ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

WEN ZHI-XIONG
WEN ZHI-YING

Remarques sur la suite engendrée par des substitutions composées

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 9, nº 1 (1988), p. 55-63

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_1_55_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n°1, 1988

Remarques sur la suite engendrée par des substitutions composées

WEN ZHI-XIONG[1] et WEN ZHI-YING[1]

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous étudions une classe de suites engendrées par certaines substitutions.

ABSTRACT. — In this paper, we study a class of sequences generated by certain composed substitutions.

1 Introduction

Les suites engendrées par des substitutions sur un alphabet ont été étudiées par de nombreux auteurs. En particulier, quand la substitution est de longueur constante, la suite correspondante peut être engendrée par un automate fini, et elle a aussi beaucoup de propriétés surprenantes [1].

Dans ce travail on étudiera certaines propriétés des suites engendrées par la composition d'une famille de substitutions. Plus précisément, soient σ_1, σ_2 deux substitutions sur un alphabet $A = \{a, b\}$, τ une substitution sur l'alphabet $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$. Le mot dont les lettres appartiennent à Σ est considéré comme une composition de substitutions, donc elle est aussi une substitution sur A. Pour cela, on peut définir une suite composée de a et b, considérée comme la limite $\tau^n(\sigma_1)(a)$ dans certains sens. D'une part, cette suite a les mêmes propriétés que celles de suites substitutives ordinaires, par exemple, elle a une fréquence uniforme par rapport aux a, b, son entropie est nulle. D'autre part, on peut construire une suite en choisissant σ_1, σ_2 et

(1) Département de Mathématiques Université de Wuhan République populaire de Chine

τ convenablement, sa fréquence est transcendante et elle ne peut donc être engendrée par un automate fini.

2.

On va d'abord étudier la limite d'un produit d'une classe de matrices, et en substituant les résultats obtenus, on discutera des propriétés de substitutions composées.

Soient $M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u_i & v_i \end{bmatrix}$, $i \geq 1$, u_i, $v_i \in \mathbf{C}$, une suite de matrices carrées d'ordre 2. Par un calcul direct, on obtient facilement

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u_i & v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} v_1 v_2 \ldots v_{i-1}, u_i & v_1 v_2 \ldots v_n \end{bmatrix}$$

Donc, si $\sup_{i\geq 1} |u_i| \leq \alpha < \infty$, $\sup_{i \geq 1} |v_i| \leq \beta < 1$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_1 \ldots v_{i-1} u_i| \leq \beta \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} \leq \infty,$$
$$|v_i \ldots v_n| \leq \beta^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{où } \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} v_1 v_2 \ldots v_{i-1} u_i.$$

Maitenant, on suppose que $M_i = \begin{bmatrix} w_i & 0 \\ u_i & v_i \end{bmatrix}$, et les coefficients satisfont

$$\sup_{i\geq 1} \left| \frac{u_i}{v_i} \right| \leq \alpha < \infty, \quad \sup_{i\geq 1} \left| \frac{v_i}{w_i} \right| \leq \beta < 1, \tag{1}$$

alors on obtient

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} M_i}{\prod_{i=1}^{n} w_i} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

où

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{v_i}{w_i} \right) \cdots \left(\frac{v_{i-1}}{w_{i-1}} \right) \left(\frac{x_i}{w_i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i \prod_{j=1}^{i-1} v_j}{\prod_{j=1} w_i}. \tag{3}$$

3.

Soit A un ensemble fini que nous appelons alphabet. On note $A^* = \bigcup_{k\geq 1} A^k$ l'ensemble des mots construits sur A. Une substitution σ sur A est une application de A dans A^*. σ induit naturellement une application de A^* dans A^* par concaténation : si w est le mot $a_1a_2\ldots a_n$ de A^*, on pose $\sigma(w) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)\ldots\gamma(a_n)$. On définit également une application de A^N dans A^N en posant, pour $x = x_1x_2\ldots \in A^N$, $\sigma(x) = \sigma(x_1)\sigma(x_2)\ldots$. σ^n désigne la substitution n fois itérée. Si w est un mot, $L(w) = (La(w))_{a\in A}$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^A$ dont la composante $La(w)$ correspondant à a est le nombre de fois que a figure dans w, et $|w|$ désigne la longueur de mot w. On note M_σ la matrice, indexée par $A \times A$, dont la colonne correspondant à a est $L(\sigma(a))$. On adopte la terminologie de [6] en ce qui concerne les matrices à coefficients positifs.

