

PHILIPPE BÉNILAN

MICHEL PIERRE

**Inéquations différentielles ordinaires avec obstacles irréguliers**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 1, n° 1 (1979), p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1979\\_5\\_1\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_1_0)

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## INEQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES AVEC OBSTACLES IRREGULIERS

Philippe Bénilan <sup>(1)</sup> et Michel Pierre <sup>(2)</sup>

*(1) Faculté des Sciences et Techniques, Route de Gay – 25030 Besançon Cedex.*

*(2) Centre Universitaire de Lorient – 1, rue de Londres – 56100 Lorient.*

**Résumé :** Nous trouvons pour des problèmes de la forme :

$$\frac{du}{dt} + a(u) \geq 0, u \geq \Psi, \left( \frac{du}{dt} + a(u) \right) (u - \Psi) = 0, u(0) = u_0,$$

avec un « obstacle »  $\Psi$  seulement s.c.s. à droite, existence et unicité d'une solution  $u$  continue à droite et à variation bornée. On étudie également le problème bilatéral.

**Summary :** For problems of the type :

$$\frac{du}{dt} + a(u) \geq 0, u \geq \Psi, \left( \frac{du}{dt} + a(u) \right) (u - \Psi) = 0, u(0) = u_0,$$

with an « obstacle »  $\Psi$  only u.s.c. from the right, we find existence and uniqueness of a solution  $u$  continuous from the right and of bounded variation. We also study the bilateral problem.

### Introduction

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \text{Considérons le problème différentiel :} \\ \frac{du}{dt} + a(u) \geq 0 \\ u \geq \Psi \\ \left( \frac{du}{dt} + a(u) \right) (u - \Psi) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

où  $a, \Psi, u_0$ , sont donnés et  $u$  est une fonction inconnue de  $[0, T[$  dans  $\mathbb{R}$ .

Moyennant des hypothèses de lipschitzianité ou monotonie sur  $a$ , pour un « obstacle »  $\Psi$  régulier, par exemple absolument continu, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte de (I), c'est-à-dire d'une fonction  $u$  absolument continue vérifiant les relations de (I) pour p.p.t : c'est un cas très particulier des résultats de [2].

Pour un  $\Psi$  seulement mesurable majoré, comme cas très particulier des méthodes de [4] nous pouvons montrer l'existence d'une solution faible de (I) c'est-à-dire d'une (classe de) fonction  $u \in L^\infty(0, T)$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) \geq \Psi(t) \text{ p.p.t} \\ \int_0^T \left( \frac{dv}{dt} + a(u) \right) (v - u) + \frac{1}{2} (v(0) - u_0)^2 \geq 0 \text{ pour tout } v \text{ absolument continu avec } v \geq \Psi. \end{array} \right.$$

Mais en général il n'y a pas unicité d'une telle solution.

Nous montrons ici que pour un  $\Psi$  s.c.s. à droite, on a existence d'une solution  $u$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est continue à droite et à variation bornée.} \\ u(0) = u_0 \text{ et } u(t) \geq \Psi(t) \text{ pour tout } t \\ \text{la mesure } \frac{du}{dt} + a(u) \text{ est positive et portée par } (u = \Psi). \end{array} \right.$$

D'une manière plus générale nous étudions le problème différentiel avec obstacle en dessous et au dessus. Dans la partie A nous énonçons le résultat général et démontrons un théorème de comparaison ; la partie B est consacrée au problème unilatéral (I) ; dans la partie C nous démontrons le résultat général.

#### A - LE RESULTAT GENERAL

On se donne  $T > 0$  et une multiapplication,

$a : ]0, T[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  vérifiant :

- (1)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \omega \in L^1(0, T) \text{ tel que pour p.p.t } t \in ]0, T[, \text{ la multiapplication } r \rightarrow a(t, r) + \omega(t) r \text{ soit} \\ \text{maximale monotone (*) ;} \end{array} \right.$
- (2) Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \rightarrow \inf a(t, r)$  est intégrable (\*\*).

