ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE M. SUQUET

Un espace fonctionnel pour les équations de la plasticité

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 1, nº 1 (1979), p. 77-87

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_77_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol N°1 - Page 77 à 87

UN ESPACE FONCTIONNEL POUR LES EQUATIONS DE LA PLASTICITE

Pierre M. Suquet (1)

Mécanique Théorique, Université Paris VI, 4 place Jussieu, Tour 66 - 75230 Paris Cedex 05.

Résumé : On étudie dans ce travail un espace fonctionnel dont l'introduction s'est avérée nécessaire lors de travaux sur la Plasticité. On montre, pour les éléments de cet espace, l'existence d'une trace sur le bord de l'ouvert considéré, et la possibilité de discontinuités à l'intérieur de l'ouvert. Enfin on donne un théorème d'injection compacte du type Gagliardo Sobolev.

Abstract : This work examins a functional space which has been introduced while studying Plasticity problems. We show, for the elements of this space, the existence of a trace on the boundary of the open set considered, and the possibility of discontinuities in the interior of the domain. Finally we give a theorem of compact embedding of Gagliardo Sobolev type.

Introduction

Dans ce travail on étudie un espace fonctionnel qui s'est introduit naturellement lors de travaux sur la Plasticité : H. MATTHIES et G. STRANG [4], P. SUQUET [11]. Cet espace est formé de champs de vecteurs dont le tenseur déformation est un tenseur de mesures bornées sur Ω :

$$BD(\Omega) = \left\{ u,\ u = (u_i),\ u_i \in L^1(\Omega)\ ; \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in M^1(\Omega),\ \ 1 \leqslant i,j \leqslant N \right\}$$

On montre au paragraphe 2, l'existence d'une trace dans $((L^1(\partial\ \Omega))^N)$ pour les éléments de cet espace :

THEOREME 1. *Soit Ω un ouvert de frontière C^1. Il existe une application $\gamma\_$ linéaire surjective de $BD(\Omega)$ sur $((L^1(\partial\ \Omega))^N)$, telle que si on note pour $u \in BD(\Omega)$, $\gamma\_ u = u^-$, on ait*

(1.1) $$\int_\Omega u_i\, \varphi_{ij,j}\, dx + \int_\Omega \varphi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u) = \int_{\partial\Omega} u_i^-\, \varphi_{ij}\, n_j\, d\sigma\ ,\ \forall\varphi \in (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))_S^{N^2}$$

(cf notations au paragraphe 2).

De plus lorsque u est régulière ($C^o(\overline{\Omega})$ par exemple) u^- coïncide avec $u\big|_{\partial\Omega}$.

Ce théorème est très voisin d'un résultat de M. MIRANDA [5] qui établit l'existence de traces $L^1(\partial\,\Omega)$ pour les fonctions à variation bornée ; il doit être compris dans le même sens : l'application trace n'est pas définie comme le prolongement par continuité à tout l'espace de l'application trace, connue pour les fonctions régulières. La raison en est simple : les fonctions $[\mathscr{D}(\overline{\Omega})]^N$ ne sont pas denses dans BD(Ω) pour la topologie forte de ce dernier :

(1.2) $$\| u \|_{BD(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \| u_i \|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N \| \epsilon_{ij}(u) \|_{M^1(\Omega)}$$

La notion plus faible de trace introduite par MIRANDA est indissociable de la formule de Green (1.1) et doit être comprise dans le sens des limites à droite et limites à gauche des fonctions à variation bornée en dimension 1 : lors de l'étude de la régularité locale des éléments de BD(Ω), nous remarquerons qu'un champ de vecteurs peut avoir deux traces différentes de part et d'autre d'une même surface orientable. L'application trace ainsi définie, n'est pas une fonction continue de la surface sur laquelle on la considère.

Dans la dernière section, on donne un résultat d'injection compacte de BD(Ω) dans $(L^p(\Omega))^N$, $p < N/(N-1)$.

Note : Le théorème 1 a été énoncé pour la première fois par G. STRANG et R. TEMAM [9], qui étendaient un résultat de [10]. Nous présentons ici une démonstration «self consistent» différente de la leur.

Remerciements : Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide dynamique de F. MURAT.

