Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Jôyô Kanitani

Sur l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 21 (1929), p. 27-42
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1929_3_21__27_0>

SUR L'HYPERSURFACE

DONT LA FORME DE DARBOUX EST UN CUBE PARFAIT

Par Jôyô KANITANI.

Dans l'espace à trois dimensions la surface gauche est celle en tous les points de laquelle les trois tangentes de Darboux coïncident avec la ligne génératrice.

C'est la généralisation de ce fait pour l'hypersurface, dans l'espace de dimensions quelconques, qu'on va entreprendre dans ce Mémoire, le résultat le plus intéressant peut-être étant le suivant :

L'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait est une enveloppe de ∞^1 *hyperquadriques satisfaisant à la condition que chacune touche son enveloppe suivant un cône.* La réciproque est aussi vraie.

L'auteur tient à exprimer ses sincères remerciements à M. Élie Cartan pour sa direction si autorisée et les si bienveillants conseils reçus.

[**1**] Disons quelques mots sur la forme de Darboux, et sur le calcul *pfaffien* absolu.

Considérons n formes de Pfaff

$$dw^i = a^i_\sigma du^\sigma, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

linéairement distinctes. Les du^j peuvent être exprimés par les dw^i sous la forme

$$du^j = b^j_\sigma dw^\sigma .$$

La différentielle d'une fonction f des variables u peut s'écrire

$$df = \frac{\partial f}{\partial w^\sigma} dw^\sigma ,$$

si l'on pose

$$\frac{\partial f}{\partial w^i} = b_i^\sigma \frac{\partial f}{\partial u^\sigma},$$

et le covariant bilinéaire de dw^i peut être mis sous la forme

$$(\delta, d)\, w^i = \alpha^i_{\sigma\tau}\, dw^\sigma \delta w^\tau.$$

Maintenant, nous allons définir la différenciation tensorielle relative à une forme quadratique

$$g_{\sigma\tau}\, dw^\sigma dw^\tau.$$

Pour simplifier, considérons un tenseur X^k_{ij} du troisième ordre, deux fois covariant et une fois contravariant. Nous définirons la différenciation tensorielle par les équations(1)

$$\overline{d} X^k_{ij} = dX^k_{ij} + \left(\Gamma^k_{\lambda\sigma} X^\lambda_{ij} - \Gamma^\lambda_{i\sigma} X^k_{\lambda j} - \Gamma^\lambda_{j\sigma} X^k_{i\lambda}\right) dw^\sigma,$$

où

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\sigma}\Gamma_{i\sigma j},$$

$$\Gamma_{i\sigma j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial w^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial w^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial w_k} + g_{i\sigma}\alpha^\sigma_{kj} + g_{j\sigma}\alpha^\sigma_{ki} - g_{k\sigma}\alpha^\sigma_{ij}\right).$$

Alors, on a

$$\overline{d}(g^{ij}) = \overline{d}(g_{ij}) = 0,$$

$$\overline{\delta}(dw^i) - \overline{d}(\delta w^i) = 0,$$

et les règles relatives au calcul différentiel absolu pour une somme ou pour un produit de tenseurs restent vraies. Le tenseur de Riemann-Christoffel est défini par

$$R^i_{jlm} = \frac{\partial}{\partial w^m}\Gamma^j_{il} - \frac{\partial}{\partial w^l}\Gamma^j_{im} + \Gamma^j_{\rho m}\Gamma^\rho_{il} - \Gamma^j_{\rho l}\Gamma^\rho_{im} + \alpha^\rho_{lm}\Gamma^j_{i\rho}.$$

Considérons une hypersurface dans l'espace projectif à $n + 1$ dimensions définie par les équations

$$x^k = x^k(u^1, \ldots, u^n), \qquad k = (0, 1, \ldots, n + 1),$$

---

(1) J. KANITANI. Absolute differential calculus, etc. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kioto, Japon*, tome IX, pp. 253-283.

