \times]0, R])}^2. \quad (1.18)$$

Ceci se voit formellement à partir de l'estimation de l'énergie

$$\begin{aligned} \int_0^R \int \beta'(v) \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 d\mu dy + \frac{1}{2} \int \left((I - L)^{1/2} \beta(v(R)) \right)^2 d\mu &= \\ = \int_0^R \int \beta'(v) \frac{dv}{dy} w d\mu dy, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où $(I - L)^{1/2}$ est la racine carrée de l'opérateur auto-adjoint défini positif, fermeture dans $L^2(\Omega)$ de la restriction de $I - L$ à $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Pour une démonstration rigoureuse de (1.18) et (1.19), on peut suivre la preuve du théorème 1 de [B2] (où le résultat est prouvé dans le cas $\mu(\Omega) < \infty$).

Puisque $\text{Lip}_{\text{loc}}([0, \infty[; L^1(\Omega)) \cap W^{1,2}_{\text{loc}}([0, \infty[; L^2(\Omega))$ est contenu dans $W^{1,\infty}_{\text{loc}}([0, \infty[; L^1(\Omega))$ et B est m -accréatif, v est donc solution forte de (1.16) ([B1], [BCP]). Posant $u = \beta(v)$, on a ainsi prouvé le lemme, les estimations (1.12) et (1.13) se déduisant de (1.18) et (1.17) respectivement. $\square$

Preuve du théorème 1. — Fixons

$$w \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^2(\Omega \times \mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}; L^1(\Omega)).$$

Étant donné $R > 0$, utilisant le lemme, il existe

$$u_R \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}([-R, \infty[; L^1(\Omega))$$

tel que $u_R(\cdot, y) \in D(L)$ et vérifie (1.11). On prolonge u_R par 0 sur $\Omega \times]-\infty, -R[$ de telle sorte que $u_R \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$.

On a les estimations :

$$c \|\partial_y f(u_R)\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R})}^2 \leq C \|w\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R})}^2 \quad (1.20)$$

$$c \|\partial_y f(u_R)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R})}^2 \leq \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\Omega))} + \|\partial_y w\|_{M(\Omega \times \mathbb{R})} \quad (1.21)$$

par application de (1.12) et (1.13). On a aussi

$$\|u_R\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R})} \leq \|w\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R})} \quad (1.22)$$

puisque d'après (1.5)

$$\int |u_R(y)| d\mu + \frac{d}{dy} \int f(u_R(y)) d\mu = \int |w(y)| d\mu.$$

En particulier, $u_R \in D(A)$ et $u_R + Au_R = w_R$ où $w_R(x, y) = w(x, y)X_{[-R, \infty[}(y)$. Puisque $w_R \rightarrow w$ dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, il en résulte par accrétivité de A , que $u_R \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$. D'après (1.20) et (1.21),

$$f(u) \in W^{1,2}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}; L^1(\Omega)).$$

Donc $u \in D(A)$ et $u + Au = w$. $\square$

Appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires ([B1], [BCP]), pour tout $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ et $w \in L^1(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R})$, il existe une unique bonne solution $u \in C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}))$ du problème d'évolution

$$\frac{du}{dt} + Au = w, \quad u(0) = u_0. \quad (1.23)$$

De plus, cette bonne solution est caractérisée par les inégalités intégrales. En d'autres termes, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ et $w \in L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}))$ avec $u(0) = u_0$ vérifiant*

$$\begin{cases} \forall \xi \in D([0, T]), \xi \geq 0, \forall \underline{u} \in D(A), \\ \exists \alpha \in L^\infty(Q), \alpha \in \text{sign}(u - \underline{u}) \text{ telle que} \\ \iiint \alpha \{ (u - \underline{u})\xi' + (w - A\underline{u})\xi \} d\mu dy dt \geq 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Notons enfin que, l'opérateur A étant T -accrétif, si $u, \bar{u}$ sont les solutions correspondantes à $(u_0, w), (\bar{u}_0, \bar{w})$ respectivement, on a

$$\begin{cases} \iint (u(t) - \bar{u}(t))^+ d\mu dy \leq \iint (u_0 - \bar{u}_0)^+ d\mu dy + \\ \quad + \iiint (w - \bar{w})^+ d\mu dy dt, \\ \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (1.25)$$

et en particulier le "principe de comparaison"

$$u_0 \leq \bar{u}_0 \quad \text{et} \quad w \leq \bar{w} \Rightarrow u \leq \bar{u}. \quad (1.26)$$

