ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. RABATÉ

Sur les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 23 (1931), p. 1-60
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1931_3_23__1_0>

© Université Paul Sabatier, 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES NOTIONS ORIGINELLES
DE LA
GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DIRECTE

PAR M. G. RABATÉ,
Assistant de Chimie, chargé de Conférences de Mathématiques Générales à la Faculté des Sciences de Poitiers.

INTRODUCTION

Dans ses recherches récentes procédant du souci de restaurer la causalité en Géométrie Infinitésimale, M. G. Bouligand a introduit le *contingent* et le *paratingent* d'un ensemble ponctuel en un point d'accumulation. Entre autres résultats, cela lui a permis de définir, par voie intrinsèque, de larges classes de surfaces dont l'une donne lieu à un théorème d'existence du plan tangent.

Le présent travail a pour but de rappeler les propriétés et les applications les plus simples et les plus essentielles déjà connues du contingent et du paratingent, en même temps que d'en établir de nouvelles, que j'ai obtenues au cours de recherches, entreprises à l'instigation de M. Bouligand. Sur son conseil, j'ai examiné comment se combinent les opérations fournissant le contingent et le paratingent avec quelques autres, réunion, intersection et projection. Les résultats qui s'en dégagent soulignent les différences déjà reconnues entre contingent et paratingent. En outre, ils m'ont suggéré, de la manière la plus naturelle, une étude locale des ensembles dont le contingent en un point se réduit à m demi-droites, à l'exemple des courbes qui se ramifient en m demi-arcs, doués chacun d'une demi-tangente au point de ramification. Cela m'a conduit à la *décomposition contingente*, qui est aussi très utile pour l'étude locale des ensembles dont le paratingent en un point se réduit à n droites : mais ici, on doit proscrire l'idée d'une décomposition paratingente.

Mes recherches sur la projection étendent le théorème sur la projection de la tangente à une courbe algébrique. J'ai montré que, pour le cas singulier de ce théo-

rème, qui se résout à l'aide du plan osculateur, la notion de *contingent d'osculation* considérée ailleurs par M. Bouligand, n'est pas susceptible de décider en toute généralité. J'ai obtenu cependant une condition assurant son efficacité, et l'ai communiquée, avec d'autres résultats, à l'Académie des *Lincei*. (Sur quelques points de Géométrie Infinitésimale Directe, 2 nov. 1930.)

En ce qui concerne les applications du contingent et du paratingent à la géométrie infinitésimale, je me suis limité à des chapitres particuliers de la théorie des courbes. Relativement au contingent, j'ai repris en le simplifiant l'exposé des résultats de M. Bouligand sur la possibilité de rattacher à cette notion, l'existence des demi-tangentes et demi-plans osculateurs aux arcs simples coupés par un plan arbitraire en un nombre fini de points.

En introduisant en outre les contingents circulaire et sphérique, j'ai prouvé l'existence, communiquée dans ma note citée, des demi-cercles osculateurs et demi-sphères osculatrices antérieurs et postérieurs, à tout arc simple coupé par tout plan ou sphère en un nombre fini de points. Je déduis ainsi d'un processus uniforme, et simplifié au delà des espérances de M. Bouligand, des résultats importants, obtenus aussi en grande partie par M. André Marchaud(1).

La continuité des quatre contingents, dont je m'étais libéré au cours de la question précédente, est cependant un problème intéressant en lui-même. Je l'ai traité en unifiant les quatre énoncés et m'appuyant sur le raisonnement donné, pour la continuité du contingent ordinaire, par M. Bouligand.

Le théorème de Janiszewski (continuité de l'ensemble d'accumulation de continus dont l'ensemble limite contient deux points), présente ici une importance capitale. On le retrouve au tournant, pour démontrer que le paratingent d'un arc simple est un continu. Il était donc naturel que je revienne sur ce théorème, d'autant plus qu'en l'étudiant dans la thèse de l'éminent géomètre, j'ai été arrêté par une imperfection de sa démonstration : ayant aplani cette difficulté en collaboration avec M. Bouligand(2), je donne un exposé de la question ainsi mise au point, dans la note qui termine ce travail.

Je dois dire un mot des applications du paratingent à la théorie des courbes. Elles confirment bien le rôle sélectif de cette notion, en permettant la discrimination intrinsèque de classes favorables de courbes, ce que le contingent ne peut fournir dans les mêmes conditions. Mes résultats sur ce point, résumés dans ma première note, ont été simultanés à l'obtention, par M. Bouligand, d'un théorème général sur la sélection de variétés d'un ordre quelconque dans l'espace à n dimensions(3).

---

(1) A. Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné*. Acta Mathematica, année 1930, t. 55.

(2) G. Bouligand et G. Rabaté, *Applications de la construction de Cantor-Minkowski à l'analyse des ensembles discontinus*. Rendic. d. R. Acc. dei Lincei. Séance du 7 décembre 1930.

(3) G. Bouligand, *Rev. gén. des Sc.*, n° du 15 nov. 1930, page 603. (Voir la note en petits caractères, au-dessous de la seconde colonne.)

Ces recherches m'ont enfin amené à examiner, pour un continu, le problème de la continuité du paratingent. J'ai pu le résoudre par l'affirmative, pour tout continu plan. Dans l'espace, j'ai souligné les difficultés du problème, dues à l'existence d'un cas intermédiaire, dont l'examen m'a paru délicat.

M. le Professeur Bouligand a constamment encouragé et soutenu mes efforts, et l'influence décisive qu'il a eue sur leur aboutissement apparaîtra dans chacune de ces pages. Je suis fier de figurer au nombre de ses élèves, et particulièrement d'avoir eu l'occasion de développer quelques-unes des notions si objectives dont il a enrichi la Science. Ma dette de reconnaissance envers lui s'accroît chaque jour.

M. le Professeur Buhl a dès le début accueilli mon travail avec la plus grande bienveillance, et, de concert avec M. le Doyen Deltheil et ses Collègues, en a favorisé l'impression aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. Je leur en exprime ici ma respectueuse et profonde gratitude. Il m'est agréable d'y associer M. le Professeur Levi-Civita, qui a bien voulu accepter de présenter mes notes à l'Académie des Lincei.

Qu'il me soit enfin permis de rendre un pieux hommage à la mémoire du regretté Doyen Jules Welsch et d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à M. le Doyen Armand Billard : en me chargeant de Conférences de Mathématiques Générales à la Faculté des Sciences de Poitiers, ils m'ont témoigné une confiance dont je sens tout le prix.

CHAPITRE I

Rappel de quelques notions fondamentales sur la théorie des ensembles.

1. Nous ne considérons que des ensembles bornés, tous situés à l'intérieur d'une même sphère.

Nous appelons *distance* d'un point H à un ensemble ponctuel E la borne inférieure de l'ensemble des distances de H à tout point de E. Pour que cette distance soit nulle, il faut et il suffit que H appartienne à E, ou sinon soit point d'accumulation de E, c'est-à-dire fasse partie de l'ensemble fermé $E + E' = \overline{E}$ qu'on appelle aussi *fermeture* de E.

Dans le cas où E n'a qu'un seul point d'accumulation, nous donnerons à ce point le nom plus particulier de *point limite*.

2. Ensemble d'accumulation, ensemble limite. — Étant donnée une collection infinie d'ensembles ponctuels (tous intérieurs à la même sphère), nous définirons avec Janiszewski[1] son ensemble d'accumulation et son ensemble limite.

Un point H fait partie de l'ensemble d'accumulation, si pour toute longueur $\varepsilon > 0$ on peut trouver une infinité d'ensembles de la collection dont H soit distant de moins de ε.

Un point L fait partie de l'ensemble limite, si pour toute longueur $\varepsilon > 0$, il n'y a dans la collection qu'un nombre fini d'ensembles dont L soit distant de plus de ε.

D'après cette définition, l'ensemble limite $\mathcal{L}$ est contenu dans l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}$.

Il peut y avoir coïncidence, mais seulement à titre exceptionnel. En vertu des définitions précédentes, tout point d'accumulation de points de $\mathcal{H}$ ou de $\mathcal{L}$ est lui-même un point de $\mathcal{H}$ ou de $\mathcal{L}$. Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ sont donc fermés.

3. Il est intéressant pour la suite de considérer le cas où notre collection infinie consiste en une suite d'ensembles emboîtés $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ c'est-à-dire où l'on a $E_1) E_2) \ldots) E_n) \ldots$ [2].

---

[1] S. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*. Thèse, Paris, 1911, pages 15 et 16.

[2] Par abréviation, nous appellerons une telle suite « *suite emboîtée* ». Le symbole) signifie « contient ».

Dès lors, soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ les distances d'un point quelconque à E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$.

Nous aurons nécessairement :

$$0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_n \leqslant \ldots.$$

Si un point H appartient à l'ensemble d'accumulation, c'est que δ_n tend vers zéro, ce qui exige que tous les $\delta_1, \delta_2, \ldots$ soient nuls, ou encore que ce point fasse partie des fermetures de tous les ensembles. Et, parmi nos ensembles, il ne s'en trouve alors aucun dont un tel point H soit à une distance non nulle. Donc, dans ce cas, tout point de $\mathcal{H}$ fait partie de $\mathcal{L}$ et par suite, ces deux ensembles coïncident, et se superposent au produit des fermetures de

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \text{ (1)}.$$

4. Conservation de certains caractères, par projection. — Établissons encore deux théorèmes qui nous seront utiles par la suite.

Projetons sur une droite suivant la direction d'un plan non parallèle à cette droite.

THÉORÈME I. — *Tout ensemble ponctuel* E *borné, fermé, se projette suivant un ensemble e borné, fermé.*

Cela revient à démontrer que l'ensemble des plans projetant les différents points de E est fermé.

Soit donc P un plan d'accumulation de l'ensemble des plans projetants. Je dis que P est lui-même un plan projetant, c'est-à-dire qu'il contient au moins un point de E. En effet, dire que P est plan d'accumulation c'est dire qu'il existe, d'un certain côté de P (sinon de chaque côté), une suite infinie de plans projetants, de plus en plus voisins de P et tendant vers P. Prenons sur chacun d'eux un seul point de E. La suite de points ainsi constituée est un ensemble borné, qui a donc au moins un point d'accumulation. Ce point d'accumulation est nécessairement dans P, et il appartient à E puisque E est fermé. Donc P appartient bien à l'ensemble des plans projetants.

REMARQUE. — Il est essentiel de supposer que l'ensemble E est borné. En effet, l'ensemble E constitué par les points de l'hyperbole équilatère $xy - 1 = 0$ est fermé (non borné) et se projette sur l'axe des x suivant un ensemble e non fermé, puisque l'origine est point d'accumulation de e, sans lui appartenir.

---

(1) Dans une communication à l'Académie de Pologne (voir son *Bulletin International*, mars 1931), M. Bouligand a prouvé plus généralement l'identité de l'ensemble d'accumulation et de l'ensemble limite d'une suite d'ensembles, dans le cas où tout point de l'espace a ses distances à ces ensembles successifs formant une suite monotone.

5. Théorème II. — *La projection e d'un ensemble* E *borné, continu, est un continu.*

Nous savons, d'après le théorème précédent, que l'ensemble linéaire e est fermé, borné. Si e n'était pas un continu, il serait décomposable en deux ensembles fermés, sans point commun et comporterait un intervalle de disjonction $a'a''$, c'est-à-dire un intervalle dont les extrémités a' et a'' empruntées à ces deux ensembles donneraient leur distance. Il n'existerait donc pas, dans le continu E, de point strictement intérieur à la région comprise entre les deux plans projetants $\pi_{a'}$ et $\pi_{a''}$. Et le soi-disant continu E serait décomposable en deux ensembles fermés, sans point commun.

Remarque. — Les deux théorèmes précédents subsistent si l'on projette l'ensemble sur un plan parallèlement à une droite, car la propriété d'être borné et fermé, et la propriété d'être bien enchaîné se conservant par projection :

soit sur un plan parallèlement à une droite,
soit sur une droite parallèlement à un plan,

il en est de même de la propriété d'être un continu.

CHAPITRE II

Le contingent et le paratingent. Leurs définitions. Quelques applications immédiates. L'influence des opérations : réunion et intersection.

6. Rappelons les notions de CONTINGENT et de PARATINGENT introduites par M. G. BOULIGAND, et dont il a fait les instruments de sa GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DIRECTE[1].

Soit O un point d'accumulation d'un ensemble ponctuel E de l'espace euclidien à trois dimensions. On appelle *contingent* au point O, l'ensemble des demi-droites (ou rayons OT) tels que *tout* cône circulaire droit de sommet O et d'axe OT contienne au moins un point de E distinct de O. Le contingent en O est évidemment le même pour E et $\overline{E}$.

On pourra, sans inconvénient, parler du contingent en un point isolé de E; ce contingent sera vide.

7. Le contingent et l'équivalence de l'accroissement d'une fonction à sa différentielle. — L'intérêt de cette notion apparaît immédiatement sur un problème élémentaire de théorie des fonctions de plusieurs variables. Bornons-nous au cas de trois variables.

Soit, dans l'espace, une fonction $f(M)$ possédant un gradient continu et non nul, dans une sphère de centre M_0. Si M tend vers M_0 sur un ensemble E dont le contingent en M_0 ne renferme aucun rayon perpendiculaire au gradient de f en ce point, l'accroissement $f(M) - f(M_0)$ est un infiniment petit équivalent à la différentielle de f en M_0[2].

En effet, d'après la formule des accroissements finis et en vertu de l'existence d'un gradient continu, nous pouvons écrire :

$$f(M) = f(M_0) + \left[\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M_0) + \vec{\alpha}\right] . \overrightarrow{M_0M}$$

$\vec{\alpha}$ étant un vecteur infiniment petit avec $\overrightarrow{M_0M}$.

---

(1) G. BOULIGAND, *Sur quelques points de Méthodologie géométrique*. Rev. gén. des Sciences, 31 janvier, 30 juin et 15 novembre 1930.

(2) G. BOULIGAND, Bull. des Sc. Math. *Sur un caractère de planéité d'un arc simple*, 2e série, t. 54, mai 1930. Voir un complément rectificatif à paraître au tome XVII des *Fundamenta Mathematicae*.

Soit E_ρ la partie de l'ensemble E contenue dans la sphère de centre M_0 et d'un certain rayon ρ, suffisamment petit.

Considérons

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\,.\,\overrightarrow{M_0M}} = \frac{\left[\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)+\vec{\alpha}\right].\,\overrightarrow{M_0M}}{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\,.\,\overrightarrow{M_0M}} = 1 + \frac{\vec{\alpha}\,.\,\overrightarrow{M_0M}}{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\,.\,\overrightarrow{M_0M}}.$$

Par hypothèse, pour ρ suffisamment petit, l'ensemble est tout entier contenu à l'intérieur d'un certain cône de révolution, d'axe $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. Soit θ le demi-angle au sommet de ce cône. Alors, quel que soit M sur l'ensemble E, nous aurons

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\,.\,\overrightarrow{M_0M}\right| > \left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\right| \left|\overrightarrow{M_0M}\right| \cos\theta$$

d'où

$$\frac{\left|\vec{\alpha}\,.\,\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\,.\,\overrightarrow{M_0M}\right|} < \frac{\left|\vec{\alpha}\right| \left|\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\right| \left|\overrightarrow{M_0M}\right| \cos\theta}$$

ou

$$\frac{\left|\vec{\alpha}\,.\,\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\,.\,\overrightarrow{M_0M}\right|} < \frac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\right| \cos\theta}.$$

(C. Q. F. D.)

8. Définition du paratingent. — On appelle *paratingent* de E en O l'ensemble des droites (passant par O), qui sont limites de droites portant respectivement des segments P_iQ_i non nuls dont les extrémités P_i et Q_i appartiennent à E et tendent vers O.

(On obtiendrait évidemment les mêmes droites limites en substituant, aux droites considérées supports de P_iQ_i, leurs parallèles passant par O.)

Le paratingent en O est évidemment le même pour E et $\overline{E}$.

On pourra, sans inconvénient, parler du paratingent en un point isolé de E; ce paratingent sera vide.

9. Le lemme d'univocité. — Donnons immédiatement une application de la notion de paratingent, en établissant un lemme relatif à la structure d'un ensemble

ponctuel plan, borné fermé E, au voisinage d'un point d'accumulation O de cet ensemble, quand une droite $O\Delta$ est exclue du paratingent en O[1].

L'hypothèse que Δ est exclue du paratingent en O entraîne l'existence d'un rectangle R, de centre O, d'axe Δ tel que :

1° sur toute parallèle à Δ traversant ce rectangle, la portion intérieure à ce rectangle contienne au plus un point de E. Tous ces points (dont nous désignerons l'ensemble par E_1), sont strictement intérieurs à l'ensemble des deux triangles isocèles opposés par le sommet $\mathring{O}$, formés par les diagonales de ce rectangle et ses côtés parallèles à Δ;

2° les droites d'interjonction des points de l'ensemble E_1 aient une pente inférieure, en valeur absolue, à celle des diagonales du rectangle.

Un raisonnement par l'absurde rend immédiat chacun de ces énoncés.

Nous dirons, pour abréger, que ce double énoncé constitue le *lemme d'univocité*.

La projection de l'ensemble fermé E_1 sur la perpendiculaire en O à $O\Delta$ étant un ensemble fermé e_1 (qui contient O), on peut dire qu'il existe sur E un voisinage de O représentable, dans un système d'axes approprié ($O\Delta$ pour axe des y et sa perpendiculaire en O pour axe des x) par l'expression explicite $y = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction à pentes bornées, définie sur un certain ensemble fermé, donc continue sur cet ensemble fermé[2].

10. Le paratingent englobe le contingent. — Nous nous proposons de faire l'étude parallèle des deux notions de contingent et de paratingent, au moins en ce qui concerne certaines de leurs propriétés.