et posons

$$\left| x \frac{\partial x}{\partial w^1} \cdots \frac{\partial x}{\partial w^n} \; d^2 x \right| = h_{\sigma\tau} dw^\sigma dw^\tau, \qquad (h_{ij} = h_{ji})$$

où le premier membre désigne le déterminant dont la i-ième ligne est formée par

$$x^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial w^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x^i}{\partial w^n}, \quad d^2 x^i.$$

Nous supposerons que le déterminant h formé par les h_{ij} n'est pas identiquement nul. Cela veut dire que nous considérons une hypersurface qui a ∞^n points et ∞^n hyperplans tangents.

Si l'on pose

$$H_{ij} = h_{ij} h^{-\frac{1}{n+2}},$$

la forme

$$\varphi = H_{\sigma\tau} dw^\sigma dw^\tau$$

est un invariant quant au changement des formes de Pfaff de base. Désormais, nous prendrons cette forme comme forme fondamentale de calcul pfaffien absolu.

La forme définie par

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2}{3} d\varphi - \frac{1}{\sqrt{H}} \left| x \frac{\partial x}{\partial w^1} \cdots \frac{\partial x}{\partial w^n} \; d^3 x \right| \\ &= K_{\sigma\tau\rho} dw^\sigma dw^\tau dw^\rho, \qquad (K_{ijl} = K_{ilj} = K_{jil}) \end{aligned}$$

où

$$H = | H_{ij} | = h^{\frac{2}{n+2}},$$

est aussi un invariant quant au changement des formes de Pfaff de base. C'est cette forme que nous appelons la *forme de Darboux*.

Les propriétés des courbes définies par $\psi = 0$ sur la surface dans l'espace à trois dimensions sont exposées par Darboux (¹).

Quand les coordonnées x du point sur l'hypersurface sont multipliées par un même facteur λ, les formes φ et ψ sont transformées en $\lambda^2\varphi$ et $\lambda^2\psi$ respectivement.

(¹) *Bull. des Sciences Math.*, sér. 2, tome IV (1880), p. 385.

En géométrie différentielle classique, une surface est déterminée (à une translation et une rotation près) par deux formes : la forme ds^2 et la forme asymptotique, qui sont liées par l'équation de Gauss et par les équations de Codazzi; de même une hypersurface dans l'espace projectif peut être déterminée, à un déplacement projectif près, par la forme asymptotique et par celle de Darboux. Ce Mémoire est consacré à l'étude de l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait.

Désignons par (x_l) le point dont les coordonnées $x_l^i (i = 0, \ldots, n+1)$ sont données par les équations

$$x_l^i = \frac{\partial x^i}{\partial w^l}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

que nous écrirons désormais, pour simplifier,

$$x_l = \frac{\partial x}{\partial w^l}.$$

Les points $(x_1), \ldots, (x_n)$ se trouvent sur l'hyperplan tangent au point (x) à l'hypersurface, tandis que le point (y), donné par

$$y = \frac{1}{n} H^{\sigma\tau} \frac{\partial x_\sigma}{\partial w^\tau},$$

se trouve hors de l'hyperplan tangent, parce que

$$| x x_1 \ldots x_n y | \doteq \sqrt{H}.$$

Donc, on peut prendre les points $(x), (x_1), \ldots, (x_n)$ et (y) comme sommets du *repère local*, et les points $(dx), (\bar{d}x_i), (dy)$ s'expriment sous la forme

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} dx = dw^\sigma x_\sigma, \\ \bar{d}x_i = M_{i\sigma} dw^\sigma x - K_{i\sigma}^\lambda dw^\sigma x_\lambda + H_{i\sigma} dw^\sigma y, \\ dy = N_\sigma dw^\sigma x + N_\sigma^\lambda dw^\sigma x_\lambda. \end{cases}$$