Également compte tenu de (1.8), on a le "principe du maximum"

$$\inf \text{ess } u_0 + \int_0^T \inf \text{ess } w(t) dt \leq u \leq \sup \text{ess } u_0 + \int_0^T \sup \text{ess } w(t) dt. \quad (1.27)$$

2. Solutions entropiques

Dans cette section on suppose seulement

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ localement lipschitzienne.} \quad (2.1)$$

On note

$$D_0 = \{ \psi \in D(L) \cap L^\infty(\Omega) \mid L\psi \in L^\infty(\Omega) \} \quad (2.2)$$

muni de la norme

$$\|\psi\|_{D_0} = \|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{L^\infty} + \|L\psi\|_{L^1} + \|L\psi\|_{L^\infty}$$

qui en fait un espace de Banach.

THÉOREME 2

i) Étant donné $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ et $w \in L^1(Q)$ les deux propriétés (2.3) et (2.4) suivantes sont équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint \text{sign}_0(u - \psi) \{ (u - \psi)(\xi_t + L_x \xi) + \\ + (f(u) - f(\psi))\xi_y + (w + L\psi)\xi \} \, dt \, d\mu \, dy \geq 0, \\ \forall \psi \in D_0, \forall \xi \in D([0, T[\times \mathbb{R}; D_0), \xi \geq 0; \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint \text{sign}_0(u - \psi) \{ (u - \psi)\xi_t + \\ + (f(u) - f(\psi))\xi_y + (w + L\psi)\xi \} \, dt \, d\mu \, dy \geq 0, \\ \forall \psi \in D_0, \forall \xi \in D([0, T[\times \mathbb{R}), \xi \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

ii) Étant donné $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ et $w \in L^1(Q)$ avec

$$\int_0^T \|w(t)\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})} \, dt < \infty,$$

il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ avec $u(0) = u_0$ vérifiant (2.3) et (2.4). De plus les estimations (1.25), (1.26) et (1.27) sont valables pour ces solutions.

La preuve de ce théorème va occuper toute cette section.

Remarque 1. — Nous remarquons d'abord que (2.3) $\Rightarrow$ (2.4). En effet, fixons $\psi \in D_0$, $\xi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$, $\xi \geq 0$ et définissons, grâce au théorème de Fubini, $a, b \in L^1(\Omega)$ par

$$a = \iint \text{sign}_0(u - \psi) \{ (u - \psi)\xi_t + (f(u) - f(\psi))\xi_y + (w + L\psi)\xi \} \, dt \, dy$$

$$b = \iint |u - \psi| \xi \, dt \, dy.$$

On a $b \geq 0$. Et appliquant (2.3) :

$$\int (a\varphi + bL\varphi) \, d\mu \geq 0, \quad \forall \varphi \in D_0, \varphi \geq 0, \quad (2.5)$$

on en déduit $\int a \, d\mu \geq 0$ (c'est-à-dire (2.4)) grâce au lemme suivant.