2. THEOREMES DE TRACE

NOTATIONS : Ω est un ouvert borné de R^N, dont la frontière $\partial\,\Omega$ est de classe C^1. La normale à $\partial\Omega$ est notée $\vec{n}$.

- $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact dans Ω.
- $C_c^o(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω, nulles sur $\partial\,\Omega$.
- $M^1(\Omega)$ est l'espace des mesures bornées sur Ω.

Précisément :

(2.1) $$(\forall \mu \in M^1(\Omega))\ (\exists C > 0)\ (\forall f \in C_c^o(\Omega))\quad |\mu(f)| \leqslant C\, \| f \|_\infty$$

Si on note $\| \mu \|_{M^1(\Omega)}$ la plus petite constante C intervenant dans (2.1), l'espace $M^1(\Omega)$, muni de la norme $\| . \|_{M^1(\Omega)}$ est un espace de Banach (BOURBAKI [1] p. 58) non réflexif.

On note $L^1(\Omega, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables pour la mesure μ, et on fait la convention d'écriture suivante :

$$(\forall f \in L^1(\Omega,\mu)) \qquad \mu(f) = \int_\Omega f \, d\mu$$

- Le tenseur des déformations d'un champ vectoriel u est donné par :

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- On rappelle la définition de $BD(\Omega)$:

$$BD(\Omega) = \left\{ u \,/\, u = (u_i),\ u_i \in L^1(\Omega)\ ;\ \epsilon_{ij}(u) \in M^1(\Omega) \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant N \right\}$$

Muni de la norme (1.2), l'espace $BD(\Omega)$ est un espace de Banach non réflexif.

- On fait la convention de sommation sur l'indice répété :

$$X_i\, Y_i \qquad \text{vaut pour} \quad \sum_{i=1}^{N} X_i\, Y_i$$

- Si Z est un espace vectoriel de tenseurs, Z_s désigne le sous-espace de Z formé des tenseurs symétriques.

Preuve du théorème 1 : Pour alléger les notations, la démonstration est faite en dimension N = 2. Elle se transpose sans difficulté au cas de la dimension supérieure.

L'espace $BD(\Omega)$ est local, i.e., si $\varphi \in [\mathscr{D}(\Omega)]^N$, alors $\varphi \,.\, u \in BD(\Omega)$. Cette propriété permet de ramener l'étude de u dans Ω, à celle de $\varphi \,.\, u$ dans chacune des cartes locales qui forment un recouvrement de $\partial\Omega$.

Dans un premier temps on suppose que l'équation de Ω dans la carte locale considérée, est :

(2.2)
$$\Omega = \left\{ (x_1,x_2),\ x_1 \in \Delta,\ a(x_1) < x_2 < a(x_1) + \beta \right\}$$

où Δ est un ouvert borné de R, β un réel > 0, et a une fonction $C^1(\overline{\Delta})$ qui vérifie :

(2.3)
$$\operatorname*{Inf}_{x_1 \in \overline{\Delta}} \left| \frac{da}{dx_1}(x_1) \right| \geqslant C > 0$$

On note :

$$\Omega_\epsilon = \left\{ (x_1, x_2),\ x_1 \in \Delta,\ a(x_1) + \epsilon < x_2 < a(x_1) + \beta \right\}$$

On définit un changement de carte par :

$$y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = x_2 - a(x_1)$$

La fonction vectorielle u est notée $\tilde{u}$ en variables y :

$$\tilde{u}(y_1, y_2) = u(x_1, x_2)$$

Alors :

$$\text{(2.4)} \qquad \int_\Omega u(x)dx = \int_0^\beta dy_2 \int_\Delta \tilde{u}(y_1, y_2) dy_1$$

Il résulte du théorème de Fubini que pour presque tout $\epsilon > 0$, l'application :

$$y_1 \longrightarrow \tilde{u}(y_1, \epsilon)$$

est dans $(L^1(\Delta))^2$. Par suite, en vertu de (2.4), on a :

$$\text{(2.5)} \qquad u\big|_{\partial \Omega_\epsilon} \in (L^1(\partial \Omega_\epsilon))^2 \qquad \text{p.p. } \epsilon > 0$$

L'idée du raisonnement qui suit est de montrer que, lorsque ϵ tend vers 0 en vérifiant (2.5), la suite $\tilde{u}(.\,, \epsilon)$ (i.e. $u\big|_{\partial \Omega_\epsilon}$) est convergente dans $(L^1(\Delta))^2$ et que sa limite u^- satisfait (1.1).

