ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

THIERRY GALLOUËT

Équations elliptiques semilinéaires avec, pour la non linéarité, une condition de signe et une dépendance sous quadratique par rapport au gradient

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 9, nº 2 (1988), p. 161-169

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_2_161_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n°2, 1988

Equations elliptiques semilinéaires avec, pour la non linéarité, une condition de signe et une dépendance sous quadratique par rapport au gradient

THIERRY GALLOUËT[1]

RÉSUMÉ. — Soient Ω un ouvert borné de $R^N (N \geq 1)$ et A un opérateur de 2ème ordre, uniformément elliptique, avec des coefficients bornés. Soit γ : $\Omega \times R \times R^N \to R$ une fonction de Carathéodory telle que $\gamma(x, s, p)\ s \geq 0$ (condition de signe) et ayant une croissance sous quadratique par rapport à la variable p. On montre que pour toute fonction intégrable f, il existe une solution de $Au + \gamma(., u, \nabla u) = f$ dans Ω, $u = 0$ sur la frontière de Ω.

ABSTRACT. — Let Ω be a bounded domain of $R^N (N \geq 1)$ and A a second order operator, uniformly elliptic, with bounded coefficients. Let $\gamma : \Omega \times R \times R^N \to R$ be a caratheodory function such that $\gamma(x, s, p,)s \geq 0$ (sign condition) and with a subquadratic growth with respect to the variable p. We prove, for all integrable function f, the existence of u, solution of $Au + \gamma(., u, \nabla u) = f$ in Ω, $u = 0$ on the boundary of Ω.

1. Introduction

Dans toute la suite on suppose que Ω est un ouvert borné de R^N, $(N \geq 1)$, avec une frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. Soit A un opérateur du 2ème ordre, sous forme divergence, uniformément elliptique, avec des coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, c'est a dire :

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{x_j} \left(a_{ij}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

[1] Département de Mathématiques, Université de Chambéry B.P. 1104, 73011 Chambéry Cédex

$$\exists \alpha > 0, \ t.q. \\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\cdot)\xi_i\xi_j \geq \alpha \ |\xi|^2, \ \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in R^N, \ p.p. \text{ dans } \Omega \tag{2}$$

$$\exists \beta > 0, \ t.q. \\ \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \beta \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, N\}. \tag{3}$$

Soit $\gamma : \Omega \times R \times R^N \to R$ une fonction telle que

$$\gamma \text{ est mesurable en } x \in \Omega \text{ (pour tout } (s,p) \in R \times R^N) \text{ continue en } \\ (s,p) \in R \times R^N \text{ (pour presque tout } x \in \Omega) \tag{4}$$

$$\gamma(x,s,p) \ s \geq 0, \ \forall (s,p) \in R \times R^N, p.p. \text{ en } x \in \Omega \tag{5}$$

$$\exists 0 \leq \delta < 2 \ t.q. \\ \big|\gamma(x,s,p)\big| \leq b\big(x,|s|\big)|p|^\delta + c\big(x,|s|\big), \forall (s,p) \in R \times R^N, \ p.p. \text{ en } x \in \Omega \\ \text{avec } b(\cdot,t) \in L^{\frac{2}{2-\delta}}_{\text{loc}}(\Omega), \text{ pour tout } t \in R^+, \text{ et } b, c \\ \text{croissantes par rapport à } t \in R^+ \text{ (et } \geq 0) \tag{6}$$

On montre au §II le résultat suivant :

THÉORÈME .— *On suppose (1) - (6) satisfaites. Alors, pour tout $f \in L^1(\Omega)$, il existe u t.q.*

$$Au + \gamma(\cdot, u, \nabla u) = f \ dans \ \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in W_o^{1,p}(\Omega), \forall p \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right[, \gamma(\cdot, u, \nabla u) \in L^1(\Omega), \tag{7}$$

$Au + \gamma(\cdot, u, \nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ signifie que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial u_i} \ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \ dx + \int_\Omega \gamma(x,u,\nabla u)\phi dx = \int_\Omega f \phi dx, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque 1.— Si A a des coefficients réguliers, et si γ ne dépend pas de ∇u ce théorème est donné dans [1]; c'est alors une extension d'un résultat de Brezis-Strauss [2].