LEMME 2. — Étant donné $a, b \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ vérifiant (2.5), on a

$$\int a \, d\mu \geq 0.$$

Preuve du lemme 2. — Étant donné $\rho \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\rho \geq 0$ et $\lambda > 0$, on a $\varphi = (I - \lambda L)^{-1} \rho \in D_0$, $\varphi \geq 0$, et

$$L\varphi = \frac{(I - \lambda L)^{-1} - I}{\lambda} \rho.$$

Appliquant (2.5), puisque L est symétrique, on obtient

$$\int \left\{ (I - \lambda L)^{-1} a + \frac{(I - \lambda L)^{-1} b - b}{\lambda} \rho \right\} \rho \, d\mu \geq 0.$$

À la limite ceci est encore vrai pour tout $\rho \in L^\infty(\Omega)$, en particulier $\rho \equiv 1$. Puisque $b \geq 0$, on a $\int (I - \lambda L)^{-1} b \, d\mu \leq \int b \, d\mu$, et donc

$$\int (I - \lambda L)^{-1} a \, d\mu \geq 0.$$

En faisant $\lambda \rightarrow 0$, on obtient

$$\int a \, d\mu \geq 0. \quad \square$$

Dans (2.3) et (2.4) on a utilisé la fonction sign_0 définie par

$$\text{sign}_0 \sigma = \begin{cases} \frac{\sigma}{|\sigma|} & \text{si } \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0. \end{cases}$$

Remarque 2. — Notons que (2.3) (resp. (2.4)) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi \in D_0, \forall \xi \in D([0, T[\times \mathbb{R}; D_0) \text{ (resp. } D([0, T[\times \mathbb{R})), \\ \xi \geq 0, \exists \alpha \in L^\infty(Q), \alpha \in \text{sign}(u - \psi) \text{ telle que} \\ \iiint \alpha F \, dt \, d\mu \, dy \geq 0 \quad \text{avec} \\ F = (u - \psi)(\xi_t + L_x \xi) + (f(u) - f(\psi))\xi_y + (w + L\psi)\xi \\ \text{(resp. } F = (u - \psi)\xi_t + (f(u) - f(\psi))\xi_y + (w + L\psi)\xi). \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Il est clair que (2.6) est impliquée par (2.3) (resp. 2.4). Pour prouver la réciproque, nous utilisons l'existence de $\rho \in D_0$ tel que $\rho > 0$ p.p. sur Ω (il suffit de prendre $\rho = (I - L)^{-1} \rho_0$ avec $\rho_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\rho_0 > 0$ p.p. sur Ω , cf. [Ar, Prop. 1.5]). Étant donné $\psi \in D_0$ et $\xi \in D([0, T[\times \mathbb{R}; D_0)$ (resp. $D([0, T[\times \mathbb{R}))$), $\xi \geq 0$, considérons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha_\lambda \in L^\infty(Q)$, $\alpha_\lambda \in \text{sign}(u - \psi - \lambda\rho)$ telle que l'inégalité intégrale de (2.6) en remplaçant ψ par $\psi + \lambda\rho$ soit satisfaite. Faisant $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda > 0$, on a $\alpha_\lambda \rightarrow \alpha_+ = \text{sign}_0(u - \psi_+)$ et donc l'inégalité intégrale de (2.6) est satisfaite avec $\alpha = \alpha_+$. De la même manière, elle est satisfaite avec $\alpha = \alpha_- = \text{sign}_0(u - \psi_-)$. Il est alors clair qu'elle est satisfaite avec $\alpha = \text{sign}_0(u - \psi)$. On a même

$$\iiint \text{sign}_0(u - \psi) F \, dt \, d\mu \, dy \geq \left| \iiint_{[u=\psi]} F \, dt \, d\mu \, dy \right|.$$

Remarque 3. — Notons aussi que (2.3) et (2.4) ne dépendent que des valeurs de f dans l'intervalle $[m_-, m_+]$ où $m_- = \inf_{\text{ess}} u$ et $m_+ = \sup_{\text{ess}} u$. En effet pour tout $\psi \in L^\infty(\Omega)$ et $\xi \in D(\mathbb{R}; L^1([0, T[\times \Omega))$,

$$\begin{aligned} \iiint_{\psi \notin [m_-, m_+]} \text{sign}_0(u - \psi) f(\psi) \xi_y \, dt \, d\mu \, dy = \\ = \int_{\psi < m_-} f(\psi) \, d\mu \iint \xi_y \, dt \, dy - \int_{\psi > m_+} f(\psi) \, d\mu \iint \xi_y \, dt \, dy = 0. \end{aligned}$$