On a, de même, pour les coordonnées tangentielles $(X^0, \ldots, X^{n+1})$,

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} dX = dw^\sigma X_\sigma, \\ \bar{d}X_i = \{ N_{i\sigma} - H_{i\sigma}(E - R) \} dw^\sigma X + K_{i\sigma}^\lambda dw^\sigma X_\lambda + H_{i\sigma} dw^\sigma Y, \\ dY = \{ d(E - R) - N_\sigma dw^\sigma \} X + \{ M_\sigma^\lambda dw^\sigma + dw^\lambda (E - R) \} X_\lambda, \end{cases}$$

où

$$E = n(n-1) \overset{*}{K}_{\sigma\tau\rho} K^{\sigma\tau\rho}, \qquad R = n(n-1) R^{\sigma\tau}{}_{\sigma\tau}.$$

Si $K_{ijl} \equiv 0$, $(i, j, l = 1, 2, \ldots, n)$, le système des équations (2) coïncide avec (1), et, par conséquent, on a

$$X^k = \sum_{i=0}^{n+1} C_{kj} x^j,$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k X^k = \sum_{i,j=0}^{n+1} C_{ij} x^i x^j = 0,$$

c'est dire que l'hypersurface est une quadrique.

Nous pouvons vérifier facilement que l'équation de cette quadrique par rapport au repère local formé par les $n + 2$ points $(x), (x_1), \ldots, (x_n), (y)$ est

$$2\xi^0 \xi^{n+1} = H_{\sigma\tau} \xi^\sigma \xi^\tau + R(\xi^{n+1})^2.$$

Réciproquement, l'équation de la quadrique peut être mise sous la forme

$$x^0 = 1,$$
$$x^i = u^i, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$
$$x^{n+1} = \frac{1}{2} \{ (u^1)^2 + \ldots + (u^n)^2 \},$$

et ainsi, on peut vérifier facilement que $K_{ijl} \equiv 0$.

Il résulte de là que $K_{ijl} \equiv 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que l'hypersurface soit une quadrique.*

[**2**] Cela posé, si la forme de Darboux est un cube parfait, on peut choisir les formes de Pfaff de base de manière que la forme de Darboux soit réduite à $(dw^1)^3$.

Supposons que les formes de Pfaff de base soient choisies de cette manière. Alors, on a

$$H^{11} = 0,$$

grâce à la relation

$$H^{\sigma\tau} K_{\sigma\tau 1} = 0.$$

Comme condition d'intégrabilité de (1), on a

$$2\left(\frac{\bar{\partial} K_{ijm}}{\partial w^l} - \frac{\bar{\partial} K_{ijl}}{\partial w^m}\right) = H_{il}(M_{jm} - N_{jm}) + H_{jl}(M_{im} - N_{im})$$
$$- H_{im}(M_{jl} - N_{jl}) - H_{jm}(M_{il} - N_{il}),$$

qui donnent maintenant

$$o = \left(\frac{\partial K_{l1}}{\partial w^m} - \frac{\partial K_{lm}}{\partial w^1}\right) = H_{lm}(M_{l1} - N_{l1}) - H_{l1}(M_{lm} - N_{lm}),$$

$$o = \left(\frac{\partial K_{mm1}}{\partial w^l} - \frac{\partial K_{mml}}{\partial w^1}\right) = H_{ml}(M_{m1} - N_{m1}) - H_{m1}(M_{ml} - N_{ml}). \qquad (l, m > 1)$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} o &= H_{1l}(M_{1m} - N_{1m}) - H_{1m}(M_{1l} - N_{1l}) \\ &= \frac{\partial K_{11m}}{\partial w^l} - \frac{\partial K_{11l}}{\partial w^m}, \\ &= \Gamma^1_{ml} - \Gamma^1_{lm} = \alpha^1_{lm}, \end{aligned}$$

qui montrent que $dw^1 = o$ est complètement intégrable et, par conséquent, qu'on peut choisir les paramètres u^i de manière qu'on ait

$$(dw^1)^3 = K_{111}(du^1)^3.$$

Supposons que les coordonnées x^i soient multipliées par un même facteur convenablement déterminé pour avoir

