ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DANIEL DUVERNEY

U-Dérivation

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 2, n^o 3 (1993), p. 323-335

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1993_6_2_3_323_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. II, n° 3, 1993

U-Dérivation(*)

DANIEL DUVERNEY(1)

RÉSUMÉ. — Nous généralisons la notion de dérivation et de q-dérivation en définissant, pour toute suite U d'éléments non nuls d'un corps commutatif K, la U-dérivée d'une série formelle à coefficients dans K. Nous démontrons l'analogue de la formule de Taylor dans ce cadre. Après avoir défini la notion de U-racine multiple d'un polynôme, nous cherchons à construire un polynôme admettant des U-racines données, d'ordres de multiplicité donnés. Nous résolvons ce problème dans le cas où U vérifie une relation de récurrence à coefficients dans K.

ABSTRACT. — We generalize the notion of derivation and q-derivation by defining, for every sequence U of non-zero elements of a commutative field K, the U-derivative of a formal series with coefficients in K. We prove an analogue of Taylor's formula in this frame. Then we define what the U-roots of a polynomial are, and we try to construct a polynomial with given U-roots, with given multiplicities. We solve this problem in case U is a linear recurrent sequence.

1. Introduction

La célèbre démonstration de la transcendance de e par C. Hermite, ainsi que plusieurs de celles qui l'ont suivie, notamment celle de P. Gordan [9], utilisent de manière essentielle le polynôme :

$$H_n(X) = X^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{k}(X - z_i)\right)^n . \qquad (1)$$

L'intérêt de ce polynôme est qu'il admet $z_1, z_2, \ldots, z_k$ comme racines, chacune avec l'ordre de multiplicité n ; ce qui implique, en vertu de la *formule de Taylor*, que $H_n(X + z_i)$ est de valuation n.

(*) Reçu le 12 mars 1992

(1) Lycée Baggio, Boulevard d'Alsace, F-59043 Lille Cedex (France)

En vue d'adapter la démonstration de P. Gordan à d'autres séries que celle de l'exponentielle, nous cherchons à généraliser cette propriété de H_n ; pour ce faire, nous nous plaçons dans l'algèbre $K[\![X]\!]$ des séries formelles à coefficients dans un corps commutatif arbitraire K, et nous commençons par définir ce qu'est la U-dérivation dans $K[\![X]\!]$ et étudier quelques-unes de ses propriétés. Il est à noter que cette notion n'est pas vraiment nouvelle : elle a été introduite par M. Ward dans [15] avec d'autres notations. Tous les résultats de la section 2 se trouvent également dans [15]. Cependant, il ne semble pas que l'étude des U-racines d'ordre k d'un polynôme (voir section 3) ait été développée jusqu'à présent.

DÉFINITION 1.— *Soit* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ *une suite d'éléments non nuls de* K. *Soit* $f \in K[\![X]\!]$ *avec* $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. *La* U*-dérivée de* f *est la série formelle définie par :*

$$\partial_U f(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n X^{n-1} .$$

Exemple 1.— Si $u_n = n$, alors $\partial_U = {}^{\mathrm{d}}/_{\mathrm{d}X}$, opérateur de dérivation sur l'anneau différentiel $K[\![X]\!]$ ([12]). L'hypothèse $u_n \neq 0$ exige ici que la caractéristique de K soit nulle.

Exemple 2.— Soit $q \in K$, avec $q^n \neq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit $u_n = (q^n - 1)/(q - 1)$. Alors

$$\partial_U f(X) = \frac{f(qX) - f(X)}{X(q-1)} .$$

Dans le cas où la série f est à coefficients dans $\mathbb{C}$, de rayon de convergence non nul, on reconnaît un cas particulier de l'opérateur de q-dérivation δ_q ([11] ; [7], p. 37). La dérivation ordinaire en est un cas limite, pour $q = 1$.