1ère étape : On montre que pour presque tout $\epsilon > 0$

$$\text{(2.6)} \qquad \int_{\Omega_\epsilon} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\Omega_\epsilon} \varphi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u) = \int_{\partial\Omega_\epsilon} u_i^- \varphi_{ij}\, n_j\, d\sigma \qquad (\forall \varphi \in (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^4_S)$$

Pour cela, la définition de $\epsilon_{ij}(u)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ donne :

$$\text{(2.7)} \qquad \int_\Omega u_i \Psi_{ij,j}\, dx + \int_\Omega \Psi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u) = 0 \qquad (\forall \Psi \in (\mathscr{D}(\Omega))^4_S)$$

On étend (2.7) par continuité aux éléments Ψ de $(C^0_c(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega))^4_S$.

Soit ρ la fonction numérique définie par :

$$\rho(t) = 0 \ \text{ si } t \leqslant 0 \,;\, \rho(t) = t \ \text{ si } t \in [0,1] \,;\, \rho(t) = 1 \ \text{ si } t \geqslant 1$$

On pose : $\rho^n_\epsilon(x) = \rho(n(x_2 - a(x_1) - \epsilon))$.

En prenant $\Psi = \varphi \rho^n_\epsilon$ comme fonction test dans (2.7), on obtient :

(2.8) $$\int_{\Omega} u_i \varphi_{ij,j} \rho_\epsilon^n \, dx + \int_{\Omega} \varphi_{ij} \, \rho_\epsilon^n \, d\epsilon_{ij}(u) = - \int_{\Omega} u_i \varphi_{ij} \frac{\partial \rho_\epsilon^n}{\partial x_j} \, dx$$

Si on note $\mathcal{X}_{\Omega_\epsilon}$ la fonction caractéristique de Ω_ϵ, il est clair que :

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_\epsilon^n(x) = \mathcal{X}_{\Omega_\epsilon}(x) \quad \text{avec} \quad |\rho_\epsilon^n(x)| \leqslant \mathcal{X}_{\Omega_\epsilon}(x) \qquad (\forall x \in \Omega)$$

Les mesures $u_i \varphi_{ij,j} \, dx$ et $d\epsilon_{ij}(u)$ étant toutes deux des mesures bornées, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir par exemple Rudin [7] p. 26) que le premier membre de (2.8) a pour limite :

(2.9) $$\int_{\Omega_\epsilon} u_i \, \varphi_{ij,j} \, dx + \int_{\Omega_\epsilon} \varphi_{ij} \, d\epsilon_{ij}(u)$$

Par définition de ρ_ϵ^n, le second membre de (2.8) vaut :

$$n \int_\epsilon^{\epsilon + \frac{1}{n}} dy_2 \int_\Delta \tilde{u}_i(y) \, \tilde{\varphi}_{ij}(y) \, \tilde{n}_j(y_1) \, S(y_1) \, dy_1$$

où $S(y_1) = \left(1 + \left|\frac{da}{dx_1}\right|^2\right)^{1/2}$.

Soit $f(y_2) = \int_\Delta \tilde{u}_i(y_1, u_2) \;\; \tilde{\varphi}_{ij}(y_1, y_2) \, \tilde{n}_j(y_1) \, S(y_1) \, dy_1$.

Alors $f \in L^1([0,\beta])$ et ses points de Lebesgue sont ceux de la fonction

(2.10) $$y_2 \longrightarrow \int_\Delta \tilde{u}_i(y_1, y_2) \, \tilde{n}_j(y_1) \, S(y_1) dy_1$$

En un point de Lebesgue ϵ de f (indépendant de φ d'après (2.10)) :

(2.11) $$\lim_{n \to +\infty} \quad n \int_\epsilon^{\epsilon + \frac{1}{n}} f(y_2) \, dy_2 = f(\epsilon) = \int_{\partial \Omega_\epsilon} u_i \, \varphi_{ij} \, n_j \, d\sigma$$

La conjonction de (2.9) et (2.11) prouve (2.6).