Remarque 2.— Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, c'est-à-dire, par exemple, si $f \in L^P(\Omega)$ avec un $p > 1$ pour $N = 2$, ou avec $p = \frac{2N}{N+2}$ pour $N \geq 3$, le théorème est alors essentiellement dans BOCCARDO - MURAT - PUEL [3] (voir aussi DEL

VECCHIO [4]), et il est possible d'avoir $\delta = 2$ dans l'hypothèse (6). Dans le cas $f \in H^{-1}(\Omega)$ on a de plus $u \in H_o^1(\Omega)$ et $u.\gamma(.,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$. On peut aussi noter que si $\gamma \equiv 0, f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème a une structure variationnelle, ceci n'est pas vrai pour $f \in L^1(\Omega)$ $(N > 1)$.

Remarque 3. — Si $N = 1$, le théorème est vrai sans aucune restriction sur la croissance de γ par rapport à p. En fait, au lieu de (6), on a seulement besoin de $\sup\left\{|\gamma(.,s,p)|, |s| \leq t, |p| \leq q\right\} \in L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $t, q \in R^+$. Ceci est dû au fait que, pour $N = 1$, les eventuelles solutions de (7) sont bornées a priori dans $W^{1,\infty}(\Omega)$. Pour $n \geq 2$, c'est un problème ouvert de savoir si l'hypothèse $\delta < 2$ est nécessaire pour le théorème.

2. Démonstration du théorème

La démonstration du théorème se fait en 3 étapes. Dans la 1ère étape on résout un problème approché, dans le 2ème on obtient des estimations sur les solutions approchées. Ces estimations nous permettent, dans la 3ème étape, de passer à la limite. On se donne un opérateur A satisfaisant (1) - (3); une fonction γ satisfaisant (4) - (6) et une fonction $f \in L^1(\Omega)$.

Pour tout $n \in N^*$ on pose

$$\begin{cases} \gamma_n(x,t,p) = \gamma(x,t,p) \text{ si } \left|\gamma(x,t,p)\right| \leq n \\ \gamma_n(x,t,p) = n \; sgn\big(\gamma(x,t,p)\big) \text{ si } \left|\gamma(x,t,p)\right| > n, \end{cases} \tag{8}$$

et,

$$\begin{cases} f_n(x) = f(x) & \text{si } \left|f(x)\right| \leq n \\ f_n(x) = 0 & \text{si } \left|f(x)\right| > n \end{cases} \tag{9}$$

2.1. — Résolution d'un problème approché

On montre ici que pour tout $n \in N^*$ il existe $u_n \in H_o^1(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega \gamma_n(x,u_n,\nabla u_n)\phi dx \\ &= \int_\Omega f_n \phi dx \qquad \forall \phi \in H_o^1(\Omega) \end{aligned} \tag{10}$$

Ce résultat est connu. Dans ce cas simple on peut le démontrer en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Nous donnons ici cette démonstration.

On note $G : H^{-1}(\Omega) \to H_o^1(\Omega)$ l'opérateur de Green associé à A. Pour $v \in H^{-1}(\Omega)$, $w = Gv$ est donc l'unique solution de

$$\begin{aligned}&w \in H_o^1(\Omega)\\&\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx =< v, \phi >_{H^{-1},H_o^1}, \forall \phi \in H_o^1(\Omega)\end{aligned} \tag{11}$$

On note $F_n : H_o^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, l'opérateur défini par

$$F_n(v) = f_n - \gamma_n(.,v,\nabla v), \text{ pour } v \in H_o^1(\Omega) \tag{12}$$