DÉFINITION 2.— *Soit* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ *une suite d'éléments non nuls de* K. *La série formelle*

$$\exp_U X = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{U^n}$$

avec $U^0 = 1$ *et* $U^n = u_1 u_2 \cdots u_n$ *pour* $n \geq 1$, *s'appelle la série* U*-exponentielle.*

Exemple 3. — Si $u_n = (q^n - 1)/(q-1)$ (voir exemple 2), on pose classiquement : $n_q! = \mathcal{U}^n$. On obtient la série q-exponentielle, bien connue ([7], [8]). Certaines de ses propriétés arithmétiques s'obtiennent à partir de sa table de Padé ([14], [4]).

Il est immédiat que, pour toute suite U d'éléments de K^*, $\exp_U X$ est le seul *invariant de* ∂_U.

2. La formule de Taylor

a) Nous définissons d'abord le *U-binôme de Newton*; soit :

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$$

une suite d'éléments non nuls de K. On pose

$$U_n^p = \frac{\mathcal{U}^n}{\mathcal{U}^p \mathcal{U}^{n-p}}, \quad 0 \leq p \leq n. \tag{2}$$

Exemple 4. — Lorsque $u_n = n$, on obtient les *coefficients binomiaux*

$$U_n^p = \binom{n}{p}.$$

Lorsque $u_n = (q^n - 1)/(q-1)$, on obtient les coefficients q-binomiaux :

$$U_n^p = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{n_q!}{p_q!(n-p)_q!} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-p+1}-1)}{(q^p-1)(q^{p-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

DÉFINITION 3. — *Le U-binôme de Newton d'ordre n est le polynôme de $K[X, Y]$ défini par*

$$(X \oplus Y)_U^n = \sum_{p=0}^{n} U_n^p X^p Y^{n-p}.$$

On peut substituer facilement $(X \oplus Y)_U$ à X dans une série formelle de $K[\![X]\!]$, pour obtenir une série formelle de $K[\![X, Y]\!]$; on procède ainsi : si $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on pose :

$$f(X \oplus Y)_U = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (X \oplus Y)_U^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_n U_n^p X^p Y^{n-p}. \tag{3}$$

La *série génératrice* de $(X \oplus Y)_U^n$ est alors donnée par la proposition 1 :

PROPOSITION 1. — *X, Y, Z étant des indéterminées :*

$$\exp_U\left[(X \oplus Y)_U Z\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X \oplus Y)_U^n Z^n}{U^n} = \exp_U(XZ)\exp_U(YZ)\,.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\exp_U(XZ)\exp_U(YZ) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{X^p}{U^p}\frac{Y^{n-p}}{U^{n-p}}\right)Z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{U^n}{U^p U^{n-p}}X^pY^{n-p}\right)\frac{Z^n}{U^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(X \oplus Y)_U^n Z^n}{U^n}\,, \quad \text{c.q.f.d.}\end{aligned}$$

Plus généralement, nous définissons, pour $j \geq 2$:

$$\begin{aligned}&(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_j)_U^n = \\ &\quad = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_j=n} \frac{U^n}{U^{k_1}U^{k_2}\ldots U^{k_j}} X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_j^{k_j}\,. \qquad (4)\end{aligned}$$

On vérifie que :

$$\left[(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{j-1})_U \oplus X_j\right]_U^n = (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{j-1} \oplus X_j)_U^n\,. \qquad (5)$$

D'où l'on déduit aisément :

$$\prod_{k=1}^{j}\exp_U(X_kZ) = \exp_U\left[(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_j)_U Z\right]\,. \qquad (6)$$

b) On a, pour la U-dérivation, la généralisation suivante de la *formule de Taylor* [15].

