

ROBERT BÉJIAN

Minoration de la discrétance à l'origine d'une suite quelconque

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 1, n° 3 (1979), p. 201-213

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_3_201_0

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MINORATION DE LA DISCREPANCE A L'ORIGINE D'UNE SUITE QUELCONQUE

Robert Bélian ⁽¹⁾

(1) Université de Provence, Place Victor-Hugo - 13331 Marseille Cédex 3.

Résumé : Nous démontrons que pour toute suite ω du tore on a

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{D^*(N, \omega)}{\text{Log } N} \geq \frac{1}{12 \text{ Log } 4} = 0,060 \dots$$

Summary : We prove that for any infinite sequence ω in $\mathbb{T}$ we have

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{D^*(N, \omega)}{\text{Log } N} \geq \frac{1}{12 \text{ Log } 4} = 0,060 \dots$$

1 - INTRODUCTION

En réponse à une question posée en 1935 par Van der Corput [6] sur l'existence de suites dont la discrétance ⁽¹⁾ à l'origine $D^*(N)$ soit bornée, Madame Van Aardenne-Ehrenfest [5] a montré en 1949 qu'il existe une constante universelle C_1 et une infinité d'entiers N vérifiant

$$D^*(N) > \frac{C_1 \text{ Log Log } N}{\text{Log Log Log } N}.$$

Par la suite, K.F. Roth [3] a établi la minoration

$$D^*(N) > C_2 (\text{Log } N)^{1/2} \quad \text{pour une infinité d'entiers,}$$

(1) La définition de la discrétance figure à la fin de ce paragraphe.

et en 1972 W.M. Schmidt [2], [4] a obtenu la meilleure minoration en ce qui concerne le logarithme. Plus précisément, il a montré l'existence d'une constante universelle $C > 10^{-2}$ telle que pour toute suite on ait

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{D^*(N)}{\text{Log } N} \geq C.$$

On établit ici le résultat suivant :

THEOREME. *Pour toute suite ω du tore, on a*

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{D^*(N, \omega)}{\text{Log } N} \geq \frac{1}{12 \text{ Log } 4} = 0,060 \dots$$

Par ailleurs, H. Faure [1] a prouvé l'existence d'une suite associée à un système de numération pour laquelle

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{D^*(N)}{\text{Log } N} = \frac{1919}{3454 \text{ Log } 12} = 0,223 \dots$$

Il en résulte pour la constante de Schmidt l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{12 \text{ Log } 4} = 0,060 \dots \leq C \leq 0,223 \dots = \frac{1919}{3454 \text{ Log } 12}.$$

La démonstration du théorème repose essentiellement sur deux lemmes dont le premier est dû à W.M. Schmidt.

Dans le paragraphe 2 nous énonçons ces lemmes et donnons la démonstration du théorème. Le paragraphe 3 est exclusivement consacré à la démonstration du lemme 2.

Etant donné une suite $\omega = (x_\nu)_\nu$ sur le tore, $[x, y[$ un intervalle sur le tore et N un entier au moins égal à 1, on note $A([x, y[, N, \omega)$ le nombre d'entiers ν positifs inférieurs à N pour lesquels x_ν appartient à l'intervalle $[x, y[$; l'écart correspondant est défini par $E([x, y[, N, \omega) = A([x, y[, N, \omega) - N(y - x)$ et la discrétion à l'origine par $D^*(N) = \sup_{0 < x \leq 1} |E([0, x[, N, \omega)|$

2 - LEMMES PRELIMINAIRES ET DEMONSTRATION DU THEOREME

Soit K un intervalle d'entiers, c'est-à-dire un ensemble fini d'entiers consécutifs et soit x dans $\mathbb{T}$; on pose $h_K(x) = \max_{n \in K} E([0, x[, n, \omega) - \min_{n \in K} E([0, x[, n, \omega)$.