Il y a lieu tout d'abord de comparer le contingent et le paratingent en un point O d'accumulation d'un ensemble E.

En prenant un couple de points M, N de E tendant vers O dans la direction OT, de manière que $\frac{OM}{ON}$ tende vers zéro, on voit que la droite portant chaque rayon OT du contingent fait partie du paratingent. Mais le paratingent peut contenir des droites ne portant aucun rayon du contingent.

Exemple : Le contingent à l'origine O, de la courbe

$$y = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right)$$

---

(1) Bouligand, *C. R.*, t. 190, 1930, p. 1002. Ce lemme a été généralisé par M. Bouligand dans sa communication du 6 octobre 1930 à l'Académie de Cracovie. Voir *Bulletin International de l'Académie Polonaise*, n° 8A, octobre 1930, page 408.

(2) Il peut arriver que e_1, qui contient O et l'admet comme point d'accumulation, ait tous ses points d'un même côté de O.

comprend les deux rayons opposés Ox et Ox', tandis que le paratingent comprend toutes les droites de coefficient angulaire compris entre -1 et $+1$ [1].

Donnons un exemple d'un ensemble plan dont le contingent en O se réduit au rayon Ox, tandis que le paratingent comprend $x'Ox$ et $y'Oy$ et rien que ces deux droites.

Je prends sur Ox les points d'abscisses

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

et je forme l'ensemble E des points

$$(1, y_1); \left(\frac{1}{2}, y_2\right); \left(\frac{1}{3}, y_3\right); \ldots; \left(\frac{1}{n}, y_n\right); \ldots$$

avec $0 \leqslant y_n \leqslant \frac{1}{n!}$. E est l'ensemble de tous ces segments parallèles à Oy. Le contingent en O de cet ensemble ne comprend que Ox. Le paratingent comprend $x'Ox$ et $y'Oy$ et rien que ces deux droites; car la distance de deux points consécutifs sur Ox est $\frac{1}{n(n+1)}$ et la pente maximum qu'on peut obtenir en joignant deux points situés sur des segments distincts tendant vers l'origine O est

$$\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n(n+1)}}$$

qui tend vers zéro.

On peut varier l'exemple en prenant, dans l'espace, des segments perpendiculaires à Ox aux points d'abscisses

$$1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

de longueurs $1, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$.

Suivant la répartition des plans déterminés par Ox et ces segments, le paratingent en O de l'ensemble constitué par tous ces segments comprendra un nombre fini ou infini de droites passant par O dans le plan des yz.

---

[1] De même l'ensemble constitué par les deux côtés de l'angle xOy a pour contingent en O les deux rayons Ox et Oy, tandis que le paratingent contient toutes les droites passant par O et non intérieures à l'angle xOy.

11. La définition unifiée au moyen de l'ensemble limite. — Voici maintenant une propriété commune au contingent et au paratingent.

Le contingent est un ensemble *fermé* de demi-droites;
Le paratingent est un ensemble *fermé* de droites.

La démonstration directe de ce fait est aisée, tant pour le contingent que pour le paratingent.

D'ailleurs, cette propriété, commune au contingent et au paratingent d'être des ensembles fermés, résulte encore d'un autre mode de définition(¹) que nous allons donner du contingent et du paratingent, grâce aux notions rappelées plus haut, d'ensemble limite et d'ensemble d'accumulation.

Le contingent de E en un point d'accumulation O sera, dans sa nouvelle définition, l'ensemble d'accumulation (ou indifféremment l'ensemble limite) de la suite infinie emboîtée :

$$R_1) R_2) \ldots) R_n) \ldots$$

d'ensembles de rayons joignant O à tous les points de E intérieurs aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots \quad \text{tendant vers zéro.}$$

L'équivalence des deux définitions est évidente, car si tout cône circulaire droit, de sommet O, d'axe OT, contient des points de E, alors OT est à une distance angulaire nulle de tous les R_n; d'où, compte tenu du n° 3 :

$$OT(\overline{R_1}\,\overline{R_2} \ldots \overline{R_n} \ldots = \mathcal{H} = \mathcal{L};$$

et inversement.

Tout ensemble R_i coupe la sphère unitaire de centre O en des points qui constituent un ensemble r_i et l'ensemble d'accumulation de la suite $r_1) r_2) \ldots) r_n) \ldots$ étant fermé, il en sera de même du contingent(²).

11 bis. De même, nous considérons la suite infinie emboîtée

$$D_1) D_2) \ldots) D_n) \ldots$$

d'ensembles de droites joignant deux à deux tous les points de E intérieurs, respectivement, aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots \quad \text{tendant vers zéro.}$$

(¹) Ce point a été brièvement signalé par M. Bouligand dans son article : *Sur quelques points de topologie restreinte du premier ordre*, Bull. Soc. Math. France, 1928, p. 29. — Je l'avais retrouvé, ignorant cette publication de M. Bouligand, qui m'a conseillé lui-même d'y revenir.

(²) Le contingent n'est pas un ensemble dérivé, mais un ensemble d'accumulation.

En remplaçant les droites envisagées par leurs parallèles passant par O, nous constituerons une nouvelle suite infinie d'ensembles de droites

$$D'_1)\ D'_2)\ \ldots)\ D'_n)\ \ldots\ (^1).$$

Chacune de ces droites coupe la sphère unitaire de centre O en deux points diamétralement opposés, et tous ces couples de points nous permettent de réaliser la suite infinie d'ensembles ponctuels

$$d'_1)\ d'_2)\ \ldots)\ d'_n)\ \ldots.$$

(Bien entendu, ces d' ne désignent pas ici des ensembles dérivés).

Le paratingent de E en O sera, dans sa nouvelle définition, l'ensemble d'accumulation (ou indifféremment l'ensemble limite) de la suite infinie $\{D'\}$.

L'équivalence des deux définitions est évidente, car toute « paratingente » selon la première définition est encore à distance angulaire nulle de tous les D'_n. Inversement, une droite de

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} = \overline{D'_1}\,\overline{D'_2}\ldots\overline{D'_n}\ldots$$

est à distance angulaire nulle de chaque D'_n : d'où l'existence de cordes à extrémités arbitrairement voisines de O et arbitrairement peu inclinées sur la droite.

Et l'ensemble d'accumulation de la suite $\{d'\}$ étant fermé, il en sera de même du paratingent(²).

12. Contingent de la réunion et de l'intersection d'un nombre fini ou infini d'ensembles. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit point d'accumulation de la réunion d'un nombre *fini* d'ensembles est qu'il soit point d'accumulation d'un des ensembles au moins.

THÉORÈME. — *En tout point d'accumulation de la réunion d'un nombre fini d'ensembles, le contingent de cette réunion est identique à la réunion des contingents*(³).

(La démonstration de ce théorème est immédiate).

Le théorème précédent n'est plus vrai en un point d'accumulation de la réunion d'une collection infinie d'ensembles. Car ce point peut n'être point d'accumulation d'aucun des ensembles, et même dans le cas où il est point d'accumulation de chacun d'eux, le ctg. de la réunion peut contenir d'autres rayons que la réunion des ctg. (comme cela se produit pour le ctg. en O de l'ensemble ponctuel constitué par un ensemble non fermé de demi-droites issues de O).

(¹) Bien entendu, il ne s'agit pas, ici, d'ensembles dérivés.

(²) Le paratingent n'est pas un ensemble dérivé, mais un ensemble d'accumulation.

(³) Par la suite, nous emploierons les abréviations ctg. et ptg. pour désigner le contingent et le paratingent.

13. Théorème. — *Un point d'accumulation de l'intersection d'un nombre fini ou infini d'ensembles est point d'accumulation de chacun d'eux, et l'intersection des ctg. contient le ctg. de l'intersection, mais il peut contenir d'autres rayons.*

On imagine facilement des exemples illustrant cette affirmation; notamment il se peut que le ctg. de l'intersection soit vide, sans que l'intersection des ctg. le soit : cela se produit pour les deux ensembles définis par les équations $y = x^2$ et $y = 0$.

14. Paratingent de la réunion. — On démontre immédiatement la proposition suivante :

Théorème. — *En tout point d'accumulation de la réunion d'un nombre fini ou infini d'ensembles, le ptg. de la réunion contient la réunion des ptg. mais il peut contenir d'autres droites.*

I. *Exemple montrant que le ptg. de la réunion de deux ensembles peut comprendre des droites n'appartenant pas à la réunion des deux ptg.*

Je prends sur Ox une suite de points tendant vers O, et sur Oy une autre suite de points tendant aussi vers O. Chacune d'elles constitue un ensemble dont le ptg. en O est l'axe Ox ou l'axe Oy. Pour obtenir le ptg. de la réunion de nos deux ensembles, il faut encore considérer les droites d'interjonction des points de nos deux suites et prendre les droites d'accumulation, passant par O, de l'ensemble de droites ainsi obtenu. Supposons que, m et n étant deux entiers positifs quelconques, on prenne les points $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ de l'axe Ox et les points $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ de l'axe Oy. Une droite d'interjonction aura pour coefficient angulaire $-\frac{n}{m}$. Puisque les entiers m et n sont quelconques, l'ensemble des valeurs limites sera celui de tous les nombres réels négatifs. Le ptg. de la réunion recouvrira donc l'angle $x'Oy$ et son opposé par le sommet.

Le ptg. de la réunion est d'ailleurs le même que si on prenait pour l'un des deux ensembles le continu ponctuel formé par le rayon Ox, et pour l'autre le continu formé par le rayon Oy.

15. Remarques. — a) Le ptg. en un point de rebroussement pourra s'obtenir de même en songeant à la réunion des deux demi-arcs simples se soudant pour venir constituer le rebroussement. Plaçons-nous encore dans le cas où le ptg. de chacun d'eux se réduit à une droite. Il n'en est plus de même pour le ptg. du rebroussement qui contient la totalité des droites passant par ce point.

b) Il va de soi que si l'on réunit la courbe $y = f(x)$ tangente en O à Ox et ayant en O une tangente continue (le ptg. se réduit alors à $x'Ox$ en vertu de la formule des accroissements finis), et la courbe $x = g(y)$ tangente en O à Oy et

ayant en O une tangente continue, le ptg. en O épuisera la totalité des droites passant par O, pourvu qu'une courbe au moins franchisse le point O.

L'exemple I et les remarques a) et b) pourraient donner à penser que l'intrusion dans le ptg. de la réunion, d'éléments étrangers aux ptg. initiaux, est en fait la règle.

L'exemple suivant prouve qu'il n'en est rien.

16. II. *Exemple montrant malgré tout que le ptg. de la réunion de deux ensembles peut ne comprendre, que la réunion des ptg.*

Considérons la suite $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$.

Portons sur Ox, à partir de O, des longueurs successives égales aux termes de rang impair, et sur Oy à partir de O, des longueurs successives égales aux termes de rang pair.

Nous aurons ainsi deux ensembles de points, l'un sur Ox, l'autre sur Oy. Joignons le point $\left[\frac{1}{(2p+1)!}, 0\right]$ pris sur Ox, au point $\frac{1}{(2q)!}$ pris sur Oy. Nous obtenons une droite de coefficient angulaire $-\frac{(2p+1)!}{(2q)!}$. Les seules valeurs limites de ce rapport sont 0 et $-\infty$ et par suite, ici (étant donné notre choix très spécial de l'ensemble porté par Ox et de l'ensemble porté par Oy), le ptg. se compose seulement de $x'Ox$ et de $y'Oy$.

Notons maintenant que l'exemple II réalise une particularité intéressante. Pour y obtenir une réunion dont le ptg. au point O soit réduit à deux droites, nous avons eu recours à deux ensembles dénombrables.

Cela suggère la question de savoir si la dénombrabilité a joué ici un rôle nécessaire. La réponse est négative comme le montre ce nouvel exemple.

III. *Exemple d'un ensemble non dénombrable dont le ptg. en* O *se réduit à 2 droites* $x'Ox$, $y'Oy$.

Je commence par prendre sur Ox, les points d'abscisses $\frac{1}{(2p)!}$; sur Oy les points d'ordonnées $\frac{1}{(2p+1)!}$. Puis sur Ox je prends les segments

$$\sigma_p : \left[\frac{1}{(2p)!+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{(2p)!}\right];$$

et sur Oy

$$\tau_p : \left[\frac{1}{(2p+1)!+1} \leqslant y \leqslant \frac{1}{(2p+1)!}\right]$$

alors l'ensemble réunion des points des segments σ_p, τ_p est tel que son paratingent soit formé par $x'Ox$ et $y'Oy$.

17. Paratingent de l'intersection. — Un point d'accumulation de l'intersection d'un nombre fini ou infini d'ensembles est point d'accumulation de chacun d'eux et l'intersection des ptg. contient le ptg. de l'intersection; mais il peut contenir d'autres droites.

La démonstration est immédiate.

17 bis. Nous venons de voir apparaître des différences profondes entre ctg. et ptg. Pour la réunion d'un nombre fini d'ensembles, le ctg. est la réunion des ctg.; mais cela n'a plus lieu avec le ptg. Au n° 23, une nouvelle occasion accentuera cette différence.

Signalons encore cette remarque de M. Bouligand :

En un point O, limite de points d'accumulation d'un ensemble E, c'est-à-dire contenu dans le second dérivé E″, le ptg. contient l'ensemble d'accumulation des ptg. aux points de E′ infiniment voisins de O.

Des exemples simples, comme celui de la courbe

$$y = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right),$$

douée d'une tangente qui n'est pas continue à l'origine, montrent que la propriété n'a plus lieu pour le ctg.

CHAPITRE III

Les ensembles dont le contingent ou le paratingent ne contient qu'un nombre fini de rayons ou de droites.

18. Après l'étude que nous venons de faire des notions de ctg. et de ptg., il semble naturel de rechercher les ensembles dont le ctg. ou le ptg., en un point d'accumulation O présente une structure donnée.

Les considérations qui suivent ont surtout pour but d'analyser les difficultés auxquelles on se heurte, alors qu'on semble faire, sur le ctg. et le ptg. les hypothèses les plus simples.

En supposant que le ptg. en un point d'accumulation O d'un ensemble *PLAN* fermé E laisse échapper une droite, nous avons déjà obtenu le lemme d'univocité, destiné à jouer ici un rôle essentiel. Rappelons-en l'énoncé.

Lemme A (d'univocité). — *Si le ptg. en un point d'accumulation* O *d'un ensemble plan fermé* E *laisse échapper une droite* Oy, *il existe sur* E *un voisinage de* O *représentable par* $y = f(x)$, *à pentes bornées, définie sur un certain ensemble fermé linéaire* e *de l'axe* $x'Ox$, *donc continue sur cet ensemble fermé.*

On peut en donner la réciproque suivante :

Réciproque A'. — *S'il existe, sur un ensemble plan fermé* E, *admettant* O *pour point d'accumulation, un voisinage de* O *représentable par* $y = f(x)$, *à pentes bornées, définie sur un certain ensemble linéaire fermé* e *de l'axe* $x'Ox$, *contenant* O, *le ptg. de* E *en* O *laisse échapper au moins une droite.*

19. Le cas où le paratingent se réduit à une droite unique. — Du Lemme d'univocité découle immédiatement le théorème suivant :

Théorème B. — *Si le ptg. en un point d'accumulation* O *d'un ensemble plan fermé* E *se réduit à la seule droite* $x'Ox$, *il existe sur* E *un voisinage de* O *représentable par* $y = f(x)$ *définie et continue sur un certain ensemble fermé linéaire* e *de l'axe* $x'Ox$, *englobant le point* O, *et à pentes infiniment petites dans chaque voisinage de* O *infiniment étroit.*

On peut donner de ce théorème la réciproque suivante :

Réciproque B'. — *S'il existe, sur un ensemble plan fermé* E *admettant* O *pour point d'accumulation, un voisinage de* O *représentable par* $y = f(x)$, *définie sur un certain ensemble linéaire fermé* e, *à pentes infiniment petites sur* e *infiniment réduit au voisinage de* O, *le ptg. en* O *se réduit à la seule droite* $x'Ox$.

20. Remarques. — 1°) Le recours au lemme d'univocité, qui met en œuvre une droite Oy non paratingente, conduit à subdiviser, au voisinage de O, un ensemble plan fermé E en deux parties dont l'une comprend les points à droite de Oy, et l'autre les points à gauche.

2°) L'ensemble linéaire fermé e, envisagé dans le Lemme A comme dans le théorème B, pourrait englober un *intervalle* (continu linéaire) ayant O à son intérieur au sens strict. Alors, il existerait sur l'ensemble plan fermé E un voisinage de O qui serait un arc continu représentable par $y = f(x)$ continue,

à pentes bornées sur un intervalle de e, suffisamment restreint au voisinage de O dans le cas du Lemme A ;

à pentes infiniment petites sur un intervalle de e infiniment petit et englobant O, dans le cas du théorème B.

Si e n'englobe aucun intervalle ayant O à son intérieur au sens strict, il ne peut englober que d'un seul côté de O un *intervalle* dont O soit une extrémité. Supposons cette circonstance réalisée. De l'autre côté de O, le complémentaire de e, sur la droite D qui le porte[1], c'est-à-dire l'ensemble linéaire ouvert $D - e$, est alors constitué par une infinité dénombrable de segments ouverts, et il admet O pour point frontière; autrement dit e est indéfiniment troué au voisinage de O, du côté envisagé. Au contraire, du côté de O où e englobe un intervalle ayant O pour extrémité, on a à faire comme ci-dessus à un continu $y = f(x)$ à pentes bornées ou infiniment petites suivant qu'on se place dans l'hypothèse du lemme A ou du théorème B.