PROPOSITION 2. — *Soient X et Y deux indéterminées, et soit $f \in K[\![X]\!]$. Alors :*

$$f(X \oplus Y)_U = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial_U^n f(Y)}{U^n}X^n\,.$$

Démonstration.— Par linéarité, il suffit de démontrer cette formule lorsque $f(X) = X^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$\begin{cases} \partial_U^n f(X) = \dfrac{\mathcal{U}^k}{\mathcal{U}^{k-n}} X^{k-n} & \text{si } 0 \leq n \leq k \\ \partial_U^n f(X) = 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (X \oplus Y)_U^k &= \sum_{n=0}^{k} \frac{\mathcal{U}^k}{\mathcal{U}^n \mathcal{U}^{k-n}} X^n Y^{k-n} \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{\mathcal{U}^k}{\mathcal{U}^{k-n}} \frac{Y^{k-n}}{\mathcal{U}^n} X^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial_U^n f(Y)}{\mathcal{U}^n} X^n , \ \square \end{aligned}$$

3. U-racines d'ordre n d'un polynôme

DÉFINITION 4.— *Soit $P \in K[\![X]\!]$, et soit $a \in K$. On dit que a est une U-racine d'ordre de multiplicité n du polynôme P si :*

$$P(a) = \partial_U P(a) = \cdots = \partial_U^{n-1} P(a) = 0 \quad \textit{et} \quad \partial_U^n P(a) \neq 0 .$$

Nous cherchons à résoudre le problème suivant.

($\mathcal{P}$) La suite U étant donnée, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in K$ et $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ étant donnés, construire $P \in K[\![X]\!]$, admettant $z_1, z_2, \ldots, z_k$ comme U-racines, avec les ordres de multiplicité respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Ce problème peut s'étudier en résolvant un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients de P et dont les équations sont les relations $P(z_i) = \partial_U P(z_i) = \cdots = \partial_U^{n_i - 1} P(z_i) = 0$. Bien que cette méthode puisse conduire à des résultats arithmétiques, nous l'écartons ici car nous cherchons des propriétés plus profondes de la U-dérivation.

Nous n'obtiendrons cependant des résultats intéressants que dans le cas où U vérifie une relation de récurrence linéaire.

a) La première idée que l'on peut avoir est la suivante : le fait que $z_1, z_2, \ldots, z_k$ soient des racines d'ordre de multiplicité n de polynôme H_n défini en (1) résulte immédiatement de la formule donnant la *dérivée d'un produit*. Nous allons montrer que, malheureusement, une formule de ce type n'existe pas, en général, pour la U-dérivation.

DÉFINITION 5.— *Soit L un anneau intègre. On dit que $\Delta : L \to L$ est une pseudo-dérivée de L si $\Delta(x+y) = \Delta(x) + \Delta(y)$, $\forall\, x,\, y \in L$, et s'il existe $\varphi : L \to L$, $\varphi \neq 0$, telle que*

$$\forall\, x,\, y \in L, \quad \Delta(xy) = \Delta x \cdot y + \varphi(x) \cdot \Delta y .$$

THÉORÈME 1.— *Les seules U-dérivées de $K[\![X]\!]$ qui sont des pseudo-dérivées sont obtenues pour les suites :*

i) $u_n = \alpha n$ $(\alpha \in K^*)$ *et alors* $\varphi f(X) = f(X)$,

ii) $u_n = \alpha \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(\alpha \in K^*)$ *et alors* $\varphi f(X) = f(qX)$,

iii) $u_n = \alpha$ $(\alpha \in K^*)$ *et alors* $\varphi f(X) = f(0)$.

Démonstration.— Soit ∂_U une U-dérivée qui soit une pseudo-dérivée. Alors on a la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \partial_U(X \cdot X^n) = u_{n+1} X^n = u_1 X^n + \varphi(X) u_n X^{n-1} . \qquad (7)$$

Si u_n est non constante, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \neq u_1$. Alors en utilisant (7), on obtient :

$$(u_{n_0+1} - u_1) X^{n_0} = u_{n_0} \varphi(X) X^{n_0-1} ,$$

si bien que $\varphi(X) = qX$, $q \in K^*$. Reportant dans (7), nous obtenons :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_1 + q u_n ,$$

d'où $u_n = \alpha n + \beta$ (cas où $q = 1$) ou bien $u_n = \alpha q^n + \beta$ $(q \neq 1)$.