On se donne d'autre part

- (3)  $\Psi_1 : ]0, T[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$ ,  $\Psi_2 : ]0, T[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$ , vérifiant :  
 $\Psi_1$  (resp.  $\Psi_2$ ) est s.c.s. (resp. s.c.i.) à droite ;
- (4) Il existe  $\Psi_0 : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  à variation bornée tel que  
 $\Psi_1(t) \leq \Psi_0(t) \leq \Psi_2(t)$ ,  $\forall t \in ]0, T[$ .

On se donne enfin :

$u_0 \in [\Psi_1(0), \Psi_2(0)] \cap \mathbb{R}$ ,  $\mu$  mesure de Radon bornée sur  $]0, T[$ .

On a alors le :

**THEOREME 1.** *Sous les hypothèses précédentes il existe une unique fonction  $u : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :*

- (i)  $u$  est continu à droite et à variation bornée,
- (ii)  $u(0) = u_0$  et  $\Psi_1(t) \leq u(t) \leq \Psi_2(t) \quad \forall t \in ]0, T[$ ,
- (iii)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } w \in L^1(0, T) \text{ tel que : } w(t) \in a(t, u(t)) \text{ p.p.t } t \in ]0, T[ \\ \text{et la mesure de Radon } \nu = \frac{du}{dt} + w - \mu \text{ soit de partie positive } \nu^+ \text{ portée par } \{t \in ]0, T[ ;} \\ u(t) = \Psi_1(t) \} \text{ et de partie négative } \nu^- \text{ portée par } \{t \in ]0, T[ ; u(t) = \Psi_2(t) \} . \end{array} \right.$

- (\*) Pour la définition d'une multiapplication maximale monotone, on peut consulter [1]. La propriété est en particulier vérifiée si  $a$  est une application de  $]0, T[ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que pour p.p.t  $t \in ]0, T[$ , l'application  $r \rightarrow a(t, r) + \omega(t) r$  soit croissante continue.
- (\*\*) Ce qui implique que pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , p.p.t  $t \in ]0, T[$ ,  $a(t, r) \neq \emptyset$ .

Nous dirons qu'une fonction  $u$  vérifiant (i), (ii) et (iii) est solution du PD  $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, \mu)$ .

L'unicité de la solution est un corollaire immédiat du résultat suivant :

**PROPOSITION 2.** Soient  $\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{u}_0, \hat{\mu}$  vérifiant les mêmes hypothèses.

On suppose que  $\inf a(t,r) \leq \inf \hat{a}(t,r)$ , p.p.  $t \in ]0, T[$ ,  $\forall r \in \mathbb{R}$ ,  $\Psi_i(t) \leq \hat{\Psi}_i(t) \quad \forall t \in ]0, T[$ ,  
 $\hat{u}_0 \leq u_0$  et  $\hat{\mu} \leq \mu$  au sens des mesures.

Soient  $u$  (resp.  $\hat{u}$ ) solutions de PD  $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, \mu)$  (resp. PD  $(\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{u}_0, \hat{\mu})$ ). Alors :  
 $\hat{u}(t) \leq u(t) \quad \forall t \in ]0, T[$ .

La démonstration de la proposition 2 utilise essentiellement le lemme suivant :

**LEMME 3.** Soit  $v = ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue à droite et à variation bornée. On a :

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leq \frac{1}{2} v^+(0)^2 + \int_{]0, t]} v^+ \frac{dv}{dt}, \quad \forall t \in ]0, T[.$$

*Démonstration du lemme 3.* Notons d'abord que d'après [5] (corollaire 5c), nous avons

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leq \frac{1}{2} v^+(0)^2 + \int_{]0, t]} v^+ \frac{dv^+}{dt}$$

(il est immédiat que  $v^+$  est aussi continue à droite et à variation bornée). D'après la continuité à droite,  $\{t \in ]0, T[ \mid v(t) > 0\}$  est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts à droite.