Et si l'on joint par un segment de droite les points de E correspondant aux deux extrémités de chacun de ces segments ouverts, on réalise, par adjonction à E d'un ensemble dénombrable de segments ouverts, une courbe continue $y = f(x)$,

à pentes bornées au voisinage de O, dans le cas du Lemme A ;

à pentes infiniment petites lorsque x tend vers zéro, dans le cas du théorème B.

---

[1] La droite D est l'axe $x'Ox$.

Si enfin e n'englobe d'aucun côté de O un *intervalle* dont O soit une extrémité, e est indéfiniment troué au voisinage de O de chaque côté; et l'adjonction à E d'un ensemble dénombrable de segments ouverts donne encore, au voisinage de O, une courbe continue $y = f(x)$, à pentes bornées ou infiniment petites suivant le cas.

21. Généralités sur les cas de réduction du contingent et du paratingent. — Après les deux hypothèses successives, particulièrement simples, faites (soit dans l'énoncé du lemme A, soit dans celui du théorème B), sur le ptg. d'un ensemble plan fermé, en un point d'accumulation O, à savoir :

une droite échappe au ptg. : hypothèse du lemme A d'univocité;
il ne reste qu'une droite dans le ptg. : hypothèse du théorème B;

envisageons les suivantes en nous restreignant toujours au cas d'un ensemble plan fermé E :

1°) le ptg. est constitué d'un nombre fini de droites;
(le ctg. est alors constitué d'un nombre fini de rayons);
2°) le ctg. est constitué d'un nombre fini de rayons;
(le ptg. peut alors contenir une infinité de droites).

22. La décomposition contingente. — La première des hypothèses ci-dessus est plus restrictive que la seconde. Mais, dans la première comme dans la seconde, le ctg. est constitué d'un nombre fini de rayons, et à la faveur de cette circonstance, il va nous être possible, dans les deux cas, de disséquer E par application du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* E *un ensemble ayant* O *pour point d'accumulation, et dont le ctg. en* O *soit constitué de* n *rayons* $OT_1, OT_2, \ldots, OT_n$.

Il est possible de le réduire suffisamment au voisinage de O *par un cercle de centre* O, *pour qu'on puisse ensuite le considérer comme la réunion de* n *ensembles partiels :*

$$E_1, E_2, \ldots, E_n,$$

ayant chacun O *pour point d'accumulation;*
n'ayant deux à deux aucun point commun, sauf O;
E_i *ayant son ctg. en* O *réduit à* OT_i.

Une telle décomposition de E n'est d'ailleurs possible que d'une seule façon. Nous l'appellerons en abrégé la « *décomposition contingente* ».

23. Remarque. — Dans le cas où le ptg. comprend un nombre fini de droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (où, par conséquent, le ctg. comprend aussi un nombre fini de rayons), on peut appliquer à l'ensemble E la décomposition *contingente*, mais il serait vain d'espérer dissocier tout ensemble dont le ptg. serait ainsi constitué de n droites, en n ensembles partiels, $E_1, E_2, \ldots, E_n$,

ayant chacun O pour point d'accumulation;
n'ayant deux à deux aucun point commun, sauf O;
E_i ayant son ptg. en O réduit à D_i;

et dont il serait la réunion.

Autrement dit, il n'y a pas lieu de parler de décomposition paratingente.

C'est ce que montre l'exemple suivant :

Par les points d'abscisses $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ sur l'axe Ox, menons des segments parallèles à Oy et de même sens et terminés respectivement en des points d'ordonnées

$$1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots.$$

Le ptg. de l'ensemble ponctuel constitué par la réunion de ces segments comprend $x'Ox$ et $y'Oy$. Or, il est impossible de décomposer cet ensemble en deux autres dont l'un aurait pour ptg. $x'Ox$ seul et l'autre $y'Oy$ seul. Car si l'un des ensembles avait pour ptg. $x'Ox$ seul, en vertu du lemme d'univocité, il emprunterait un seul point à chacun des segments, et c'est trop peu pour que le ptg. de l'ensemble restant s'appauvrisse.

24. Application de la décomposition contingente. — Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de la décomposition contingente appliquée à un ensemble E *plan* fermé, dans les deux hypothèses successives envisagées plus haut :

1°) le ptg. en O est constitué d'un nombre fini de droites;
2°) le ctg. en O est constitué d'un nombre fini de rayons.

1°) Sur les n droites dont est formé le ptg., il y en a nécessairement une qui porte un rayon du ctg., mais cette propriété peut ne pas appartenir à certaines d'entre elles. D'ailleurs, la décomposition contingente nous permet de considérer l'ensemble étudié E comme la *réunion* d'au plus $2n$ ensembles partiels pour chacun desquels le ptg. comprend au plus n droites dont une seule porte un unique rayon du ctg.

Si donc nous écartons le cas déjà étudié (théorème B) où le ptg. d'un ensemble partiel se composerait d'une droite unique, il nous reste à envisager l'hypothèse

d'un ensemble partiel dont le ptg. comprendrait, un nombre *fini* de droites (au moins deux), le ctg. étant constitué d'un rayon unique, porté nécessairement par l'une de ces droites.

2°) Le ctg. étant constitué d'un nombre fini de rayons, le ptg. peut contenir une infinité de droites. Mais la décomposition contingente nous permettra encore de considérer l'ensemble E comme la réunion d'autant d'ensembles partiels que son ctg. contient de rayons, les ptg. respectifs de ces ensembles étant plus ou moins riches.

En écartant comme ci-dessus le cas d'un ensemble partiel à ptg. composé d'une droite unique, il nous restera à examiner les ensembles partiels dont le ptg. contient *au moins* une autre droite que celle portant le ctg., hypothèse moins restrictive que celle d'un ptg. constitué d'un nombre *fini* de droites, faite à 1°).

Restreignons-nous à cette dernière, en nous limitant de plus au cas particulier d'un ptg. réduit à *deux* droites (dont l'une portera l'unique rayon du ctg.).

25. Les difficultés d'une solution complète. — Pouvons-nous espérer alors une solution simple de notre problème de structure?

Le problème ainsi simplifié offre encore de sérieuses difficultés, quand on cherche à dépasser ce que nous apprend le lemme d'univocité.

Soit $O\Delta$ le rayon unique du ctg. Prenons pour axe $x'Ox$ la droite paratingente non contingente, pour axe $y'Oy$ une droite laissant $O\Delta$ à sa gauche (par exemple).

L'ensemble E, suffisamment réduit au voisinage de O, sera tout entier à gauche de Oy. Et comme, en vertu d'un théorème qui sera démontré ultérieurement, le ptg. d'un *continu plan* est un continu de droites, la discontinuité que notre hypothèse confère au ptg. de E entraînera que l'ensemble linéaire fermé e (projection de E sur Ox', parallèlement à Oy), soit indéfiniment troué au voisinage de O.

Nous sommes loin, malgré les résultats de cette étude, de pouvoir décrire d'une manière complète la structure, aux environs du point O, des ensembles dont le ptg. se réduit à deux droites données et le ctg. à un rayon unique.

26. L'interdépendance des branches. — A supposer même qu'il nous ait été possible d'analyser avec précision les propriétés de chaque sous-ensemble (ou *branche*) résultant de la décomposition contingente, il reste encore à savoir les conditions mutuelles que s'imposent deux branches du fait que leur réunion ne fait apparaître dans le ptg. rien autre que les deux droites données [1].

Nous avons vu ces conditions mutuelles s'exercer dans les exemples cités aux

[1] On suppose que chacune des deux branches a son ptg. réduit à une droite unique et son ctg. réduit à un rayon unique.

N°s 14 et 16, exemples dans lesquels chaque branche avait bien son ptg. réduit à une droite unique et son ctg. réduit à un rayon unique.

En général, si nous réunissons deux branches ayant chacune son ptg. réduit à l'une des droites données, ces branches seront prélevées respectivement sur deux courbes tangentes en O à chacune de nos droites et de pentes, relativement à cette droite, infiniment petites aux environs de O.

Pour obtenir, par prélèvement sur ces courbes, un ensemble dont le ptg. en O se réduise au système de leurs deux tangentes, il suffira de se placer dans des conditions telles que relativement à ces tangentes prises pour $x'Ox$ et $y'Oy$, les cordes d'interjonction à extrémités infiniment voisines de O n'aient pour valeurs limites de leurs pentes que zéro et l'infini.

Notons encore la possibilité, pour un ensemble dont le ptg. en O se réduit à $x'Ox$ et $y'Oy$, de comprendre un demi-arc simple tangent en O à l'un de nos axes. Par exemple on peut supposer que l'ensemble est formé par la demi-droite Ox' et par une suite de segments parallèles à Oy, telle que la suivante :

$$x_1 = 1 \qquad 0 \leqslant y_1 \leqslant 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \qquad 0 \leqslant y_2 \leqslant \frac{1}{2!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad 0 \leqslant y_n \leqslant \frac{1}{n!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

27. Relations avec la théorie des fonctions. — Pour terminer, signalons un problème de théorie des fonctions qui conduirait à exprimer que le ptg. en un point se réduit à n droites.

Désignons par P et Q deux points quelconques d'un ensemble ponctuel plan fermé E. Soit O un point non isolé de E, et soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ les n droites préalablement données passant par O. Considérons la fonction

$$\varphi(P, Q) = \frac{\sin(PQ, \Delta_1)\sin(PQ, \Delta_2)\ldots\sin(PQ, \Delta_n)}{\sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2}}.$$

On demande à quelles conditions il faut soumettre l'ensemble E si l'on désire qu'au voisinage du point O cette fonction y demeure bornée.

Je dis qu'il est nécessaire[1] que le ptg. d'un tel ensemble se réduise aux n droites $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. En effet, supposons que $\varphi(P, Q)$ demeure bornée.

---

[1] Bien entendu, la condition en question n'est pas suffisante.

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2}}$ croît indéfiniment lorsque P et Q tendent simultanément vers O. Donc la fonction ne peut demeurer bornée que si le numérateur devient infiniment petit dans les mêmes conditions, ce qui revient bien à dire que le ptg. doit comprendre exclusivement les n droites $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

CHAPITRE IV

Projection orthogonale du contingent et du paratingent.

28. Je vais d'abord étudier les extensions, au moyen du ctg., du théorème classique sur la tangente à la projection horizontale d'une courbe algébrique en un point simple, mettant en jeu tantôt la projection de la tangente, tantôt la trace du plan osculateur.

Un arc de courbe (à tangente continue) assez restreint, contenant M, fournit, par projection orthogonale sur un plan, un arc de courbe dont la tangente en m est la projection de la tangente en M, sous réserve que la tangente en M ne soit pas perpendiculaire au plan de projection.

Nous allons étendre ce théorème à un ensemble E admettant O comme point d'accumulation, et projeté sur un plan π, sous réserve que le contingent de E en O ne contienne aucun rayon perpendiculaire au plan π.

Le théorème que nous allons obtenir dans le cas de l'ensemble aura d'ailleurs le même caractère local que celui que nous venons de rappeler concernant la courbe. Autrement dit, nous pourrons être obligés, pour l'énoncer, de diaphragmer suffisamment E au voisinage de O, de même que nous avons été obligés de ne considérer qu'un arc de courbe assez restreint pour éviter l'éventualité d'un point double en m sur l'arc plan obtenu par projection.

29. Projection du contingent : cas régulier. — Soit donc O un point d'accumulation de E et π un plan que nous pouvons supposer passer par O. Si le ctg. de E en O ne contient aucun des deux rayons issus de O et perpendiculaires à π, l'ensemble e, projection orthogonale de E sur π admet aussi O comme point d'accumulation et on peut trouver sur ces deux rayons respectivement deux points B et B′ symétriques par rapport à O, tels qu'aucun point du segment BB′ (sauf peut-être O) n'appartienne à E et ne soit point d'accumulation de E.

Soit E_1 l'ensemble des points de E compris entre les plans menés par B et B′ parallèlement à π ou intérieurs à la sphère de diamètre BB′, et e_1 sa projection orthogonale sur π. Chacun des deux ensembles E_1 et e_1 admet O comme point d'accumulation. Ceci posé, démontrons le théorème suivant :

30. Théorème. — *Le ctg. de e_1 en* O *est la projection du ctg. de* E_1 *en* O.

Nous avons à prouver que :

1° Si OT est un rayon du ctg. de E_1 en O, sa projection Ot sur π est un rayon du ctg. de e_1 en O. C'est évident.

2° Si Ot est un rayon du ctg. de e_1 en O, il est la projection sur π d'un rayon OT du ctg. de E_1 en O.

En effet, puisque Ot est un rayon du ctg. de e_1 en O, il est possible de constituer une *suite* de points $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$ appartenant à e_1, ayant pour limite O et telle que la *suite* de rayons du plan π : $Om_1, Om_2, \ldots, Om_i, \ldots$ ait pour limite le rayon Ot. Remontons aux éléments homologues de E_1. Nous aurons d'abord la *suite* de points $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ qui constitue un ensemble borné dont tout point d'accumulation doit se trouver sur BB' et ne peut, par conséquent, d'après une remarque faite plus haut, être que O. Ainsi, O est *le* point limite de la suite $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$.

La *suite* de demi-plans $BB'M_1, BB'M_2, \ldots, BB'M_i, \ldots$ a pour limite le demi-plan $BB't$. La *suite* de rayons $OM_1, OM_2, \ldots, OM_i, \ldots$, constitue un ensemble borné qui a au moins un rayon d'accumulation, soit OT nécessairement situé dans le demi-plan $BB't$; ce rayon ne coïncide ni avec OB, ni avec OB' puisqu'il fait partie du ctg. de E_1 en O et que ledit ctg. ne contient ni OB, ni OB'.

Finalement, un rayon OT du ctg. de E_1 en O se projette suivant Ot.

31. Remarque. — Le fait de diaphragmer E au voisinage de O (soit au moyen de deux plans symétriques par rapport à O, arbitrairement voisins; soit au moyen d'une sphère centrée en O et de rayon arbitrairement petit), est sans influence sur le ctg. de E en O. Autrement dit, le ctg. de E_1 en O est le même que celui de E.

Mais cette diaphragmation de E peut entraîner, non seulement l'appauvrissement de sa projection e sur le plan π (envisagé dans le théorème ci-dessus), mais encore celui du ctg. de e, lequel ctg. ne deviendra irréductible qu'à partir du moment où il sera identique à la projection du ctg. de E[1].

32. Le contingent d'osculation. — Avant d'étudier le cas où le ctg. de E en O contient un rayon vertical (le plan π étant dit, pour abréger, horizontal), introduisons la notion de « *contingent d'osculation* » [2].

Elle jouera un rôle important par la suite, et il convient de la situer par rapport à l'étude actuelle.

---

[1] Il importe de remarquer que e_1 est la projection de E_1 et non pas le résultat obtenu en appliquant à e la diaphragmation qui a fourni E_1 à partir de E.

Autrement dit e_1 est la projection de la diaphragmation et non pas la diaphragmation de la projection.

[2] G. Bouligand, *Rev. gén. des Sciences*, 15 nov. 1930.

Définition. — Soit O un point d'accumulation de E et OT un rayon du ctg. en O. Nous dirons qu'un demi-plan limité à la droite portant OT appartient au *ctg. d'osculation en* O, *relatif au rayon* OT *du ctg.*,

si *tout* dièdre ayant cette droite pour arête et ce demi-plan pour plan bissecteur comprend des points de E non situés sur OT et à une distance de O arbitrairement petite, ou encore

si *tout* prisme droit triangulaire isocèle ayant le support de OT comme arête, le demi-plan considéré et le plan perpendiculaire en O à OT comme plans de symétrie, contient au moins un point de E non situé sur le support de OT.

Le ctg. d'osculation en O, relatif au rayon OT du ctg., est donc un ensemble de demi-plans limités au support de OT. Il contient en particulier les demi-plans limités au support de OT et passant par les rayons du ctg. en O autres que OT. Mais il peut contenir d'autres demi-plans.

33. Remarque. — Diaphragmer E par un système de 2 plans symétriques par rapport à O, ou par une sphère centrée en O, ne modifie pas le ctg. en O non plus que le ctg. d'osculation en O, relatif à un rayon OT du ctg.

Un arc de courbe assez restreint(¹) contenant M, à tangente et plan osculateur continus, fournit, par projection orthogonale sur un plan π perpendiculaire à la tangente en M, un arc de courbe dont la demi-tangente au point de rebroussement m est la trace sur π du demi-plan osculateur en M.

Et on pourrait être tenté d'attribuer au « contingent d'osculation », dans le cas où l'on projette orthogonalement un ensemble E (assez restreint) sur un plan π passant par un point d'accumulation O et perpendiculaire à un rayon OΔ du ctg., un rôle analogue à celui que jouait tout à l'heure le demi-plan osculateur.

Les considérations qui suivent ont pour but d'écarter des séductions dangereuses.

34. Projection du contingent : cas singulier. — Supposons donc que le ctg. de E en O contienne un rayon vertical et projetons E en e sur le plan horizontal π passant par O.

Alors que, dans le cas précédent, e admettait toujours O pour point d'accumulation (si réduit que soit E au voisinage de O), actuellement O peut ne pas être point d'accumulation de e ou cesser de l'être dès que le rayon de la sphère par laquelle on diaphragme E est suffisamment petit.

(¹) Cette précaution a pour but d'interdire à la courbe plane obtenue par projection, de présenter en m aucune autre branche que les deux qui constituent le rebroussement.

Mais cette circonstance ne se produirait que dans le cas banal où tous les points de E, au voisinage de O, seraient portés par la perpendiculaire en O au plan π.

Écartons cette éventualité.