Soient L et L' deux intervalles d'entiers contenus dans K , x et y dans $\mathbb{T}$. On pose :

$$h(L, L', x, y) = \max \left\{ \min_{n \in L} E([x, y[, n, \omega) - \max_{n \in L'} E([x, y[, n, \omega) ; \min_{n \in L'} E([x, y[, n, \omega) - \max_{n \in L} E([x, y[, n, \omega) \right\}$$

LEMME 1. Soient L , L' et K trois intervalles d'entiers avec L et L' contenus dans K ; soient x et y dans $\mathbb{T}$, alors on a :

$$h_K(x) + h_K(y) \geq \frac{1}{2} \{h_L(x) + h_{L'}(x) + h_L(y) + h_{L'}(y)\} + h(L, L', x, y).$$

LEMME 2. Soient t et p deux entiers positifs ou nuls. On pose :

$$\begin{aligned} K &= \{p+1, p+2, \dots, p+4^{t+1}\} \\ L &= \{p+1, p+2, \dots, p+4^t\} \\ L' &= \{p+3 \cdot 4^t + 1, p+3 \cdot 4^t + 2, \dots, p+4^{t+1}\} \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\int_0^1 h_K(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 h_L(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 h_{L'}(x) dx + \frac{1}{6}.$$

COROLLAIRE. Soient t un entier naturel et K un ensemble de 4^t entiers naturels cons cutatifs ; on a :

$$\int_0^1 h_K(x) dx \geq \frac{t}{6}.$$

La démonstration du corollaire à partir du lemme 2 se fait par récurrence sur t ; pour $t = 1$ nous posons

$$K = \{p+1, p+2, p+3, p+4\}, \quad L = \{p+1\}, \quad L' = \{p+4\}$$

Les fonctions $x \rightarrow h_L(x)$ et $x \rightarrow h_{L'}(x)$ sont identiquement nulles et le lemme 2 donne $\int_0^1 h_K(x) dx \geq \frac{1}{6}$ ce qui est la propriété à l'ordre 1. On passe de l'ordre t à l'ordre $t+1$ en utilisant le lemme 2 dans lequel on minore les intégrales $\int_0^1 h_L(x) dx$ et $\int_0^1 h_{L'}(x) dx$ grâce à l'hypothèse de récurrence. Nous sommes en mesure de donner la démonstration du théorème. Soient t un entier positif et $K = \{1, 2, 3, \dots, 4^t\}$.

D'après le corollaire du lemme 2 on a

$$\int_0^1 h_K(x) dx \geq \frac{t}{6}.$$

Donc il existe $x \in [0, 1[$ tel que $h_K(x) \geq \frac{t}{6}$.

Par ailleurs, il existe deux entiers p et q dans K tels que

$$h_K(x) = E([0, x[, p, \omega) - E([0, x[, q, \omega))$$

on a donc

$$\frac{t}{6} \leq h_K(x) = E([0, x[, p, \omega) - E([0, x[, q, \omega)) \leq |E([0, x[, p, \omega)| + |E([0, x[, q, \omega)|$$

L'un au moins de ces deux écarts est en module supérieur à $\frac{t}{12}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier m ($m = p$ ou q) tel que $|E([0, x[, m, \omega)| \geq \frac{t}{12}$. D'où

$$D^*(m) \geq |E([0, x[, m, \omega)| \geq \frac{t}{12}$$

Comme m appartient à K on a $m \leq 4^t$ et donc pour tout entier positif t il existe $m \leq 4^t$ tel que

$$D^*(m) \geq \frac{\text{Log}(4^t)}{12 \text{ Log } 4} \geq \frac{\text{Log } m}{12 \text{ Log } 4};$$

ceci prouve que l'ensemble des m vérifiant $D^*(m) \geq \frac{\text{Log } m}{12 \text{ Log } 4}$ n'est pas fini et que $\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{D^*(m)}{\text{Log } m} \geq \frac{1}{12 \text{ Log } 4}$.