Compte tenu de l'injection naturelle de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, l'opérateur $G \circ F_n$ envoie $H_o^1(\Omega)$ dans $H_o^1(\Omega)$. La recherche de $u_n \in H_o^1(\Omega)$, solution de (10), est ainsi ramené à la recherche de u_n tel que

$$u_n \in H_o^1(\Omega),\ u_n = G \circ F_n(u_n). \tag{13}$$

L'existence d'un point fixe de $G \circ F_n$ est une conséquence immédiate du théorème du point fixe de Schauder. En effet $G \circ F_n$ est continu, car G et F_n sont continus, et $G \circ F_n\big(H_o^1(\Omega)\big)$ est relativement compact (dans $H_o^1(\Omega)$), car $F_n\big(H_o^1(\Omega)\big)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc relativement compact dans $H^{-1}(\Omega)$ (d'après le théorème de Rellich).

Ceci achève le §2.1, nous avons montré l'existence de $u_n \in H_o^1(\Omega)$ solution de (10).

2.2. — Estimations a priori

Nous cherchons ici des estimations sur u_n, solution de (10).

Soit $p \in C^1(R,R)$ t.q. $p' \in L^\infty(R)$, $p' \geq 0$, $p(0) = 0$. On a alors, pour tout $v \in H_o^1(\Omega)$, $p(v) \in H_o^1(\Omega)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\big(p(v)\big) = p'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ p.p. .

En prenant $\phi = p(u_n)$ dans (10), on a donc

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\, p'(u_n)dx + \int_\Omega \gamma_n(x,u_n,\nabla u_n)p(u_n)dx\\&= \int_\Omega f_n p(u_n)dx\end{aligned} \tag{14}$$

Dans (14) on prend $p = p_i$, avec, pour $t \in R$ fixé,

$$\begin{array}{ll} p_i(s) \uparrow 1 & \text{si } s > t, \text{ quand } i \to +\infty \\ p_i(s) = 0 & \text{si } -t \le s \le t, \text{ pour tout } i \\ p_i(s) \downarrow -1 & \text{si } s < -t, \text{ quand } i \to +\infty \end{array}$$

On en déduit, quand $i \to +\infty$

$$\int_{\{|u_n|>t\}} |\gamma_n(x, u_n, \nabla u_n)| dx \le \int_{\{|u_n|>t\}} |f| dx, \ \forall t \in R^+ \tag{15}$$

(Nous avons utilisé ici la condition de signe (5)).

Dans (14) on prend $p = p_i$, avec, pour $t \in R^+$ fixé,

$$\begin{array}{ll} p_i(s) \downarrow t & s \ge t, \text{ quand } i \to +\infty \\ p_i(s) = s & -t \le s \le t, \text{ pour tout } i \\ p_i(s) \uparrow -t & s \le -t, \text{ quand } i \to +\infty \end{array}$$

Avec (2) et (5), on en déduit, quand $i \to +\infty$

$$\alpha \int_{\{|u_n|\le t\}} |\nabla u_n|^2 dx \le t \int_\Omega |f| dx, \ \forall t \in R^+ \tag{16}$$

2.3. — Passage à la limite

Dans ce §2.3 on va montrer que la suite $(u_n)_n$, u_n solution de (10), converge (après extraction éventuelle d'une sous suite) vers une solution de (7).

En utilisant l'estimation (15) avec $t = 0$ on voit que la suite $\big(\gamma_n(., u_n, \nabla u_n)\big)_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, et donc que la suite $\big(f_n - \gamma_n(., u_n, \nabla u_n)\big)_n$ est aussi bornée dans $L^1(\Omega)$.

En reprenant les notations introduites au §2.1., on a donc $u_n = G \circ F_n(u_n)$, avec $\big(F_n(u_n)\big)_n$ bornée dans $L^1(\Omega)$.

On en déduit que $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $W_o^{1,p}(\Omega)$, pour tout $p \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right[$. Ceci est une conséquence immédiate du lemme classique suivant (cf [5]) :

LEMME (de compacité). — *Soit $(u_n)_n$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ t.q.*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega} g_n \, \phi \, dx,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $(g_n)_n$ bornée dans $L^1(\Omega)$. La suite $(u_n)_n$ est alors relativement compacte dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $p < N/(N-1)$.