Dans le cas où $u_n = \alpha n + \beta$, reportant dans (7), on obtient :

$$(\alpha n + \alpha + \beta) X^n = (\alpha + \beta) X^n + (\alpha n + \beta) X^n .$$

Donc $\beta = 0$ et $u_n = \alpha n$.

Dans le cas où $u_n = \alpha q^n + \beta$, un calcul analogue montre que $\beta = -\alpha$.

Donc si ∂_U est une pseudo-dérivée, alors :

$$u_n = \alpha n \quad \text{ou} \quad u_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad u_n = \alpha\,, \quad \alpha \in K^*\,.$$

La réciproque (et le calcul de φ dans les trois cas) ne présente pas de difficulté, et le théorème 1 est démontré.

L'argument utilisé pour justifier le fait que $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sont racines d'ordre n de H_n ne peut donc s'utiliser, pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$, que dans le cas de la q-dérivation. On sait alors (et c'est d'ailleurs facile à vérifier) que le polynôme :

$$(X - z)_q^n = (X - z)(X - zq) \cdots (X - zq^{n-1}) \tag{8}$$

vérifie :

$$\delta_q (X - z)_q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} (X - z)_q^{n-1}\,,$$

et par suite z est U-racine d'ordre n de $(X - z)_q^n$. Dans ce cas, en posant $n = \operatorname{Max} n_k$:

$$H_{n_1, n_2, \ldots, n_k, q}(X) = X^{n-1} (X - z_1)_q^{n_1} (X - z_2)_q^{n_2} \cdots (X - z_k)_q^{n_k} \tag{9}$$

est la généralisation naturelle de H_n défini en (1) et résout le problème $(\mathcal{P})$.

b) Nous procédons autrement, et résolvons maintenant le problème $(\mathcal{P})$ dans le cas où U *vérifie une relation de récurrence linéaire* à coefficients dans K. Alors $u_n = \sum_{i=1}^N P_i(n) q_i^n$, où les q_i sont des éléments de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K, deux à deux distincts et $P_i \in \overline{K}[X]$, pour $i = 1, 2, \ldots, N$, avec $d_i = \deg P_i$.

Soit $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in K[\![X]\!]$. On suppose que f est de valuation supérieure ou égale à k. Calculons $\partial_U f$, $\partial_U^2 f$, $\ldots$, $\partial_U^{k-1} f$, en tenant compte du fait que $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$:

$$\partial_U f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_{i_1}(n) q_{i_1}^n X^{n-1}$$

$$\partial_U^2 f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_{i_1}(n) P_{i_2}(n-1) q_{i_1}^n q_{i_2}^{n-1} X^{n-2}$$

et, plus généralement, pour $1 \leq j \leq k-1$:

$$\partial_U^j f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_{i_1}(n) \cdots P_{i_j}(n-j+1) q_{i_1}^n \cdots q_{i_j}^{n-j+1} X^{n-j}.$$

Introduisons maintenant la *base des polynômes factoriels* $F_0(X) = 1$; $F_1(X) = X$; $F_2(X) = X(X-1)$; ... ; $F_n(X) = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

Alors $P_{i_1}(n) \ldots P_{i_j}(n-j+1)$ est un polynôme en n de degré $d_{i_1} + d_{i_2} + \cdots + d_{i_j}$, si bien qu'il existe des éléments $\beta_h(j, i_1, \ldots, i_j)$ de $\overline{K}$ tels que

$$\partial_U^j f(X) = \\ = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{h=0}^{d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_j}} \beta_h(j, i_1, \ldots, i_j) F_h(n) \times \\ \times q_{i_1}^n \ldots q_{i_j}^{n-j+1} X^{n-j}$$