Dès lors, on a le théorème suivant, dont la démonstration est immédiate :

THÉORÈME. — *Le ctg. de e en O contient la trace, sur le plan π, du ctg. d'osculation de E en O, relatif au rayon vertical; mais il peut contenir d'autres rayons.*

35. Encore pourrait-on espérer, par analogie avec le premier cas, réaliser, par diaphragmation de E, un appauvrissement du ctg. de e qui le rende identique à la trace (sur π) du ctg. d'osculation de E.

D'une part, nous allons montrer par un exemple que cette espérance peut n'être pas fondée; et nous donnerons d'autre part une condition suffisante pour qu'elle se réalise.

35 bis. En désignant par e_1 la projection sur π du résultat E_1 de la diaphragmation de E par une sphère centrée en O, il peut arriver que le ctg. de e_1 en O contienne *toujours*, si petit que soit le rayon de la sphère, des rayons étrangers à la trace sur π du ctg. d'osculation de E_1 (qui est le même que celui de E).

C'est ce que prouve l'exemple suivant :

Soit un arc de cercle d'origine O, tangent en O à la verticale $O\Delta$, et qui se projette suivant Ox, sur le plan π perpendiculaire en O à $O\Delta$.

Prenons sur $O\Delta$ les points $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ de cotes $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$ et menons, par ces points, dans le plan du cercle, les perpendiculaires à $O\Delta$ jusqu'à leurs rencontres en $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ avec le cercle. Faisons tourner ces segments autour de $O\Delta$ d'angles égaux respectivement à $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{2}, \ldots, \frac{\alpha}{k}, \ldots$ (α est un angle arbitraire).

Ils viendront en $M_1N'_1, M_2N'_2, \ldots, M_kN'_k, \ldots$ qui se projettent sur le plan π suivant

$$On'_1,\ On'_2,\ \ldots,\ On'_k,\ \ldots.$$

Soient $O\delta'_1, O\delta'_2, \ldots, O\delta'_k, \ldots$ les rayons du plan π qui prolongent ces derniers segments.

L'ensemble E constitué par les segments $M_1N'_1, M_2N'_2, \ldots, M_kN'_k, \ldots$ a son ctg. en O formé du *seul* rayon $O\Delta$, et son ctg. d'osculation relatif à ce rayon est constitué par le *seul* demi-plan ΔOx.

L'ensemble projeté e a son ctg. en O formé de Ox d'une part, et d'autre part

de l'infinité des rayons $O\delta'_1$, $O\delta'_2$, ..., $O\delta'_k$, ... (ayant Ox pour rayon d'accumulation). Seul de ces rayons, Ox est la trace sur π du ctg. d'osculation de E en O.

Notons d'ailleurs que les rayons du ctg. de e en O étrangers à la trace sur π du ctg. d'osculation de E en O ne constituent pas un ensemble fermé de rayons.

Il est évident que, si petite que soit une sphère centrée en O, l'ensemble plan e_1 projection sur π de l'ensemble E_1 résultant de la diaphragmation de E par cette sphère, admettra *toujours*, dans son ctg. en O, en plus de Ox, une infinité de rayons distincts de Ox, donc étrangers à l'intersection par π du ctg. d'osculation de E_1 en O.

36. Une condition suffisante pour la résolubilité du cas singulier par le contingent d'osculation. — Supposons qu'un rayon Ot du ctg. de e en O ne soit pas la trace sur π d'un demi-plan du ctg. d'osculation de E en O. Le demi-plan ΔOt n'appartenant pas au ctg. d'osculation de E, il existe un prisme droit triangulaire isocèle... (voir plus haut définition du ctg. d'osculation) à l'intérieur duquel ne se rencontre aucun point de E.

Soit E_1 l'ensemble constitué par les points de E compris entre les plans des bases de ce prisme et e_1 sa projection sur π. Le ctg. de e_1 en O ne contiendra plus le rayon Ot, non plus que tout rayon intérieur à l'angle plan d'intersection du « prisme... » avec le plan π.

Je peux donc, par une réduction convenable de E dans une direction perpendiculaire à π, faire disparaître du ctg. de e, tout rayon qui ne serait pas la trace sur π, d'un demi-plan appartenant au ctg. d'osculation de E.

Supposons que les rayons du ctg. de e en O *qui ne sont pas la trace sur* π *d'un demi-plan du ctg. d'osculation de* E *en* O, *constituent un ensemble fermé.*

Alors, le lemme de Borel-Lebesgue nous apprend qu'un nombre *fini* de réductions de E dans une direction perpendiculaire à π fera disparaître, du ctg. de e, tous ces rayons.

Soit E_1 la partie de E que laisse subsister la plus importante de ces réductions. A cet ensemble E_1 (ou à tout autre encore plus réduit, provenant de E), correspondra, par projection sur π, un ensemble e_1 dont le ctg. en O sera identique à la trace sur π du ctg. d'osculation en O, de E_1 (ou de E), relativement à $O\Delta$. La condition en italique constitue donc bien la condition suffisante annoncée.

37. Projection du paratingent. — Étudions maintenant l'influence sur le ptg., d'une projection orthogonale sur un plan π passant par le point d'accumulation O de E, en supposant la perpendiculaire en O à π exclue du ptg.

Alors, le ctg. de E en O ne contient aucun des deux rayons issus de O et perpendiculaires à π. Nous savons que, dans ces conditions, l'ensemble e, projection

orthogonale de E sur π admet aussi O comme point d'accumulation, et qu'on peut trouver, sur ces deux rayons respectivement deux points B et B′ symétriques, par rapport à O, tels qu'aucun point du segment BB′ (sauf peut-être O) n'appartienne à E et ne soit point d'accumulation de E. Soit E_1 l'ensemble des points de E compris entre les plans menés par B et B′ parallèlement à π, et e_1 sa projection orthogonale sur π.

E_1 et e_1 admettront chacun O comme point d'aceumulation.

Ceci posé, démontrons le théorème suivant :

Théorème. — *Le ptg. de e_1 en O est la projection du ptg. de E_1 en O.*

Nous avons à prouver que :

1°) Si $O\Delta$ est une droite du ptg. de E_1 en O, sa projection $O\delta$ sur π est une droite du ptg. de e_1 en O. C'est évident.

2°) Si $O\delta$ est une droite du ptg. de e_1 en O, elle est la projection sur π d'une droite $O\Delta$ du ptg. de E_1 en O.

En effet, puisque $O\delta$ est une droite du ptg. de e_1 en O, il existe une suite de segments $p_1q_1, p_2q_2, \ldots, p_iq_i, \ldots$ dont les extrémités appartenant à e_1, tendent vers O, les droites sustentatrices ayant pour limite $O\delta$. Soient $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_iQ_i, \ldots$ la suite de segments correspondants de E_1. En raisonnant comme dans le cas du ctg. on verrait que les extrémités de ces segments, appartenant à E_1, tendent vers O. Considérons les plans menés par BB′ parallèlement aux segments $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_iQ_i, \ldots$. Ces plans (se confondant respectivement avec ceux menés par BB′ parallèlement aux segments $p_1q_1, p_2q_2, \ldots, p_iq_i, \ldots$) ont évidemment pour limites le plan $BB'O\delta$. La suite des droites sustentatrices de P_1Q_1, $P_2Q_2, \ldots, P_iQ_i, \ldots$ constitue un ensemble borné de droites qui a au moins une droite d'accumulation passant par O, soit $O\Delta$.

CHAPITRE V

Les applications du contingent à la théorie des courbes.

38. Les quatre contingents. — Revenons maintenant au ctg. pour une étude plus détaillée. Nous serons amenés à introduire plusieurs notions connexes donnant lieu à divers énoncés parallèles, pour les appliquer à la théorie des arcs simples de JORDAN.

Dans l'étude de la projection orthogonale du ctg., nous avons déjà eu à rappeler la définition donnée par M. BOULIGAND, du *ctg. d'osculation* en un point d'accumulation O d'un ensemble E, relativement à un rayon OT du ctg. ordinaire. J'appellerai désormais *contingent linéaire* le dernier nommé, et *contingent planaire* le ctg. d'osculation de M. BOULIGAND.

Par analogie avec ce que j'ai fait pour le ctg. linéaire, je donnerai du ctg. planaire cette autre définition :

DÉFINITION. — Le ctg. planaire en un point d'accumulation O d'un ensemble E, relativement à un rayon OT du ctg. linéaire est encore l'ensemble limite (ou indifféremment d'accumulation) de la suite infinie d'ensembles de demi-plans issus du support de OT et passant par tous les points de E, non situés sur le support de OT et intérieurs aux sphères de centres O et de rayons :

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots \quad \text{tendant vers zéro.}$$

L'équivalence des deux définitions est évidente.

39. A l'image de ce que M. BOULIGAND avait fait pour la tangente et le plan osculateur en un point d'une courbe, j'ai généralisé les notions de cercle osculateur et de sphère osculatrice en définissant le *contingent circulaire* et le *contingent sphérique*.

Les définitions du ctg. linéaire et du ctg. planaire (ou d'osculation) données par M. BOULIGAND reviennent à dire :

qu'un rayon OT appartient au ctg. linéaire en O, s'il est limite d'une suite de rayons joignant O aux points d'une suite $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ extraite de E, tendant vers O, et dont tous les points sont distincts de O;

qu'un demi-plan issu du support de OT appartient au ctg. planaire relatif à O

et à OT, s'il est limite d'une suite de demi-plans déterminés par le support de OT et les points $M_1, M_2, \ldots M_i, \ldots$ d'une suite extraite de E, tendant vers O, et dont aucun point ne soit situé sur le support de OT.

40. Par analogie, je dirai qu'un cercle appartient au ctg. circulaire relatif à O et à OT, s'il est limite d'une suite de cercles tangents en O à OT et passant respectivement par les points $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ d'une suite extraite de E, tendant vers O, et dont aucun point ne soit situé sur le support de OT.

Le ctg. circulaire est aussi l'ensemble limite (ou d'accumulation) de la suite infinie d'ensembles de cercles tangents en O à OT et passant par tous les points de E (non situés sur le support de OT) intérieurs aux sphères de centres O et de rayons $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots$ tendant vers zéro.

41. Soit maintenant Γ_{OT} un cercle du ctg. circulaire relatif à O et à OT. Remarquant qu'un cercle, et un point non situé sur ce cercle déterminent sans ambiguité une sphère, je dirai qu'une sphère appartient au ctg. sphérique relatif à O, à OT et à Γ_{OT} si elle est limite d'une suite de sphères passant toutes par Γ_{OT} et respectivement par les points $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ d'une suite extraite de E, tendant vers O, et dont aucun point ne soit situé sur le cercle Γ_{OT}.

Le ctg. sphérique est aussi l'ensemble limite (ou d'accumulation) de la suite infinie d'ensembles de sphères passant par Γ_{OT} et par tous les points de E (non situés sur Γ_{OT}) intérieurs aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots \quad \text{tendant vers zéro.}$$

42. Notations des quatre contingents. — Pour abréger, je désignerai les quatre contingents respectivement par les notations suivantes :

$C_\lambda(O)$: ctg. linéaire relatif à O. C'est un ensemble de rayons;

$C_\varpi(O, OT)$: ctg. planaire relatif à O et à un rayon OT de $C_\lambda(O)$. C'est un ensemble de demi-plans;

$C_\gamma(O, OT)$: ctg. circulaire relatif à O et à un rayon OT de $C_\lambda(O)$. C'est un ensemble de cercles;

$C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$: ctg. sphérique relatif à O, à un rayon OT de $C_\lambda(O)$ et à un cercle Γ_{OT} de $C_\gamma(O, OT)$. C'est un ensemble de sphères.

43. Un principe de représentation ponctuelle. — On peut, par un procédé évident, ramener la considération de l'ensemble des rayons issus d'un point ou des demi-plans issus d'une droite à celle d'un ensemble de points.

Il nous sera commode de pouvoir associer de même un ensemble de points, soit

à l'ensemble des cercles tangents en un point à une droite, soit à l'ensemble des sphères passant par un cercle.

Imaginons d'abord *tous* les cercles tangents en O à OT. Par une inversion de pôle K (sur OT) et de puissance $\overline{KO}^2$, le centre ω d'un de ces cercles se transforme en μ sur la sphère de diamètre KO. Dans le demi-plan OTω de ce cercle, considérons la perpendiculaire à OT passant par μ; elle coupe en ω' la surface latérale du cylindre de révolution d'axe OT, circonscrit à la sphère. Nous dirons que ω' est *l'image* de ce cercle.

Nous établissons ainsi une correspondance biunivoque entre les points de la surface latérale du cylindre et les cercles tangents en O à OT, de rayon nul, fini ou infini, et de demi-plan bien déterminé.

Les cercles de rayon nul ont leurs images sur le cercle de base du cylindre, de centre O; ceux de rayon infini ont leurs images sur le cercle de base de centre K.

Si un point variable ω'_2 tend, sur la surface latérale de ce cylindre, vers un point fixe ω'_1, nous dirons, dans tous les cas, que le cercle d'image ω'_2 vient se confondre avec le cercle d'image ω'_1.

Dès lors, revenant à la *suite* des cercles tangents en O à OT et passant par les points de la suite $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ extraite de E tendant vers O, nous dirons qu'elle a pour limite le cercle Γ_{OT} si la suite des points images de ces cercles a pour limite le point image de Γ_{OT}. Et ceci nous amène à admettre, dans $C_\gamma(O, OT)$ des cercles de rayon nul ou infini, mais de demi-plan bien déterminé.

44. Nous établirons, par la même inversion (mais sans faire usage du cylindre), une correspondance biunivoque entre les sphères passant par un cercle Γ_{OT} de $C_\gamma(O, OT)$, et les points d'un cercle tracé sur la sphère de diamètre KO, cercle inverse de la droite des centres des sphères envisagées (nous excluons le cas banal où, Γ_{OT} étant de rayon infini, les sphères passant par Γ_{OT} deviennent les plans passant par le support de OT); et nous dirons encore que le point est l'image de la sphère qui lui correspond.

La notion de sphère limite d'une suite de sphères passant par Γ_{OT} et les points $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ d'une suite extraite de E tendant vers O se trouve ainsi étendue, ce qui nous amène encore à admettre, dans $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ des sphères de rayon nul ou infini.

Si Γ_{OT} est de rayon nul dans le demi-plan P, toute sphère passant par Γ_{OT} [et en particulier toute sphère de $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$] est tangente en O au plan contenant le demi-plan P.

Si Γ_{OT} est de rayon infini, quel que soit son demi-plan, les sphères passant par Γ_{OT} sont les plans passant par le support de OT, et l'ensemble des sphères de $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ est identique à celui des plans contenant les demi plans de $C_\varpi(O, OT)$.

D'après la définition de $C_\gamma(O, OT)$ et $C_\gamma(O, OT, \Gamma_{OT})$ comme ensemble d'accumulation d'une suite infinie d'ensembles de cercles ou de sphères, nous réaliserons ces deux ctg. en prenant l'ensemble d'accumulation de la suite infinie d'ensembles des points images de ces cercles ou de ces sphères.

Les points de cet ensemble d'accumulation seront les images des cercles ou des sphères constituant les deux ctg.

D'après cela, au même titre que le ctg. linéaire est un ensemble *fermé* de rayons et le ctg. planaire un ensemble *fermé* de demi-plans,

le ctg. circulaire est un ensemble *fermé* de cercles;
le ctg. sphérique est un ensemble *fermé* de sphères.

45. Remarque I. — On peut faire entre les deux ctg. planaire et circulaire, le rapprochement suivant :

Le demi-plan de tout cercle (de rayon nul, fini ou infini) de $C_\gamma(O, OT)$ appartient à $C_\varpi(O, OT)$.

Réciproquement, tout demi-plan de $C_\varpi(O, OT)$ contient au moins un cercle de $C_\gamma(O, OT)$ de rayon nul, fini ou infini. Il peut en contenir une infinité[1].

46. Remarque II. — En tant qu'ensemble d'accumulation, aucun des quatre ctg. ne saurait être vide. Car on suppose implicitement que les ensembles de la suite infinie emboîtée qui admet pour ensemble d'accumulation le ctg. considéré ne sont pas tous vides. Puisque O est point d'accumulation de E, l'hypothèse implicite est toujours réalisée pour $C_\lambda(O)$.

Si nous écartons le cas sans intérêt où tous les points de E suffisamment voisins de O sont en ligne droite, aucun des ctg. planaires ou circulaires relatifs à O et aux divers rayons de $C_\lambda(O)$ n'est vide, non plus qu'aucun des ctg. sphériques relatifs à O et aux divers cercles de chacun des ctg. circulaires.

47. Sur une classe de courbes de Jordan. — Nous allons appliquer les quatre ctg. à l'obtention de propriétés remarquables des courbes simples de Jordan qui coupent en un nombre fini de points, soit tout plan, soit encore toute sphère de rayon fini ou infini.

---

[1] Notons encore que, si deux rayons OT_1 et OT_2 de $C_\lambda(O)$ sont opposés, on a

$$C_\varpi(O, OT_1) \equiv C_\varpi(O, OT_2);$$
$$C_\gamma(O, OT_1) \equiv C_\gamma(O, OT_2)$$

D'ailleurs, si Γ_{OT_1} est un cercle de $C_\gamma(O, OT_1)$ c'est-à-dire aussi de $C_\gamma(O, OT_2)$, on aura :

$$C_\gamma(O, OT_1, \Gamma_{OT_1}) \equiv C_\gamma(O, OT_2, \Gamma_{OT_1}).$$

Dans la première hypothèse, M. Bouligand a prouvé l'existence pour chacun des demi-arcs séparés par un point de la courbe, d'une demi-tangente et d'un demi-plan osculateur. Sa démonstration assigne un rôle à la continuité des ctg., mais j'ai reconnu que ce rôle est purement apparent.

Le problème de la continuité des ctg., intéressant en lui-même, sera envisagé à la suite de la présente recherche. Pour l'instant, je vais reprendre le principe de M. Bouligand, le simplifiant comme je l'ai dit, et en tirant de nouveaux résultats.

