ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

SHANGQUAN BU

Deux remarques sur la propriété de Radon-Nikodym analytique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 2 (1990), p. 79-89

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_79_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

Deux remarques sur la propriété de Radon-Nikodym analytique

SHANGQUAN BU[1]

RÉSUMÉ. — On donne dans la première partie des résultats quantitatifs des résultats présentés dans [B]. Dans la deuxième partie, on montre que pour tout espace de Banach X, X a la super-propriété de Radon-Nikodym analytique si et seulement si pour tout espace mesurable $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ et pour tout $1 \leq p < \infty$, $L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}, X)$ l'a.

ABSTRACT. — We give in the first part the quantitative result of the result in [B]. In the second part, we show that for all Banach space X, X has the super analytic Radon-Nikodym property if, and only if for all measurable space $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ and for all $1 \leq p < \infty$, $L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}, X)$ has this property.

Les espaces de Banach considérés dans cette note sont tous des espaces de Banach complexes et cette note est constituée de deux parties indépendantes. La première partie peut être considérée comme une continuation de [B]. Dans [B], on a montré que pour tout espace de Banach X qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique, il existe une fonction analytique uniformément bornée $F : \mathbb{D} \to X$, telle que pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\limsup_{r,s\uparrow 1} \left\| F\big(re^{i\theta}\big) - F\big(se^{i\theta}\big) \right\| \geq 1 .$$

On va montrer dans la première partie de cette note que la fonction F dans [B] peut être choisie de façon qu'elle soit uniformément bornée par $1 + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ fixé (théorème 1). Comme conséquence, on va

[1] Shangquan Bu, U.F.R. de Mathématiques, Université Paris VII, Tour 45-55, 5^e^ étage, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
et Université de Wuhan, Département de Mathématiques, République Populaire de Chine

donner un analogue analytique d'un théorème de W. Schachermayer, A. Sersouri et E. Werner, affirmant pour tout espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique, l'existence d'un sous-ensemble C contenu dans la boule unité de X ayant toutes ses tranches PSH de diamètres uniformément proches 1 (corollaire 2). Dans la deuxième partie de cette note, on va présenter un résultat concernant la super-propriété de Radon-Nikodym analytique qui assure que pour tout espace de Banach ayant la super-propriété dé Radon-Nikodym analytique, $L^p(X)$ l'a aussi pour $1 \leq p < \infty$ (théorème 2).

Rappelons d'abord quelques notions qui seront utilisées dans la suite. Soient $\mathbb{D}$ la boule unité de $\mathbb{C}$, X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$; l'espace de Hardy $H_p(\mathbb{D}, X)$ est défini comme l'espace des fonctions analytiques $F : \mathbb{D} \to X$ vérifiant $\|F\|_{H_p(\mathbb{D},X)} < \infty$, où :

$$\|F\|_{H_p(\mathbb{D},X)} = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\int_0^{2\pi} \left\| F\left(re^{i\theta}\right) \right\|^p \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $1 \leq p < \infty$ et, pour $p = \infty$:

$$\|F\|_{H_\infty(\mathbb{D},X)} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \|F(z)\| \,.$$

Par définition, X a la propriété de Radon-Nikodym analytique si pour toute $F \in H_\infty(\mathbb{D}, X)$, F admet des limites radiales, i.e., $\lim_{r \uparrow 1} F(re^{i\theta})$ existe pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$ ([Buk-Da], voir aussi [E], [G-L-M], [G-M] et [G-M-S] pour des études récentes sur cette direction), on définit par ailleurs la même propriété avec n'importe quel espace de Hardy $H_p(\mathbb{D}, X)$ pour $1 \leq p < \infty$ ([Buk-Da]). Une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est dite pluri-sousharmonique si :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x + e^{i\theta} y) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \geq \varphi(x)$$

pour tout $x, y \in X$. On va utiliser seulement les fonctions pluri-sousharmoniques continues et bornées sur les bornés.

THÉORÈME 1.— *Soit X un espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction analytique $F : \mathbb{D} \to X$ uniformément bornée par $1 + \epsilon$ et $r_n \uparrow 1$ tels que pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$:*

$$\limsup_{n,m} \left\| F(r_n e^{i\theta}) - F(r_m e^{i\theta}) \right\| \geq 1 \,.$$

La démonstration du théorème 1 va utiliser le lemme suivant.