$$K_{111} = 1,$$

et posons

$$dw^i = du^i. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Faisons une transformation des paramètres u^i telle que u^1 reste inaltéré et que les nouveaux $u^3, \ldots, u^n$ forment avec u^1 un système d'intégrales indépendantes des équations différentielles simultanées

$$\frac{du^1}{o} = \frac{du^2}{H^{12}} = \ldots = \frac{du^n}{H^{1n}}.$$

Alors pour les nouveaux H^{ij}, et les nouveaux H_{ij}, on a

$$\begin{aligned} H^{1i} &= o, \qquad & i \neq 2 \\ H_{2j} &= o, \qquad & j \neq 1 \\ H^{12}H_{21} &= 1. \end{aligned}$$

Nous avons vu déjà que, sauf si l et m égalent 1 en même temps, les rapports

$$\frac{M_{lm} - N_{lm}}{H_{lm}}$$

ont toujours la même valeur, mais maintenant on peut dire qu'il en est ainsi dans le cas où $l = m = 1$ aussi, grâce aux équations

$$\begin{aligned} 0 &= 2\Gamma^1_{12} \\ &= \left(\frac{\overline{\partial} K_{112}}{\partial u^1} - \frac{\overline{\partial} K_{111}}{\partial u^2}\right) \\ &= H_{11}(M_{12} - N_{12}) - H_{12}(M_{11} - N_{11}). \end{aligned}$$

Comme les équations

$$\left(\frac{\overline{\partial} K_{11m}}{\partial u^1} - \frac{\overline{\partial} K_{111}}{\partial u^m}\right) = H_{11}(M_{1m} - N_{1m}) - H_{1m}(M_{11} - N_{1m}) = 0$$

donnent

$$\frac{\partial H_{21}}{\partial u^m} - \frac{\partial H_{1m}}{\partial u^2} = 0,$$

on peut réduire les H_{1j}, par la transformation

$$u'^2 = \int H_{12} du^2,$$

de manière à satisfaire à

(3) $$H_{12} = 1,$$

(4) $$\frac{\partial}{\partial u^2}(H_{1m}) = 0.$$

On a, d'ailleurs,

(5) $$\frac{\partial H_{jm}}{\partial u^2} = 0,$$

qui résulte des équations

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\overline{\partial} K_{1jm}}{\partial u^1} - \frac{\overline{\partial} K_{11j}}{\partial u^m}\right) &= H_{11}(M_{jm} - N_{jm}) + H_{j1}(M_{1m} - N_{1m}) \\ &\quad - H_{1m}(M_{j1} - N_{j1}) - H_{jm}(M_{11} - N_{11}). \end{aligned}$$

Il résulte de (3), (4) et (5),

(6) $$\Gamma^1_{jm} = 0. \qquad (j \text{ et } m \text{ n'égalent pas } 1 \text{ en même temps})$$

(7) $$\Gamma^k_{2m} = 0. \qquad (k = 2 \text{ et } m = 1 \text{ n'ont pas lieu en même temps})$$

Les équations

$$2\left(\varepsilon_l^i N_m - \varepsilon_m^i N_l\right) = \frac{\partial\left(M_m^i - N_m^i\right)}{\partial u^l} - \frac{\partial\left(M_l^i - N_l^i\right)}{\partial u^m}$$
$$+ K_{\varrho l}^i\left(M_m^\varrho + N_m^\varrho\right) - K_{\varrho m}^i\left(M_l^\varrho + N_l^\varrho\right),$$

qui sont aussi des conditions d'intégrabilité de (1), deviennent maintenant

$$(8) \qquad 2N_i + \frac{\partial R}{\partial u^i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(9) \qquad N_m^1 = 0,$$

$$(10) \qquad M_{2m} = 0. \qquad (m > 1)$$

Les équations (6) et (9) montrent que le point (x) se trouve toujours dans un hyperplan à n dimensions qui est déterminé par les points $(x), (x_2), \ldots, (x_n)$ et (y), quand u^1 est constant.

