ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. LŪSIS

Sur la recherche des fonctions permutables de première espèce

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 22 (1930), p. 171-183
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1930_3_22__171_0>

SUR LA RECHERCHE
DES
FONCTIONS PERMUTABLES DE PREMIÈRE ESPÈCE[1]

Par A. LŪSIS (Riga).

§ 1. — *Sur le symbole $\overset{*}{F}^{-1}$ dans la théorie de la composition de première espèce.*

Dans la suite, les fonctions envisagées, des deux variables x et y, seront supposées continues dans un domaine

(D) $$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b.$$

Le problème fondamental de la détermination des fonctions permutables de première espèce avec une fonction donnée, est lié avec la résolution des équations intégrales de Volterra de première espèce

(1) $$\int_x^y F(x, s)\, \Phi(s, y)\, ds = \Psi(x, y),$$

(2) $$\int_x^y \Phi(x, s)\, F(s, y)\, ds = \Psi(x, y),$$

où les fonctions données sont $F(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ et la fonction inconnue $\Phi(x, y)$.

Ces équations s'écrivent par la notation de la composition de première espèce[2] sous la forme

(1') $$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \Psi(x, y),$$

(2') $$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F} = \Psi(x, y).$$

---

[1] J'ai déjà indiqué quelques-uns de ces résultats dans une Note des *Rend. Lincei*, 1° sem. 1930, pp. 166-169.

[2] Volterra-Pérès. Leçons sur la composition et les fonctions permutables. Paris, 1924.

Elles sont dites *adjointes l'une de l'autre*(1) et peuvent être résolues par les formules

$$\Phi(x, y) = \overset{*}{F}{}^{-1}\overset{*}{\Psi} \qquad \text{(composition à gauche)} \tag{3}$$

et

$$\Phi(x, y) = \overset{*}{\Psi}\overset{*}{F}{}^{-1} \qquad \text{(composition à droite)} \tag{4}$$

avec le même symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$ de l'inversion de la composition défini par la condition

$$\overset{*}{F}\overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{F}{}^{-1}\overset{*}{F} = \overset{*}{F}{}^{0} = \overset{*}{1}{}^{0}. \tag{5}$$

Nous allons obtenir l'expression de $\overset{*}{F}{}^{-1}$ dans le cas où la fonction donnée $F(x, y)$ est d'ordre entier positif n et du type canonique, c'est-à-dire où $F(x, y)$ est supposée dérivable jusqu'à l'ordre n en vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^k F(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right)_{y=x} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i + j = k \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n \end{pmatrix}, \\ &\left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-2}\partial x}\right)_{y=x} = \ldots = (-1)^{n-1}\left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = 1. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Remarquons que l'on peut représenter, dans ce cas, la fonction $F(x, y)$ sous l'une quelconque des deux formes

$$F(x, y) = \overset{*}{1}{}^{n}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{F}_1\right), \tag{7}$$

$$F(x, y) = \left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{F}_2\right)\overset{*}{1}{}^{n} \tag{7'}$$

avec la puissance entière de composition de l'unité

$$\overset{*}{1}{}^{n} = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et les fonctions

$$F_1(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n}, \qquad F_2(x, y) = \frac{\partial^n F}{\partial y^n}. \tag{8}$$

En généralisant la notion *d'ordre* d'une fonction dans la théorie de la composition, M. PÉRÈS(2) distingue entre les ordres *réguliers* (différents de zéro ou d'un

(1) *Loc. cit.*, pp. 105-109.
(2) J. PÉRÈS. *Rend. Lincei*, 1er sem. 1917, pp. 45 et 105.

entier négatif) et les ordres *singuliers* (zéro ou un entier négatif). Dans le cas d'une fonction d'ordre singulier il faut introduire les symboles $\overset{*}{1}{}^{0}$ et $\overset{*}{1}{}^{-k}$ avec k entier positif et avec les règles de composition suivantes :

$$\overset{*}{1}{}^{k}\overset{*}{1}{}^{-k} = \overset{*}{1}{}^{-k}\overset{*}{1}{}^{k} = \overset{*}{1}{}^{0}$$

et

$$(9) \qquad \begin{cases} \overset{*}{1}{}^{-k}\overset{*}{F} = (-1)^k \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k} & \text{(composition à gauche)} \\ \overset{*}{F}\overset{*}{1}{}^{-k} = \dfrac{\partial^k F}{\partial y^k} & \text{(composition à droite),} \end{cases}$$

si $F(x, y)$ est une fonction d'ordre $n > k$.