48. Un énoncé général. — Soit donc OL un demi-arc simple de Jordan, sans plus.

Chacun des quatre ctg. donne lieu à un théorème dont l'énoncé peut s'unifier comme suit :

Théorème. — Si $C_\lambda(O)$ n'est pas réduit à un rayon unique;

Si $C_\varpi(O, OT)$ n'est pas réduit à un demi-plan unique;

Si $C_\gamma(O, OT)$ n'est pas réduit à un cercle unique;

Si $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ n'est pas réduit à une sphère unique;

tout plan passant par O, traversant $C_\lambda(O)$ dans le 1er cas;

tout plan passant par le support de OT, traversant $C_\varpi(O, OT)$ dans le 2e cas;

toute sphère de rayon fini ou infini, tangente en O à OT et traversant $(C_\gamma(O, OT)$ dans le 3e cas;

toute sphère de rayon fini ou infini passant par Γ_{OT} et traversant $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ dans le 4e cas;

coupe le demi-arc simple OL, arbitrairement réduit au voisinage de O, en une infinité de points admettant O pour point d'accumulation.

En effet,

si dans le 1er cas, un plan P passant par O traverse $C_\lambda(O)$;

si dans le 2e cas, un plan P passant par le support de OT traverse $C_\varpi(O, OT)$;

si dans le 3e cas, une sphère Σ, de rayon fini ou infini, tangente en O à OT traverse $C_\gamma(O, OT)$;

c'est que, si réduit que soit OL au voisinage de O, il n'est pas tout entier d'un même côté de O dans les deux premiers cas, ou de Σ dans le troisième cas.

Dès lors, si O n'était pas point d'accumulation de $OL \times P$ dans les deux premiers cas, de $OL \times \Sigma$ dans le troisième, il en serait point isolé, et, en appelant M un point de OL antérieur au premier point de $OL \times P$ (ou de $OL \times \Sigma$) qui vient après O, l'arc OM ne couperait P (ou Σ) qu'en O : il serait donc tout entier d'un même côté de O (ou de Σ).

49. Le 4e cas mérite quelque attention.

Remarquons d'abord que, sur toute sphère de $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ de rayon fini ou infini, l'une *au moins* des deux calottes que Γ_{OT} sépare sur cette sphère mérite le nom de *calotte contingente*, en ce sens qu'elle peut être obtenue comme limite d'une suite de calottes déterminées sans ambiguïté par la condition d'être bordées par Γ_{OT} et de passer par les points d'une suite $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ extraite de E, tendant vers O et dont aucun point n'est situé sur Γ_{OT}.

Si donc, suivant notre hypothèse, $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ fermé, ne se réduit pas à un élément unique, il existe au moins deux calottes contingentes. D'ailleurs, étant donné deux calottes contingentes distinctes bordées par le même cercle Γ_{OT}, il existe toujours des sphères passant par Γ_{OT} et ayant l'une des calottes à l'intérieur, l'autre à l'extérieur. Nous dirons qu'une telle sphère *traverse le ctg. sphérique*(1).

Dès lors, si une sphère Σ (de rayon fini ou infini) passant par Γ_{OT} « traverse » $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$, c'est que, si réduit que soit OL au voisinage de O, il n'est pas tout entier d'un même côté de Σ. Donc O est point d'accumulation de $OL \times \Sigma$(2).

50. Existence unilatérale de la tangente et des éléments osculateurs. — Le théorème précédent joue le rôle de Lemme par rapport au suivant :

THÉORÈME. — *Soit une courbe simple de Jordan.*

Si TOUT *plan la coupe en un nombre fini de points, dans toute aire finie, elle admet à la fois, en chaque point et de chaque côté, une demi-tangente et un demi plan osculateur.*

Si l'on fait l'hypothèse plus restrictive *qu'elle soit coupée en un nombre fini de points dans toute aire finie, par* TOUTE *surface plane ou sphérique, il en résulte de plus qu'en chaque point et de chaque côté, elle admet un cercle osculateur et une sphère osculatrice*(3).

Soit en effet OL le demi-arc *postérieur* d'une courbe simple de JORDAN. En vertu de la première partie de notre hypothèse, *tout* plan coupe ce demi-arc en un nombre fini de points dans toute aire finie de ce plan.

---

(1) Même dans le cas où $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ serait réduit à une sphère unique, une sphère de rayon fini ou infini pourrait le « *traverser* ». Si en effet, les deux calottes de cette sphère unique limitées à Γ_{OT} étaient contingentes, tout plan ou toute sphère passant par Γ_{OT} traverserait $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$.

(2) Le théorème que nous venons de démontrer signifie donc que, moyennant l'une des quatre hypothèses faites, il existe dans toute région (si réduite qu'elle soit autour de O) d'un plan P (ou d'une sphère Σ) traversant le ctg. envisagé, une infinité de points d'intersection de l'arc OL avec P (ou Σ).

(3) Dans le cas actuel, on peut dire que, sur le cercle et la sphère qui, d'un côté déterminé, constituent le ctg. circulaire et le ctg. sphérique, seule une moitié du cercle et seule une moitié de la sphère sont osculatrices.

Je dis qu'il existe, dans ces conditions, une demi-tangente postérieure en O, autrement dit, que $C_\lambda(O)$ se réduit à un rayon unique.

Car si ce ctg. comprenait deux rayons distincts OD_1 et OD_2, le plan passant par la bissectrice de $\widehat{D_1OD_2}$ et perpendiculaire au plan de cet angle couperait (d'après le théorème précédent) le demi-arc simple OL, arbitrairement réduit au voisinage de O, en une infinité de points, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Puisque $C_\lambda(O)$ est réduit à un rayon unique OT, il n'existe en O qu'un seul ctg. planaire $C_\varpi(O, OT)$, et un raisonnement identique au précédent, faisant intervenir le plan bissecteur du dièdre formé par deux demi-plans distincts de $C_\varpi(O, OT)$ (supposés exister), mettrait en évidence la contradiction entre l'hypothèse et l'existence de ces deux demi-plans distincts[1].

51. Faisons maintenant l'hypothèse plus restrictive exprimée par la seconde partie de l'énoncé. Nous saurons, d'après ce qui précède, que $C_\lambda(O)$ se réduit à un rayon unique OT, et que $C_\varpi(O, OT)$ se réduit à un demi-plan unique, soit π. Il n'existera donc en O qu'un seul ctg. circulaire $C_\gamma(O, OT)$ dont les cercles, de rayon fini ou infini, sont tous dans le demi-plan π. Si $C_\gamma(O, OT)$ comprenait deux cercles distincts, la considération d'une sphère ayant l'un d'eux à son intérieur et l'autre à son extérieur, mettrait en évidence la contradiction entre l'hypothèse et l'existence de ces deux cercles distincts.

Soit Γ_{OT} le cercle unique de $C_\gamma(O, OT)$.

Il n'existe donc en O qu'un seul ctg. sphérique : $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$.

S'il comprenait deux sphères distinctes (ou même s'il n'en contenait qu'une, mais dont les deux calottes fussent contingentes), la considération d'une sphère le « *traversant* » mettrait en évidence la contradiction entre l'hypothèse et l'existence de deux calottes contingentes.

Tout ce qui vient d'être dit pour le demi-arc postérieur étant évidemment valable pour le demi-arc antérieur, le théorème se trouve établi.

52. Remarque. — Faisons, sur le demi-arc simple OL de Jordan la *seule* hypothèse que $C_\lambda(O)$ soit réduit à un rayon unique OT. Alors $C_\varpi(O, OT)$ et $C_\gamma(O, OT)$

---

[1] Dans son Mémoire sur *Les continus d'ordre borné*, Acta Mathematica, année 1930, t. 55, M. A. Marchaud démontre p. 85 ce théorème :

Tout arc simple *à tangente partout* coupé en un nombre fini de points par un plan admet en chaque point un plan osculateur à droite et un plan osculateur à gauche.

Il établit de plus, page 113, cet autre théorème :

Tout arc simple plan, rencontré en un nombre fini de points par un cercle quelconque et doué partout d'une tangente, admet en chaque point un cercle osculateur à droite et un cercle osculateur à gauche.

pourront contenir, le premier plusieurs demi-plans, le second plusieurs cercles. De même, les ctg. sphériques relatifs à O et à chacun des cercles de $C_\gamma(O, OT)$ pourront contenir chacun plusieurs sphères.

Mais, comme tout point M (de OL), suffisamment voisin de O est du même côté que OT par rapport au plan P perpendiculaire en O à OT, on peut, au lieu de considérer $C_\gamma(O, OT)$ comme formé de cercles entiers, l'envisager comme constitué de demi-cercles situés du même côté que OT par rapport à P.

De même, au lieu de considérer le ctg. sphérique (relatif à un cercle déterminé Γ_{OT} du ctg. circulaire), comme formé de sphères entières, on peut l'envisager comme constitué de demi-sphères situées du même côté que OT par rapport à P, et contenant par conséquent le demi-cercle contingent de Γ_{OT}.

53. Considérons plus particulièrement, comme on le fait en analyse classique, une courbe définie par les fonctions $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, continues et pourvues de dérivées successives. En un point ordinaire de cette courbe, le demi-cercle osculateur antérieur se raccorde avec le demi-cercle osculateur postérieur, et il en est de même des deux demi-sphères osculatrices antérieure et postérieure[1].

54. Une condition suffisante de continuité des contingents. — Abordons maintenant le problème de la continuité des quatre ctg.

Même dans le cas d'un continu E, le ctg. linéaire $C_\lambda(O)$ n'est pas nécessairement un continu de rayons, comme on le voit en prenant pour E le continu ponctuel constitué par deux demi-droites Ox et Oy.

D'où l'intérêt de la condition suffisante, donnée par M. Bouligand pour la continuité des deux ctg. linéaire et planaire d'un continu. L'extension en est immédiate aux ctg. circulaire et sphérique et les conditions suffisantes de continuité ainsi obtenues pour les quatre ctg. peuvent s'unifier dans l'énoncé général suivant :

55. Théorème. — *Pour un continu* E, *une condition suffisante de continuité pour chacun des quatre ctg. est que tout couple* M, N *de points de ce continu puisse se join-*

---

[1] Les résultats ci-dessus n'épuisent pas les applications connues du contingent, à la théorie des courbes. M. Georges Durand a communiqué à l'Académie des Sciences, le 28 août 1930, le théorème suivant :

S'il existe en tout point non isolé d'un ensemble E, un demi-cône de révolution non aplani, englobant la totalité du contingent, l'ensemble E est dénombrable.

Il suit de là que si un arc simple admet partout deux demi-tangentes, elles sont opposées, sauf au plus sur un ensemble dénombrable de points.

Le travail développé de M. Georges Durand va paraître aux *Acta Mathematica*.

dre par un sous-continu de E, *de diamètre infiniment petit avec* OM + ON *et ne contenant* (*hypothèse* H) *aucun point ponr lequel l'élément géométrique* (*rayon ou demi-plan, cercle ou sphère, astreint à passer par ce point*) *dont est formé le ctg., deviendrait indéterminé.*

Ne pas passer par O pour $C_\lambda(O)$; ne pas rencontrer la droite support de OT pour $C_\varpi(O, OT)$ ou pour $C_\gamma(O, OT)$; ne pas rencontrer Γ_{OT} pour $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$, telles sont en définitive, les formes prises dans les divers cas, par l'hypothèse H relative au sous-continu de E joignant le couple M, N.

Il est entendu que, de leur côté, les points M et N distincts sont :

distincts de O dans le premier cas;

non situés sur la droite support de OT dans le deuxième et le troisième cas;

non situés sur Γ_{OT} dans le quatrième cas.

Puisque les quatre ctg. sont des ensembles fermés, pour en prouver la continuité, il nous suffira d'établir l'impossibilité de les décomposer en deux ensembles fermés F_1 et F_2 sans élément commun. Étant donné deux tels ensembles, on peut toujours trouver un couple d'éléments pour lequel se trouve réalisé le minimum de la « *distance* » de ces éléments(¹).

Pour abréger le langage, ce couple sera dit « *couple de disjonction* », car il atteste que les ensembles F_1 et F_2 n'ont aucun élément commun. Cette notion embrasse celles

de segment de disjonction, quand F_1 et F_2 sont deux ensembles ponctuels fermés sans point commun;

d'angle de disjonction, quand F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés de rayons (issus d'un même point) sans rayon commun;

d'angle dièdre de disjonction, quand F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés de demi-plans (issus d'une même droite) sans demi-plan commun, notions qui se présenteront à nous par la suite d'une manière naturelle.

56. Nous allons utiliser la proposition suivante, due à Janiszewski et sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à la fin de ce travail(²).

Lorsque l'ensemble limite d'une famille infinie de continus renferme deux points A et B, cette famille admet pour ensemble d'accumulation un continu sur lequel se trouvent et A et B.

(¹) L'usage que nous faisons de cette notion est conforme aux idées générales développées par M. Maurice Frechet dans ses « Espaces abstraits », Gauthier-Villars, Paris, 1928.

(²) S. Janiszewski, thèse, page 20.

57. A la faveur de ce lemme, démontrons, pour le premier des ctg., le théorème énoncé plus haut. Nos hypothèses sont les suivantes :

E est un continu ponctuel tel que tout couple M, N de points de E distincts, et distincts de O, puisse être joint par un sous-continu de E ne passant pas par O et de diamètre infiniment petit avec $OM + ON$.

Dans ces conditions, je vais prouver par l'absurde, que $C_\lambda(O)$ est un continu de rayons.

Supposons donc que $C_\lambda(O)$, fermé, ne soit pas un continu. Il est donc décomposable en deux sous-ensembles fermés F_1 et F_2 sans rayon commun. Soit OL_1 un rayon de F_1 et OL_2 un rayon de F_2. Il existe une suite de points distincts, distincts de O, appartenant à E,

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_k, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{telle que}$$
$$OM_1 > OM_2 > \ldots > OM_k, \ldots\ldots\ldots \quad \text{tende vers zéro;}$$
$$\widehat{L_1OM_1} > \widehat{L_1OM_2} > \ldots > \widehat{L_1OM_k} > \ldots \quad \text{tende vers zéro.}$$

Il existe de même une suite de points distincts, distincts de O, appartenant à E,

$$N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_k, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{telle que}$$
$$ON_1 > ON_2 > \ldots > ON_k > \ldots\ldots \quad \text{tende vers zéro;}$$
$$\widehat{L_2ON_1} > \widehat{L_2ON_2} > \ldots > \widehat{L_2ON_k} > \ldots \quad \text{tende vers zéro.}$$

On peut prélever les deux suites partielles

$$M'_1,\ M'_2,\ \ldots,\ M'_i,\ \ldots$$
$$N'_1,\ N'_2,\ \ldots,\ N'_i,\ \ldots$$

telles que deux points de même rang M'_i et N'_i puissent se joindre par un sous-continu $\mathcal{C}_i$ de E ne passant pas par O, de diamètre d_i, et que l'on ait :

$$d_1 > d_2 > \ldots > d_i > \ldots \quad \text{tendant vers zéro.}$$

Soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$ la suite infinie de continus de rayons issus de O et construits avec les directrices

$$\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2,\ \ldots,\ \mathcal{C}_i,\ \ldots.$$

Elle admet, au sens de Janiszewski, un ensemble limite.

Cet ensemble limite contient OL_1, car la suite de rayons $OM'_1, OM'_2, \ldots, OM'_i, \ldots$ (appartenant respectivement à $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$) a pour limite le rayon OL_1; donc la suite des distances angulaires de $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$ à OL_1 a pour limite zéro, ce qui entraîne bien que OL_1 soit rayon de l'ensemble limite. De même, cet ensemble limite contient OL_2.

Donc, d'après le théorème de JANISZEWSKI, la suite des Γ admet un ensemble d'accumulation qui est un continu contenant OL_1 et OL_2.

D'ailleurs tout rayon OD de cet ensemble d'accumulation appartient à $C_\lambda(O)$. Cela résulte immédiatement de la qualité de OD et du fait que le diamètre d_i de $\mathcal{C}_i$ tend vers zéro en même temps que $OM'_i + ON'_i$.

Ainsi $C_\lambda(O)$ contient un continu de rayons comprenant lui-même OL_1 et OL_2, ce qui est en contradiction avec le fait que, $C_\lambda(O)$ étant décomposable en deux ensembles fermés F_1 et F_2 sans rayon commun, il existe un *angle de disjonction* rendant impossible, sur $C_\lambda(O)$, le passage continu de OL_1 à OL_2.

Donc $C_\lambda(O)$ est un continu.

Un raisonnement identique prouve la continuité de $C_\varpi(O, OT)$.

58. Établissons maintenant la continuité de $C_\gamma(O, OT)$, moyennant les hypothèses faites plus haut.

Démontrer que $C_\gamma(O, OT)$, ensemble fermé de cercles est un continu, c'est, par définition, démontrer que l'ensemble ponctuel fermé f qui est son image sur la surface latérale du cylindre est un continu.

Si $C_\gamma(O, OT)$ n'est pas un continu, il est décomposable en deux sous-ensembles fermés F_1 et F_2 sans cercle commun; soit C_1 un cercle de F_1 et C_2 un cercle de F_2; l'ensemble ponctuel fermé f, image de $C_\gamma(O, OT)$ se trouve de ce fait décomposé en deux sous-ensembles fermés ponctuels sans point commun f_1 et f_2, images respectives de F_1 et F_2; et f_1 contient l'image m_1 de C_1, tandis que f_2 contient l'image m_2 de C_2.