Mais on a $F_h(n) = 0$ pour $n = 0, \ldots, h-1$ (si $h \geq 1$), donc :

$$\partial_U^j f(X) = \\ = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{h=0}^{d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_j}} \sum_{n=h}^{+\infty} a_n \beta_h(j, i_1, \ldots, i_j) F_h(n) \times \\ \times q_{i_1}^n \ldots q_{i_j}^{n-j+1} X^{n-j}$$

et par conséquent :

$$\partial_U^j f(X) = \\ = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{h=0}^{d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_j}} \alpha_h(j, i_1, \ldots, i_j) f^{(h)}(q_{i_1} \cdots q_{i_j} X) X^{h-j}$$

où $\alpha_h(j, i_1, \ldots, i_j) \in \overline{K}$, et $f^{(h)}$ désigne la dérivée (ordinaire) d'ordre h de f. Pour que a soit une U-racine d'ordre k de f, il *suffit donc* d'annuler tous les $f^{(h)}(q_{i_1} \cdots q_{i_j} X)$ pour $X = a$ et $h = 0, 1, \ldots, d_{i_1} + \cdots + d_{i_j}$.

Nous concluons donc par le théorème 2.

THÉORÈME 2. — *Supposons que U vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients dans K, avec $u_n = \sum_{i=1}^{N} P_i(n) q_i^n$, $q_i \in \overline{K}$, $P_i \in \overline{K}[X]$, $\deg P_i = d_i$.*

Soit $i_1, i_2, \ldots, i_j$ une combinaison (avec répétitions possibles) de j éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$; soit Γ_k l'ensemble de ces combinaisons pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Soient $z_1, \ldots, z_m$ des éléments de K, et $k_1, \ldots, k_m$ des entiers naturels non nuls. Soit E_{k_i} la famille de polynômes définie, pour $i = 1, 2, \ldots, m$, par :

$$E_{k_i} = \{(X - z_i)\} \cup \{(X - q_{i_1} z_i)^{d_{i_1}+1} \mid i_1 \in \Gamma_2\} \cup \cdots$$
$$\cdots \cup \{(X - q_{i_1} \cdots q_{i_{k_i-1}} z_i)^{d_{i_1}+\cdots+d_{i_{k_i-1}}+1} \mid (i_1, i_2, \ldots, i_{k_i-1}) \in \Gamma_{k_i}\}.$$

Alors le polynôme :

$$P(X) = X^{k-1} \operatorname*{PPCM}_{Q \in E_{k_1} \cup \cdots \cup E_{k_m}} [Q(X)], \quad k = \mathbf{Max}(k_1, k_2, \ldots, k_m),$$

admet $z_1, z_2, \ldots, z_m$ pour U-racines, avec les ordres de multiplicité respectifs $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Exemple 5. — Dans le cas où u_n est arithmético-géométrique, c'est-à-dire vérifie une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = qu_n + r \quad (q \in K^*), \tag{10}$$

il est facile de voir que le polynôme $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k, q}$ défini en (9) résout le problème $(\mathcal{P})$.

Exemple 6. — Considérons une suite U de la forme :

$$u_n = a_{0,n} + a_{1,n} n + a_{2,n} n^2 + \cdots + a_{d,n} n^d,$$

où les suites $A_i = \{a_{i,0}\,;\, a_{i,1}\,;\, \ldots\,;\, a_{i,n}\,;\, \ldots\}$ sont *périodiques* dans K. Une telle suite est appelée *polynôme arithmétique* par E. Ehrhart, qui en donne comme exemple *les entiers d'Euler* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ définis par

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - X^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k X^{\alpha_k}$$

où ε_k est la suite 1, −1, −1, +1, +1, périodique de période 4 à partir du rang 1 ([6]).

Notons T le plus petit commun multiple des périodes des A_i $(0 \leq i \leq d)$ et supposons $d \geq 1$. On appelle d le *degré* de U et T sa *période*.