Avec ces notations on a $L(\sigma(w)) = M_\sigma L(w)$, d'où

$$L(\sigma^n(w)) = M^n L(w), \quad w \in A^*. \tag{4}$$

On suppose dans ce qui suit $A = \{a, b\}$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_k k$ substitutions sur A dont la matrice substitutive correspond à σ_i est notée M_{σ_i}. Soient $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ et τ une substitution sur Σ, on désigne M_τ sa matrice substitutive. Si $\eta = \eta_i \ldots \eta_n$ est un mot de Σ, en posant $\eta(\alpha) = \eta_1(\eta_2 \ldots \eta_n(\alpha))$, $\alpha \in A$, on définit η comme une substitution sur A.

Nous ferons les hypohèses suivantes :

H .—

(i) Les matrices M_{σ_i}, $1 \le i \le k$, sont primitives, c'est-à-dire, pour un m convenable, aucun coefficients de $M_{\sigma_i}^m$ n'est nul.

Dans cette condition, la valeur propre de Perron-Frobenius λ_i de M_{σ_i} est strictement supérieure à 1 et au module de l'autre valeur propre μ_i.

(ii) Les matrices M_{σ_i} ont un vecteur propre commun non nul à gauche X correspondant aux λ_i. C'est-à-dire, il existe un vecteur non nul X, tel que $XM_{\sigma_i} = \lambda_i X$ pour tout $1 \le i \le k$.

Donc, il exist une matrice non dégénérée $P = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, tel que

$$M_{\sigma_i} = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ \nu_i & \mu_i \end{bmatrix} P. \tag{5}$$

(iii) Pour chaque $1 \le i \le k$, il existe $x_i \in A^*$, tel que $\sigma_i(a) = ax_i$.

(iv) Il existe $\eta \in \Sigma^*$, tel que $\tau(\sigma_1) = \sigma_1\eta$.

Remarque 1.— Si les substitutions σ_i sont de longueur constante (i.e., pour chaque $1 \le i \le k$, $|\sigma_i(a)| = |\sigma_i(b)|$), alors l'hypotèse (ii) sera satisfaite automatiquement, le vecteur $(1, 1)$ est le vecteur propre commun à gauche.

Soit $w_n = \eta_1 \dots \eta_n$ une suite de mots de Σ^*. Pour chaque w_n, on associe Q_n le produit des matrices obtenu en remplaçant σ_i par M_{σ_i} dans w_n.

Si l'on fait l'hypothèse H.(i), (ii), on voit facilement de (5) que la suite Q_n satisfait la condition (1). Donc, si l'on note $L(w_n) = (n_{\sigma_i} \dots n_{\sigma_k}$, où n_{σ_i} désigne le nombre de σ_i qui figure dans w_n, alors par (2) et (3), on obtient

PROPOSITION 1.— *Avec les notations précédentes, sous l'hypothèse H.(i) et H.(ii), on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{\lambda_1^{n_{\sigma_i}} \dots \lambda_k^{n_{\sigma_k}}} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} P, \tag{6}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\mu_i}{\lambda_i}\right)^{i_{\sigma_i}-1} \dots \left(\frac{\mu_k}{\lambda_k}\right)^{i_{\sigma_k}-1}; \\ \gamma_i &= \frac{\nu_j}{\lambda_j}, \quad \textit{si } \eta_i = \sigma_j,\ i \geq 1,\ 1 \leq j \leq k. \end{aligned} \tag{7}$$

4.

On considère maintenant la suite $\{\tau^n(\sigma_1)(a)\}_{n\geq 1}$. Par les hypothèses H. (iii) et H.(iv), on déduit que

$$\begin{aligned} \tau^{n+1}(\sigma_1)(a) &= \tau^n(\tau(\sigma_1))(a) = \tau^n(\sigma, \eta)(a) = \tau^n(\sigma_1)\tau^n(\eta)(a) \\ &= \tau^n(\sigma_1)(ay) \quad = \tau^n(\sigma_1(a)\tau^n(\sigma_1)(y), \end{aligned}$$

où $\eta \in \Sigma^*$ et $y \in A^*$. On voit donc que $\tau^n(\sigma_1)(a)$ est un préfixe d'un mot $\tau^{n+1}(\sigma_1)(a)$ (On dit que un mot u est un préfixe d'un mot v, s'il exist un mot w tel que $v = uw$). Ainsi on définit une suite infinie de A^N qu'on note $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ou $x = x_1 x_2 \dots x_n \dots$.