On peut, comme plus haut, réaliser les deux suites

$$M'_1,\ M'_2,\ \ldots,\ M'_i,\ \ldots$$
$$N'_1,\ N'_2,\ \ldots,\ N'_i,\ \ldots$$

prélevées chacune sur E, tendant chacune vers le point O, dont aucun point ne soit situé sur le support de OT, telles qu'il existe un sous-continu E_i de E (ne rencontrant pas le support de OT), de diamètre d_i décroissant et tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$, telles enfin que les deux suites de cercles tangents en O à OT qu'elles déterminent aient pour limites respectives les cercles C_1 et C_2.

Soit $$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots,\ \Gamma_i,\ \ldots$$

la suite infinie de continus de cercles, tangents en O à OT, et s'appuyant sur les directrices

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_i,\ \ldots.$$

En prenant les images de ces cercles, on constitue une suite infinie de continus ponctuels

$$K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots$$

ayant, au sens de JANISZEWSKI, un ensemble limite qui contient m_1 et m_2, puisque l'ensemble limite de la suite $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$ contient C_1 et C_2.

Donc l'ensemble d'accumulation de la suite $K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots$ est, d'après le théorème de JANIZEWSKI, un continu passant par m_1 et m_2. Je dis que tout point P de cet ensemble d'accumulation appartient à f; ou, ce qui revient au même, que tout cercle de l'ensemble d'accumulation de $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$ appartient à $C_\gamma(O, OT)$, ce qui est évident.

Ainsi f contient un continu de points comprenant lui-même m_1 et m_2, ce qui est en contradiction avec le fait que, f étant décomposable en deux sous-ensembles fermés, ponctuels, sans point commun, il existe un segment de disjonction rendant impossible, sur f, le passage continu de m_1 à m_2.

Donc f est un continu, et il en est de même de l'ensemble fermé de cercles $C_\gamma(O, OT)$, dont f est l'image.

Moyennant les hypothèses faites sur le continu E, à savoir : qu'il contient O, que deux points M et N de ce continu, distincts, non situés sur Γ_{OT}, peuvent être joints par un sous-continu de E ne contenant aucun point de Γ_{OT} et de diamètre infiniment petit, en même temps que $OM + ON$, on démontre, par un raisonnement identique au précédent, que l'ensemble fermé de sphères $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ est un continu.

59. Occupons-nous maintenant des continus particuliers constitués par un demi-arc simple de JORDAN.

Moyennant les hypothèses précisées au théorème suivant, de tels continus satisferont aux conditions (énoncées plus haut), assurant la continuité de leurs ctg.

THÉORÈME. — *Un demi-arc simple* OL *de Jordan*

1°) *satisfait toujours à la condition assurant la continuité de* $C_\lambda(O)$;

2°) et 3°) *satisfait à la condition assurant la continuité de* $C_\varpi(O, OT)$ *et de* $C_\gamma(O, OT)$, *quand* O *est point isolé de* $OT \times OL$;

4°) *satisfait à la condition assurant la continuité de* $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ *quand* O *est point isolé de* $\Gamma_{OT} \times OL$.

Soit en effet OL le demi-arc simple de JORDAN défini par les trois fonctions continues $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, et l'inégalité $t \geqslant t_0$, le point O correspondant à $t = t_0$. (Le demi-arc envisagé est donc le demi-arc « postérieur »).

Ce demi-arc simple OL constitue un ensemble E qui est un continu et dont O est point d'accumulation.

A partir du moment où M et N, appartenant à OL, distincts l'un de l'autre,

distincts de O dans le cas de $C_\lambda(O)$;
non situés sur le support de OT dans le cas de $C_\varpi(O, OT)$ ou de $C_\gamma(O, OT)$;
non situés sur Γ_{OT} dans le cas de $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$;

sont suffisamment voisins de O, ils peuvent être joints par un sous-continu de OL,

ne passant pas par O dans le premier cas;
ne contenant aucun point du support de OT dans les deux suivants;
ne contenant aucun point de Γ_{OT} dans le dernier cas;

et de diamètre infiniment petit avec $OM + ON$.

Cette possibilité résulte uniquement, dans le premier cas, de la continuité uniforme des fonctions f, g, h;

dans les deux suivants, de cette continuité uniforme et du fait que O est point isolé de $OT \times OL$;

et dans le dernier cas, de cette continuité uniforme et du fait que O est point isolé de $\Gamma_{OT} \times OL$.

Dès lors, pour tout demi-arc simple OL de JORDAN,

$C_\lambda(O)$ est *toujours* un rayon ou un continu de rayons;
$C_\varpi(O, OT)$ est un demi-plan ou un continu de demi-plans,
$C_\gamma(O, OT)$ est un cercle ou un continu de cercles,

si O est point isolé de $OT \times OL$;

Et $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ est une sphère ou un continu de sphères si O est point isolé de $\Gamma_{OT} \times OL$.

CHAPITRE VI

Les applications du paratingent à la théorie des courbes.

60. Nous nous proposons de montrer, dans ce chapitre, le rôle sélectif que joue le ptg. dans la définition autonome de différentes classes de courbes, et d'opposer à ce point de vue ctg. et ptg.

Faisons d'abord l'étude d'un *continu* ponctuel plan, borné E, au voisinage d'un point d'accumulation O, quand une droite $O\Delta$ est exclue du ptg. en O.

Le lemme d'univocité et le théorème établi plus haut que la projection d'un continu borné est un segment fermé, donneront la solution de ce problème, mais la remarque suivante montre bien la nécessité, dans cette étude, de certaines précautions qui peuvent, au premier abord, apparaître superflues.

61. Remarque. — Soit O un point d'accumulation d'un *continu* ponctuel *plan*, borné E. Il peut arriver que l'ensemble des points de E intérieurs (sens large) à tout cercle de centre O et de rayon inférieur à une certaine valeur fixe ε, bien qu'étant fermé (intersection de deux ensembles fermés) *ne soit pas un continu.*

Cette circonstance se produit par exemple, en chacun des points du segment de l'axe des $y(-1, +1)$, pour le continu constitué par la courbe $y = \sin \frac{1}{x}$ complétée par le segment d'accumulation $(-1, +1)$ de l'axe des y.

Cette remarque s'étend évidemment à un continu ponctuel borné E de l'espace à trois dimensions admettant O comme point d'accumulation. Il suffit de remplacer les cercles par des sphères. Et le continu obtenu par rotation autour de l'axe des x du continu plan précédent en est un exemple.

62. Une classe de courbes planes. — A la faveur des préliminaires ci-dessus, démontrons le théorème suivant :

Théorème. — *Si en un point* O *d'un* continu *ponctuel plan borné,* E, *une droite* $O\Delta$ *est exclue du ptg. en* O, *en prenant cette droite pour axe des* y, *sa perpendiculaire en* O *pour axe des* x, *les environs de* O *sur ce continu sont formés par un arc de courbe passant par* O *et représentable, dans le système d'axes choisi, par l'expression*

explicite $y = f(x)$, CONTINUE *et à pentes bornées dans un certain* INTERVALLE (*continu linéaire*) *contenant* O.

En effet, en vertu du lemme d'univocité, l'ensemble E_1 obtenu par diaphragmation de E au moyen d'un cercle centré en O et de rayon suffisamment petit, correspond biunivoquement à sa projection e_1 sur l'axe des x et est représentable par $y = f(x)$ définie, continue et à pentes bornées sur cet ensemble fermé e_1.

(Il peut arriver que e_1, qui contient O et l'admet comme point d'accumulation, ait tous ses points d'un même côté de O).

Notre hypothèse supplémentaire que E est un continu entraînera d'ailleurs les conséquences suivantes :

Si e_1 n'a de points que sur l'un des deux rayons Ox ou Ox', il englobera tous les points d'un segment terminé en O et porté par ce rayon.

Si e_1 a des points de part et d'autre de O, il englobera tous les points d'un segment porté par $x'Ox$ et ayant O à son intérieur au sens strict.

Car autrement, e_1 serait indéfiniment troué au voisinage de O, au moins sur un des rayons Ox ou Ox' sur lequel il possède des points, et il en résulterait immédiatement la possibilité de décomposer E en deux ensembles fermés sans point commun, ce qui est contraire à l'hypothèse faite que E est un continu.

En définitive, E_1 est représentable, dans notre système d'axes, par l'expression explicite $y = f(x)$, définie, continue et à pentes bornées dans un intervalle (continu linéaire) englobant O, sinon à son intérieur au sens strict, du moins à l'une de ses extrémités.

Le théorème se trouve donc démontré[1].

63. Il nous fournit immédiatement la solution du problème suivant :

PROBLÈME. — *Trouver les continus plans dont le ptg. en chaque point laisse échapper au moins une droite.*

Nous savons, d'après le théorème précédent, qu'en chaque point du continu, on peut trouver un système d'axes tels que les environs de ce point sur le continu constituent un arc de courbe défini par une équation explicite $y = f(x)$ continue et à pentes bornées dans un certain *intervalle* comprenant le point considéré.

Finalement, un continu plan dont le ptg. en chaque point laisse échapper au

---

[1] Il résulte de ce théorème que la circonstance envisagée dans la remarque N° 61 est incompatible avec nos hypothèses actuelles.

Autrement dit : si le ptg. en un point O d'un continu plan E laisse échapper une droite, la portion de ce continu comprise dans un cercle centré en O et de rayon suffisamment petit est un continu.

moins une droite, est une courbe simple, fermée ou ouverte, décomposable en un nombre fini d'arcs (en vertu du théorème de BOREL-LEBESGUE. car le continu est *fermé*), admettant chacun une représentation explicite $y = f(x)$, dans un système d'axes approprié, $f(x)$ étant une fonction continue, à pentes bornées, dans un certain intervalle.

Ces courbes sont dès lors rectifiables.

64. Comme cas particulier du problème précédent, envisageons le suivant :

PROBLÈME. — *Trouver les continus plans dont le ptg. se réduit en chaque point à une droite unique.*

Ces continus sont évidemment des courbes à tangente continue[1]. Cette tangente est de plus orientée, puisque l'hypothèse faite que le ptg. en chaque point se réduit à une droite unique exclut l'éventualité de points de rebroussement.

65. Une classe de courbes gauches. — Proposons-nous maintenant d'étendre à l'espace à trois dimensions les résultats que nous venons d'obtenir. En premier lieu, le lemme d'univocité aura l'énoncé suivant :

LEMME D'UNIVOCITÉ. — O *étant un point d'accumulation d'un ensemble ponctuel fermé* E *de l'espace à trois dimensions, si toutes les droites passant par* O *dans un certain plan* π *sont exclues du ptg. en* O, *il existe un cylindre de révolution* C *de centre* O, *ayant pour axe la perpendiculaire* $x'Ox$ *menée en* O *au plan* π *et tel que :*

1°) *Sur tout plan parallèle à* π, *traversant ce cylindre, la portion intérieure à ce cylindre contienne au plus un point de* E; *tous ces points (dont nous désignerons l'ensemble par* E_1) *étant strictement intérieurs à l'ensemble des deux cônes de révolution opposés par le sommet et ayant pour cercles de base les deux cercles de base du cylindre;*

2°) *Les droites d'interjonction des points de l'ensemble* E_1 *aient leurs parallèles (passant par* O) *intérieures à ces deux cônes.*

Soit e_1 l'ensemble fermé projection de l'ensemble fermé E_1 sur l'axe des x, parallèlement au plan π que nous prendrons pour plan des yz. L'ensemble E_1 est représentable par les deux expressions explicites $y = f(x)$, $z = g(x)$, définies sur e_1, à pentes bornées, donc continues sur cet ensemble fermé linéaire e_1. Il peut arriver que e_1 qui contient O et l'admet comme point d'accumulation, ait tous ses points d'un même côté de O.

---

[1] Car autrement, en un point M où la tangente serait non continue, l'ensemble limite des tangentes aux points infiniment voisins de M comprendrait au moins une droite MS distincte de MT, et on prouverait aisément que MS fait partie du paratingent en M.

Si nous supposons que E est un *continu*, nous en déduirons les conséquences suivantes :

Si e_1 n'a de points que sur l'un des deux rayons Ox ou Ox', il englobera tous les points d'un segment terminé en O et porté par ce rayon.

Si e_1 a des points de part et d'autre de O, il englobera tous les points d'un segment porté par $x'Ox$ et ayant O à son intérieur, au sens strict.

66. D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si en un point* O *d'un* CONTINU *ponctuel borné* E *de l'espace à trois dimensions, toutes les droites passant par* O *dans un certain plan* π *sont exclues du ptg., en prenant ce plan pour plan des* yz, *la perpendiculaire en* O *à* π *pour axe des* x, *les environs de* O *sur le continu* E *sont représentables par les expressions explicites* $y = f(x)$, $z = g(x)$, *définies, continues et à pentes bornées dans un intervalle (continu linéaire) englobant* O, *sinon à son intérieur au sens strict, du moins à l'une de ses extrémités.*

Il résulte encore de ce théorème que la circonstance envisagée dans la remarque N° 61 est incompatible avec nos hypothèses actuelles. Autrement dit : si le ptg. en un point O d'un continu E de l'espace laisse échapper toutes les droites passant par O dans un certain plan, la portion de ce continu comprise dans une sphère de centre O et de rayon suffisamment petit est un continu.

67. Le théorème précédent donne immédiatement la solution du problème suivant :

PROBLÈME. — *Trouver les* CONTINUS *de l'espace dont le ptg. en chaque point laisse échapper toutes les droites passant par ce point dans un certain plan.*

Un tel continu est une courbe simple, fermée ou ouverte, décomposable en un nombre fini d'arcs admettant chacun une représentation explicite $y = f(x)$, $z = g(x)$, dans un système d'axes approprié, $f(x)$ et $g(x)$ étant des fonctions continues, à pentes bornées, dans un certain intervalle.

Ces courbes sont dès lors rectifiables.

En particulier, un continu dont le ptg. se réduit en chaque point à une droite unique est une courbe à tangente continue et orientée[1]. Et réciproquement, pour une telle courbe, le ptg. se réduit en chaque point à une droite.

---

[1] La continuité de la tangente est une conséquence immédiate de la remarque de M. Bouligand mentionnée au n° 17 *bis*.

68. Continuité du paratingent d'un arc simple de Jordan. — Notre but sera maintenant d'établir que le ptg. en un point d'un *continu plan* quelconque est un *continu* de droites.

Démontrons d'abord la continuité du ptg. d'un arc simple.

LEMME I. — *Étant donné un arc* PQ *prélevé sur une courbe simple de Jordan* $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, *l'ensemble des droites sustentatrices des cordes de cet arc est bien enchaîné entre deux cordes sous-tendant des arcs non empiétants.*

Soient en effet 2 arcs AB et A'B' non empiétants, dont les extrémités A, B, A', B', correspondent aux valeurs α, β, α', β' du paramètre t : $\alpha < \beta < \alpha' < \beta'$.

En posant $\dfrac{t' - \beta}{t' - \beta'} = \dfrac{t - \alpha}{t - \alpha'}$, nous établissons, entre les points de l'arc AA' et ceux de l'arc BB' une correspondance biunivoque continue telle que t variant de α à α', t' varie de β à β' ce qui amène d'une façon continue la corde MM' (d'extrémités t et t') de la position AB à la position A'B'.

II. — *Cet ensemble de droites est bien enchaîné entre deux cordes sous-tendant des arcs dont l'un est prélevé sur l'autre.*

On a dans ce cas $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

Et il suffit encore de poser $\dfrac{t' - \beta}{t' - \beta'} = \dfrac{t - \alpha}{t - \alpha'}$.

III. — *Cet ensemble de droites est* « BIEN ENCHAINÉ ».

Car si on suppose $\alpha < \alpha' < \beta < \beta'$ de façon que les arcs AB, A'B' aient une partie commune A'B, en prenant m et n tels que $\alpha' < m < n < \beta$, l'ensemble de droites considéré sera bien enchaîné entre AB et MN d'une part, entre MN et A'B' d'autre part.

THÉORÈME. — *Le ptg. d'un arc simple de Jordan se réduit en chaque point à une droite unique ou est un continu de droites.*

Soit M un point de l'arc simple $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. Je dis que le ptg. en M de cet arc est un continu.

Prenons de part et d'autre de M deux points P et Q de cet arc et considérons l'ensemble des droites sustentatrices des cordes RS (non nulles) de l'arc PQ. Nous venons de voir que c'est un ensemble bien enchaîné entre deux quelconques de ses droites R'S' et R''S''. Donc sa fermeture est un *continu* de droites. Soit maintenant une suite d'arcs

$$\widehat{P_1Q_1},\ \widehat{P_2Q_2},\ \ldots,\ \widehat{P_iQ_i},\ \ldots$$

dont les extrémités P_i et Q_i tendent vers M de part et d'autre de M. A cette suite

d'arcs emboîtés correspond une suite emboîtée de continus de droites dont l'ensemble d'accumulation (identique ici à l'ensemble limite) est précisément le ptg. en M. Et comme il comprend au moins une droite, le théorème de JANISZEWSKI nous apprend que c'est un continu de droites, à moins qu'il ne se réduise à une droite unique.

69. Continuité du paratingent de tout continu plan. — THÉORÈME. — *Le ptg. en un point quelconque d'un* CONTINU PLAN *est un continu de droites (ou se réduit à une droite unique).*

Distinguons deux cas :

1°) Le ptg. en O épuise la totalité des droites passant par ce point.

Notre conclusion se confond alors avec notre hypothèse.

2°) Il y a au moins une droite $O\Delta$ ne faisant pas partie du ptg. en O.

Alors, un théorème antérieur nous apprend que les environs de O sur le continu, sont formés par un arc de courbe passant par O et représentable par $y = f(x)$, continue dans un certain intervalle. Et nous sommes ramenés au théorème précédent.