Puisque $a_{i,n+T} = a_{i,n}$, il existe des élements $\alpha_{i,1}$; $\alpha_{i,2}$; ... ; $\alpha_{i,T}$ de $\overline{K}$ tels que :

$$a_{i,n} = \alpha_{i,1}\omega_1^n + \alpha_{i,2}\omega_2^n + \cdots + \alpha_{i,T}\omega_T^n ,$$

où $\Omega_T = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_T\}$ désigne le groupe des racines n-ièmes de 1 dans $\overline{K}$. Par suite :

$$u_n = R_1(n)\omega_1^n + R_2(n)\omega_2^n + \cdots + R_T(n)\omega_T^n ,$$

où $R_i \in \overline{K}[X]$ et l'un au moins des R_i est de degré d.

Pour que $z_1, z_2, \ldots, z_N$ soient des U-racines d'ordre k du polynôme P, il suffit donc que $P^{(h)}(\omega z_i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, N$, tout $\omega \in \Omega_T$ et tout $h = 0, 1, \ldots, d(k-1)$ (car Ω_T est stable par multiplication). Donc, on peut prendre :

$$P_k(X) = X^k\big[(X-\omega_1 z_1)\cdots(X-\omega_T z_1)(X-\omega_1 z_2)\cdots (X-\omega_T z_2)\cdots(X-\omega_1 z_N)\cdots(X-\omega_T z_N)\big]^{d(k-1)+1} .$$

Finalement, on peut conclure par la proposition 3.

PROPOSITION 3. — *Soit U un polynôme arithmétique de degré d, de période T. Alors :*

$$P_k(X) = X^{k+h}\left((X^T - z_1^T)(X^T - z_2^T)\cdots(X^T - z_N^T)\right)^{d(k-1)+1}$$

admet, pour tout $h \geq 0$, $z_1, z_2, \ldots, z_N$ comme U-racines, avec des ordres de multiplicité égaux à k.

4. U-dérivation et produit de Hadamard

Dans cette section, nous donnons une autre démonstration du théorème 2.

a) Nous introduisons le U-opérateur d'Euler dans $K[\![X]\!]$

$$\theta_U = X\partial_U . \tag{11}$$

Cet opérateur s'interprète très simplement comme un produit de Hadamard dans $K[\![X]\!]$. Rappelons que le produit de Hadamard $f \odot g$ de f et g est défini par

$$\begin{gathered}(f \odot g)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n X^n\,, \\ \text{si} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \quad \text{et} \quad g(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n\end{gathered} \tag{12}$$

(pour une étude algébrique du produit de Hadamard, voir [1], [2] ; pour une étude analytique [3], p. 20).

Posons $U(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n X^n$. On obtient immédiatement :

$$\theta_U f(X) = (U \odot f)(X)\,. \tag{13}$$

b) Prolongeons la suite U sur $\mathbb{Z}^-$, en posant

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}^-\,, \quad u_n = 0\,. \tag{14}$$

Posons également

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}\,, \quad (U+k)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+k} X^n\,. \tag{15}$$

(Par suite $U(X) = (U+0)(X)$).

Puis considérons m, $p \in \mathbb{N}$ et $f \in K[\![X]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\theta_U^m\big(X^p f(X)\big) &= \underbrace{U \odot U \odot U \cdots \odot U \odot}_{m \text{ fois}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^{n+p}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u_{n+p})^m X^{n+p} \\ &= X^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u_{n+p})^m X^n\,.\end{aligned}$$

En utilisant (15), nous obtenons :

$$\theta_U^m(X^p f) = X^p \theta_{U+p}^m f\,. \tag{16}$$

Donc :

$$\forall\ P \in K[X], \quad P(\theta_U)(X^p f) = X^p P(\theta_{U+p}) f\,. \tag{17}$$

Cette relation est bien connue dans le cas $u_n = n$ (dérivation ordinaire) et $u_n = (q^n - 1)/(q-1)$ (q-dérivation). Elle s'utilise par exemple pour trouver l'équation aux q-différences vérifiée par la série q-hypergéométrique ([11], §2 et 5).

c) Soit enfin $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. Alors

$$\partial_U^k f(X) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n u_n u_{n-1} \cdots u_{n-k+1} X^{n-k}\,.$$