Preuve du théorème 2. — Notons d'abord que l'on peut toujours supposer que f vérifie (1.1). En effet, étant donné $u \in C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ considérons $M > \|u\|_{L^\infty(Q)}$. Posons $c = \|f'\|_{L^\infty(-M, M)} + 1$ et définissons $\tilde{u}(t, x, z) = u(t, x, z - ct)$ qui est aussi dans $C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ avec $\tilde{u}(0) = u(0)$. Faisant le changement de variable $y = z - ct$ et utilisant la remarque 3, on voit que u vérifie (2.3) (resp. (2.4)) si et seulement si $\tilde{u}$ vérifie (2.3) (resp. (2.4)) correspondant à $\tilde{w}(t, x, z) = w(t, x, z - ct)$ et n'importe quelle fonction $\tilde{f}$ vérifiant $\tilde{f}(r) = f(r) + cr$ sur $[-M, M]$. Compte tenu du choix de c , on peut toujours choisir $\tilde{f}$ vérifiant (1.1).

Nous supposons donc maintenant que f vérifie (1.1) et adoptons les notations de la section 1. Considérons d'abord $u \in C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ vérifiant (2.4) et montrons que u vérifie (1.24). Ceci montrera que les estimations (1.25), (1.26) et (1.27) sont valables pour les solutions u de (2.4) et donc en particulier l'unicité de u vérifiant (2.4) et $u(0) = u_0$.

Il est clair que D_0 est un core pour L . Il suffit donc, pour prouver (1.24), de considérer

$$\bar{u} \in W^{1,1}(\mathbb{R}, L^1(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, D_0) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$$

et

$$\xi \in D(]0, T[), \quad \xi > 0.$$

On utilise la méthode de S. N. Kruskov [Kr] en dédoublant la variable y et considérant $u(t, x, y)$ et $\bar{u}(x, z)$. Étant donné $\rho(y, z) \in D(\mathbb{R}^2)$, $\rho \geq 0$, on a en utilisant (2.4) avec $\psi(x) = \bar{u}(x, z)$ et intégrant en z ,

$$\begin{aligned} & \iiint \text{sign}_0(u - \bar{u}) \{ (u - \bar{u})\xi' \rho + \\ & + (f(u) - f(\bar{u}))\xi \rho_y + (w + L_x \bar{u})\xi \rho \} dt d\mu dy \geq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

D'un autre côté, on a

$$\partial_z (\text{sign}_0(u - \bar{u})(f(u) - f(\bar{u}))) = -\text{sign}_0(u - \bar{u})\partial_z f(\bar{u})$$

puisque f est monotone, et donc

$$\int \text{sign}_0(u - \bar{u})(f(u) - f(\bar{u}))\xi \rho_z dz = \int \text{sign}_0(u - \bar{u})\partial_z f(\bar{u})\xi \rho dz. \quad (2.8)$$

Intégrant (2.8) en (t, x, y) et l'ajoutant à (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} & \iiint \text{sign}_0(u - \bar{u}) \{ (u - \bar{u})\xi' \rho + \\ & + (f(u) - f(\bar{u}))\xi(\rho_y + \rho_z) + (w + L_x \bar{u} - \partial_z f(\bar{u}))\xi \rho \} dt d\mu dy dz \geq 0. \end{aligned}$$

Suivant S. N. Kruskov [Kr] (cf. aussi [B1]), ceci montre que retournant à une seule variable y , pour tout $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, il existe $\alpha \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in \text{sign}(u - \bar{u})$ telle que l'on ait l'inégalité intégrale de (1.24).

Nous prouvons enfin qu'une bonne solution u de (1.23) vérifie (2.3). Puisque nous savons déjà d'après la remarque 1 que (2.3) implique (2.4), utilisant les propriétés des bonnes solutions développées dans la section 1, ceci achèvera la preuve du théorème.