Des expressions (7) et (7′) on a, pour une fonction $F(x, y)$ d'ordre n entier positif et du type canonique, par définition,

$$(10) \qquad \begin{cases} \overset{*}{1}{}^{-n}\overset{*}{F} = \overset{*}{1}{}^{0} + (-1)^n \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}, \\ \overset{*}{F}\overset{*}{1}{}^{-n} = \overset{*}{1}{}^{0} + \dfrac{\partial^n F}{\partial y^n}. \end{cases}$$

Si $F(x, y)$ est une fonction d'ordre n entier positif, le symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$ d'inversion de la composition peut être regardé comme une fonction d'ordre singulier $(-n)$. L'expression générale de telles fonctions d'après M. Pérès[1] est

$$(11) \qquad \overset{*}{F}{}^{-1} = a_0(x)\overset{*}{1}{}^{-n} + a_1(x)\overset{*}{1}{}^{-n+1} + \ldots + a_n(x)\overset{*}{1}{}^{0} + f_1(x, y)$$

ou

$$(11') \qquad \overset{*}{F}{}^{-1} = b_0(y)\overset{*}{1}{}^{-n} + b_1(y)\overset{*}{1}{}^{-n+1} + \ldots + b_n(y)\overset{*}{1}{}^{0} + f_2(x, y)$$

avec les fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ d'ordre positif et les autres termes, représentant le *produit* et *non la composition* des fonctions

$$a_0(x), \quad a_1(x), \quad \ldots, \quad a_n(x), \quad b_0(y), \quad b_1(y), \quad \ldots, \quad b_n(y)$$

par

$$\overset{*}{1}{}^{-n}, \ldots \overset{*}{1}{}^{0}.$$

Il sera commode d'employer dans les calculs de composition l'expression (11) ou (11′), suivant le cas de la composition à gauche ou à droite, avec le symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 106.

Nous allons déterminer les fonctions $a_0(x)$, ..., $a_n(x)$, $b_0(y)$, ..., $b_n(y)$, $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$, en supposant la fonction donnée $F(x, y)$ dérivable jusqu'à l'ordre $2n$.

Pour trouver, par exemple, $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ et $f_1(x, y)$ substituons l'expression (11) dans la relation

$$\overset{*}{F}{}^{-1}\overset{*}{F} = \overset{*}{1}{}^0.$$

Il vient, d'après les règles (9) et (10),

$$a_0(x)\,\overset{*}{1}{}^0 + (-1)^n a_0(x)\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + (-1)^{n-1} a_1(x)\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-2}} + \ldots + a_n(x)\,F(x, y) + \overset{*}{f_1}\overset{*}{F} = \overset{*}{1}{}^0.$$

En comparant dans les deux membres les termes en $\overset{*}{1}{}^0$, on obtient $a_0(x) \equiv 1$ et la relation

$$(12)\qquad (-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + (-1)^{n-1} a_1(x)\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\,F(x, y) + \overset{*}{f_1}\overset{*}{F} = 0$$

pour déterminer $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ et $f_1(x, y)$.

Posons ici $y = x$. D'après les conditions (6) il vient $a_1(x) \equiv 0$.

Pour déterminer $a_2(x)$ dérivons tous les membres de (12) par rapport à y et posons $y = x$. Nous obtenons, en vertu des conditions (6), l'expression

$$a_2(x) = (-1)^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} F}{\partial x^n \partial y}\right)_{y=x}.$$

En continuant de la même façon, on peut exprimer $a_3(x)$, ..., $a_n(x)$ par emploi des dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ jusqu'à l'ordre $(2n-1)$ où l'on a $y = x$.