3 - DEMONSTRATION DU LEMME 2

3.1 Minorsations d'intégrales.

Soient L , L' , et K trois intervalles d'entiers avec L et L' contenus dans K ; on envisage une partition du tore par une famille finie $(I_\alpha)_\alpha$ d'intervalles et une famille finie de couples d'intervalles $(J_\beta, K_\beta)_\beta$ telle que pour tout β , J_β et K_β soient de même longueur.

Posons $h^+(L, L', x, y) = \max \{0, h(L, L', x, y)\}$.

PROPOSITION 1. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_K(x) dx &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 h_L(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 h_{L'}(x) dx + \frac{1}{2} \sum_\alpha \int_{I_\alpha} h^+(L, L', x, 2m_\alpha - x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_\beta \int_{J_\beta \cup K_\beta} h^+(L, L', x, 2n_\beta - x) dx \end{aligned}$$

où m_α est le milieu de I_α et n_β un point par rapport auquel les intervalles J_β et K_β sont symétriques.

Démonstration. Etant donné un intervalle $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ du tore et m_α son milieu, on établit d'abord la minoration

$$\int_{I_\alpha} h_K(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_{I_\alpha} h_L(x) dx + \frac{1}{2} \int_{I_\alpha} h_{L'}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{I_\alpha} h^+(L, L', x, 2m_\alpha - x) dx.$$

Pour cela, on fait un changement de variable qui ramène l'intégration sur l'intervalle $[m_\alpha, b_\alpha]$ à une intégration sur l'intervalle $[a_\alpha, m_\alpha]$, l'argument essentiel qui intervient dans ce calcul étant la symétrie

$$h(L, L', x, y) = h(L, L', y, x).$$

On procède de même pour les couples d'intervalles (J_β, K_β) et une sommation sur les minorsations précédentes donne le résultat.

Dans les trois propositions qui suivent, K désigne un ensemble de 4^{t+1} entiers naturels consécutifs ;
 $K = \{p+1, p+2, \dots, p+4^{t+1}\}$.

On pose $L = \{p+1, p+2, \dots, p+4^t\}$
 $L' = \{p+3 \cdot 4^t+1, p+3 \cdot 4^t+2, \dots, p+4^{t+1}\}$.

Notons $\omega = (x_\nu)_\nu$ la suite arbitraire du tore, dont on étudie la discrépance ; soit T l'ensemble des x_ν pour lesquels ν appartient à $K - L \cup L'$; on pose $N = 4^{t+1}$.

PROPOSITION 2. Soit $[a, b]$ un intervalle centré en un point x_ν de T et tel que :

$$]a, b[\cap T = \{x_\nu\} ;$$

$$\text{Si } b-a \geq \frac{1}{N}, \quad \int_a^b h^+(L, L', x, 2x_\nu - x) dx \geq \frac{1}{2N}.$$

$$\text{Si } b-a \leq \frac{1}{N}, \quad \int_a^b h^+(L, L', x, 2x_\nu - x) dx \geq (b-a) - \frac{N(b-a)^2}{2}$$

PROPOSITION 3. Soit $]a, b[$ un intervalle du tore ne contenant aucun point x_ν de la suite ω pour ν dans K et soit m le milieu de $]a, b[$; alors :

$$\int_a^b h^+(L, L', x, 2m - x) dx \geq \frac{N(b-a)^2}{4}.$$

PROPOSITION 4. Soient $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles du tore, disjoints et de même longueur. Soient m le milieu de l'intervalle $]b, c[$ et h le nombre de points de T dans cet intervalle ; alors :

$$\frac{1}{2} \int_{[a, b] \cup [c, d]} h^+(L, L', x, 2m - x) dx \geq N(b-a)^2 + (b-a) [h - N(d-a)]$$

Démonstration de la proposition 2.