Si  $I = ]t_1, t_2[$  est un tel intervalle, nous avons puisque  $v = v^+$  sur  $]t_1, t_2[$ ,

$$\int_{]t_1, t_2[} v^+ \frac{dv^+}{dt} = \int_{]t_1, t_2[} v^+ \frac{dv}{dt}.$$

D'autre part si  $t_1 \in I$ , c'est-à-dire  $v(t_1) > 0$ ,

$$\int_{\{t_1\}} v^+ \frac{dv^+}{dt} = v^+(t_1) (v^+(t_1) - v^+(t_1^-)) \leq v(t_1) (v(t_1) - v(t_1^-)) = \int_{\{t_1\}} v \frac{dv}{dt}$$

(en effet par définition de  $I$  ;  $v(t_1^-) \leq 0 \leq v^+(t_1^-)$ ); le lemme s'en déduit.

*Démonstration de la proposition 2.* Posons  $v = \hat{u} - u$ . D'après le lemme 3, on a :

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leq \int_{]0, t]} v^+ \frac{dv}{dt} \leq \int_{]0, t]} v^+ (\hat{v} - v) - \int_0^t (\hat{w}(s) - w(s)) v^+(s) ds.$$

où  $w, v$  (resp.  $\hat{w}, \hat{v}$ ) sont les données correspondantes à  $u$  (resp.  $\hat{u}$ ) dans la condition (iii) (on a utilisé  $v^+(0) = (\hat{u}_0 - u_0)^+ = 0$  et  $v^+(\hat{\mu} - \mu) \leq 0$  au sens des mesures).

L'ensemble  $\Omega = \{s \in ]0, t] \mid v(s) > 0\}$  est contenu dans  $\{s \in ]0, T[ \mid \hat{\Psi}_1(s) < \hat{u}(s)$   
 et  $u(s) < \Psi_2(s)\}$ . Donc :

$$\int_{]0, T]} v^+ (\hat{v} - v) = - \int_{\Omega} v^+ (\hat{v}^- + v^+) \leq 0.$$

D'autre part pour p.p.  $s \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \hat{w}(s) + \omega(s)\hat{u}(s) &\geq \inf(\hat{a}(s, \hat{u}(s)) + \omega(s)\hat{u}(s)) \geq \inf(a(s, \hat{u}(s)) + \omega(s)\hat{u}(s)) \\ &\geq \sup(a(s, u(s)) + \omega(s)u(s)) \geq w(s) + \omega(s)u(s). \end{aligned}$$

(la troisième inégalité résulte de la monotonie de  $r \rightarrow a(s, r) + \omega(s)r$ ); donc

$$v^+(s) (\hat{w}(s) - w(s)) \geq -\omega(s)v(s)v^+(s) = -\omega(s)v^+(s)^2 \quad \text{p.p. } s \in ]0, T[ ,$$

et

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leq \int_0^t \omega(s)v^+(s)^2 ds, \quad \forall t \in ]0, T[.$$

Par le lemme de Gronwall, on en déduit  $v^+(t) = 0$ , c'est-à-dire  $\hat{u}(t) \leq u(t)$  pour tout  $t \in ]0, T[$ .

**Remarque 4.** Par changement de fonctions, on peut toujours se ramener au cas où  $\omega = 0$  et  $\mu = 0$ . En effet :

$$1) \text{ Réduction à } \mu = 0 - \text{Posons pour tout } t \in ]0, T[ , \phi(t) = \int_{]0, T]} \mu, \hat{\Psi}_i(t) = \Psi_i(t) - \phi(t)$$

$$(i = 0, 1, 2,) , \hat{a}(t, r) = a(t, r + \phi(t)).$$

On vérifie facilement que  $\hat{a}$  satisfait (1) et (2) ( $\phi$  étant borné, pour  $r \in \mathbb{R}$ , il existe  $\hat{r}_1, \hat{r}_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\hat{r}_1 \leq r + \phi(t) \leq \hat{r}_2$  pour tout  $t \in ]0, T[$  ; on a alors  $\omega(t) (\hat{r}_1 - \hat{r}_2) + \inf a(t, \hat{r}_1) \leq \inf \hat{a}(t, r) \leq \omega(t) (\hat{r}_2 - \hat{r}_1) + \inf a(t, \hat{r}_2)$  et que  $\hat{\Psi}_i$ , satisfait (3) et (4) ( $\phi$  est continue à droite et à variation bornée). Il est immédiat que  $u$  est solution de PD  $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, \mu)$  ssi  $\hat{u} = u - \phi$  est solution de PD  $(\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, u_0, 0)$ .