Remarque 2.— Si $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k$, alors le résultat précédent donne une suite substitutive au sens ordinaire.

Dans la suite, on va donner plusieurs propriétés de la suite $x = x_1, x_2 \dots x_n \dots$. Dans ce paragraphe, on étudie les fréquences de a, b qui paraissent dans x. En effet, on établira la proposition suivante :

PROPOSITION 2.— *Sous les hypohèses H.(i),(iv), quelque soit $\alpha \in A$, $\dfrac{L_\alpha(x_j \dots x_{j+N})}{N+1}$ tend vers une limite d_α uniformément par rapport à j quand N tend vers l'infini.*

Démonstration. — Par l'hypothèse H.(iv), τ admet un point fixe qu'on note $\eta = \eta_1\eta_2\dots\eta_n\dots$.

Soit $w_n = \eta_1\dots\eta_n$, si $u \in A^*$, par application réitérée de la formule (4), nous obtenons successivement:

$$\begin{aligned} L(w_n(u)) = L(\eta_1\dots\eta_n(u)) &= L(\eta_1(\eta_2\dots\eta_n(u))) \\ &= M_{\eta_1}L(\eta_2\dots\eta_n(u)) = M_{\eta_1}\dots M_{\eta_n}L(u). \end{aligned}$$

Donc

$$L(w_n(u)) = \prod_{i=1}^{n} M_{\eta_1}\cdot L(u).$$

En utilisant la proposition 1, on obtient :

$$\frac{L(w_n(u))}{\lambda_i^{\eta_{\sigma_i}}\dots\lambda_k^{\eta_{\sigma_k}}} \longrightarrow P^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \gamma & 0\end{bmatrix}P\cdot L(u), \quad n\to\infty, \tag{8}$$

où γ est défini comme dans (7).

En remarquant la définition de γ et en choisissant convenablement la matrice P, on obtient par (8)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L(w_n(u))}{|w_n(u)|} = \begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_a\\ d_b\end{bmatrix}. \tag{9}$$

où $V_1+V_2=1$, V_1, $V_2>0$, et la limite est indépendante de u.

Maintenant, on estime $\dfrac{L_\alpha(x_j\dots x_{j+N})}{N+1}$ en utilisant (9).

Pour tout $N>0$, il existe un entier positif m, tel que

$$|w_{m-1}(a)| < N \le |w_m(a)|.$$

Donc, pour n fixe et $N \gg n$ (on précisera la grandeur de n), il existe y, $z\in A^*$, et l, $p\in\mathbf{N}$, tel que $w_m(a) = w_n(yx_p\dots x_{p+l}z)$, donc

$$x_j\dots x_{j+N} = A_n w_n(x_p\dots x_{p+l})B_n.$$

où

$$A_n, B_n \in A^*, \qquad \text{et } |A_n|, |B_n| \le \sup_{\alpha\in A}|w_n(\alpha)| = \gamma_n. \tag{10}$$

On a ainsi

$$N+1 = \sum_{i=p}^{p+\ell} w_n(x_i) + |A_n| + |B_n|, \tag{11}$$

et

$$L_a(x_j \dots x_{j+N}) = \sum_{i=p}^{p+\ell} L_a(w_n(x_i)) + L_a(A_n) + L_a(B_n). \tag{12}$$

D'autre part, étant donné $\varepsilon > 0$, pour n suffisamment grand, on a uniformément en $\alpha \in A$ par (9)

$$|L_a w_n(\alpha) - d_a |w_n(\alpha)|| < \varepsilon |w_n(\alpha)|. \tag{13}$$

Compte tenu de (10), (12), on en déduit

$$\begin{aligned} |L_a(x_j \dots x_{j+N}) - (N+1)\, d_a| &\leq \varepsilon \sum_{i=p}^{p+\ell} w_n(x_i) + L_a(A_n) \\ &+ L_a(B_n) + (|A_n| + |B_n|)\, d_a < \varepsilon(N+1) + 4r_n \end{aligned} \tag{14}$$

Si l'on pose $\lambda = \sup_{1 \leq i \leq k} \lambda_i$, en tenant compte de (8), on a

$$\sup_{\alpha \in A} |w_n(\alpha)| \leq C \lambda_i^{n_{\sigma_i}} \dots \lambda_k^{n_{\sigma_k}} \leq C\lambda^n,$$

où $C > 0$ est une constante absolue.