L'équation (12) par rapport à l'inconnue $f_1(x, y)$ est une équation intégrale de Volterra de première espèce. En dérivant n fois les membres de cette équation par rapport à y on obtient l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

$$(13)\qquad f_1(x, y) + \overset{*}{f_1}\overset{*}{F_2} = H_1(x, y)$$

avec la fonction

$$F_2(x, y) = \frac{\partial^n F}{\partial y^n}$$

et

$$(14)\quad H_1(x, y) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} F}{\partial x^n \partial y^n} + (-1)^{n-3} a_2(x)\frac{\partial^{2n-2} F}{\partial x^{n-2}\partial y^n} + \ldots - a_n(x)\frac{\partial^n F}{\partial y^n}.$$

La solution de l'équation (13) est

$$(15)\qquad f_1(x, y) = \overset{*}{H_1}\left(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{F_2}\right)^{-1} = H_1 - \overset{*}{H_1}\overset{*}{F_2} + \overset{*}{H_1}\overset{*}{F_2}\overset{*}{F_2} - \ldots,$$

la série obtenue étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (D).

De la même façon, par la substitution de l'expression (11') dans la relation

$$\overset{*}{F}\overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{0}$$

on obtient $b_0(y) \equiv 1$ et l'équation

$$\frac{\partial^n F}{\partial y^n} + b_1(y)\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}} + \dots + b_n(y)\,F(x, y) + \overset{*}{F}\overset{*}{f_2} = 0, \tag{12'}$$

pour déterminer les fonctions $b_1(y), \dots, b_n(y)$ et $f_2(x, y)$. En posant ici $y = x$ on a $b_1(y) \equiv 0$. Par la dérivation par rapport à x on exprime $b_2(y), \dots, b_n(y)$ à l'aide des dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ jusqu'à l'ordre $(2n - 1)$ où l'on a $y = x$. La fonction $f_2(x, y)$ satisfait à l'équation

$$f_2(x, y) + \overset{*}{F_1}\overset{*}{f_2} = H_2(x, y) \tag{13'}$$

avec la fonction

$$F_1(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n}$$

et

$$H_2(x, y) = (-1)^{n-1}\left[\frac{\partial^{2n} F}{\partial y^n \partial x^n} + b_2(y)\frac{\partial^{2n-2} F}{\partial y^{n-2}\partial x^n} + \dots + b_n(y)\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right]. \tag{14'}$$

On exprime, par (13'), la fonction

$$f_2(x, y) = \left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{F_1}\right)^{-1}\overset{*}{H_2} = H_2 - \overset{*}{F_1}\overset{*}{H_2} + \overset{*}{F_1}\overset{*}{F_1}\overset{*}{H_2} - \dots \tag{15'}$$

par une série absolument et uniformément convergente dans le domaine (D).

Donc, l'expression générale du symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$ est bien déterminée.

Nous allons examiner le cas particulier où

$$a_i(x) = b_i(x) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Il est facile de démontrer que la condition nécessaire et suffisante, dans ce cas, est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^k F}{\partial x^i \partial y^j}\right)_{y=x} = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} i + j = k \\ k = 0, 1, 2, \dots, (n-2), n, (n+1), \dots, (2n-1) \end{array}\right] \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = 1; \end{array}\right. \tag{16}$$

c'est-à-dire que la fonction donnée $F(x, y)$ peut être mise sous la forme

$$F(x, y) = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + (y-x)^{2n}\,\omega(x, y) \tag{17}$$

où $\omega(x, y)$ est une fonction continue, dérivable jusqu'à l'ordre $2n$.