Soit $x \in]a, x_\nu[$; posons $y = 2x_\nu - x$;

$$h^+(L, L', x, y) \geq h(L, L', x, y) \geq \min_{n' \in L'} E([x, y[, n', \omega) - \max_{n \in L} E([x, y[, n, \omega)$$

Il existe n et n' respectivement dans L et L' qui réalisent le maximum et le minimum des écarts ;

$$h^+(L, L', x, y) \geq E([x, y[, n', \omega) - E([x, y[, n, \omega) \geq A([x, y[, n', \omega) - A([x, y[, n, \omega) - (n' - n)(y - x)$$

Il résulte de l'hypothèse imposée à l'intervalle $[a, b[$ que

$$A([x, y[, n', \omega) - A([x, y[, n, \omega) \geq 1 ;$$

par ailleurs $n' - n \leq N$, d'où :

$$h^+(L, L', x, y) \geq 1 - N(y - x) .$$

Soit $x \in]x_p, b[$; comme $h(L, L', x, y) = h(L, L', y, x)$, un calcul identique donne $h^+(L, L', x, y) \geq 1 - N(x - y)$.

Pour résumer les deux cas, si x est dans l'intervalle $]a, b[$,

$$h(L, L', x, y) \geq 1 - N |y - x| ;$$

On a la minoration :

$$h^+(L, L', x, 2x_p - x) \geq 1 - 2N |x_p - x|$$

Par intégration, on obtient la proposition 2.

Démonstration de la proposition 3.

Soient $x \in]a, m[$ et $y = 2m - x$

$$h^+(L, L', x, y) \geq \min_{n \in L} E([x, y[, n, \omega) - \max_{n' \in L'} E([x, y[, n', \omega) ;$$

Soient n dans L et n' dans L' les entiers qui réalisent le minimum et le maximum des écarts ;

$$h^+(L, L', x, y) \geq (n' - n)(y - x) \geq \frac{N}{2} (y - x) = N(m - x) .$$

Soit $x \in]a, b[$; alors $h^+(L, L', x, 2m - x) \geq N |m - x|$.

Par intégration on obtient la proposition 3.

Démonstration de la proposition 4.

Soient $x \in]a, b[$ et $y = 2m - x$

$$h^+(L, L', x, y) \geq \min_{n' \in L'} E([x, y[, n', \omega) - \max_{n \in L} E([x, y[, n, \omega)$$

Soient n et n' les entiers qui réalisent le maximum et le minimum des écarts :

$$h^+(L, L', x, y) \geq A([x, y[, n', \omega) - A([x, y[, n, \omega) - (n' - n)(y - x)$$

$$h^+(L, L', x, y) \geq h - N(y - x) = h - 2N(m - x)$$

et si $x \in]a, b[\cup]c, d[$, alors :

$$h^+(L, L', x, y) \geq h - 2N |m - x|$$

et par intégration on obtient la proposition 4.

3.2 Démonstration du lemme 2 dans un cas simple.

A une partition du tore en intervalles et couples d'intervalles on sait associer une minoration

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_K(x) dx &\geq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 h_L(x) dx + \int_0^1 h_{L'}(x) dx \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int_{I_{\alpha}} h^+(L, L', x, 2m_{\alpha} - x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \int_{J_{\beta} \cup K_{\beta}} h^+(L, L', x, 2n_{\beta} - x) dx. \end{aligned}$$

Le problème est de trouver une partition du tore pour laquelle

$$\int_0^1 h_K(x) dx \geq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 h_L(x) dx + \int_0^1 h_{L'}(x) dx \right\} + \theta$$

où la quantité θ soit la plus grande possible.

Etant donné un nombre $x \in [0, 1[$, on suppose que les $\frac{N}{2}$ points de T sont isolés par x , c'est-à-dire que si on centre en chacun de ces $\frac{N}{2}$ points un intervalle de longueur x , les $\frac{N}{2}$ intervalles ainsi obtenus sont tous disjoints ; soit

($\mathcal{P}$) une partition du tore contenant au moins les $\frac{N}{2}$ intervalles précédents.