Donc, si l'on prend $n = \left(\frac{1}{2} \log_\lambda (N+1)\right)$, alors

$$\frac{|w_n(\alpha)|}{N+1} \leq \frac{C\sqrt{N+1}}{N+1} \to 0, \quad N \to \infty,$$

En associant (10) et (14), on voit que $\dfrac{L_\alpha(x_j \dots x_{j+N})}{N+1}$ tend vers d_α uniformément en j, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque 3.— En supposant tous les σ_i identiques, nous obtenons à nouveau le théorème sur les fréquences des suites substitutives de M. QUEFFELEC [5].

Remarque 4.— Soit B un mot qui apparaît dans x. Alors en utilisant la méthode de "changement d'alphabet" de J. PEYRIÈRE [4] et le procédé précédent avec quelques modifications, on peut démontrer que $\dfrac{L_B(x_j \dots x_{j+N})}{N+1}$ tend vers une limite non nulle d_B uniformément en j.

5.

Dans ce paragraphe, on démontrera que l'entropie de la suite x définie dans le paragraphe précédent est nulle.

Etant donné une suite infinie u à valeur dans un ensemble à k éléments, l'entropie de u est la limite, lorsqu'elle existe, de $\frac{\log_k |\Omega_n|}{n}$, $n \to \infty$, où $|\Omega_n|$ désigne le cardinal de l'ensemble des mots de longueur n de u.

PROPOSITION 3.— *La suite x est déterministe, c'est-à-dire, son entropie est nulle.*

Démonstration.— L'idée de la démonstration est analogue à celle de M. QUEFFELEC [5].

Remarquons les faits suivants :

1) Quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on peut trouver $p \geq 1$, tel que

$$\inf_{\alpha \in A} |w_{p-1}(\alpha)| < n \leq \inf_{\alpha \in A} |w_p(\alpha)| . \tag{15}$$

2) Posons $w_p = \eta_1 \ldots \eta_p$. D'après la proposition 1, on a, pour p assez grand

$$C_1 \lambda_1^{p\sigma_i} \ldots \lambda_k^{p\sigma_k} \leq \inf_{\alpha \in A} |w_p(\alpha)| \leq \sup_{\alpha \in A} |w_p(\alpha)| \leq C_1 \lambda_1^{p\sigma_i} \ldots \lambda_k^{p\sigma_k}, \tag{16}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes positives absolues.

Par (15), tout mot de longueur n est contenu dans un mot de la forme $w_p(\alpha)$ ou $w_p(\alpha\beta)$, où α, β sont deux lettres consécutives dans x et où n et p étant fixes de façon à voir (15). Pour dénombrer les mots de longueur n, il suffit de dénombrer les couples $\alpha\beta$ de x, puis les mots de longueur n dans un mot de la forme $w_p(\alpha\beta)$. Or il y a au plus 4 couples $\alpha\beta$ dans x et au plus $\sup_{\alpha \in A} |w_p(\alpha)|$ mots de longueur n dont les premières lettres sont dans un $w_p(\alpha)$ (et donc contenus dans un $w_p(\alpha\beta)$).

Pour n et p vérifiant (15) et (16), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
|\Omega_n| &\leq 4 \sup_{\alpha \in A} |w_p(\alpha)| \leq 4C_2 \lambda_1^{p\sigma_i} \ldots \lambda_k^{p\sigma_k} \\
&\leq 4C_2 \lambda \left(\lambda_1^{(p-1)\sigma_i} \ldots \lambda_k^{(p-1)\sigma_k} \right) \\
&\leq \frac{4C_2\lambda}{C_1} \inf_{\alpha \in A} |w_{p-1}(\alpha)| \\
&\leq \frac{4C_2\lambda}{C_1} n,
\end{aligned}$$

où $\lambda = \sup_{1 \leq i \leq k} \lambda_i$.