LEMME 1.— *Soit X un espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction analytique $F : \mathbb{D} \to X$ uniformément bornée, il existe un sous-ensemble mesurable A de $[0, 2\pi]$ de mesure non nulle et $r_n \uparrow 1$ tels que, pour tout presque tout $\theta \in A$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|F(r_n e^{i\theta})\right\| \leq 1 + \epsilon$$

et

$$\limsup_{n,m} \left\|F(r_n e^{i\theta}) - F(r_m e^{i\theta})\right\| \geq 1 .$$

Démonstration du lemme 1

Supposons que X n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique et soit $\epsilon > 0$, d'après [B] il existe une fonction analytique uniformément bornée $G : \mathbb{D} \to X$, une suite $r_n \uparrow 1$ et une fonction mesurable $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ vérifiant $\operatorname{ess\,inf} \|\eta\| = 1$ telles que :

$$\limsup_{n,m} \left\|G(r_n e^{i\theta}) - G(r_m e^{i\theta})\right\| = \eta(\theta) \tag{1}$$

pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$. Fixons $\delta > 0$, $\delta < 3\epsilon$, il existe donc un sous-ensemble $A \subseteq [0, 2\pi]$ de mesure non nulle tel que pour tout $\theta \in A$:

$$1 \leq \limsup_{n,m} \left\|G(r_n e^{i\theta}) - G(r_m e^{i\theta})\right\| \leq 1 + \delta .$$

On a donc que pour tout $\theta \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\lim_{m\to\infty} \left\|G(r_n e^{i\theta}) - G(r_m e^{i\theta})\right\| \leq 1 + 2\delta . \tag{2}$$

Soit $n(\theta)$ le plus petit entier n tel que (2) soit vrai, posons alors $A_n = \{\theta \in A : n(\theta) = n\}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} soit de mesure non nulle; d'autre part, G est uniformément continue sur le cercle de rayon r_{n_0} centré en 0, il existe donc une partition finie $(I_i)_{i\leq N}$ de $[0, 2\pi]$, telle que pour chaque $i \leq N$ et pour tout α, $\beta \in I_i$:

$$\left\|G(r_{n_0} e^{i\alpha}) - G(r_{n_0} e^{i\beta})\right\| \leq \delta .$$

On a évidemment $\bigcup_{i\leq N} I_i \,\mathrm{cap}\, A_{n_0} = A_{n_0}$, il existe donc $i_0 \leq N$ tel que $I_{i_0} \,\mathrm{cap}\, A_{n_0}$ soit de mesure non nulle. Fixons $\theta_0 \in I_{i_0} \,\mathrm{cap}\, A_{n_0}$, on a pour tout $\theta \in I_{i_0} \,\mathrm{cap}\, A_{n_0}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \left\| G(r_{n_0} e^{i\theta_0}) - G(r_m e^{i\theta}) \right\| \leq \\
&\quad \leq \lim_{m\to\infty} \left\| G(r_{n_0} e^{i\theta}) - G(r_m e^{i\theta}) \right\| + \left\| G(r_{n_0} e^{i\theta}) - G(r_{n_0} e^{i\theta_0}) \right\| \\
&\quad \leq 1 + 2\delta + \delta = 1 + 3\delta \leq 1 + \epsilon .
\end{aligned}$$

L'inégalité (1) et l'estimation ci-dessus montrent que le sous-ensemble $I_{i_0} \,\mathrm{cap}\, A_{n_0}$ et la fonction $G - G(r_{n_0} e^{i\theta_0})$ vérifient la conclusion du lemme. □

Démonstration du théorème 1

Soit X un espace de Banach qui n'a pas de propriété de Radon-Nikodym analytique et $\epsilon > 0$; d'après le lemme 1, pour tout $\epsilon^2 > \delta > 0$ fixé, il existe un sous-ensemble A de $[0\,,\,2\pi]$ de mesure non nulle, une fonction analytique G uniformément bornée et $r_n \uparrow 1$ tels que pour tout $\theta \in A$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| G(r_n e^{i\theta}) \right\| \leq 1 + \frac{\delta}{2}$$

et

$$\limsup_{n,m} \left\| G(r_n e^{i\theta}) - G(r_m e^{i\theta}) \right\| \geq 1 .$$