Il résulte de la proposition 2 que la contribution de ces $\frac{N}{2}$ intervalles pour déterminer θ est au moins

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \left(1 - \frac{Nx}{2} \right) \quad \text{si} \quad x \leq \frac{1}{N}.$$

Le complémentaire dans $\mathbb{T}$ des $\frac{N}{2}$ intervalles précédents est une union finie d'intervalles disjoints ; ceux-ci et les $\frac{N}{2}$ points de la suite ω , hors de T définissent ν intervalles $]a_i, b_i[$ ne contenant aucun des N points

$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+4}^{t+1}$ de ω et on a $1 \leq \nu \leq N$; on considère la partition ($\mathcal{P}$) du tore réalisée par les ν intervalles $]a_i, b_i[$ et les $\frac{N}{2}$ intervalles de longueur x ; on cherche la contribution fournie par les ν intervalles $]a_i, b_i[$ pour déterminer un minorant de θ .

Soient m_i le milieu de $]a_i, b_i[$ et λ_i sa longueur.

D'après la proposition 3 on a

$$\frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} h^+(L, L', x, 2m_i - x) dx \geq \frac{N\lambda_i^2}{8}.$$

Il intervient donc dans θ la quantité $\frac{N}{8} \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i^2$. On a

$$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i = 1 - \frac{Nx}{2}.$$

La somme des carrés est minimale quand tous les λ_i sont égaux. Donc

$$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i^2 \geq \nu \cdot \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{Nx}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{N} \left(1 - \frac{Nx}{2}\right)^2$$

d'où

$$\frac{N}{8} \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i^2 \geq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{Nx}{2}\right)^2.$$

Par suite on a

$$\theta \geq \frac{Nx}{4} \left(1 - \frac{Nx}{2}\right) + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{Nx}{2}\right)^2.$$

Posons $u = Nx$; θ est minoré par le trinôme $\varphi(u) = \frac{1}{N^2} (2-u)(3u+2)$ qu'on étudie sur l'intervalle $[0, 1]$; son maximum est donné par $\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$. Par suite si les $\frac{N}{2}$ points de T sont isolés par la distance x pour $x \in \left[\frac{2}{3N}, \frac{1}{N}\right]$ on a $\theta \geq \frac{1}{6}$.

3.3 Démonstration du Lemme 2 dans le cas général.

a) Définition d'un intervalle I .

On suppose que les $\frac{N}{2}$ points de T ne sont pas isolés par une distance $x \geq \frac{2}{3N}$; sinon, on se trouve dans le cas déjà étudié. Ces $\frac{N}{2}$ points se répartissent en groupes de points non isolés par $\frac{2}{3N}$; pour les groupes se réduisant à un seul point isolé, on centre en celui-ci un intervalle de longueur $\frac{2}{3N}$ et la contribution correspondante pour la minoration de θ est $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3N} \left(1 - \frac{2}{6}\right)$ comme dans le cas précédent.

Soit k un entier compris entre 1 et $\frac{N}{2}$ et envisageons un groupe de points de T , on isolés par $\frac{2}{3N}$ et formé exactement de k points ; ceci implique que les distances $x_{\nu_{i+1}} - x_{\nu_i}$ entre points consécutifs sont toutes inférieures à $\frac{2}{3N}$ et de plus quand on porte la distance $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3N}$ de part et d'autre des points extrêmes x_{ν_1} et x_{ν_k} on ne rencontre pas de points de T ; soit I l'intervalle ainsi obtenu ; sa longueur est $\sum_{i=1}^{k-1} (x_{\nu_{i+1}} - x_{\nu_i}) + \frac{2}{3N}$.

b) Partition de I en intervalles $(I_\alpha)_\alpha$ et couples d'intervalles $(I_\beta, K_\beta)_\beta$.

Soient $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_{k-1} \leq \frac{2}{3N}$ les distances ordonnées des intervalles $(x_{\nu_i}, x_{\nu_{i+1}})$. Par commodité, nous posons $\ell_k = \frac{2}{3N}$ de sorte que la longueur de I est $\sum_{i=1}^k \ell_i$. Il existe une partition de I en k intervalles de longueur ℓ_1 , $(k-1)$ paires d'intervalles de longueur $\frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, ..., $(k-p+1)$ paires d'intervalles de longueur $\frac{\ell_p - \ell_{p-1}}{2}$, ..., 1 paire d'intervalles de longueur $\frac{\ell_k - \ell_{k-1}}{2}$.