Nous suivons la démonstration de la proposition 2.11 de [B1]. Notons d'abord que, compte tenu de la remarque 2, (2.3) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi \in D_0, \forall \xi \in D(\mathbb{R}; D_0), \xi \geq 0, \exists \alpha \in L^\infty(Q), \\ \alpha \in \text{sign}(u - \psi) \text{ telle que pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \iint |u(t) - \psi| \xi \, d\mu \, dy \leq \\ \leq \iint |u(s) - \psi| \xi \, d\mu \, dy + \int_s^t \iint \alpha \{ (u - \psi) L_x \xi + \\ + (f(u) - f(\psi)) \xi_y (w + L\psi) \xi \} \, d\tau \, d\mu \, dy. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Approchant w dans $L^1(Q)$ par des fonctions en escalier de $[0, T]$ dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$, il est clair qu'il suffit de prouver (2.9) pour une fonction w constante en temps à valeurs dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$; ce que nous supposons maintenant. Approchant u_0 , on peut également supposer $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$. La bonne solution $u(t)$ est alors limite dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ uniformément pour $t \in [0, T]$ des solutions $u^\varepsilon(t)$ du problème discrétisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t - \varepsilon)}{\varepsilon} + Au^\varepsilon(t) = w & \text{pour } t > 0 \\ u^\varepsilon(t) = u_0 & \text{pour } t \leq 0. \end{array} \right.$$

Étant donné $\psi \in D_0, \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; D_0), \xi \geq 0$, on a par définition de A

$$\begin{aligned} \frac{|u^\varepsilon(t) - \psi| - |u^\varepsilon(t - \varepsilon) - \psi|}{\varepsilon} &\leq \\ &\leq \text{sign}_0(u^\varepsilon(t) - \psi) \frac{u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = \\ &= \text{sign}_0(u^\varepsilon(t) - \psi) \{ (w + L\psi) + L_x(u^\varepsilon(t) - \psi) + \\ &\quad - \partial_y (f(u^\varepsilon(t)) - f(\psi)) \}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

D'après l'inégalité de Kato (cf. [Ar]) compte tenu de la symétrie de L , on a

$$\int \text{sign}_0(u^\varepsilon(t) - \psi) L_x(u^\varepsilon(t) - \psi) \xi \, d\mu \leq \int |u^\varepsilon(t) - \psi| L_x \xi \, d\mu.$$

On a aussi

$$\text{sign}_0(u^\varepsilon(t) - \psi) \partial_y (f(u^\varepsilon(t)) - f(\psi)) = \partial_y |f(u^\varepsilon(t)) - f(\psi)|$$

et donc, en multipliant (2.10) par ξ et intégrant, on obtient pour $(i-1)\varepsilon < s \leq i\varepsilon \leq (j-1)\varepsilon < t \leq j\varepsilon$,

$$\begin{aligned} & \iint |u^\varepsilon(t) - \psi| \xi \, d\mu \, dy \leq \\ & \leq \iint |u^\varepsilon(s) - \psi| \, d\mu \, dy + \int_{i\varepsilon}^{j\varepsilon} \iint \text{sign}_0(u^\varepsilon - \psi) \times \\ & \quad \times \{(w + L\psi)\xi + (u^\varepsilon + \psi)L_x\xi + (f(u^\varepsilon) - f(\psi))\xi_y\} \, d\tau \, d\mu \, dy. \end{aligned}$$

Passant à la limite, on obtient bien (2.9). $\square$

Remarque 4. — La preuve (sous l'hypothèse (1.1)) qu'une bonne solution u de (1.23) vérifie (2.3) s'applique de façon immédiate pour montrer que u est solution faible de

$$\partial_t u + \partial_y f(u) = L_x u + w$$

au sens

$$\left\{ \begin{aligned} & \iiint \{u(\xi_t + L_x \xi) + f(u)\xi_y + w\xi\} \, dt \, d\mu \, dy = 0, \\ & \forall \xi \in D([0, T[\times \mathbb{R}; D_0). \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

La preuve du théorème montre en fait que toute fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ vérifiant (2.3) (ou (2.4)) vérifie également (2.11). Notons que ceci peut se voir directement sous des hypothèses sur L , par exemple s'il existe une suite (ψ_n) dans D_0 telle que $\psi_n \rightarrow 1$ p.p. et $(L\psi_n)$ converge dans $L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. Par contre, nous ne voyons pas comment le montrer dans le cas général sans passer par l'intermédiaire des bonnes solutions.