En vertu des équations (7) et (10), on a

$$dx_2 = (M_{21} x + \Gamma_{21}^2 x_2 + y)\, du^1,$$

qui donne

$$x^i = \varphi^i(u^1, u^3, \ldots, u^n) + u^2 f^i(u^1),$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n+1).$$

C'est dire que, quand u^1 est constant, le point (x) décrit un cône à $n-1$ dimensions dans un hyperplan.

Nous allons démontrer que ce cône est du second degré.

Au moins une des fonctions f^i n'est pas identiquement nulle. Supposons que $f^2 \neq 0$, et prenons comme nouvel u^2

$$u^2 + \frac{\varphi^2}{f^2}.$$

Évidemment, cette transformation n'a aucune influence sur (3), (4) et (5), et, après cette transformation, le point (x) décrit une variété dans l'hyperplan $x^2 = 0$, quand $u^2 = 0$.

Prenons, comme hyperplan $x^1 = 0$, l'hyperplan dans lequel le cône qui correspond à la valeur $u^1 = (u^1)_0$ se trouve, et soit Q la variété qui est décrite par le point (x), quand $u^1 = (u^1)_0$ et $u^2 = 0$.

Désignons par $\overline{H}_{ij}$, $\overline{K}_{ijl}$ $(i, j, l = 3, \ldots, n)$ les quantités formées par rapport à Q. Alors, on a

$$\begin{aligned} (H_{ij})_0 &= \lambda \overline{H}_{ij}, \\ 0 = (K_{ijl})_0 &= \lambda \overline{K}_{ijl}, \qquad (i, j, l = 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

où λ est une constante différente de zéro. Donc Q est une quadrique.

Donc, *l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait est engendrée par le déplacement dans l'espace projectif d'un cône quadratique dont le nombre de dimensions égale celui de l'espace moins 2; les courbes de Darboux se trouvent sur le cône générateur.*

[**3**] Comme conditions d'intégrabilité de (1), on a

$$\begin{aligned} 2\left(K^{\xi}_{il} K_{\xi jm} - K^{\xi}_{im} K_{\xi jl}\right) + 2R_{ij,lm} &= -H_{il}(M_{jm} + N_{jm}) + H_{jl}(M_{im} + N_{im}) \\ &\quad + H_{im}(M_{jl} + N_{jl}) - H_{jm}(M_{il} + N_{il}), \end{aligned}$$

qui donnent maintenant, grâce aux (6) et (7),

(11) $$M^i = N^i_l = R^{il}{}_{l1} = 0 \qquad (i > 2, \quad l \neq 1, \quad i \neq l),$$

(12) $$M^2_i = N^2_i = -R^{21}{}_{i1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_{11}}{(\partial u^2)(\partial u^i)}, \qquad (i > 1)$$

(13) $$(M^1_1 + N^1_1) + (M^i_i + N^i_i) = -2R^{i1}{}_{i1} = 0, \qquad (i \neq 2)$$

(14) $$(M^1_1 + N^1_1) + (M^2_2 + N^2_2) = -2R^{21}{}_{21} = -\frac{\partial^2 H_{11}}{(\partial u^2)^2}.$$

Mais, grâce aux équations (9), (10) et (11), on a

(15) $$M^1_1 + N^1_1 = M_{21} + N_{21} = M_{12} + N_{12} = M^2_2 + N^2_2.$$

Donc, si l'on pose

$$\rho = (M^1_1 + N^1_1),$$

on a

$$\rho = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{11}}{(\partial u^2)^2} = R^{ij}_{\ \ ij}, \qquad \begin{pmatrix} i \neq j \\ i, j > 2 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{n-4}{n}\rho,$$