On peut, sans nuire à la généralité de la démonstration supposer que $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \dots < \ell_{k-1} < \ell_k = \frac{2}{3N}$, et définir la partition de la manière suivante :

1 re étape : En chacun des points x_{ν_i} , on centre un intervalle de longueur ℓ_1 ; ceci détermine k intervalles tous disjoints sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui donne $(k-1)$ intervalles fermés $I_j^{(1)}$ dont la somme des longueurs est $k\ell_1$.

2 me étape : On agrandit chacun des $I_j^{(1)}$ en portant de part et d'autre la longueur $\frac{1}{2}(\ell_2 - \ell_1)$; ce qui fait au total $(k-1)$ paires d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(\ell_2 - \ell_1)$. Les $(k-1)$ intervalles $I_j^{(1)}$ sont agrandis en $(k-1)$ intervalles $I_j^{(2)}$ tous disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune ; ce qui détermine au total $(k-2)$ intervalles fermés $I_j^{(2)}$ disjoints dont la somme des longueurs est $k\ell_1 + (k-1)(\ell_2 - \ell_1)$.

3 me étape : On agrandit chacun des intervalles $I_j^{(2)}$ en portant de part et d'autre la longueur $\frac{1}{2}(\ell_3 - \ell_2)$; d'où $(k-2)$ nouveaux intervalles $I_j^{(2)}$ disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui donne $(k-3)$ intervalles fermés disjoints $I_j^{(3)}$ dont la somme des longueurs est $k\ell_1 + (k-1)(\ell_2 - \ell_1) + (k-2)(\ell_3 - \ell_2) = \ell_1 + \ell_2 + (k-2)\ell_3$.

p me étape : Si on a $(k-p+1)$ intervalles fermés disjoints $I_j^{(p-1)}$ dont la somme des longueurs est $k\ell_1 + (k-1)(\ell_2 - \ell_1) + \dots + (k-p+2)(\ell_{p-1} - \ell_{p-2})$, comme on a supposé $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{p-1} < \ell_p < \dots < \ell_{k-1} < \ell_k$, on peut agrandir les $(k-p+1)$ intervalles $I_j^{(p-1)}$ en $(k-p+1)$ intervalles $I_j^{(p-1)}$ en portant de chaque côté la longueur $\frac{1}{2}(\ell_p - \ell_{p-1})$.

Les $I_j^{(p-1)}$ sont encore tous disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui fait $(k-p)$ intervalles fermés disjoints dont la somme des longueurs est

$$k\ell_1 + (k-1)(\ell_2 - \ell_1) + \dots + (k-p+1)(\ell_p - \ell_{p-1}) = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{p-1} + (k-p+1)\ell_p.$$

L'opération s'achève après k étapes ; les k intervalles de la première étape et les paires d'intervalles introduites dans les étapes suivantes réalisent une partition de I ; si on a $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_{k-1} \leq \ell_k$ l'opération précédente est encore possible et comporte moins d'étapes, en particulier si $\ell_{p-1} = \ell_p$, on passe directement de la $(p-1)$  me étape à la $(p+1)$  me.

c) Minoration associée à cette partition de I .