Dans ce cas les fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$, par lesquelles on exprime le symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$, sont égales. En effet, d'après les expressions (14) et (14') les fonctions $H_1(x, y)$ et $H_2(x, y)$ sont identiques à la fonction

$$H(x, y) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} F}{\partial x^n \partial y^n}. \tag{18}$$

Sous les conditions (16) on peut exprimer les fonctions

$$F_1(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n}$$

et

$$F_2(x, y) = \frac{\partial^n F}{\partial y^n}$$

par

$$F_1(x, y) = -\overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^n \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = -\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H}.$$

Donc, à cause des expressions (15) et (15') les fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ sont identiques à la fonction

$$f(x, y) = H + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H} + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H} + \ldots, \tag{19}$$

la série obtenue étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (D).

Remarquons que la même fonction (19) est la solution unique de deux équations intégrales de Volterra de première espèce

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{F} + (-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} = 0, \tag{20}$$

$$\overset{*}{F}\overset{*}{f_2} + \frac{\partial^n F}{\partial y^n} = 0 \tag{20'}$$

où la fonction donnée $F(x, y)$ satisfait aux conditions (16).

Ces conditions sont réalisées pour toute fonction $F(x, y)$ du premier ordre $(n = 1)$ et du type canonique. L'expression du symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$, due à M. PÉRÈS[1] est un cas particulier de la forme générale

$$\overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + f(x, y) \tag{21}$$

où $F(x, y)$ satisfait aux conditions (16) et où $f(x, y)$ est définie par (19).

§ 2. — *Sur la réduction du problème de détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée.*

D'après une méthode de M. VOLTERRA pour déterminer les fonctions $\Phi(x, y)$ permutables avec une fonction donnée $F(x, y)$ conformément à la relation

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F} \tag{22}$$

on introduit la fonction inconnue auxiliaire $\Psi(x, y)$ telle que

$$\Psi(x, y) = \overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}. \tag{23}$$

Pour éliminer $\Phi(x, y)$ entre ces deux relations il suffit de résoudre deux équations intégrales adjointes (1) et (2) ou (1′) et (2′) par les formules (3) et (4). Le résultat de l'élimination est

$$\overset{*}{\Psi}\overset{*}{F}{}^{-1} - \overset{*}{F}{}^{-1}\overset{*}{\Psi} = 0. \tag{24}$$

Si $F(x, y)$ est une fonction d'ordre n entier positif et du type canonique (6) et si $\Phi(x, y)$ est continue d'ordre positif, la fonction $\Psi(x, y)$ sera d'ordre supérieur à n. Donc, la relation (24) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n \Psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1}\frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} + \left[b_2(y)\frac{\partial^{n-2}\Psi}{\partial y^{n-2}} + (-1)^{n-3}a_2(x)\frac{\partial^{n-2}\Psi}{\partial x^{n-2}}\right] \\ + \dots + [b_n(y) - a_n(x)]\,\Psi(x, y) = \overset{*}{f_1}\overset{*}{\Psi} - \overset{*}{\Psi}\overset{*}{f_2},\end{aligned} \tag{25}$$

en prenant pour $\overset{*}{F}{}^{-1}$ les expressions obtenues (11) et (11′) et en effectuant les opérations symboliques d'après les règles (9).

---

(1) VOLTERRA-PÉRÈS. Leçons sur la composition, etc., pp. 40 et 106.

Si nous faisons l'hypothèse plus restrictive (16) sur la fonction $F(x, y)$, nous obtenons l'équation plus simple

$$\frac{\partial^n \Psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} = \overset{*}{f}\overset{*}{\Psi} - \overset{*}{\Psi}\overset{*}{f}. \tag{26}$$

Il faut résoudre ces *équations intégro-différentielles* (25) et (26) en $\Psi(x, y)$, jointes aux conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial^k \Psi}{\partial x^i \partial y^j}\right)_{y=x} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i + j = k \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix}\right). \tag{27}$$

En appelant $l(x, y)$ le second membre

$$\left(\overset{*}{f_1}\overset{*}{\Psi} - \overset{*}{\Psi}\overset{*}{F_2}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\overset{*}{f}\overset{*}{\Psi} - \overset{*}{\Psi}\overset{*}{f}\right)$$

on peut remplacer les équations intégro-différentielles (25) ou (26) par des *équations intégrales*, si l'on peut résoudre le *problème de Cauchy* pour les équations différentielles (25) et (26) avec le second membre $l(x, y)$ et les conditions aux limites (27). Telle réduction serait possible parce que $l(x, y)$ contient seulement sous le signe d'intégration la fonction $\Psi(x, y)$, mais non ses dérivées partielles.