3. Formule de représentation

Dans cette section, on suppose

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2. \quad (3.1)$$

Compte tenu du théorème 2, on peut associer au problème

$$\partial_t u + \partial_y f(u) = L_x u \quad (3.2)$$

un semi-groupe $(S_{f,L}(t))$ sur $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$: pour $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$,

$$u(t) = (S_{f,L}(t))u_0$$

est l'unique solution $u \in \mathcal{C}([0, \infty[; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ avec $u(0) = u_0$ vérifiant (2.3) (avec $w = 0$). Puisque $u_0 \rightarrow u(t)$ est une contraction dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ (cf. (1.25)), elle se prolonge par continuité en une contraction $S_{f,L}(t)$ partout définie sur $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

Dans le cas $f \equiv 0$, l'équation (3.2) se réduit à

$$\partial_t u = L_x u,$$

et on a pour tout $t \geq 0$:

$$(S_{0,L}(t)u_0)(x, y) = (e^{tL}u_0(\cdot, y))(x) \quad \text{p.p. } (x, y) \in (\Omega \times \mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Dans le cas $L = 0$, l'équation (3.2) se réduit à la loi de conservation

$$\partial_t u + \partial_y f(u) = 0, \quad (3.4)$$

et on a pour tout $t \geq 0$:

$$(S_{f,0}(t)u_0)(x, y) = (T(t)u_0(x, \cdot))(y) \quad \text{p.p. } (x, y) \in (\Omega \times \mathbb{R}), \quad (3.5)$$

où $T(t)$ est le semi-groupe sur $L^1(\mathbb{R})$ associé à (3.4) sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$. Pour $u_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $u(t) = T(t)u_0$ est l'unique solution $u \in \mathcal{C}([0, \infty[; L^1(\Omega)) \cap L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$ avec $u(0) = u_0$ vérifiant les conditions entropiques de Kruskov

$$\begin{cases} \iint \text{sign}_0(u - k) \{ (u - k)\xi_t + (f(u) - f(k))\xi_y \} dt dy \geq 0, \\ \forall k \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{D}([0, \infty[\times \mathbb{R}), \xi \geq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

THÉORÈME 3. — Pour tout $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ et $T > 0$

$$S_{f,L}(t)u_0 = L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{0,L}\left(\frac{t}{n}\right) S_{f,0}\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u_0 \quad (3.7)$$

uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve du théorème 3. — Supposons d'abord que f vérifie (1.1) et posons

$$G_f(t) = S_{0,L}(t)S_{f,0}(t).$$

Nous allons montrer que

$$\frac{u - G_t(t)u}{t} \longrightarrow Au \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \quad (3.8)$$

pour tout $u \in D(\mathbb{R}; D(L))$. Puisque $D(\mathbb{R}; D(L))$ est un core pour A et $S_{f,L}(t) = e^{-tA}$ (au sens de théorie non linéaire), (3.7) résultera du théorème de Brézis et Pazy [BP].

Fixons donc $u \in D(\mathbb{R}; D(L))$ et montrons (3.8). Pour cela notons d'abord que f étant de classe $\mathcal{C}^2$ et $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors d'après la méthode des caractéristiques, il existe $t_0 > 0$ telle que la fonction

$$(t, y) \in [0, t_0] \times \mathbb{R} \longrightarrow (T(t)u_0)(y).$$

Soit $\mathcal{C}^1$ à support compact; on aura donc alors évidemment

$$\frac{u_0 - T(t)u_0}{t} \longrightarrow \partial_y f(u_0) \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}). \quad (3.9)$$

Rappelons, puisque $T(t)$ est une contraction, que

$$\left\| \frac{u_0 - T(t)u_0}{t} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\partial_y f(u_0)\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (3.10)$$

Écrivons

$$\begin{aligned} \frac{u - G_f(t)u}{t} - Au &= \left(\frac{u - S_{0,L}(t)u}{t} + L_x u \right) + \\ &+ S_{0,L}(t) \left(\frac{u - S_{f,0}(t)u}{t} - \partial_y f(u) \right) + \\ &+ (S_{0,L}(t)\partial_y f(u) - \partial_y f(u)) \end{aligned}$$

et évaluons $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$, les normes dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ des trois termes du deuxième membre.