Notons $(I_\alpha)_\alpha$ les k intervalles de longueur ℓ_1 et $(J_\beta, K_\beta)_\beta$ les paires d'intervalles qui interviennent dans la partition de I ; on cherche un minorant de la quantité

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int_{I_{\alpha}} h^+(L, L', x, 2m_{\alpha} - x) dx + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \int_{J_{\beta} \cup K_{\beta}} h^+(L, L', x, 2n_{\beta} - x) dx.$$

Il résulte de la proposition 2 que

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int_{I_{\alpha}} h^+(L, L', x, 2m_{\alpha} - x) dx \geq \frac{k}{2} (\ell_1 - \frac{N\ell_1^2}{2}).$$

Soit $[a_i, b_i]$, $[c_i, d_i]$ un couple d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(\ell_p - \ell_{p-1})$ intervenant dans la partition de I soient m_i le milieu de $[b_i, c_i]$ et h_i le nombre de points de T dans $[b_i, c_i]$. Il résulte de la proposition 4 que

$$\frac{1}{2} \int_{[[a_i, b_i] \cup [c_i, d_i]]} h^+(L, L', x, 2m_i - x) dx \geq \frac{N}{4} (\ell_p - \ell_{p-1})^2 + \left(\frac{\ell_p - \ell_{p-1}}{2} \right) [h_i - N(d_i - a_i)]$$

Aux $(k-p+1)$ paires d'intervalles de longueur $\frac{\ell_p - \ell_{p-1}}{2}$ correspond le minorant

$$(k-p+1) \frac{N}{4} (\ell_p - \ell_{p-1})^2 + \left(\frac{\ell_p - \ell_{p-1}}{2} \right) \sum_{i=1}^{k-p+1} [h_i - N(d_i - a_i)]$$

On a par ailleurs $\sum_{i=1}^{k-p+1} h_i = k$ et

$$\sum_{i=1}^{k-p+1} (d_i - a_i) = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{p-1} + (k-p+1)\ell_p.$$

Le minorant relatif à ces paires d'intervalles est donc

$$(k-p+1) \frac{N}{4} (\ell_p - \ell_{p-1})^2 + \frac{(\ell_p - \ell_{p-1})}{2} [k - N \{ \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{p-1} + (k-p+1)\ell_p \}]$$

Le minorant associé à la partition de I est donc

$$\frac{k\ell_1}{2} \left(1 - \frac{N\ell_1}{2} \right) + \frac{N}{4} \sum_{p=2}^k (k-p+1)(\ell_p - \ell_{p-1})^2 + \sum_{p=2}^k \left(\frac{\ell_p - \ell_{p-1}}{2} \right) [k - N \{ \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{p-1} + (k-p+1)\ell_p \}]$$

Ce minorant dépend seulement des longueurs $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1}$ et non de l'ordre des points x_{ν_i} ; on peut donc le noter $f_k(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1})$.

On remarque que si $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{k-1} = \ell_k = \frac{2}{3N}$ on a $f_k(\frac{2}{3N}, \frac{2}{3N}, \dots, \frac{2}{3N}) = \frac{k}{2} \frac{2}{3N} (1 - \frac{2}{6})$, résultat qu'on peut obtenir directement.

d) Une propriété des fonctions f_k .

La distance critique $\frac{2}{3N}$ est notée ℓ dans ce qui suit.

PROPOSITION. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Si

$$0 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_{k-1} \leq \ell$$

alors

$$f_k(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1}) \geq f_k(\ell, \ell, \dots, \ell)$$

La démonstration se fait par récurrence sur k ; pour $k = 2$ on a trivialement $f_2(\ell_1) - f_2(\ell) = \frac{N}{4}(\ell - \ell_1)^2$, donc $f_2(\ell_1) \geq f_2(\ell)$. Pour k supérieur à 2, étant donné un groupe de k points $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_k}$ non isolés par la distance critique ℓ , la contribution de ces k points est $f_k(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1})$; il existe un indice j entre 1 et $k-1$ tel que la distance entre x_{ν_1} et x_{ν_2} soit exactement ℓ_j ; si on éloigne suffisamment le point x_{ν_1} des $(k-1)$ autres points x_{ν_i} , jusqu'à ce qu'il soit isolé par la distance ℓ , la contribution du nouveau système de k points ainsi obtenu est $\frac{1}{2}(\ell - \frac{N\ell^2}{2}) + f_{k-1}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{j-1}, \ell_{j+1}, \dots, \ell_{k-1})$.