Notons $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} \|G(z)\|$, d'après le lemme 1 de [B], il existe une suite de points $(x_k)_{k\geq 1}$ de $[0\,,\,2\pi]$, telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{x_k}$ soit de mesure 1, où A_x est l'ensemble $x + A$ de $\mathbb{R}$ modulo 2π. Posons :

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_{x_1} \\
B_2 &= A_{x_2} \setminus B_1 \\
&\vdots \\
B_k &= A_{x_k} \setminus \bigcup_{h\leq k-1} B_h \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Soit $(\delta_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres strictement positifs avec

$$\sum_{k\geq 1} \delta_k \leq \frac{\delta}{2M} \,;$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k \in L^1(\mathbb{T})$ par :

$$f_k(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in B_k \\ \delta_k & \text{si non.} \end{cases}$$

Puisque $\log f_k$ est intégrable, il existe une fonction extérieure h_k telle que $|h_k(e^{i\theta})| = f_k(e^{i\theta})$ pour presque tout $\theta \in [0\,,\,2\pi]$; posons alors :

$$H(re^{i\theta}) = \sum_{k\geq 1} h_k(re^{i\theta})\, G(re^{i(\theta - x_k)})\,,$$

avec la même démonstration présentée dans [B], on peut montrer que H est une fonction analytique et que pour presque tout $\theta \in [0\,,\,2\pi]$:

$$\limsup_{n,m} \left\| H(r_n e^{i\theta}) - H(r_m e^{i\theta}) \right\| \geq 1 - \delta$$

et

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \|H(z)\| \leq 1 + \delta\,.$$

La fonction ${}^{H}\!/(1-\delta)$ vérifie donc la conclusion du théorème 1. □

Le théorème 1 permet d'améliorer des résultats présentés dans [B], les démonstrations sont les mêmes, mais puisque maintenant la fonction analytique est bien majorée, on a des conséquences quantitatives :

COROLLAIRE 1.— *Soit X un espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction analytique $F : \mathbb{D} \to X$ uniformément bornée par 1 telle que pour presque tout $(\alpha, \beta) \in [0\,,\,2\pi]^2$:*

$$\limsup_{r,s\uparrow 1} \left\| F(re^{i\alpha}) - F(se^{i\beta}) \right\| \geq \frac{1}{2} - \epsilon\,.$$

Le résultat suivant peut être considéré comme un analogue analytique d'un résultat dû à W. Schachermayer, A. Sersouri et E. Werner qui affirme pour un espace de Banach X qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym, l'existence d'un sous-ensemble fermé borné convexe de X de diamètre 1 et tel que chaque tranche linéaire non vide de C est de diamètre uniformément proche de 1 ([S-S-W]).

COROLLAIRE 2.— *Soit X un espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-ensemble contenu dans la boule unité de X, tel que pour toute fonction pluri-sousharmonique continue φ sur X bornée sur les bornés avec $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} C$ non vide, $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} C$ est de diamètre plus grand que $1 - \epsilon$.*

Démonstration du corollaire 2

Soit X un espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique et $\epsilon > 0$; soit $C = {}^{F(\mathbb{D})}/_{(1+\epsilon)}$, où F est une fonction analytique vérifiant la conclusion du théorème 1, alors les arguments présentés dans [B] (voir aussi [G-L-M]) permettent de terminer la démonstration du corollaire.

□

Le corollaire suivant peut être considéré comme un analogue analytique d'un résultat dû à W.J. Davis et R.R. Phelps ([D-P]) :

COROLLAIRE 3.— *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, alors X a la propriété de Radon-Nikodym analytique si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ et pour toute quasi-norme q sur X équivalente à $\|\cdot\|$ avec $q(x) \leq \|x\| \leq 2q(x)$ pour tout $x \in X$, la boule unité de (X, q) est $(1-\epsilon)$-PSH-dentable, c'est-à-dire, il existe une fonction φ pluri-sousharmonique continue sur X bornée sur les bornés telle que $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap}\{x \in X\ ,\ q(x) < 1\}$ est non vide et de diamètre plus petit que $1 - \epsilon$.*