Il en résulte :

$$X^k \partial_U^k f(X) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n u_n u_{n-1} \cdots u_{n-k+1} X^n\,.$$

D'où, grâce à (15) :

$$\begin{aligned} \forall\ k \in \mathbb{N} :\ X^k \partial_U^k f(X) &= U \odot (U-1) \odot \cdots \odot (U-k+1) \odot f(X) \\ &= \theta_U\, \theta_{U-1} \cdots \theta_{U-k+1} f(X)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Exemple 7. — Si la suite U vérifie une relation de récurrence linéaire, alors $(U-j)(X)$ est une fraction rationnelle qui se décompose dans $\overline{K}[X]$ sous la forme

$$(U-j)(X) = E_j(X) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_{ij}}{(X-q_i)^{d_i}} \tag{19}$$

(avec les notations de la section 3). Le polynôme E_j est de degré inférieur ou égal à j. Il n'intervient donc pas dans le produit de Hadamard de la formule (18), dès lors que la valuation de f est supérieure ou égale à k. Comme il est bien connu que le produit de Hadamard de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle dont les pôles sont les produits des pôles, on obtient une autre démonstration du théorème 2, et on comprend pourquoi les suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire jouent un rôle privilégié : *leur série génératrice $U(X)$ est une fraction rationnelle.*

Pour terminer, un point de terminologie : on peut penser que le terme " U-dérivation " prête à confusion, dans la mesure où une dérivation devrait toujours posséder une formule de Leibnitz ([5], p. 41).

On a vu que ce n'est presque jamais le cas pour la U-dérivation (théorème 1). Cependant, le terme " U-dérivation " s'impose à cause de la *formule de Taylor* et de la théorie des U-racines multiples. On sait que l'on peut, par exemple, introduire les dérivées successives d'un polynôme P grâce au développement de $P(X+a)$ ([13], p. 63; [10], p. 5). Comme le terme " U-dérivation " contient le préfixe " U- " et ne peut donc être confondu avec une autre dérivation, il me paraît devoir être conservé : on prendra seulement garde qu'il n'existe pas, en général, de formule pour la U-dérivée d'un produit.

Bibliographie

[1] Benghazou (B.) . — *Algèbre de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France **28** (1970), pp. 209-252.

[2] Bézivin (J.-P.) . — *Sur les propriétés arithmétiques du produit de Hadamard*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. XI, n° 1 (1990).

[3] Bieberbach (L.) . — *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag (1955).

[4] Borwein (P.) . — *Padé Approximants for the q-Elementary Functions*, Constr. Approx 4 (1988), pp. 391-402.

[5] Cohn (P.-M.) . — *Free Rings and their Relations*, Academic Press (1985).

[6] Ehrhart (E.) . — *Les entiers d'Euler*, Bulletin de l'A.P.M.E.P. **323** (1980), pp. 217-226.

[7] Exton (H.) . — *q-hypergeometric functions and applications*, Chichester (1983).

[8] Gaspar (G.) et Rahman (M.) . — *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge University Press (1990).

[9] Gordan (P.) . — *Transcendenz von e und π*, Math. Annalen **43** (1893), pp. 222-224.

[10] Hellegouarch (Y.) . — *Calcul différentiel galoisien*, Prépublication n° 42, Dépt de Math. et Mécanique, Université de Caen (1989).

[11] Jackson (F.-H.) . — *q-difference equations*, Amer. J. Math. **32** (1910), pp. 305-314.

[12] Kaplanski (I.) . — *An introduction to differential Algebra*, Hermann (1957).

[13] Van der Waerden (B. L.) . — *Modern Algebra*, Frederick Ungar Publishing Co. (1949).

[14] Walliser (R.) . — *Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion*, Arch. Math., vol. 44 (1985), pp. 59-64.

[15] Ward (M.) . — *A calculus of sequences*, Amer. J. Math. **58** (1936), pp. 255-266.