2ème étape : On montre que la suite $\tilde{u}_2(. , \epsilon)$ est de Cauchy dans $L^1(\Delta)$ lorsque ϵ tend vers 0. Pour cela, soit $(\epsilon_n)_{n \in N}$ une suite de réels positifs tendant vers 0 en vérifiant (2.5). Il résulte de (2.6) que :

(2.12) $$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{\epsilon_n} - \Omega_{\epsilon_m}} u_i \varphi_{ij,j} \, dx + \int_{\Omega_{\epsilon_n} - \Omega_{\epsilon_m}} \varphi_{ij} \, d\epsilon_{ij}(u) \, dx = \\ &= \int_\Delta \left[\tilde{u}_i(y_1, \epsilon_n) \, \tilde{\varphi}_{ij}(y_1, \epsilon_n) - \tilde{u}_i(y_1, \epsilon_m) \, \tilde{\varphi}_{ij}(y_1, \epsilon_m) \right] \tilde{n}_j(y_1) \, S(y_n) dy_1 \end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathscr{D}(\Delta)$. on choisit $\varphi = (\varphi_{ij})$, $\varphi_{ij} = 0$ sauf $\varphi_{22} = \beta(y_1) \dfrac{d\tilde{a}}{dx_1}(y_1)$.

Alors $\varphi_{ij,j} = 0$, $\| \varphi \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C \, \| \beta \|_{L^\infty(\Delta)}$. De plus, d'après (2.12) :

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n}-\Omega_{\epsilon_m}} \varphi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u) = \int_{\Delta}\left[\widetilde{u}_2(y_1,\epsilon_n)-\widetilde{u}_2(y_1,\epsilon_m)\right] \beta(y_1) \left| \frac{d\widetilde{a}}{dx_1}(y_1)\right|^2 dy_1$$

En vertu de l'hypothèse (2.3) on obtient :

$$\text{(2.13)} \qquad \| \widetilde{u}_2(.\,,\epsilon_n)-\widetilde{u}_2(.\,,\epsilon_m)\|_{L^1(\Delta)} \leq C \int_{\Omega_{\epsilon_n}-\Omega_{\epsilon_m}} d|\epsilon_{ij}(u)|$$

Le second membre de (2.13) est une suite de Cauchy d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. La suite $\widetilde{u}_2(\,.\,,\epsilon_n)$ converge donc vers un élément $\widetilde{u_2^-}$ de $L^1(\Delta)$. On vérifie que $\widetilde{u_2^-}$ est indépendant de la suite ϵ_n choisie.

3ème étape : D'après l'hypothèse (2.3) l'application a est inversible.

On pose : $\hat{x}_2 = x_1$ $\qquad \hat{x}_1 = x_2$

$\hat{u}_2(\hat{x}) = u_1(x)$ $\qquad \hat{u}_1(\hat{x}) = u_2(x)$

L'équation de $\partial\Omega$ dans les nouvelles coordonnées est :

$$\hat{x}_2 = a^{-1}(\hat{x}_1)$$

a^{-1} vérifie l'hypothèse (2.3) (car $a \in C^1(\Delta)$) et $\hat{u} \in \widehat{BD}(\Omega)$ espace défini dans les coordonnées $\hat{x}$.

En appliquant le résultat de la 2ème étape à $\hat{u}$, on montre que $\hat{u}_2 = u_1$ admet une trace dans $L^1(\partial\Omega)$ définie comme limite de u_1 lorsque ϵ tend vers 0. Il est alors facile, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, de passer à la limite dans (2.6) et d'obtenir (1.1), dans le cas d'une carte locale (2.2) vérifiant l'hypothèse (2.3).

Il est toujours possible, par une rotation, de ramener une carte locale à la forme (2.2). Puis en vertu de la continuité C^1 de $\partial\Omega$, il est toujours possible de réaliser l'hypothèse (2.3), quitte à subdiviser la carte locale initiale.

Mais lorsqu'on effectue une rotation sur les coordonnées, le champ u qui est dans $BD(\Omega)$ pour les variables initiales, n'est plus nécessairement dans $BD(\Omega)$ pour les variables finales. Cependant si on note T la rotation d'axes, on vérifie que si u est dans $BD(\Omega)$ pour les variables x, Tu est dans $BD(\Omega)$ pour les variables Tx. T étant une bijection, il suffit alors de montrer le théorème 1 dans la carte locale considérée, pour Tu.