2) Réduction à  $\omega = 0$  – Posons pour tout  $t \in ]0, T[$  .

$$\Omega(t) = \int_0^t \omega(s) ds, \hat{\Psi}_i(t) = e^{-\Omega(t)} \Psi_i(t) (i = 0, 1, 2,) ,$$

$$\hat{a}(t, r) = e^{-\Omega(t)} a(t, e^{\Omega(t)} r) + \omega(t) r.$$

On vérifie facilement que  $\hat{a}$  vérifie (1) avec  $\hat{\omega} = 0$  ; il vérifie (2) et  $\hat{\Psi}_i$  vérifie (3) et (4). Alors  $u$  est solution de PD  $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, 0)$  ssi  $\hat{u}(t) = e^{-\Omega(t)} u(t)$  est solution de PD  $(\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, u_0, 0)$ .

## B - LE PROBLEME UNILATERAL

Démontrons d'abord la proposition suivante :

**PROPOSITION 5.** Soient  $a : ]0, T[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  vérifiant (1) (avec  $\omega = 0$ ) et (2),  $\Psi : ]0, T[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$  s.c.s. à droite et majorée,  $u_0 \geq \Psi(0)$ . Alors il existe  $u : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

(i')  $u$  est continue à droite, à variation bornée et s.c.s.

(ii')  $u(0) = u_0$  et  $u(t) \geq \Psi(t)$ ,  $\forall t \in ]0, T[$ ,

(iii')  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } w \in L^1(0, T) \text{ tel que } w(t) \in a(t, u(t)) \text{ p.p.t } \in ]0, T[ \\ \text{et la mesure du Radon } \nu = \frac{du}{dt} + w \text{ est positive et portée par } \{t \in ]0, T[ ; u(t) = \Psi(t)\}. \end{array} \right.$

Nous utiliserons le lemme suivant correspondant à  $a \equiv 0$  :

**LEMME 6.** Soient  $\Psi : ]0, T[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$  s.c.s. à droite et majorée, et  $u_0 \geq \Psi(0)$ . Alors la fonction

$u = \tau(\Psi, u_0)$  définie par :

$$u(t) = \max(u_0, \sup \Psi(s) ; s \in [0, t])$$

satisfait :

$u$  est croissante majorée et continue à droite,

$$u(0) = u_0 \text{ et } u(t) \geq \Psi(t), \forall t \in ]0, T[ ,$$

$$\text{la mesure } \nu = \frac{du}{dt} \text{ est portée par } \{t \in ]0, T[ ; u(t) = \Psi(t)\}.$$

Nous utiliserons également le lemme suivant qui est un cas particulier des résultats de [3] :

**LEMME 7.** Soit  $a : ]0, T[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  vérifiant (1) et (2). Alors il existe une unique fonction  $u$  absolument continue vérifiant :

$$u(0) = 0, u'(t) + a(t, u(t)) \ni 0 \text{ p.p.t } \in ]0, T[ .$$

**Démonstration du lemme 6.** Il est immédiat que  $u$  est croissante majorée,  $u(0) = u_0$  et  $u(t) \geq \Psi(t)$  pour tout  $t \in ]0, T[$ .

La continuité à droite résulte très simplement de la semi-continuité supérieure à droite de  $\Psi$ . La mesure  $\nu$  est positive ; montrons que  $\int \nu = 0$   
 $\{u > \Psi\}$

Remarquons que  $u$  est continue en tout point de  $\{u > \Psi\}$ : elle est en effet continue à droite et si  $t \in ]0, T[ \cap \{u > \Psi\}$ , puisque  $u(t) = \max(u(t^-), \Psi(t))$  par définition de  $u$ ,  $u(t) = u(t^-)$ .

D'autre part,  $\{u > \Psi\}$  est ouvert à droite et  $u$  est, localement à droite, constante sur  $\{u > \Psi\}$ . Il en résulte que  $u$  est constante sur les composantes connexes de  $\{u > \Psi\}$  qui forment une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts à droite.