Par le procédé employé par MM. Volterra et Pérès[1] on serait ramené à une nouvelle équation intégro-différentielle. M. Pérès a montré les difficultés qu'on rencontre dans la résolution du *problème de Cauchy* pour les équations différentielles du type considéré, si l'ordre de la fonction donnée est $n > 2$. Il a étudié complètement le cas des fonctions analytiques.

Remarquons que $\Psi(x, y)$ est une fonction d'ordre supérieur à n permutable avec $F(x, y)$, car d'après (23)

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Psi} = \overset{*}{\Psi}\overset{*}{F} = \overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}.$$

En faisant les hypothèses convenables sur les fonctions $\Phi(x, y)$ permutables avec $F(x, y)$, on tire directement de la relation (22) cette autre relation

$$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}^{-1} - \overset{*}{F}^{-1}\overset{*}{\Phi} = 0,$$

de sorte que les fonctions $\Phi(x, y)$ satisfont aux mêmes équations intégro-différentielles (25) et (26) où $\Psi(x, y)$ est remplacée par $\Phi(x, y)$.

Donc, les équations (25) ou (26) caractérisent les fonctions permutables avec la fonction donnée $F(x, y)$ d'ordre n[2].

---

(1) *Loc. cit.*, p. 46 et Pérès. Sur les fonctions permutables, *Thèses, Journal de Math.*, 1915, pp. 41 et 48.

(2) Pour la fonction du premier ordre, *voir* Volterra-Pérès. Leçons sur la composition, etc., p. 74.

Examinons le cas d'une fonction $F(x, y)$ du premier ordre et du type canonique. Dans ce cas

$$\overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-1} + f(x, y)$$

avec la fonction $f(x, y)$ définie par (19) où $n = 1$. L'équation intégro-différentielle caractéristique des fonctions permutables $\Phi(x, y)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \overset{*}{f}\overset{*}{\Phi} - \overset{*}{\Phi}\overset{*}{f}$$

admet(1) la solution

$$\Phi(x, y) = \int_0^{y-x} \omega(\xi)\, \Theta(\xi; x, y)\, d\xi$$

avec la fonction arbitraire $\omega(y-x)$ du *cycle fermé* et la fonction $\Theta(\xi; x, y)$ définie dans un domaine tel que

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant y - x.$$

Pour arriver à la forme classique, due à M. Volterra, des fonctions permutables

$$\Phi(x, y) = \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi; x, y)\, d\xi, \tag{28}$$

il suffit d'intégrer par parties le second membre en posant

$$\lambda(y-x) = \int_0^{y-x} \omega(\xi)\, d\xi \quad \text{et} \quad \Phi(\xi; x, y) = -\frac{\partial\Theta(\xi; x, y)}{\partial\xi}$$

et en remarquant que $\lambda(0) = 0$ et $\Theta(y-x; x, y) \equiv 1$.

Nous allons exposer, pour le problème fondamental, dans le cas général d'une fonction d'ordre n entier positif une autre méthode, en généralisant celle de M. Pérès(2) pour la fonction du premier ordre.

D'après cette méthode, on cherche à représenter les fonctions permutables $\Phi(x, y)$ avec la fonction donnée $F(x, y)$ par les *transformations* $\Omega(\overset{*}{\lambda})$ *qui conservent la composition* (transformations de M. Pérès).

La forme générale de telles transformations est

$$\Omega(\overset{*}{\lambda}) = (\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\varphi})\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^{\bullet} + \overset{*}{\psi}) \tag{29}$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 41.