Par recollement des cartes on déduit l'existence de u^- et la formule (1.1) pour Ω tout entier. Cette formule de Green montre l'unicité de u^-. Par conséquent la définition de u^- est indépendante des systèmes de cartes locales et de coordonnées choisis ; l'application γ_- est linéaire.

Surjectivité de γ- : Un résultat de GAGLIARDO [2] assure que l'application trace est surjective de $W^{1,1}(\Omega)$ sur $L^1(\partial\Omega)$. Or $BD(\Omega)$ contient $(W^{1,1}(\Omega))^N$, et lorsque u appartient à $(W^{1,1}(\Omega))^N$, $\gamma_- u$ coïncide (unicité de u^-), avec la trace de u sur $\partial\Omega$ définie de façon plus forte [3] . γ_- est donc surjective de $BD(\Omega)$ sur $L^1(\partial\Omega)^N$.

Continuité de γ_- : La continuité de γ_- de $BD(\Omega)$ fort dans $(L^1(\partial\Omega))^N$ fort est énoncée dans [9]. Remarquons toutefois que γ_- n'est pas continue de $BD(\Omega)$ faible $*$ dans $(L^1(\partial\Omega))^N$ muni d'une topologie faible. Ceci tient à la non réflexivité de $BD(\Omega)$. Considérons l'exemple suivant : en dimension 1, l'ouvert Ω étant $]0,1[$, on définit une suite de fonctions u_n de $BD(\Omega)$ par :

$$u_n(x) = nx \qquad \text{si } x \in]0,1/n], \qquad u_n(x) = 1 \qquad \text{si } x \in [1/n, 1[$$

Alors $\| u_n \|_{BD} = 2$ et $u_n(0) = 0$.

La suite $(u_n)_{n\in N}$ converge dans $BD(\Omega)$ faible $*$ vers la fonction identiquement égale à 1 sur Ω, dont la trace $u^-(0)$ est 1 et non 0 : le sous-espace vectoriel de $BD(\Omega)$: $\{u \in BD(\Omega),\ u^-(0) = 0\}$ est fortement fermé, mais non fermé pour la topologie faible $*$ de $BD(\Omega)$.

Régularité locale des éléments de $BD(\Omega)$: On s'intéresse à la régularité de u à l'intérieur de Ω : on peut supposer u à support compact dans Ω. On se donne une partition de Ω en deux composantes ouvertes non vides Ω_- et Ω_+, dont la frontière commune $S = \partial\Omega_- \cap \partial\Omega_+$ est supposée être localement une variété orientable de classe C^1 et de dimension (N-1).

La normale $\vec{\nu}$ à S est orientée de Ω_- vers Ω_+. Considérons la restriction de u à Ω_- : $u|_{\Omega_-} \in BD(\Omega_-)$. On déduit du théorème 1, l'existence de $u^- \in (L^1(S))^N$, tel que :

$$\int_{\Omega_-} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\Omega_-} \varphi_{ij}\, d\,\epsilon_{ij}(u) = \int_S u_i^- \varphi_{ij}\, \nu_j\, d\sigma \qquad (\forall \varphi \in (\mathscr{D}(\bar{\Omega}))_S^{N^2}) \tag{2.14}$$

(Rappel : $u = 0$ sur $\partial\Omega$).

Le même raisonnement appliqué à Ω_+ montre qu'il existe $u^+ \in (L^1(S))^N$ vérifiant :

$$\int_{\Omega_+} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\Omega_+} \varphi_{ij}\, d\,\epsilon_{ij}(u) = -\int_S u_i^+ \varphi_{ij} \nu_j\, d\sigma \tag{2.15}$$

Puisque u est à support compact dans Ω, on a :

$$\int_{\Omega} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\Omega} \varphi_{ij}\, d\,\epsilon_{ij}(u) = 0 \tag{2.16}$$

Par différence de (2.16) et (2.15), on obtient :

$$\int_{\Omega_-} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\overline{\Omega}_-} \varphi_{ij}\, d\,\epsilon_{ij}(u) = \int_S u_i^+ \varphi_{ij} \nu_j\, d\sigma$$

Ces résultats sont résumés dans la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : *Soit S un sous-ensemble de Ω, localement une variété orientable de classe C^1 et de dimension*