Etant donné un tel intervalle  $(t_1, t_2[$ , que  $t_1$  appartienne ou non à l'intervalle, on a donc  

$$\int_{(t_1, t_2[} \frac{du}{dt} = 0. \text{ D'où le résultat.}$$

*Démonstration de la proposition 5.* On décompose le problème en un « système » :

$$(P) \begin{cases} u_1 = \tau(\Psi + u_2, u_0), \\ u_2 \text{ absolument continue, } u_2(0) = 0 \text{ et} \\ u_2'(t) \in a(t, u_1(t) - u_2(t)) \text{ p.p. } t \in ]0, T[. \\ \text{Si } (u_1, u_2) \text{ est solution de (P), alors } u = u_1 - u_2 \text{ est solution de (i'), (ii'), (iii'). En effet (i') et (ii')} \end{cases}$$

sont immédiats ; pour (iii'), il suffit de poser  $w = u_2'$  ; on a alors  $v = \frac{du_1}{dt}$  qui est une mesure positive portée par  $\{u_1 = \Psi + u_2\} = \{u = \Psi\}$ .

Pour résoudre (P), considérons l'application S qui à  $v_2$  s.c.s. à droite majorée avec  $v_2(0) = 0$  fait correspondre la solution  $u_2$  de

$$\begin{cases} u_2 \text{ est absolument continue, } u_2(0) = 0 \\ u_2'(t) \in a(t, \tau(\Psi + v_2, u_0)(t) - u_2(t)) \text{ p.p. } t \in ]0, T[ ; \end{cases}$$

$(t, r) \rightarrow -a(t, \tau(\Psi + v_2, u_0)(t) - r)$  vérifie (1) et (2) ; on peut appliquer le lemme 7).

Résoudre (P) revient à trouver un point fixe de S. Or l'application S est croissante ; en effet :  $v_2 \rightarrow \tau(\Psi + v_2, u_0)$  est croissante.

(cela est immédiat directement ou résulte de la Proposition 2, puisque  $\tau(\Psi + v_2, u_0)$  est solution de PD  $(0, \Psi + v_2, +\infty, u_0, 0)$  ; donc si  $v_2 \leq \hat{v}_2$ , utilisant la monotonie de  $a(t, \cdot)$  :

$\inf -a(t, \tau(\Psi + v_2)(t) - r) \geq \inf -a(t, \tau(\Psi + \hat{v}_2)(t) - r)$  p.p.  $t, \forall r$  ; la croissance de S résulte de la Proposition 2 (la solution  $u$  de  $u(0) = 0, u' + a(\cdot, u) \ni 0$  est solution de PD  $(a, -\infty, +\infty, 0, 0)$ ).

D'autre part considérons  $\phi(t) = \int_0^t (\inf a(s, \tau(\Psi, u_0)(s)))^+ ds$ . On a  $S(\phi) \leq \phi$  : en effet, puisque  $\phi$  est croissante et  $\phi(0) = 0, \tau(\Psi + \phi, u_0) \leq \phi + \tau(\Psi, u_0)$ ,  $(\phi + \tau(\Psi, u_0))$  est solution de PD  $(0, \Psi + \phi, +\infty, u_0, \frac{d\phi}{dt})$  ; notons  $\Omega = \{S(\phi) > \phi\}$  ; pour  $t \in \Omega$ , on a donc  $\tau(\Psi + \phi, u_0)(t) - S(\phi)(t) < \tau(\Psi, u_0)(t)$  d'où pour p.p.  $t \in \Omega$ , d'après la monotonie de  $a(t, \cdot)$ ,  $S(\phi)'(t) \leq \inf a(t, \tau(\Psi, u_0)(t)) \leq \phi'(t)$ . On en déduit que  $\frac{d}{dt}(S(\phi) - \phi)^+ \leq 0$  p.p., d'où  $S(\phi) \leq \phi$ . Donc S applique l'ensemble :  $I = \{v_2 \text{ s.c.s. à droite, } v_2(0) = 0, v_2 \leq \phi\}$  dans lui-même. L'enveloppe inférieure  $u_2$  de  $I = \{v_2 \in I ; S(v_2) \leq v_2\}$  est dans I et satisfait  $S(u_2) = u_2$  (cf. [7]).