Nous rappelons la démonstration de ce lemme de compacité. L'opérateur G est linéaire continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_o^1(\Omega)$. Son adjoint G^* est aussi linéaire continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_o^1(\Omega)$, et on sait que (cf [5], théorème 6.3), si $p > N$, G^* envoie continûment $W^{-1,p}(\Omega)$ dans un espace de type $C^{o,\alpha}(\overline{\Omega})$ (avec un certain $\alpha \in]0,1[$). En utilisant le théorème d'Ascoli, G^* peut donc être considéré comme un opérateur linéaire compact de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ pour tout $p > N$. Par dualité ceci montre que la restriction de G à $L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ se prolonge de manière unique $\big(L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)\big)$ en un opérateur, noté G_1, linéaire compact de $L^1(\Omega)$ dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \le p < \frac{N}{N-1}$.

Ceci prouve le lemme de compacité énoncé ci-dessus en remarquant que

$$u_n = G(g_n) = G_1(g_n) \ \big(\text{ noter en effet que } g_n \in L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)\big).$$

Le lemme nous montre donc que $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $p < \frac{N}{N-1}$. On peut donc supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que

$$u_n \to u \qquad \text{dans } W_o^{1,p}(\Omega),\ 1 \le p < \frac{N}{N-1} \tag{17}$$

$$u_n \to u \qquad \text{p.p} \tag{18}$$

$$\nabla u_n \to \nabla u \qquad \text{p.p} \tag{19}$$

On a

$$Au_n + \gamma_n(.,u_n,\nabla u_n) = f_n \text{ (au sens de (10))}.$$

On a $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$. On a $u_n \to u$ dans $W_o^{1,1}(\Omega)$ et donc $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^1(\Omega)$, d'où $a_{ij} \ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \ \to \ a_{ij} \ \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^1(\Omega)$. On en déduit que $Au_n \to Au$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que

$$\gamma_n(.,u_n,\nabla u_n) \to \gamma(.,u,\nabla u) \in L^1_{\text{loc}}\,(\Omega). \tag{20}$$

On notera aussi que $\gamma(.,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$. Ceci se démontre en utilisant (15) avec $t = 0$ et le lemme de Fatou.

Il reste à démontrer (20).

Démonstration de (20) . — Avec (18) et (19) on a

$$\gamma_n(.,u_n,\nabla u_n) \to \gamma(.,u,\nabla u) \ p.p.$$

Pour démontrer (20) il suffit donc de montrer (d'après le théorème de Vitali) que la suite $\left(\gamma_n(.,u_n,\nabla u_n)\right)_n$ est équiintégrable sur les compacts de Ω; c'est-à-dire que, en posant $h_n = \gamma_n(.,u_n,\nabla u_n)$,

$$\begin{cases} \text{pour tout compact } K \text{ de } \Omega \\ \displaystyle\int_A |h_n| dx \to 0 \text{ quand } A \subset K, mes(A) \to 0, \\ \text{uniformément par rapport à } n. \end{cases} \tag{21}$$

On montre maintenant (21).

Soit $K \subset \Omega$, K compact, comme la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ (cf (17)), on a

$$mes\{|u_n| > t\} \to 0 \text{ quand } t \to \infty, \text{ uniformément par rapport à } n, \tag{22}$$

et donc d'après (15)

$$\int_{\{|u_n|>t\}} |h_n| dx \to 0 \text{ quand } t \to \infty, \text{ uniformément par rapport à } n \tag{23}$$

on est ainsi ramené à montrer que pour tout $t > 0$, t fixé, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\{|u_n|\le t\}\cap A} |h_n| dx \to 0 \quad \text{quand } A \subset K, mes(A) \to 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{uniformément par rapport à } n. \end{cases} \tag{24}$$