(N-1), séparant Ω en deux composantes ouvertes non vides Ω_- et Ω_+. Il existe deux applications γ_- et γ_+ linéaires et surjectives de BD(Ω) sur $(L^1(S))^N$ satisfaisant, pour $\varphi \in (\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^{N^2}_S$:

$$\int_{\Omega_-} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\Omega_-} \varphi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u) = \int_S u_i^- \varphi_{ij} \nu_j \, d\sigma$$

$$\int_{\Omega_-} u_i \varphi_{ij,j}\, dx + \int_{\bar{\Omega}_-} \varphi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u) = \int_S u_i^+ \varphi_{ij} \nu_j \, d\sigma$$

$$u^- = \gamma_- u \qquad , \qquad u^+ = \gamma_+ u$$

u^- et u^+ sont appelées trace interne et trace externe de u sur S relativement à Ω_- (pour Ω_+, u^+ est la trace interne de u). Lorsque u est régulière ($(W^{1,1}(\Omega))^N$ par exemple) u^- et u^+ coïncident toutes deux avec la trace usuelle de u sur S.

REMARQUE : Le saut $u^+ - u^-$ de u sur S est donné par :

$$\int_S (u_i^+ - u_i^-)\ \Psi \, d\sigma = \int_S \varphi_{ij}\, d\epsilon_{ij}(u)$$

où φ vérifie : $\varphi_{jk}\ \nu_k = \Psi \delta_{ij}$ (δ indice de Kronecker).

Ainsi la masse possible de $\epsilon_{ij}(u)$ sur S provoque une discontinuité de u à la traversée de S.

Commentaires : 1 - En ce qui concerne les inconvénients de BD(Ω), nous avons déjà signalé sa non réflexivité. Remarquons aussi que $(\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^N$ n'est pas dense dans BD(Ω) fort : en dimension 1, l'adhérence de $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ dans BD(Ω) fort est $W^{1,1}(\Omega)$, lequel ne contient que des fonctions continues, et est donc différent de BD(Ω).

2 - On pourrait être tenté de croire que BD(Ω) est égal à $(BV(\Omega))^N$, où :

$$BV(\Omega) = \left\{ f \;\middle|\; f \in L^1(\Omega)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in M^1(\Omega)\,,\ 1 \leqslant i \leqslant N \right\}$$

Ce résultat est faux ([4]) ; on a seulement $(BV(\Omega))^N \subset BD(\Omega)$.

3. INJECTIONS DU TYPE GAGLIARDO-SOBOLEV

PROPOSITION 2 : *a) Soit p un réel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant N/(N-1)$. Alors BD($\Omega$) est inclus dans $(L^p(\Omega))^N$ avec injection continue.*

b) L'injection de BD(Ω) dans $(L^p(\Omega))^N$ est compacte pour p vérifiant $1 \leqslant p < N/(N-1)$.

Preuve : La partie a) de la proposition est prouvée dans G. STRANG et R. TEMAM [9].

b) Soit B la boule unité de BD(Ω). Il est nécessaire et suffisant pour s'assurer que B est relativement compacte dans $(L^p(\Omega))^N$ de vérifier (cf LIONS [3] p. 54) :

1) $(\forall \epsilon_1 > 0)\ (\exists\, K \subset \Omega)$ K compact tel que :

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega - K} |u_i|^p\, dx \leqslant \epsilon_1 \qquad (\forall u \in B)$$

2) $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists\, \eta > 0)\ |h| < \eta \Rightarrow \| \tau_h \bar{u} - \bar{u} \|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} < \epsilon$

où $\bar{u}$ désigne le prolongement de u par 0 en dehors de Ω, et $\tau_h \bar{u} = \bar{u}(x-h)$.

Pour vérifier 1) on remarque que :

$$\int_{\Omega - K} |u_i|^p\, dx \leqslant \left(\int_{\Omega - K} |u_i(x)|^{N'} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left[\text{mes}\,(\Omega - K) \right]^{\frac{1}{q'}}$$

où $N' = N/(N-1)$, $q = N'/p$, $q' = q/(q-1)$.

Puisque $p < N'$, le réel q est strictement supérieur à 1, et q' est fini. Par un choix convenable de K la mesure de $\Omega - K$ peut être rendue arbitrairement petite (Ω est borné).