Utilisant la remarque 4, on a donc le corollaire :

**COROLLAIRE 8.** Soient  $a : ]0, T[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  vérifiant (1) et (2),  $\Psi = ]0, T[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$  s.c.s. à droite et majorée,  $u_0 \geq \Psi(0)$ ,  $\mu$  mesure de Radon bornée sur  $]0, T[$ . Alors, il existe une unique solution de PD  $(a, \Psi, +\infty, \mu, u_0)$ .

Par construction,  $\tau(\Psi, u_0)$  est la plus petite fonction croissante majorant  $\Psi$  en tout  $t \in ]0, T[$  et majorant  $u_0$  en  $t = 0$ . Plus généralement nous avons :

**PROPOSITION 9.** Sous les hypothèses du corollaire 8, la solution de PD  $(a, \Psi, +\infty, \mu, u_0)$  est la plus petite fonction  $u = ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\begin{cases} (i) & u \text{ est continue à droite et à variation bornée} \\ (ii'') & u(0) \geq u_0, u(t) \geq \Psi(t), \forall t \in ]0, T[, \\ & \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } w \in L^1(0, T) \text{ tel que} \\ (iii'') & w(t) \in a(t, u(t)) \text{ p.p. } t \in ]0, T[ \\ & \text{et } \frac{du}{dt} + w \geq \mu \text{ au sens des mesures.} \end{array} \right. \end{cases}$$

*Démonstration de la Proposition 9.* Soit  $u$  vérifiant (i) (ii'') (iii''). La mesure  $\nu = \frac{du}{dt} + w - \mu$  est positive et  $u$  est

solution de PD  $(a, \Psi, \infty, u(0), \mu + \nu)$ .

D'après la Proposition 2,  $u$  majore la solution de PD  $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$ .

Sous les hypothèses de la Proposition 5, nous avons obtenu une solution s.c.s. : plus généralement nous avons :

**PROPOSITION 10.** *Sous les hypothèses du corollaire 8, supposons de plus que la partie négative de la mesure  $\mu$  est sans atomes. Alors :*

1) la solution de PD  $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$  est s.c.s. ,

2) les solutions de PD  $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$  et PD  $(a, \tilde{\Psi}, \infty, u_0, \mu)$  sont égales, où  $\tilde{\Psi}$  est la plus petite fonction s.c.s. majorant  $\Psi$ .

*Démonstration de la Proposition 10.* Le second point résulte immédiatement du premier et de la Proposition 9.

Pour le premier point il suffit d'utiliser la Proposition 5 et les réductions de la Remarque 4 : la réduction à  $\omega = 0$  respecte la semi-continuité ; pour la réduction à  $\mu = 0$ , nous faisons le changement de fonction  $\hat{u} = u - \phi$  où  $\phi(t) = \int_{]0, T]} \mu$ . D'après la Proposition 5,  $\hat{u}$  est s.c.s. ; si  $\mu^-$  est sans atomes,  $\phi$  est également s.c.s. :

donc  $u = \hat{u} + \phi$  est s.c.s.

Remarquons que la condition  $\mu^-$  sans atomes est nécessaire : la solution de PD  $(0, -\infty, \infty, u_0, \mu)$  est en effet  $u(t) = u_0 + \int_{]0, t]} \mu$  qui est s.c.s. ssi  $\mu^-$  est sans atomes.