Puisque $(S_{0,L}(t))$ est continue dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $\lim_{t \rightarrow 0} I_3(t) = 0$. On a

$$I_2(t) \leq \int \left\| \frac{u(x, 0) - T(t)u(x, \cdot)}{t} - \partial_y f(u(x, \cdot)) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} d\mu(x),$$

et donc $\lim_{t \rightarrow 0} I_2(t) = 0$ grâce à (3.9) et (3.10). De même $\lim_{t \rightarrow 0} I_1(t) = 0$ puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^{tL}u(\cdot, y) - u(\cdot, y)}{t} \longrightarrow Lu(\cdot, y) \quad \text{dans } L^1(\Omega)$$

$$\left\| \frac{e^{tL}u(\cdot, y) - u(\cdot, y)}{t} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|Lu(\cdot, y)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Nous prouvons maintenant le résultat dans le cas général (c'est-à-dire sans supposer que f vérifie (1.1)). On peut toujours supposer $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$; soit $M > \|u_0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})}$. D'après la preuve du théorème 2, on a

$$(S_{f,L}(t)u_0)(x, y) = (S_{\tilde{f},L}(t)u_0)(x, y + ct), \quad (3.11)$$

où

$$c = \|f'\|_{L^\infty(-M, M)} + 1, \quad \tilde{f}(r) = f(r) + cr \text{ sur } [-M, M]$$

et $\tilde{f}$ vérifie (1.1) (on peut toujours choisir $\tilde{f}$ de classe C^2).

D'après la première partie de cette preuve, on a

$$S_{\tilde{f},L}(t)u_0 = L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{0,L}\left(\frac{t}{n}\right) S_{\tilde{f},0}\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u_0. \quad (3.12)$$

De (3.11) on déduit

$$(G_{\tilde{f}}(t)u_0)(x, y) = (G_f(t)u_0)(x, y - ct)$$

puisque $\|G_f(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})} < M$, on peut itérer pour obtenir

$$(G_{\tilde{f}}(t)^n u_0)(x, y) = (G_f(t)^n u_0)(x, y - nct).$$

Passant à la limite, (3.11) et (3.12) donnent (3.7). $\square$

Bibliographie

- [Ar] ARENDT (W.) . — *Kato's inequality : a characterization of generators of positive semigroups*, Proc. Roy. Irish Acad. **84 A**, n° 2 (1982), pp. 155-174.
- [B1] BÉNILAN (PH.) . — *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay (1972).
- [B2] BÉNILAN (PH.) . — *Sur un problème d'évolution non monotone dans $L^2(\Omega)$* , Publications Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon. Fascicule n° 2 (1975-76).
- [BC] BÉNILAN (PH.) et CRANDALL (M.-G.) . — *Completely accretive operators, in semi-group theory and evolution equations*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **135** (1991), pp. 41-75.
- [BCP] BÉNILAN (PH.), CRANDALL (M.-G.) et PAZY (A.) . — *Evolution equation governed by accretive operators*, À paraître.
- [BP] BRÉZIS (H.) et PAZY (A.) . — *Convergence and approximation of non linear semi-groups in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **9** (1972), pp. 63-74.
- [EVZ] ESCOBEDO (M.), VASQUEZ (J.-L.) et ZUAZUA (E.) . — *Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity*, À paraître.
- [Kr] KRUSKOV (S.N.) . — *First order quasilinear equation in several independent variables*, Mat. U.S.S.R. Sbornik **10** (1970), pp. 217-243.