Pour vérifier 2) on remarque qu'il existe d'après 1) un compact K_1 tel que :

$$\| u \|_{(L^p(\Omega - K_1))^N} < \epsilon_1 / 3 \qquad (\forall u \in B)$$

Soit K un compact vérifiant $K_1 \subset \overset{\circ}{K} \subset K \subset \Omega$. On pose $\eta = 1/2 \,\text{dist}\,(K, K_1)$. Alors si x n'appartient pas à K, et si $|h| < \eta$, $x - h$ n'appartient pas à K_1 et donc :

$$\| \tau_h \bar{u} \|_{(L^p(\Omega - K))^N} < \epsilon_1 / 3$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi = 1$ sur K, $|\varphi| \leqslant 1$ sur Ω. Alors :

$$\| \tau_h \bar{u} - \bar{u} \|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \leqslant \| \tau_h(\varphi \bar{u}) - \varphi \bar{u} \|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} + 2 \| u \|_{(L^p(\Omega - K))^N} + 2 \| \tau_h \bar{u} \|_{(L^p(\Omega - K))^N}$$

Les deux derniers termes sont majorés par $\epsilon_1 / 3$. Pour majorer le premier on utilise un lemme (L. PARIS [6]).

LEMME : *Soit $u \in BD(\Omega)$. Alors u satisfait une condition de Lipschitz d'ordre $s < 1$ dans $(L^p_{loc}(\Omega))^N$ pour $1 \leqslant p < N'$.*

Utilisation du lemme : Soit K_2 = support de φ . Il existe d'après le lemme une constante $C(p, K_2)$ telle que :

$$\| \tau_h(\varphi\, \bar{u}) - \varphi \bar{u} \|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \leqslant C(p, K_2)\, |h|^s$$

En prenant h assez petit on majore ce terme par $\epsilon_1 / 3$.

Schéma de preuve du lemme : Puisqu'on cherche des estimations dans $L^p_{loc}(\Omega)$, on peut supposer u définie sur $\mathbb{R}^N$, et à support compact. On utilise alors la solution fondamentale de l'opérateur de l'Elasticité :

$$u_i = 2\,\underset{\sim}{N}_{,k} * \epsilon_{ik}(u) - M_{jk,i} * \epsilon_{jk}(u)$$

où $\underset{\sim}{N}(x)$ est le noyau de Newton pour l'opérateur Δ et :

$$M_{jk} = \underset{\sim}{N}_{,j} * \underset{\sim}{N}_{,k}$$

Le lemme est une conséquence des théorèmes de convolution de Sobolev.

REFERENCES

[1] BOURBAKI N. *«Intégration»* . Ch. 1,2,3,4. Hermann 1952.

[2] GAGLIARDO E. *«Proprieta di alcune classi di funzioni in più variabili»* Ricerce di Mat. 7 (1958) p 102-137 et 8 (1959) p 24-51.

[3] LIONS J-L. *«Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles»*. Presses de l'Université de Montréal 1965.

[4] MATTHIES H., STRANG G. *«The Saddle Point of a differential program»* à paraître dans «Energy methods in Finite Element Analysis», édité par Glowinski - Robin - Zienckiewicz.

[5] MIRANDA M. *«Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito»* Ann. di Pisa (3) 18 (1964) p 27-56.

[6] PARIS L. *«Etude de la régularité d'un champ de vecteurs à partir de son tenseur déformation»* . Séminaire d'Analyse convexe. Montpellier (1976). Exposé N° 12.

[7] RUDIN W. *«Real and Complex Analysis»* . Mac Graw Hill. 1970 .

[8] SCHWARTZ L. *«Théorie des distributions»* . Hermann . Paris . 1973 .

[9] STRANG G., TEMAM R. *«Existence de solutions relaxées pour les équations de la Plasticité. I :étude d'un espace fonctionnel»* . (à paraître)

[10] SUQUET P. M. *«Sur un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de la Plasticité»* . C.R.A.S. (A), 286, 1129-1132.

[11] SUQUET P. M. *«Existence et régularité des solutions des équations de la Plasticité»* . C.R.A.S. (A) 286, 1201-1204 et Thèse de 3ème cycle. Université Paris VI. 1978.

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1978)