Pour achever cette partie, précisons  $\{u = \Psi\}$  lorsque  $\Psi$  est s.c.s. :

**PROPOSITION 11.** *Sous les hypothèses du corollaire 8, supposons de plus  $\Psi$  s.c.s. et que la partie positive de  $\mu$  est sans atomes. Soit  $u$  la solution de PD  $(a, \Psi, \infty, \mu, u_0)$ , l'ensemble  $\{t \in [0, T[ ; u(t) = \Psi(t)\}$  est fermé.*

*Démonstration de la Proposition 11.* Faisons d'abord les réductions de la Remarque 4 : la réduction à  $\omega = 0$  ne pose pas de problèmes ; pour la réduction à  $\mu = 0$ , nous faisons le changement d'obstacles  $\hat{\Psi} = \Psi - \phi$  où  $\phi(t) = \int_{]0, T]} \mu$  ; si  $\mu^+$  est sans atomes,  $\hat{\Psi}$  est s.c.s.

Il suffit donc de se placer sous les hypothèses de la Proposition 5 avec  $\Psi$  s.c.s.

Reprenant la démonstration de la Proposition 5, nous avons obtenu  $u = u_1 - u_2$  où  $(u_1, u_2)$  est solution (P). L'ensemble  $\{u = \Psi\}$  est égal à  $\{u_1 = \Psi + u_2\}$  ; puisque  $\Psi + u_2$  est s.c.s. , il suffit de montrer que pour  $\Psi$  s.c.s. l'ensemble  $\{\tau(\Psi, u_0) = \Psi\}$  est fermé. Or reprenant la démonstration du lemme 6, puisque  $u = \tau(\Psi, u_0)$  est continu en tout point de  $\{u > \Psi\}$ ,  $\Psi$  étant s.c.s., cet ensemble est ouvert.

Avec les mêmes méthodes on peut obtenir d'autres renseignements sur la solution de PD  $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$  : par exemple étudier la continuité, l'absolue continuité, etc... en fonction des propriétés de  $\Psi$  et  $\mu$ .  
C - LE PROBLEME BILATERAL :

*Démonstration du théorème 1.* Pour démontrer le théorème 1, nous utilisons la méthode de NAKOULIMA [6] ramenant le problème bilatéral à un système d'«I.Q.V.» unilatérales :

Soient  $u_0^1, u_0^2$  tels que  $u_0^1 - u_0^2 = u_0$ .

Nous nous plaçons dans le cas réduit  $\omega = 0, \mu = 0$ .

Considérons le système d'I.Q.V. :

$$(P) \begin{cases} u_1 \text{ solution de PD } (a^1(u_2), u_2 + \Psi_1, \infty, u_0^1, 0) \\ u_2 \text{ solution de PD } (a^2(u_1), u_1 - \Psi_2, \infty, u_0^2, 0), \end{cases}$$

où pour  $v : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$a^1(v)(t,r) = a(t,r - v(t))^+$ ,  $a^2(v)(t,r) = a(t,v(t) - r)^-$  (si  $v$  est mesurable bornée,  $a^1(v)$  et  $a^2(v)$  vérifient (1) et (2)).

Si  $(u_1, u_2)$  est solution de (P),  $u = u_1 - u_2$  est solution de PD( $a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, 0$ ). En effet  $u$  vérifie (i) et (ii) ; maintenant si  $(w_i, \nu_i)$  sont les données correspondantes dans (iii') à  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $w = w_1 - w_2 \in L^1(0, T)$  et  $w(t) \in a(t, u_1(t) - u_2(t))^+ - a(t, u_1(t) - u_2(t))^- = a(t, u(t))$  p.p.  $t \in ]0, T[$  ; enfin  $\nu = \frac{du}{dt} + w = \nu_1 - \nu_2$  est de partie positive  $\nu^+ \leq \nu_1$ , donc aussi portée par  $\{u_1 = u_2 + \Psi_1\} = \{u = \Psi_1\}$  et de partie négative  $\nu^- \leq \nu_2$  portée par  $\{u_2 = u_1 - \Psi_2\} = \{u = \Psi_2\}$ .

Résoudre (P) revient à trouver un point fixe pour l'application  $S$  qui à  $(v_1, v_2)$  couple de fonctions de  $]0, T[$  dans  $\mathbb{R}$ , s.c.s. à droite bornées avec  $v_i(0) = u_0^i$  ( $i = 1, 2$ ) fait correspondre  $(u_1, u_2)$  solution de :

$$\begin{cases} u_1 \text{ est solution de PD } (a^1(v_2), v_2 + \Psi_1, \infty, u_0^1, 0) \\ u_2 \text{ est solution de PD } (a^2(v_1), v_1 - \Psi_2, \infty, u_0^2, 0) \end{cases}$$

(cette solution existe et est unique d'après la partie B).