Démonstration du corollaire 3

La condition est clairement nécessaire, montrons qu'elle est aussi suffisante. Supposons que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach qui n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique et soit $\epsilon > 0$; soit $F : \mathbb{D} \to X$ une fonction analytique vérifiant la conclusion du théorème 1, posons $C = {}^{F(\mathbb{D})}/_{(1+\epsilon)}$, on a alors que pour toute fonction pluri-sousharmonique continue φ sur X bornée sur les bornés avec $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} C \neq \emptyset$, $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} C$ est de diamètre plus grand que $1 - \epsilon$ pour la norme $\|\cdot\|$. Posons $B_1 = B + \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda C$, où B est la boule unité de X, B_1 est alors la boule unité d'une quasi-norme q sur X équivalente à $\|\cdot\|$ avec $q(x) \leq \|x\| \leq 2q(x)$ pour tout $x \in X$. Supposons que φ est une fonction pluri-sousharmonique continue sur X bornée sur les bornés et que $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} B_1 \neq \emptyset$, il existe alors $x \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ et $y \in C$ tels que $\varphi(x + \lambda y) > 0$. En utilisant le fait que :

$$\varphi(x + \lambda y) \leq \int_0^{2\pi} \varphi(x + e^{i\theta} y) P_\lambda(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,,$$

où P_λ est le noyau de Poisson au point λ, on en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{T}$ tel que $\varphi(x + e^{i\theta}y) > 0$. Soit $\psi : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(z) = \varphi(x + e^{i\theta}z)$, ψ est alors une fonction pluri-sousharmonique continue sur X bornée sur les bornés et $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} B_1 \supseteq x + e^{i\theta}\{\{\psi > 0\} \operatorname{cap} C\} \neq \emptyset$, $\{\varphi > 0\} \operatorname{cap} B_1$ est donc de diamètre plus grand que $1 - \epsilon$ pour la norme $\|\cdot\|$. Ce qui termine la démonstration du corollaire 3. □

On va présenter dans la deuxième partie de cette note, un résultat lié à la super-propriété de Radon-Nikodym analytique. Par définition, un espace de Banach X a la super-propriété de Radon-Nikodym analytique, si tout espace de Banach finiment représentable dans X a la propriété de Radon-Nikodym analytique. Il est bien connu que les espaces de Banach finiment représentables dans X sont caractérisés par le fait qu'ils sont des sous-espaces des ultraproduits de X (voir par exemple [Be]), et puisque la propriété de Radon-Nikodym analytique est une propriété héréditaire, pour montrer qu'un espace de Banach a la super-propriété de Radon-Nikodym analytique, il suffit de montrer que tous ses ultraproduits ont cette propriété. On renvoie à [Be] pour des discussions concernant la notion d'ultraproduit. Nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.— *Soit X un espace de Banach. Alors X a la super-propriété de Radon-Nikodym analytique si et seulement si pour tout espace mesurable (Ω, Σ, μ), pour tout $1 \leq p < \infty$, $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ l'a.*

Pour montrer ce résultat, on va utiliser un résultat dû à R. Haydon, M. Lévy et Y. Raynaud. Rappelons d'abord quelques notions nécessaires. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesurable, X un espace vectoriel et $\left(\|\cdot\|_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ une famille de fonctions sur X, on dit que $\left(\|\cdot\|_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ est une famille mesurable de normes sur X si $\|\cdot\|_\omega$ est une norme sur X pour tout $\omega \in \Omega$ et si l'application $\omega \to \|x\|_\omega$ est mesurable pour tout $x \in X$. Étant donnée une telle famille, on définit X_ω comme la complétion de $\left(X\,,\,\|\cdot\|_\omega\right)$, on dit alors que $\left(X_\omega\,,\,\|\cdot\|_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ est une famille mesurable d'espaces de Banach. Soit f une fonction qui associe à chaque $\omega \in \Omega$ un élément $f(\omega) \in X_\omega$, on dit que f est mesurable si, pour tout $A \in \Sigma$ avec $\mu(A) < \infty$, il existe une suite de fonctions simples $\left(h_n\right)_{n\geq 1}$ à valeurs dans X telle que $\|f(\omega) - h_n(\omega)\|_\omega \to 0$ quand $n \to \infty$ pour presque tout $\omega \in A$. Pour une telle fonction, on peut montrer que la fonction $\omega \to \left\|f(\omega)\right\|_\omega$ est une fonction mesurable au sens usuel. Pour $1 \leq p < \infty$,

$$\left(\int_\Omega^\oplus X_\omega \, \mathrm{d}\mu(\omega)\right)_p$$

est l'espace des fonctions mesurables f qui associent à chaque $\omega \in \Omega$ un élément $f(\omega) \in X_\omega$ avec $\|f\|_p < \infty$, où :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_\omega^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Avec la norme $\|\cdot\|_p$, cet espace devient un espace de Banach, qui est un des exemples les plus concrets des intégrales directes introduites dans [H-L-R]. Pour plus de détails concernant cette notion, consulter [H-L-R]. On va utiliser le théorème suivant.