On utilise maintenant (et seulement ici) l'hypothèse (6). Soit $A \subset K$, on a

$$\int_{\{|u_n|\le t\}\cap A} |h_n| dx \le \int_{A\cap\{|u_n|\le t\}} b(x,t) |\nabla u_n|^\delta dx + \int_A C(x,t) dx$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit

$$\int_{\{|u_n|\le t\}\cap A} |h_n| dx \le \left(\int_A (b(x,t))^{\frac{2}{2-\delta}} dx\right)^{\frac{2-\delta}{2}} \left(\int_{\{|u_n|\le t\}} |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{\delta}{2}} + \int_A C(x,t) dx$$

et avec (16),

$$\int_{\{|u_n|\le t\}\cap A} |h_n| dx \le \left(\int_A (b(x,t))^{\frac{2}{2-\delta}} dx\right)^{\frac{2-\delta}{2}} \left(\frac{t}{\alpha}\|f\|_1\right)^{\frac{\delta}{2}} + \int_A C(x,t) dx \tag{25}$$

Comme $(b(.,t))^{\frac{2}{2-\delta}}$ et $C(.,t)$ appartiennent à $L^1(K)$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_A (b(x,t))^{\frac{2}{2-\delta}} dx \to 0, \text{ et} \\ \displaystyle\int_A C(x,t) dx \to 0, \text{ quand } A \subset K, mes(A) \to 0 \end{array}\right. \tag{26}$$

(25) et (26) donnent (24).

Ceci prouve (21), et termine la démonstration du théorème.

Remarque 4. — On peut démontrer des résultats de compacité semblables au lemme avec des opérateurs A non linéaires. Les techniques sont alors assez différentes de celles de Stampacchia (on ne peut plus utiliser le passage à l'adjoint et la régularité $C^{0,\alpha}$ pour cet adjoint). Ceci est fait dans un travail soumis pour publication (BOCCARDO-GALLOUET [6]).

Remarque 5. — Nous avons ainsi démontré l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \frac{N}{N-1}$ tel que $g = f - \gamma(.,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$, et $Au = g$ au sens suivant :

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega g\phi \, dx \; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{27}$$

On peut également remarquer que $u = G_1 g$. Il est intéressant de noter que la solution que nous avons obtenue est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour *tout* p, $1 \le p < \frac{N}{N-1}$. Soit $1 \le p < \frac{N}{N-1}$, p *fixé*, et soit $g \in L^1(\Omega)$ (par exemple $g = 0$), on peut montrer que pour certains coefficients a_{ij} (non réguliers mais vérifiant (2) - (3)), (27) a plusieurs solutions (on peut voir dans [5] un contre exemple dû à SERRIN). Cependant on peut montrer (par un argument de régularité dû à MEYERS et un argument de dualité) que si $N = 2$, (27) a une unique solution appartenant, pour tout $p \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right[$, à $W_0^{1,p}(\Omega)$. A ma connaissance le problème de l'unicité de la solution de (27) (dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \le p < \frac{N}{N-1}$) est encore ouvert pour $N \ge 3$.

Références

[1] GALLOUET (T.), MOREL (J.M.). — On some semilinear problems in L^1, *Boll. U.M.I.*, t. **(6) 4 - A**, 1985, p. 123-131.

[2] BREZIS (H.), STRAUSS (W.). — Semilinear elliptic equations in L^1, *J. Math. Soc. Japan*, t. **25**, 1973, p. 565-590.

[3] BOCCARDO (L.), MURAT (F.), PUEL (J.P.). — Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires, *Portugaliae Mathematica*, t. **41,Fasc. 1-4**, 1982.

[4] DEL VECCHIO (R.). — Strongly nonlinear problems with gradient dependent lower order nonlinearity, *Nonlinear Analysis T.M.A.*, t. **10**, 1986.

[5] STAMPACCHIA (G.). — *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* — Séminaire de Mathématiques Supérieures - Université de Montréal, 1965.

[6] BOCCARDO (L.), GALLOUET (T.). — Article soumis pour publication.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1987)