L'application  $S$  est croissante d'après la Proposition 2 et la monotonie de  $a^1, a^2$ . Montrons que  $S$  applique dans lui même l'intervalle :

$$I = \left\{ (v_1, v_2) ; v_i \text{ s.c.s. à droite, } v_i(0) = u_0^i, \underline{u}_i \leq v_i \leq \bar{u}_i (i = 1, 2) \right\}$$

où  $\underline{u}_i, \bar{u}_i$  sont définis ci-dessous. Il en résultera alors d'après [7], l'existence d'un point fixe pour  $S$ .

On peut toujours supposer que la fonction  $\Psi_0$  intervenant dans la condition (4) est continue à droite et  $\Psi_0(0) = 0$ . Ainsi il existe  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  croissantes, continues à droite telles que  $\Psi_0 = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$  et  $\bar{u}_i(0) = u_0^i$  ( $i = 1, 2$ ). Vérifions que  $S(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \leq (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  : en effet  $\bar{u}_1 = \Psi_0 + \bar{u}_2 \geq \Psi_1 + \bar{u}_2$  et posant  $w_1(t) = \inf a(t, u(t, \Psi_0(t)))^+$  on a  $w_1(t) \in a^1(\bar{u}_2)(t, \bar{u}_1(t))$  p.p.  $t$  et  $\frac{du_1}{dt} + w_1 \geq 0$  ( $\bar{u}_1$  est supposée croissante) ; d'après la Proposition 9,  $\bar{u}_1$  est donc supérieure ou égale à la solution de PD  $(a^1(\bar{u}_2), \bar{u}_2 + \Psi_1, \infty, u_0^1, 0)$  ; symétriquement,  $\bar{u}_2$  est supérieure ou égale à la solution de PD  $(a^2(\bar{u}_1), \bar{u}_1 - \Psi_2, \infty, u_0^2, 0)$ .

Enfin soit  $\underline{u}$  la solution de (cf. lemme 7) :

$u'(t) + a(t, u(t)) \ni 0, \underline{u}(0) = u_0$ .  
Soient  $\underline{u}_1(t) = u_0^1 - \int_0^t \underline{u}'(s)^- ds, \underline{u}_2(t) = u_0^2 - \int_0^t \underline{u}'(s)^+ ds$  ; on a  $\underline{u}_i'(t) + a^i(\underline{u}_i)(t, \underline{u}_i(t)) = 0$  p.p.t, c'est-à-dire  $\underline{u}_i$  est solution de PD  $(a^i(\underline{u}_j), -\infty, \infty, u_0^i, 0)$  ( $i \neq j = 1, 2$ ).

D'après la Proposition 2,  $S(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \geq (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ .



## REFERENCES

- [1] H. BREZIS. «*Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*» North Holland. Math. studies (1973).
- [2] H. BREZIS. «*Un problème d'évolution avec contrainte unilatérale*». C.R. Acad. Sc. Paris 274 (1972) pp. 310-313.
- [3] A. LASOTA and OPIAL. «*An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations*». Bull. Ac. Pol. Sc. 13 (1965) pp. 781-786.
- [4] F. MIGNOT et J.P. PUEL. «*Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution*». Arch. for Rat. Mech. and Ana. Vol 64, N° 1. (1977) pp. 59-91.
- [5] J.J. MOREAU. «*Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée*». Séminaire d'Analyse convexe. Montpellier 1976. exposé n° 17.
- [6] O. NAKOULIMA. «*Etude d'une inéquation variationnelle bilatérale et d'un système d'inéquations quasi-variationnelles unilatérales associées*». Thèse 3ème cycle. Bordeaux (1977).
- [7] L. TARTAR. «*Inéquations quasi-variationnelles abstraites*». C.R. Acad. Sci. Paris 278. pp. 1193-1196.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1978)