THÉORÈME 2.— ([H-L-R], voir aussi [H]) *Soient X un espace de Banach, (Ω, Σ, μ) un espace mesurable, $1 \le p < \infty$ et $\mathcal{V}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. Alors il existe un espace mesurable $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ et une famille mesurable d'espaces de Banach $(Y_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$ tels que $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)^{\mathbb{N}}/\mathcal{V}$ est isométrique à :*

$$\left(\int_{\Omega_1}^{\oplus} Y_\omega \,\mathrm{d}\mu_1(\omega)\right)_p$$

et pour chaque $\omega \in \Omega$, Y_ω est finiment représentable dans X.

Démonstration du théorème 2

La condition est clairement suffisante, montrons qu'elle est aussi nécessaire. Fixons $1 \le p < \infty$ et supposons que X a la super-propriété de Radon-Nikodym analytique, d'après le théorème de R. Haydon, M. Lévy et Y. Raynaud présenté ci-dessus, il suffit de montrer que pour tout espace mesurable (Ω, Σ, μ) et pour toute famille d'espaces de Banach $(X_\omega)_{\omega \in \Omega}$ telle que pour chaque $\omega \in \Omega$, X_ω est finiment représentable dans X,

$$Z = \left(\int_{\Omega_1}^{\oplus} X_\omega \,\mathrm{d}\mu(\omega)\right)_p$$

a la propriété de Radon-Nikodym analytique. Prenons $F : \mathbb{D} \to Z$ une fonction analytique uniformément bornée par 1, puisque F est à image séparable, on peut supposer que l'espace mesurable (Ω, Σ, μ) est σ-fini. Soit $F(z)(\omega) = \sum_{n \ge 0} a_n(\omega) z^n$, on a alors $\|a_n\| \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; soit $R < 1$, on a $\sum_{n \ge 0} \|a_n\| R^n < \infty$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n \ge 0} \left(\int_\Omega R^{np} \|a_n(\omega)\|_\omega^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty ;$$

par l'inégalité de Minkowski, on a donc :

$$\int_{\Omega}\Big(\sum_{n\geq 0}\left\|a_n(\omega)\right\|_{\omega}R^n\Big)^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty\,;$$

ceci entraîne que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $z \to F(z)(\omega)$ est une fonction analytique sur $\{z \in \mathbb{D} : |z| < R\}$ et puisque $0 < R < 1$ est arbitraire, on en déduit qu'elle est analytique sur $\mathbb{D}$. D'autre part :

$$\sup_{0\leq r<1}\int_0^{2\pi}\int_{\Omega}\left\|F(re^{i\theta})(\omega)\right\|_{\omega}^p \mathrm{d}\mu(\omega)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} =$$

$$= \sup_{0\leq r<1}\int_{\Omega}\int_0^{2\pi}\left\|F(re^{i\theta})(\omega)\right\|_{\omega}^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty\,;$$

remarquons que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $z \to \left\|F(z)(\omega)\right\|_{\omega}^p$ est sousharmonique sur $\mathbb{D}$, donc pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^{2\pi}\left\|F(re^{i\theta})(\omega)\right\|_{\omega}^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

est croissante quand $r \uparrow 1$. On a donc :

$$\int_0^{2\pi}\left(\sup_{0\leq r<1}\int_{\Omega}\left\|F(re^{i\theta})(\omega)\right\|_{\omega}^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty\,.$$