70. Généralités sur les problèmes de sélection. — Pour confirmer la valeur sélective du ptg., montrons maintenant que beaucoup de systèmes de conditions, en apparence plus larges que celle imposée plus haut à un *continu* d'avoir son ptg. réduit partout à une droite unique, conduisent au même résultat. Soit posé le problème suivant :

Trouver un continu dont le ptg. en chaque point laisse échapper les droites passant par ce point dans un plan P, *et soit de plus un ensemble de droites totalement discontinu.*

D'après la première condition, nous savons que ce continu sera un arc simple, et d'après la deuxième, que le ptg. devra partout se réduire à une seule droite. Nous obtenons donc encore des courbes à tangente continue.

Considérons encore ce problème :

Trouver un continu dont le ptg. en chaque point O *se projette, sur un plan* π *quelconque passant par* O, *suivant un ensemble de droites totalement discontinu.*

Soit δ une droite passant par O dans le plan π, et non contenue dans la projection du ptg. sur π. Il n'existe aucune droite du ptg. dans le plan P perpendiculaire à π mené par δ. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

On aurait des énoncés encore plus particuliers en supposant que le ptg. soit formé d'un ensemble dénombrable de droites, ou d'un nombre fini de droites. Il serait oiseux de signaler ces énoncés si ce n'était pour marquer une dernière fois la différence profonde entre ptg. et ctg., celui-ci n'admettant à aucun titre, des propriétés sélectives comparables à celles du ptg.

71. Le second lemme d'univocité pour l'espace. — Remarque. — Dans l'extension du lemme d'univocité au cas de l'espace, on peut se placer à un point de vue différent de celui adopté plus haut. Étant donné un ensemble fermé E, on supposera qu'une droite (et non plus toutes les droites passant par O dans un certain plan) soit exclue du ptg. en O.

Il en résultera l'existence d'un cylindre circulaire droit c, de centre O, d'axe $O\Delta$ tel que :

1°) sur toute droite parallèle à $O\Delta$, traversant ce cylindre, la portion intérieure à ce cylindre contienne au plus un point de E; tous ces points (dont nous désignerons l'ensemble par E_1), étant strictement intérieurs à la partie du cylindre extérieure aux deux cônes opposés par le sommet O, et ayant pour cercles de base les deux cercles de base du cylindre;

2°) les droites d'interjonction des points de E_1 aient leurs parallèles (passant par O) intérieures à la région du cylindre ci-dessus précisée, contenant E_1.

Prenons $O\Delta$ pour axe des z et pour plan des xy le plan perpendiculaire en O à $O\Delta$, et soit e_1 l'ensemble fermé projection de E_1 sur le plan des xy. L'ensemble E_1 correspond donc biunivoquement à sa projection e_1. Il est représentable par l'expression explicite $z = \varphi(x, y)$, définie et continue sur l'ensemble fermé e_1.

On ferait ensuite l'hypothèse plus particulière que E est un continu.

Nous nous contentons de rappeler ce point de vue dont M. Bouligand a approfondi antérieurement l'étude[1].

72. Le paratingent d'un continu spatial est-il un continu? — Nous terminerons en disant quelques mots sur la continuité du ptg. en un point O d'un *continu* E de l'espace, question que nous n'avons pu résoudre entièrement.

1°) Le ptg. épuise toutes les droites passant par O. Il est bien alors un continu de droites.

2°) Il y a au moins un plan passant par O, dont aucune droite n'appartient au ptg. Notre continu est alors un arc simple de Jordan. Donc son ptg. est encore un continu, d'après ce que nous avons démontré au N° 68.

3°) Il reste enfin le cas où aucun plan passant par O n'est entièrement exclu du ptg. en O, mais où cependant il se trouve au moins une droite $O\delta$ ne faisant pas partie du ptg.

Désignons par π le plan perpendiculaire en O à $O\Delta$.

D'après ce que nous venons de supposer, la projection du ptg. $\mathfrak{L}$ de notre continu sur le plan π (qui est aussi le ptg. p de sa projection, d'après le N° 37) contient

---

[1] Bouligand. *Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, t. IX, 1930, pages 32 et suivantes.

toutes les droites issues du point O dans le plan π : admettons en effet qu'une telle droite OD soit exclue de p, il s'en suivrait que le plan ΔOD serait tout entier exclu de $\mathfrak{L}$, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, dans ce troisième cas, nous savons que le ptg. en O va contenir au moins une droite dans chaque plan passant par OΔ, et cette propriété subsiste lorsqu'on remplace OΔ par toute droite suffisamment voisine. Mais de là ne saurait découler que $\mathfrak{L}$ est un continu de droites, car on peut toujours construire un nombre fini de cônes solides convexes, de sommet O, deux à deux extérieurs et dont les projections sur π ou sur un plan de direction voisine recouvrent la totalité de ce plan.

Somme toute, c'est ce cas intermédiaire 3° qui, dans l'espace à trois dimensions, laisse un doute sur la continuité du ptg.

On pourrait songer à une autre méthode : chercher les propriétés locales d'un ensemble dont le ptg. en O se décomposerait en deux ensembles fermés sans droite commune. Cela est-il compatible avec la continuité de l'ensemble ponctuel envisagé?

J'ai montré les difficultés de l'étude locale d'un ensemble dont le ptg. se réduit à deux droites. Il n'est pas exagéré de penser que le dernier problème formulé est plus difficile encore.

CHAPITRE VII

Application de la construction de Cantor-Minkowski à l'analyse des ensembles discontinus. Défaut d'enchaînement d'un ensemble borné. Démonstration du théorème de Janiszewski.

73. Je pensais terminer ici la rédaction de ce travail, et renvoyer le lecteur à la démonstration du théorème donné par JANISZEWSKI à la page 20 de sa thèse, théorème qui a joué dans ce qui précède un rôle fondamental.

Mais, pour cette raison même, j'ai voulu étudier, dans les pages 19 et 20 de la thèse de JANISZEWSKI, le mécanisme de cette démonstration. Il m'a paru pénible et contrastant avec la netteté et la simplicité du résultat.

Ayant exposé à M. BOULIGAND la critique de certaines affirmations de la page 19, celui-ci m'a proposé d'introduire, pour y remédier, la notion de *défaut d'enchaînement* d'un ensemble, en m'en suggérant deux définitions dont je prouverai plus loin l'équivalence. Il voyait dans cette notion un instrument permettant d'établir que tel ou tel ensemble est un continu, en prouvant que son défaut d'enchaînement est nul.

Cet échange d'idées a suscité la note présentée le 7 décembre 1930 à l'Académie des Lincei, en collaboration avec M. BOULIGAND.

74. En développant ensuite cette note, j'ai été amené à mettre plus étroitement en relations l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}$ d'une collection infinie d'ensembles et la situation de ceux-ci par rapport au volume obtenu en effectuant sur $\mathcal{H}$ la construction de CANTOR-MINKOWSKI (voir n° 76) avec un rayon arbitrairement petit. En outre, abandonnant un premier exposé qui traitait exclusivement du cas des continus, je suis revenu au Lemme énoncé par JANISZEWSKI, page 19, et dont la restitution m'a paru désirable, pour certaines applications.

Je rappelle l'énoncé du théorème auquel j'ai fait allusion plus haut, établi par S. JANISZEWSKI dans sa mémorable thèse[1], en lui donnant toutefois la forme sous laquelle je l'ai utilisé au Chapitre V, pour étendre la notion de contingent.

Lorsque l'ensemble limite d'une collection infinie de continus renferme deux points A *et* B, *cette collection admet pour ensemble d'accumulation un continu sur lequel se trouvent* A *et* B.

75. Le but du présent chapitre sera de préciser, au moyen de la construction de

---

[1] S. JANISZEWSKI, thèse, Paris, 1911, page 20.

CANTOR-MINKOWSKI, la notion de *défaut d'enchaînement* d'un ensemble fermé E non continu, et de retrouver à sa faveur la proposition précédente qui nous a permis d'établir, pour chacun des quatre contingents, une condition suffisante de continuité.

La construction de CANTOR-MINKOWSKI est intéressante à bien des titres. Elle fournit d'une part des propriétés dimensionnelles de l'ensemble E(¹). D'autre part, les frontières d'ensembles tels que celui E_ρ qu'elle engendre quand on l'applique, avec un rayon ρ, à l'ensemble E, s'offrent comme une généralisation des surfaces convexes, dont M. Georges DURAND a réalisé l'étude, en liaison avec une nouvelle notion des enveloppes(²).

Ce problème particulier, quoique déjà fort large, de Géométrie Infinitésimale Directe, a montré une fois de plus l'importance de la notion de contingent, introduite par M. BOULIGAND(³).

Dans tout ce qui suit, il ne sera question que d'ensembles *bornés*.

Je ne reviendrai pas sur les notions classiques de point intérieur, point extérieur à un ensemble; point frontière et frontière d'un ensemble; ensemble ouvert; ensemble bien enchaîné; ensemble connexe ou d'un seul tenant; domaine. Je rappelle simplement que la réunion d'un nombre fini ou infini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

76. Définition de la construction de Cantor-Minkowski. — Soit E un ensemble ponctuel borné. Nous le supposerons *fermé*, sinon il suffirait, par la suite, de lui substituer sa fermeture. De chaque point de E comme centre, avec un rayon ρ, décrivons une sphère : réunir ces sphères, c'est, par définition, effectuer la construction de CANTOR-MINKOWSKI (ou abréviativement C. M.) avec le rayon ρ. Si nous supposons les sphères précédentes ouvertes, leur réunion E_ρ sera elle-même un ensemble ouvert qui est encore celui des points dont la distance à E est inférieure à ρ.

77. Notion de constituant. — Rappelons qu'on nomme « *constituant* »(⁴) d'un

(¹) G. BOULIGAND. *Dimension, étendue, densité* (C. R., t. 180, 1925, p. 245). — *Ensembles impropres et nombre dimensionnel* (Bull. Soc. Math., sept.-oct. 1928 et juin 1929).

(²) G. DURAND. *Sur une manière de concevoir la théorie des enveloppes* (C. R., t. 188, p. 1135). — *Sur la construction C. M.* (Ibid., t. 188, p. 1368; t. 189, p. 443; t. 190, p. 1001 et 1219).

(³) Outre les articles déjà cités, consulter :

G. BOULIGAND. *Sur l'existence des demi-tangentes à une courbe de Jordan.* Fund. Math., t. XV, p. 216 et suivantes. — *Applications du contingent* (C. R. de l'Ac. des Sciences, séance du 10 nov. 1930). — *Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi* (Rendic. dei Lincei, juillet 1930).

(⁴) La notion de constituant est déjà ancienne. Elle est citée notamment par M. KURATOWSKI au tome I de *Fundam. Math.*, page 41 (voir la note en petits caractères) et attribuée par cet auteur à JANISZEWSKI, avec référence à son Mémoire (en polonais) *Sur les coupures du plan par des continus*, page 61, Varsovie, 1913.

ensemble ouvert $\mathcal{E}$, un ensemble *e saturé* par rapport au système des trois propriétés suivantes :

il est contenu dans $\mathcal{E}$,
il est ouvert,
il est d'un seul tenant (ou connexe).

Si donc on ajoute, à un constituant de $\mathcal{E}$, un point de $\mathcal{E}$, l'ensemble obtenu cessera d'être ouvert, ou d'être d'un seul tenant.

Il résulte immédiatement de la définition d'un constituant les conséquences suivantes :

1°) Deux constituants *distincts* (c'est-à-dire tels qu'il existe au moins un point n'appartenant qu'à l'un des deux), sont sans point commun.

Car si deux constituants *distincts* C_1 et C_2 de $\mathcal{E}$ avaient un point commun, leur réunion $C_1 + C_2$ serait un ensemble ouvert, d'un seul tenant, contenu dans $\mathcal{E}$.

D'ailleurs, par hypothèse, l'un au moins des deux ensembles $C_2 - C_1$ et $C_1 - C_2$ n'est pas vide. Et si $C_2 - C_1$ (par exemple) n'est pas vide, l'identité $C_1 + C_2 \equiv C_1 + (C_2 - C_1)$, dans laquelle le premier membre est un ensemble ouvert, d'un seul tenant, contenu dans $\mathcal{E}$, entraînerait que C_1 n'est pas saturé par rapport à ce système de trois propriétés, ce qui est contraire à l'hypothèse que C_1 est un constituant de $\mathcal{E}$.

2°) Un point P d'un ensemble ouvert $\mathcal{E}$ fait nécessairement partie d'un constituant de $\mathcal{E}$ et d'un seul, formé par la réunion de P et de *tous* les points de $\mathcal{E}$ qui sont en connexion avec P.

En effet, la réunion de P et de *tous* les points de $\mathcal{E}$ qui sont en connexion avec P, [c'est-à-dire qui peuvent lui être joints par une courbe définie par trois fonctions continues : $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ et dont tous les points appartiennent à $\mathcal{E}$] est un ensemble *ouvert*, d'un seul tenant, contenu dans $\mathcal{E}$, et saturé par rapport à ce système de trois propriétés. C'est donc un constituant de $\mathcal{E}$.

Et nous savons déjà, d'après 1°), que P ne peut faire partie de deux constituants distincts.

3°) Un ensemble ouvert $\mathcal{E}$ est la réunion de ses constituants qui sont des domaines disjoints.

(Mais tout domaine contenu dans $\mathcal{E}$ n'est pas nécessairement un constituant de $\mathcal{E}$).

4°) La décomposition d'un ensemble ouvert $\mathcal{E}$ en constituants n'est possible que d'une seule façon.

Le nombre des constituants d'un ensemble ouvert $\mathcal{E}$ peut être fini ou infini.

On démontre que les constituants d'un ensemble ouvert *borné* quelconque sont en nombre fini ou forment une infinité dénombrable, et que, dans le cas d'un ensemble ouvert E_ρ provenant de la construction C. M. effectuée sur un ensemble borné E, le nombre des constituants est fini. Nous désignerons ce nombre par $n(\rho)$.

78. Voici d'autres remarques appelées à jouer un rôle important :

Tout point M de E, étant point de E_ρ, appartient à un des constituants de E_ρ et à un seul.

En outre, la sphère ouverte M_ρ étant tout entière contenue dans E_ρ, l'est aussi dans le constituant de E_ρ qui contient M.

Il résulte de là que deux points de E appartenant à deux constituants de E_ρ distincts, sont à une distance l'un de l'autre au moins égale à 2ρ.

79. Étude des constituants de E_ρ. — Écrivons la décomposition de E_ρ en ses constituants.

$$E_\rho \equiv C^{\rho,1} + C^{\rho,2} + \ldots + C^{\rho,n}. \tag{1}$$

Un point de E, appartenant à E_ρ, appartient à un et un seul de ses constituants : désignons par $E^1, E^2, \ldots, E^n$ les ensembles formés par les points de E contenus respectivement dans $C^{\rho,1}, C^{\rho,2} \ldots, C^{\rho,n}$.

On aura donc

$$E \equiv E^1 + E^2 + \ldots + E^n. \tag{2}$$

D'ailleurs, aucun des ensembles $E^1, E^2, \ldots, E^n$ n'est vide.

Il s'ensuit que la construction C. M. appliquée à un ensemble E borné, fermé, relativement au rayon ρ, entraîne une subdivision bien déterminée de E en autant d'ensembles fermés que E_ρ contient de constituants, chacun des sous-ensembles fermés de E ainsi réalisés étant l'ensemble des points de E qui sont intérieurs respectivement à chacun des constituants de E_ρ. Et les n sous-ensembles fermés en lesquels nous avons ainsi décomposé E sont, deux à deux, à des distances au moins égales à 2ρ.

De cette décomposition de E, nous pourrons d'ailleurs déduire des décompositions de E en *deux* sous-ensembles fermés distants d'au moins 2ρ, formés : le premier, par certains des n sous-ensembles initiaux, et le second par tous les autres.

80. Démontrons maintenant les propositions suivantes :

THÉORÈME A. — *Chaque constituant* $C^{\rho,i}$ *de* E_ρ *est l'ensemble ouvert résultant, par la construction C. M., de l'ensemble* E^i *des points de* E *intérieurs à* $C^{\rho,i}$. *Autrement dit* $C^{\rho,i} \equiv E^i_\rho$.

D'abord $E^i_\rho (C^{\rho,i}$.

Car tout point de E^i_ρ appartient au moins à l'une des sphères centrées sur E^i, et comme toutes ces sphères sont contenues dans $C^{\rho,i}$, ce point appartient à $C^{\rho,i}$.

Il résulte de là que $E^1_\rho, E^2_\rho, \ldots, E^n_\rho$ contenus respectivement dans les domaines disjoints $C^{\rho,1}, C^{\rho,2}, \ldots, C^{\rho,n}$ sont aussi disjoints.

Et puisque

$$E_\rho \equiv E^1_\rho + E^2_\rho + \ldots + E^n_\rho, \tag{3}$$

le rapprochement de (1) et (3) montre que

$$C^{\rho,i} \equiv E^i_\rho. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

THÉORÈME B. — *Pour ρ assez grand, E_ρ est d'un seul tenant, c'est-à-dire $n(\rho) = 1$.*

Car aussitôt que 2ρ dépasse le diamètre de l'ensemble E, toutes les sphères centrées sur E et de rayon ρ sont deux à deux sécantes, et la réunion de sphères dont deux quelconques sont sécantes est toujours un ensemble d'un seul tenant. Ainsi E_ρ sera certainement d'un seul tenant lorsque 2ρ dépassera le diamètre de E (condition suffisante).

Et si $2\rho'$ est supérieur au diamètre de E, non seulement $E_{\rho'}$, mais encore $E_{\rho''}(\rho'' > \rho')$ est aussi d'un seul tenant.