Etablissons la minoration

$$f_k(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1}) \geq \frac{1}{2}(\ell - \frac{N\ell^2}{2}) + f_{k-1}(\ell_1, \dots, \ell_{j-1}, \ell_{j+1}, \dots, \ell_{k-1})$$

ce qui permet de démontrer la proposition par une simple récurrence.

Envisageons la différence :

$$\delta_j = f_k(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1}) - \left\{ \frac{1}{2}(\ell - \frac{N\ell^2}{2}) + f_{k-1}(\ell_1, \dots, \ell_{j-1}, \ell_{j+1}, \dots, \ell_{k-1}) \right\}.$$

Un calcul élémentaire montre que pour tout $j = 1, 2, \dots, k-1$ on a $\delta_j = \frac{N}{4}(\ell - \ell_j)^2$. Il suffit pour cela d'expliciter les sommations qui interviennent dans les expressions $f_k(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1})$ et $f_{k-1}(\ell_1, \dots, \ell_{j-1}, \ell_{j+1}, \dots, \ell_{k-1})$. Comme la contribution des k points ne dépend pas de leur ordre, mais seulement des distances $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-1}$, il suffit pour établir la propriété de montrer l'égalité $\delta_j = \frac{N}{4}(\ell - \ell_j)^2$ pour une valeur particulière arbitraire de j entre 1 et $k-1$, par exemple pour les valeurs extrêmes $j = 1$ et $j = k-1$ qui facilitent quelque peu le calcul.

e) Démonstration du lemme 2.

Si les $\frac{N}{2}$ points de T ne sont pas isolés par une distance $x \geq \frac{2}{3N}$ soit un groupe de k points de T non isolés par $\frac{2}{3N}$. La contribution de ces k points pour la minoration de θ est au moins égale à ce qu'elle serait s'ils étaient isolés par $\frac{2}{3N}$ d'après d) et la portion de tore utilisée pour les intégrations est $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{k-1} + \ell \leq k\ell$ et ceci est vrai pour tout entier k compris entre 1 et $\frac{N}{2}$. La contribution pour la minoration de θ ne provenant pas des $\frac{N}{2}$ points de T est au moins égale à ce qu'elle serait si ces $\frac{N}{2}$ points étaient isolés, et donc $\theta \geq \frac{1}{6}$.

Remarque. Dans la démonstration du lemme 2, k est un ensemble de 4^{t+1} entiers consécutifs dont L et L' sont le premier et le dernier quart. On peut choisir pour k un ensemble de a^{t+1} entiers consécutifs, et pour obtenir la meilleure minoration, on est conduit d'une part à prendre pour L et L' les a^t premiers et les a^t derniers éléments de K , et d'autre part à prendre $a = 4$; le choix de a entier n'est pas indispensable à condition de prendre $K = \{p+1, \dots, [p+a^{t+1}]\}$.

On obtient alors $\sup_{a \geq 2} \frac{a-2}{8(a-1)\text{Log } a}$ comme minorant au lieu de $\frac{1}{12 \text{ Log } 4}$ et le gain ne porte que sur la 5ème décimale.

REFERENCES

- [1] FAURE H. «*Discrépance des suites associées à un système de numération*». (à paraître).
- [2] KUIPERS L. et NIEDERREITER H. «*Uniform distribution of sequences*». J. Wiley and sons, p. 107-109, 1974.
- [3] ROTH K.F. «*On irregularities of distribution*». Mathematika I., 1954.
- [4] SCHMIDT W.M. «*Irregularities of distribution VII*». Acta Arith, Warszawa, t. 21, p. 45-60, 1972.
- [5] VAN AARDENNE-EHRENFEST T. «*Proof of the impossibility of a just distribution*». Indag. Math. 11, p. 264-269, 1949.
- [6] VAN DER CORPUT J.G. «*Verteilungsfunktionen*». Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 38, 1935.

(Manuscrit reçu le 23 septembre 1979)