Posons alors :

$$f(\omega, z) =: F(z)(\omega)$$

$$h(\omega) =: \sup_{0\leq r<1}\int_0^{2\pi}\left\|f\left(\omega\,,\,re^{i\theta}\right)\right\|_{\omega}^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,.$$

h est donc un élément de $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Puisque pour chaque $\omega \in \Omega$, X_ω est finiment représentable dans X et que X a la super-propriété de Radon-Nikodym analytique, X_ω a la propriété de Radon-Nikodym analytique; on en déduit que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\lim_{r\uparrow 1} f(\omega, re^{i\theta})$ existe dans X_ω pour presque tout $\theta \in [\,0\,,\,2\pi\,]$ (remarquons que $h \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ nous donne que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $z \to f(\omega, z)$ est un élément de $H_1(\mathbb{D}, X_\omega)$). Soit $r_n \uparrow 1$, en utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\int_0^{2\pi}\left\|F(r_ne^{i\theta}) - F(r_me^{i\theta})\right\|^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\Omega}\left\|F(r_ne^{i\theta})(\omega) - F(r_me^{i\theta})(\omega)\right\|_{\omega}^p \mathrm{d}\mu(\omega)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\Omega}\left\|f(\omega\,,\,r_ne^{i\theta}) - f(\omega\,,\,r_me^{i\theta})\right\|_{\omega}^p \mathrm{d}\mu(\omega)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

$$= \int_{\Omega}\int_0^{2\pi}\left\|f(\omega\,,\,r_ne^{i\theta}) - f(\omega\,,\,r_me^{i\theta})\right\|_{\omega}^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\mathrm{d}\mu(\omega)\,.$$

Remarquons que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \left\| f(\omega\,,\, r_n e^{i\theta}) - f(\omega\,,\, r_m e^{i\theta}) \right\|_\omega^p \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \leq 2^p h(\omega)$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$; on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour déduire que, quand $n, m \to \infty$,

$$\int_0^{2\pi} \left\| F(r_n e^{i\theta}) - F(r_m e^{i\theta}) \right\| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \to 0\,.$$

Ceci montre que $\{\theta \to F(r_n e^{i\theta})\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, Z)$, elle converge donc dans $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, Z)$, la fonction F admet donc des limites radiales presque sûrement sur le tore (puisque F est analytique). Ceci montre la nécessité de la condition et termine ainsi la démonstration du théorème 2. □

Remerciements :

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur B. Maurey pour des discussions et des aides pendant la préparation de ce travail.

Références

[Be] Beauzamy (B.) .— *Introduction to Banach spaces and their geometry,* North Holland, Collection "Notas de Mathematica".

[B] Bu (S.) .— *Quelques remarques sur la propriété de Radon-Nikodym analytique,* C.R. Acad. Sci. Paris **306** (1988) pp. 757-760.

[Buk-Da] Bukhvalov (A.) et Danilevich (A.A.) .— *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach space,* Mat. Zametki **31** (1982) pp. 203-214; English Translation : Math. Notes **31** (1982) pp. 104-110.

[D-P] Davis (W.J.) et Phelps (R.R.) .— *The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974) pp. 119-122.

[E] Edgar (G.A.) .— *Analytic martingale convergence,* Journal of Funct. Anal. **69** (1986) pp. 268-280.

[G-L-M] Ghoussoub (N.), Lindenstrauss (J.) et Maurey (B.) .— *Analytic martingales and plurisubharmonic barriers in complex Banach spaces,* Contemporary Math., vol. 85 (1989) pp. 111-130.

[G-M] GHOUSSOUB (N.) et MAUREY (B.) .— *Plurisubharmonic martingales and barriers in complex quasi-Banach spaces,*
Annales de l'Institut Fourier, 39, **4** (1989) pp. 1007-1060.

[G-M-S] GHOUSSOUB (N.), MAUREY (B.) et SCHACHERMAYER (W.) .— *Pluriharmonically dentable complex Banach spaces,*
Journal für die reine und ang. Math., 402, **39** (1989) pp. 76-127.

[H] HAYDON (R.) .— *Random Banach spaces and their integrals,*
Longhorn. Notes. The University of Texas at Austin. Funct. Anal. Seminar (1985-1986)

[H-L-R-] HAYDON (R.), LÉVY (M.) et RAYNAUD (Y.) .— *Randomly normed spaces,*
À paraître.

[S-S-W] SCHACHERMAYER (W.), SERSOURI (A.) et WERNER (E.) .— *Moduli of non-dentability and the Radon-Nikodym property in Banach spaces,*
Israel J. Math., **65** (1989) pp. 225-257.