(2) *Loc. cit.*, chapitre IV.

avec la fonction $\lambda(x, y)$ d'un groupe des fonctions permutables(¹) et avec les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ qui satisfont à la relation

$$(30)\qquad \left(\overset{\circledast}{1}{}^{0} + \overset{*}{\varphi}\right)\left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\psi}\right) = \left(\overset{\circledast}{1}{}^{0} + \overset{\circledast}{\psi}\right)\left(\overset{\circledast}{1}{}^{0} + \overset{*}{\varphi}\right) = \overset{*}{1}{}^{0}.$$

Pour mettre $\Omega\left(\overset{\circledast}{\lambda}\right)$ sous la forme d'une transformation de M. Volterra (28), il suffit(²) de prendre $\lambda(x, y)$ du *groupe du cycle fermé*

$$\lambda(x, y) = \lambda(y - x)$$

et d'adopter le noyau de transformation

$$(31)\qquad \Phi(\xi; x, y) = \varphi(x, y - \xi) + \psi(x + \xi, y) + \int_x^{y-\xi} \varphi(x, s)\,\psi(s + \xi, y)\,ds.$$

Pour résoudre le problème de la détermination des fonctions permutables avec la fonction donnée $F(x, y)$ d'ordre n entier positif et du type canonique, proposons-nous de choisir $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ de façon que

$$(32)\qquad F(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{1}{}^{n}\right) = \left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{\circledast}{\varphi}\right)\overset{\circledast}{1}{}^{n}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{\circledast}{\psi}\right)$$

ou de déterminer le noyau de transformation $\Phi(\xi; x, y)$ sous la condition

$$(33)\qquad F(x, y) = \frac{(y - x)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^{y-x} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,\Phi(\xi; x, y)\,d\xi.$$

Nous allons examiner le cas où $F(x, y)$ satisfait aux conditions (16).

Sous ces conditions les équations intégrales (20) et (20′) ont la même solution $f(x, y)$ donnée par la série (19). Donc, on a

$$F_1(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} = -\overset{\circledast}{f}\overset{\circledast}{F}$$

et

$$F_2(x, y) = \frac{\partial^n F}{\partial y^n} = -\overset{*}{F}\overset{*}{f}.$$

Par la substitution de ces expressions dans les formules (7) et (7′) il vient

$$F(x, y) = \overset{\circledast}{1}{}^{n} - \overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{f}\overset{\circledast}{F} \quad \text{et} \quad F(x, y) = \overset{\circledast}{1}{}^{n} - \overset{*}{F}\overset{\circledast}{f}\overset{\circledast}{1}{}^{n}$$

(¹) *Voir* la généralisation, due à M. Pérès, Quelques compléments sur les transformations qui conservent la composition, *Rend. Lincei*, 1924.

(²) Volterra-Pérès. Leçons sur la composition, etc., p. 60.

d'où

(34) $$F(x, y) = \left(\overset{\circledast}{1}{}^{0} + \overset{\circledast}{1}{}^{n}\overset{\circledast}{f}\right)^{-1}\overset{*}{1}{}^{n}$$

et

(34') $$F(x, y) = \overset{*}{1}{}^{n}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{f}\overset{*}{1}{}^{n}\right)^{-1},$$

avec l'expression commune

(35) $$F(x, y) = \overset{\circledast}{1}{}^{n} + \overset{\circledast}{1}{}^{n}\overset{\circledast}{f}\overset{*}{1}{}^{n} + \overset{\circledast}{1}{}^{n}\overset{*}{f}\overset{\circledast}{1}{}^{n}\overset{*}{f}\overset{\circledast}{1}{}^{n} + \dots,$$

la série étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (D).