Ce qui démontre la proposition.

6.

Dans ce paragraphe, on va construire une suite, par une substitution composée, dont les fréquences sont transcendantes.

Soit $k = 2$ et soient σ_1, σ_2 deux substitutions de longueur constantes dont les matrices correspondantes sont $M_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $M_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\tau \colon \{\sigma_1, \sigma_2\} \to \{\sigma_1, \sigma_2\}^*$ la substitution de Morse (c'est-à-dire, définie par $\tau(\sigma_1) = \sigma_1\sigma_2, \tau(\sigma_2) = \sigma_2\sigma_1$).

Compte tenu de la remarque 1, on voit que les hypothèses H. (i), (ii), (iv) sont satisfaites. De plus, on fait l'hypotèse H. (iii).

Il est facile de vérifier que $\lambda_1 = 6$, $\mu_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_2 = 2$. On peut prendre $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et donc $P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\lim_{n\to\infty} \tau^n(\sigma_1)(a) = x = x_1 x_2 \ldots$. Alors, d'après la proposition 2, x a les fréquences

$$\begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1-\gamma \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

où $\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, les γ_i sont déterminés par (5). En effet, $\{\gamma_i\}_{i\geq 1}$ est la suite de Morse composée de $1/6$ et $1/4$.

D'après un théorème de J.H. LOXTON et A.J. VAN DER POORTEN, γ est transcendant. [3, théorème 1].

De plus, la suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas être engendrée par un p-automate fini. En fait, si un p-automate engendre cette suite, alors, d'après le théorème de CHRISTOL-KAMAE-MENDÈS FRANCE-RAUZY [2], elle doit être l'image d'un point fixe d'une p-substitution, donc, ses fréquences seront rationnelles [5], ce qui contredit la transcendance de γ.

Remarque 5.— Dans l'exemple précédent, si l'on prend comme une substitution non périodique (c'est-à-dire la suite engendrée par cette substitution n'est pas ultimement périodique), et M_{σ_1}, M_{σ_2} satisfaisant que $\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2} \neq 0$, ν_1, ν_2 ne sont pas nuls en même temps, alors les fréquences de x seront quand même transcendantes.

Remarque 6.— On se pose ainsi un problème : soient α_1, α_2 deux nombres algébriques et $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ une suite substitutive non périodique à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbf{Q}$, on se demande si le nombre $\sum_{n\geq 1} \gamma_n \alpha_1^{k_n} \alpha_2^{\ell_n}$ est un nombre transcendant, où $|\alpha_1|, |\alpha_2| < 1$, $k_n + \ell_n = n$. (LOXTON et VAN DER POORTEN, l'ont affirmé quand $\alpha_1 = \alpha_2$, [3]). Si la réponse est positive, alors dans la remarque 5, on peut supprimer la restriction $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} = \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$.

Remarque 7.— On peut généraliser les résultats précédents de la façon, suivante : soient w_n, $n \geq 1$, une suite de mots de Σ^*, tels que w_n soit un préfixe de w_{n+1}. Comme précédemment, on peut définir une suite $x = x_1x_2\ldots$ de $A^{\mathbf{N}}$ quand n tend vers l'infini. Après avoir convenablement changé l'hypotèse H. (iv), on trouvera des résultats analogues aux précédents.

Références

[1] ALLOUCHE (J.P.). — Automates finies et théorie des nombres, à paraître.

[2] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDÈS FRANCE (M.) et RAUZY (G.). — Suites algébriques, automates, et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, t. **108**, 1980, p. 401-419.

[3] LOXTON (J.H.) et VAN DER POORTEN (A.J.). — Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations, *J. Reine Angew. Math.*, t. **330**, 1982, p. 159-172.

[4] PEYRIÈRE (J.). — *Substitutions aléatoires itérées.* — Sém. de Th. des Nombres de Bordeaux, Exposé n° 17, 1980'1981.

[5] QUEFFELEC (M.). — *Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques.* Thèse d'Etat, Paris Nord, Villetaneuse, 1984.

[6] SENETA (E.). — *Non-négatives matrices.* — J. Wiley, 1973.

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1987)