THÉORÈME C. — *Si $\rho'' > \rho'$ et si $E_{\rho'}$ est d'un seul tenant, il en est de même de $E_{\rho''}$.*

Posons en effet $\rho'' = \rho' + r$. La démonstration du théorème résultera immédiatement des deux remarques suivantes :

1° Pour faire sur E la construction C. M. relative à ρ'', on peut d'abord la faire sur E relativement à ρ', puis sur $E_{\rho'}$ relativement à r : $E_{\rho'+r} \equiv (E_{\rho'})_r$.

2° La construction C. M. appliquée à un ensemble d'un seul tenant, donne un ensemble d'un seul tenant.

THÉORÈME D. — *L'entier $n(\rho)$ est une fonction non croissante de ρ.*

Je vais montrer que si $\Delta\rho > 0$, $n(\rho + \Delta\rho) \leqslant n(\rho)$. Soit $E_\rho \equiv C^{\rho,1} + C^{\rho,2} + \ldots + C^{\rho,n}$. Alors

$$E_{\rho+\Delta\rho} \equiv (C^{\rho,1})_{\Delta\rho} + (C^{\rho,2})_{\Delta\rho} + \ldots + (C^{\rho,n})_{\Delta\rho},$$

(puisque la construction C. M. faite sur E relativement à $\rho + \Delta\rho$ peut être exécutée en deux temps).

Confrontant $(C^{\rho,1})_{\Delta\rho}$ avec tous les suivants, je le réunis à tous ceux qui ont avec lui au moins un point commun, en supprimant ceux-ci. Le nombre des termes de la réunion, au second membre, ne peut que diminuer.

Je procéderai de même avec le *premier* terme de la nouvelle suite ainsi constituée, etc...

Donc

$$n(\rho + \Delta\rho) \leqslant n(\rho). \text{ (1)}$$

(1) Etant donné le caractère intuitif de ce théorème, l'intérêt de la démonstration est surtout d'indiquer comment on peut déduire les constituants de $E_{\rho+\Delta\rho}$ de ceux de E_ρ.

81. Remarque I. — Si E borné, fermé, n'est pas un continu, il est décomposable en deux ensembles fermés A et B dont la distance $d(A, B)$ est positive, non nulle. Pour toute valeur de $r < \frac{1}{2} d(A, B)$, E_r ne sera pas d'un seul tenant.

Réciproquement, si un E_ρ n'est pas d'un seul tenant, il admet au moins deux constituants et E est décomposable au moins d'une façon en deux ensembles fermés, sans point commun; donc E n'est pas un continu.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que E borné, fermé, soit un continu, est que tous les E_ρ soient d'un seul tenant, c'est-à-dire que $n(\rho) = 1$ pour toute valeur de ρ.

Remarque II. — Il résulte encore des théorèmes précédents que si un ensemble E borné, fermé, n'est pas un continu, il existe un nombre ρ_0 positif, non nul, tel que :

pour $\rho > \rho_0$, E_ρ est d'un seul tenant : $n(\rho) = 1$,
pour $\rho < \rho_0$, E_ρ n'est pas d'un seul tenant : $n(\rho) \geqslant 2$.

Ce nombre ρ_0 est la plus grande des valeurs de ρ qui rende discontinue la fonction $n(\rho)$,

et la borne inférieure de l'ensemble des nombres l tels que $\rho > l$ entraîne $n(\rho) = 1$, c'est-à-dire tels que E_l soit un domaine.

82. Les deux définitions du défaut d'enchaînement. — Nous sommes maintenant en mesure de définir de deux manières le défaut d'enchaînement, et de prouver l'équivalence de ces deux définitions.

Soit E un ensemble fermé, borné, non continu.

D'une part, il est décomposable, au moins d'une façon, en deux ensembles fermés A et B sans point commun.

Soit (A, B) l'une de ces décompositions, $d(A, B)$ la distance (non nulle) des deux ensembles A et B, et 2λ la borne *supérieure* de l'ensemble des distances correspondant à toutes les décompositions possibles de E en deux ensembles fermés sans point commun.

La longueur 2λ peut être choisie pour mesurer le défaut d'enchaînement de l'ensemble [1].

Soit d'autre part ρ_0 la longueur (non nulle) envisagée ci-dessus, et caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\rho > \rho_0 \text{ entraîne } n(\rho) = 1,$$
$$\rho < \rho_0 \text{ entraîne } n(\rho) > 1.$$

---

[1] On montre facilement que cette borne supérieure 2λ reste la même si on considère *tous* les couples (A, B) tels que $E \equiv A + B$ sans autre condition.

La longueur $2\rho_0$ fournit une seconde définition du défaut d'enchaînement.

Montrons qu'en effet $\rho_0 = \lambda$.

Soit ρ' un nombre quelconque inférieur à λ; d'après la définition de la borne supérieure, il existe une décomposition (A, B) telle que $d(A, B) > 2\rho'$; donc $n(\rho') > 1$; donc $\rho' \leqslant \rho_0$.

Puisque $\rho' < \lambda$ entraîne $\rho' \leqslant \rho_0$ c'est que $\lambda \leqslant \rho_0$.

Supposons maintenant $\lambda < \rho_0$ et soit k un nombre tel que $\lambda < k < \rho_0$. Puisque $k < \rho_0$, $n(k) > 1$. Donc E_k contenant plusieurs constituants, est décomposable en autant d'ensembles fermés (distants deux à deux d'au moins $2k$) que E_k possède de constituants. En prenant d'une part l'un de ces ensembles fermés et d'autre part la réunion de tous les autres, on aura une décomposition de E en deux ensembles fermés sans point commun et de distance au moins égale à $2k$, ce qui est contraire à l'hypothèse que 2λ est la distance maximum de deux ensembles fermés, sans point commun et engendrant E par leur réunion. Don $\lambda \geqslant \rho_0$.

On a donc en définitive $\lambda = \rho_0$.

83. Remarque. — On peut maintenant compléter, relativement à la valeur $\rho = \rho_0$ le résultat obtenu plus haut, à savoir :

$$\rho > \rho_0 \text{ entraîne } n(\rho) = 1;$$
$$\rho < \rho_0 \text{ entraîne } n(\rho) > 1.$$

Puisque $\rho_0 = \lambda$ et que $n(\lambda) > 1$, on a $n(\rho_0) > 1$.

Remarque. — A tout ensemble E borné (formé d'un nombre fini ou infini de points), correspond ainsi une fonction bien déterminée $n(\rho)$, à valeurs entières positives, définie pour toute valeur positive de ρ et représentant le nombre des constituants de E_ρ. Cette fonction ne peut pas décroître quand ρ décroît et tend vers zéro. Elle est égale à 1 pour ρ assez grand, et reste égale à 1 pour toute valeur de ρ si E est bien enchaîné (ou si E supposé fermé est un continu).

Si le défaut d'enchaînement ρ_0 n'est pas nul, il représente la plus grande valeur de ρ pour laquelle $n(\rho)$ est discontinue. Dans tout intervalle $(\varepsilon, +\infty)$, la fonction $n(\rho)$ présente alors un nombre fini de discontinuités, à travers chacune desquelles $n(\rho)$ augmente au moins d'une unité.

Si $n(\rho)$ reste constamment égale à l'entier k pour toute valeur de ρ inférieure à un nombre fixe ε, c'est que E est décomposable en k sous-ensembles *bien enchaînés* (qui sont des continus si E est fermé), dont les distances mutuelles sont au moins égales au double de la plus petite valeur de ρ qui rend $n(\rho)$ discontinue, quelques-uns de ces sous-ensembles (voire même tous) pouvant se réduire chacun à un point.

Mais il peut arriver aussi que $n(\rho)$ augmente indéfiniment quand ρ tend vers zéro.

La démonstration du théorème de JANISZEWSKI dont j'ai rappelé l'énoncé au n° 74 va résulter de propositions que nous allons établir maintenant.

84. Sur un cararactère essentiel de la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur l'ensemble d'accumulation. — THÉORÈME I. — *Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble d'accumulation (jamais vide) d'une collection infinie d'ensembles tous intérieurs à une même sphère, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Il n'existe qu'un nombre fini d'ensembles de cette collection non entièrement contenus dans $\mathcal{H}_\varepsilon$.*

Car s'il y en avait une infinité, constituant une collection que je désigne par $\{ E_i \}$, la collection $\{ E_i - \mathcal{H}_\varepsilon \}$ aurait un ensemble d'accumulation $\mathcal{H}_1$ qui serait contenu dans $\mathcal{H}$ d'une part, et d'autre part serait extérieur à $\mathcal{H}_\varepsilon$, qui contient $\mathcal{H}$.

85. Le lemme de Janiszewski (thèse, page 19). — THÉORÈME II. — *Soit une collection infinie d'ensembles, tous intérieurs à une même sphère. Supposons que ceux de ces ensembles dont le défaut d'enchaînement dépasse $\varepsilon > 0$ soient en nombre fini, quel que soit ε. Si l'ensemble limite $\mathcal{L}$ n'est pas vide, l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}$ est un continu ou se réduit à un point.*

Désignons par L l'un des points de $\mathcal{L}$ (ou éventuellement l'unique point de $\mathcal{L}$), et soit H un point quelconque de $\mathcal{H}$. Je vais montrer que L et H sont bien enchaînés sur $\mathcal{H}$. Il en résultera que deux points quelconques de $\mathcal{H}$ sont bien enchaînés sur $\mathcal{H}$, par l'intermédiaire de L, et par suite, que $\mathcal{H}$ est un continu, puisqu'il est fermé.

Soit en effet $\varepsilon > 0$ donné, arbitrairement petit.

a) En vertu du théorème I, il n'existe qu'un nombre *fini* d'ensembles de la collection, non entièrement contenus dans $\mathcal{H}_{\frac{\varepsilon}{3}}$;

b) En vertu de l'hypothèse du théorème actuel, il n'existe qu'un nombre *fini* d'ensembles de la collection dont le défaut d'enchaînement dépasse $\frac{\varepsilon}{3}$;

c) En vertu de la définition d'un point de $\mathcal{L}$, il n'existe qu'un nombre *fini* d'ensembles de la collection dont la distance à L dépasse $\frac{\varepsilon}{3}$;

d) En vertu de la définition d'un point de $\mathcal{H}$, il existe une *infinité* d'ensembles de la collection dont la distance à H est inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

Dès lors, après suppression d'un nombre fini d'ensembles (ce qui ne modfiie ni $\mathcal{H}$, ni $\mathcal{L}$), notre collection aura les quatre propriétés suivantes :

1°) *tous* ses ensembles sont entièrement contenus dans $\mathcal{H}_{\frac{\varepsilon}{3}}$;

2°) *tous* ses ensembles ont des défauts d'enchaînement inférieurs à $\frac{\varepsilon}{3}$;

3°) *tous* ses ensembles sont distants de L de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$;

4°) *une infinité* de ses ensembles sont distants de H de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$.

Soit Γ l'un (quelconque) de ces derniers ensembles. Il possédera les quatre propriétés précédentes.

Les trois dernières permettront d'abord de réunir L à H par une ligne polygonale (chaîne) L, M_1, M_2, ..., M_i, H de côtés inférieurs à $\frac{\varepsilon}{3}$ et de sommets M_1, M_2, ..., M_i situés sur Γ. Puis, la première permettra d'associer, aux points de la suite M_2, M_3, ..., M_{i-1} des points H_2, H_3, ..., H_{i-1} de $\mathcal{H}$ à des distances respectives des précédents inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$.

Et la ligne polygonale L, H_2, H_3, ..., H_{i-1}, H aura tous ses sommets sur $\mathcal{H}$ et tous ses côtés inférieurs à ε.

Le théorème est donc démontré : $\mathcal{H}$ est un continu.

86. Remarque. — Nous avons supposé que $\mathcal{L}$ contenait au moins un point L, et que $\mathcal{H}$ contenait au moins un autre point H, distinct de L. Mais l'énoncé signale la possibilité pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$ de se réduire à un même point[1].

D'ailleurs, dans l'hypothèse où $\mathcal{L}$ contiendrait deux points distincts A et B, $\mathcal{H}$ serait un continu passant par A et B.

87. Le théorème de Janiszewski (thèse, page 20). — Si l'on envisage plus spécialement une collection infinie de *continus* tous intérieurs à une même sphère, le défaut d'enchaînement de chacun d'eux étant nul, le théorème précédent s'applique.

Si l'ensemble limite $\mathcal{L}$ n'est pas vide, l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}$ est un continu

---

[1] Il en serait ainsi, en particulier, si chacun des ensembles se réduisait à un seul point et si la collection infinie de ces points admettait un point d'accumulation unique : $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ seraient alors réduits à ce point.

ou se réduit à un point. Et si $\mathcal{L}$ contient deux points distincts A et B, $\mathcal{H}$ est un continu passant par A et B(¹).

Remarque I. — Le caractère causal de l'hypothèse (faite dans le théorème II), qu'il n'existe qu'un nombre fini d'ensembles de la collection dont le défaut d'enchaînement dépasse $\varepsilon > 0$ fixe, arbitrairement petit, ressort nettement de la démonstration. Et avec l'hypothèse, *moins restrictive*, qu'il existe une infinité d'ensembles de la collection dont le défaut d'enchaînement est inférieur à $\varepsilon > 0$ fixe, arbitrairement petit, notre raisonnement ne permettrait pas de conclure à la continuité de $\mathcal{H}$.

Car l'infinité des ensembles dont le défaut d'enchaînement est inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$ pourrait n'avoir aucun ensemble commun avec l'infinité de ceux qui sont distants de H de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$, auquel cas l'ensemble Γ qui nous a servi à enchaîner sur $\mathcal{H}$ le point L au point H nous serait refusé.

Remarque II. — J'indiquerai maintenant la modification infime qu'il suffit d'apporter aux passages discutables de la page 19 de la thèse de Janiszewski, pour en rétablir la correction parfaite. Je cite le texte à partir de la 6e ligne :

« Avant d'aborder la démonstration d'un lemme important, remarquons qu'il « existe pour un ensemble quelconque $\mathcal{E}$, un nombre ε tel que deux points quel- « conques de cet ensemble peuvent être réunis par une chaîne par rapport à ε. Il « suffit de prendre :

$$\varepsilon > \max_{A(\mathcal{E}} \rho[A, (\mathcal{E} - A)],$$

« A désignant un point variable, contenu dans $\mathcal{E}$. »

L'existence d'un tel nombre ε est évidente, mais il ne suffit pas de prendre ε supérieur à la valeur indiquée par Janiszewski. Car si on envisage l'ensemble triadique de Cantor bâti sur le segment (0, 1), cet ensemble étant parfait, tous les $\rho[A, (\mathcal{E} - A)]$ sont nuls; leur maximum (borne supérieure) est donc nul. Or actuellement, une chaîne par rapport à ε ne peut être réalisée entre deux points quelconques de l'ensemble que si $\varepsilon \geqslant \frac{1}{3}$.

Pour rendre correct l'énoncé ci-dessus, il faut introduire *non pas* la borne supérieure de l'ensemble des $\rho[A, (\mathcal{E} - A)]$ correspondant à tous les points de $\mathcal{E}$, mais la borne supérieure de l'ensemble des $\rho[A, (\mathcal{E} - A)]$ correspondant à toutes les décompositions possibles de $\mathcal{E}$ en deux ensembles partiels A et $\mathcal{E} - A$; et cette borne supérieure est justement le défaut d'enchaînement de $\mathcal{E}$.

(¹) C'est précisément sous cette forme que nous avons eu l'occasion d'appliquer le théorème de Janiszewski.

De même, le Lemme de la page 19 deviendra correct si on représente par A *non pas* un *point*, *mais* un *sous-ensemble* quelconque de M_k, de façon que

$$\max_{A(M_k} . \rho[A, (M_k - A)]$$

soit le défaut d'enchaînement de M_k.

L'hypothèse faite dans ce Lemme s'énonce alors ainsi :

Pour toutes les suites possibles $M_1, M_2 \ldots$ extraites de la collection infinie $\{M\}$; le défaut d'enchaînement tend vers zéro.

Et cette hypothèse équivaut visiblement à la suivante qui est celle du théorème II ci-dessus.

Ceux des ensembles $\{M\}$ dont le défaut d'enchaînement dépasse $\varepsilon > 0$ sont en nombre fini quel que soit ε.

88. Dans l'introduction de sa Thèse, page 4, Janiszewski s'exprime ainsi :

« Je tiens à me justifier d'avance et une fois pour toutes de la part que je réserve « à certaines propositions qui peuvent paraître évidentes et n'avoir besoin d'aucune « démonstration. Le fait que plusieurs propositions réputées évidentes ont été re- « connues fausses, explique mon extrême réserve. Aussi, je ne crains pas d'être « long... »

Or, il donne comme évidente, page 16, 4°, l'affirmation suivante :

« Si les ensembles M_α n'ont pas de points intérieurs, l'ensemble limite n'en a « pas non plus[1]. »

Si je me permets encore cette petite critique à l'œuvre magistrale du savant géomètre, ce n'est pas uniquement par amour de la vérité, mais bien surtout pour demander par anticipation, au lecteur possible de mon modeste travail, plus d'indulgence pour les erreurs qu'il y découvrira.

---

[1] Il suffit, pour la mettre en défaut, de considérer la collection infinie d'ensembles construite comme suit :

Soit un carré. Je prends pour M_1 l'ensemble des 4 sommets.

Par le centre du carré, je mène les parallèles aux côtés et je prends pour M_2 l'ensemble des 9 sommets des 4 carrés partiels. J'opère sur ces carrés partiels comme sur le carré initial et je prends pour M_3 l'ensemble des 25 sommets des 16 carrés partiels ainsi obtenus, et ainsi de suite.

Chacun des ensembles M_α étant formé d'un nombre fini de points n'a pas de point intérieur et pourtant, l'ensemble limite comprend tous les points situés à l'intérieur du carré ou sur son contour.