En introduisant l'expression (34) l'équation (32) s'écrit

$$\overset{\circledast}{1}{}^{n}\overset{\circledast}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{1}{}^{n} = \overset{\circledast}{1}{}^{n}\left(\overset{\circledast}{f} + \overset{\circledast}{f}\overset{\circledast}{\varphi}\right)\overset{\circledast}{1}{}^{n},$$

en tenant compte de la relation (30) entre φ et ψ. L'équation obtenue est équivalente *à l'équation intégro-différentielle*

(36) $$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1}\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = f + \overset{\circledast}{f}\overset{\circledast}{\varphi}$$

qu'il faut résoudre en $\varphi(x, y)$. De la même façon, par emploi de l'expression (34'), on trouve *l'équation intégro-différentielle* analogue

(36') $$\frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1}\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} = -f - \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}$$

pour déterminer la fonction $\psi(x, y)$.

Les équations (36) et (36') généralisent celles que M. Pérès a établies pour la fonction du premier ordre[1]. Elles ont une forme plus simple que celle de l'équation (26). Si l'on a résolu, par exemple, l'équation (36) on peut former directement

$$\psi(x, y) = -\varphi(x, y) + \overset{\circledast}{\varphi}{}^{2} - \overset{\circledast}{\varphi}{}^{3} + \dots$$

et le noyau de transformation $\Phi(\xi; x, y)$ au moyen de l'expression (31). Donc, la fonction $F(x, y)$ sous les conditions (16) peut être représentée par (32) ou (33) avec les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ et $\Phi(\xi; x, y)$ connues.

Pour que la fonction

$$\Phi(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{\lambda}\right)$$

---

(1) *Loc. cit.*, pp. 72 et 75.

soit permutable avec

$$F(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{1}{}^{n}\right)$$

il est nécessaire et suffisant que

$$\overset{*}{\lambda}\overset{*}{1}{}^{n} = \overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{\lambda}. \tag{37}$$

Cette condition entraîne[1]

$$\lambda(x, y) = \lambda(y - x).$$

Donc, en prenant une fonction quelconque $\lambda(y - x)$, on construit les fonctions $\Phi(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{\lambda}\right)$ permutables avec $F(x, y)$. Ces fonctions forment un groupe, parce que les $\lambda(y - x)$ appartiennent au *groupe du cycle fermé* et que les transformations de M. Pérès sont isomorphes.

On peut aussi utiliser l'expression (32) pour résoudre *l'équation intégrale binome*

$$\overset{*}{G}{}^{n}_{(x,y)} = F(x, y) \qquad (n \text{ entier positif}) \tag{38}$$

par rapport à l'inconnue $G(x, y)$. On nomme

$$G(x, y) = \overset{*}{F}{}^{\frac{1}{n}}$$

la *puissance fractionnaire* de composition de $F(x, y)$. Parce que $F(x, y)$ est une fonction d'ordre n, représentée par (32), la fonction $G(x, y) = \overset{*}{F}{}^{\frac{1}{n}}$ est du premier ordre. Par emploi des propriétés des transformations Ω qui conservent la composition on peut exprimer $G(x, y)$ par

$$G(x, y) = \overset{*}{F}{}^{\frac{1}{n}} = \varepsilon\Omega\left(\overset{*}{1}\right) \tag{39}$$

ou

$$G(x, y) = \varepsilon\left(1 + \int_0^{y-x} \Phi(\xi; x, y)\, d\xi\right) \tag{40}$$

---

[1] *Voir* ma Note : Sur les fonctions permutables et l'équation intégrale de Volterra. *Acta Universitatis Latviensis*, t. XVII, 1927.

avec ε qui représente la racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ($\varepsilon^n = 1$) et avec le noyau de transformation $\Phi(\xi; x, y)$ ayant l'expression indiquée. Aux diverses déterminations de ε correspondent n solutions distinctes de l'équation (38) ou du symbole $\overset{*}{F}^{\frac{1}{n}}$.

M. VOLTERRA[1] a posé la question suivante : Les fonctions permutables avec une fonction donnée $F(x, y)$, sont-elles aussi permutables avec $\overset{*}{F}^{\frac{1}{n}}$? Il est évident, d'après l'expression (39) ou (40), que dans le cas d'une fonction $F(x, y)$ qui satisfait aux conditions (16), la réponse est affirmative.

---

[1] VOLTERRA. Sur les fonctions permutables. *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. LII, 1924.