$$M^1_1 = M^2_2 = \frac{n-2}{n}\rho,$$

$$M^3_3 = M^4_4 = \ldots = M^n_n = -\frac{2}{n}\rho,$$

$$N^1_1 = N^2_2 = \frac{2}{n}\rho,$$

$$N^3_3 = N^4_4 = \ldots = N^n_n = -\frac{n-2}{n}\rho.$$

En remplaçant les valeurs de M^i_j et de N^i_j déterminées jusqu'ici dans le système des équations (1), et remarquant que $x^2 = u^2 f^2$ est une de ses solutions, on peut réduire (1) à la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_1 &= \left(\alpha du^1 + \rho du^2 - \sum_{\lambda=3}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial u^\lambda} du^\lambda\right) x + \Gamma^1_{11} du^1 x_1 \\ &\quad + \left[\beta du^1 + (-u^2\rho + \nu) du^2 + \sum_{\lambda=3}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial u^\lambda} du^\lambda\right] x_2 + \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\lambda=3}^{n}\left(\Gamma^\lambda_{1\sigma} du^\sigma x_\lambda + H_{1\sigma} du^\sigma z\right), \\ dx_2 &= [\rho x + (-u^2\rho + \nu) x_2 + z] du^1, \\ dx_i &= -\frac{\partial \mu}{\partial u^i} du^1 x + u^2 \frac{\partial \mu}{\partial u^i} du^1 x_2 + \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\lambda=3}^{n}\left(\Gamma^\lambda_{i\sigma} du^\sigma x_\lambda + H_{i\sigma} du^\sigma z\right), \\ dz &= \left(\mu\rho - \frac{\rho'}{2}\right) du^1 x + u^2\left(\frac{\rho'}{2} - \mu\rho\right) du^1 x_2 + \sum_{\lambda=3}^{n} (N^\lambda_1 du^1 - \rho du^\lambda) x_\lambda + \mu du^1 z, \end{aligned} \right.$$

où (z) est un point déterminé par

$$z = \frac{1}{n-2} \sum_{\sigma,\tau,\varsigma=3}^{n} H^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial x_\sigma}{\partial u^\tau} - \Gamma^\varsigma_{\sigma\tau} x_\varsigma\right).$$

Quant à

$$\alpha(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^n), \qquad \beta(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^n), \qquad \mu(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^n),$$

et $\nu(u^1)$, ce sont des fonctions telles que

$$\alpha = H_{11}\rho + \frac{1}{2}u^2\rho' - \frac{\partial\mu}{\partial u^1} - \mu\nu + \sum_{\lambda=3}^{n} H_{1\lambda}N^\lambda,$$

$$\beta = u^2\left[\nu' + (\nu)^2 + \frac{1}{2}\nu\frac{\partial H_{11}}{\partial u^2} - \alpha\right],$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H_{11}}{\partial u^2} = -u^2\rho + \mu + \nu,$$

$$\Gamma^2_{11} = \mu H_{11} + 1 + \beta,$$

$$\Gamma^2_{i1} = \mu H_{1i} + u^2\frac{\partial\mu}{\partial u^i},$$

$$\Gamma^2_{ij} = \mu H_{ij}, \qquad (i, j = 3, \ldots, n).$$

Il résulte de là que, par rapport au repère local formé par les $n+2$ points (x), $(x_1), \ldots, (x_n), (z)$, le cône générateur Q qui passe par le point (x) est donné par

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 = 0, \\ 2\xi^0\xi^{n+1} = \sum\limits_{\sigma,\tau=3}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + \rho(\xi^{n+1})^2. \end{array}\right.$$

Ce cône peut être regardé comme section de l'hyperquadrique R

$$2\xi^0\xi^{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{n+1} C_\lambda\xi^1\xi^\lambda + \sum_{\sigma,\tau=3}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + \rho(\xi^{n+1})^2$$

faite par l'hyperplan

$$\xi^1 = 0.$$

Nous allons démontrer qu'on peut déterminer les coefficients C_i de manière que l'hyperquadrique R enveloppe l'hypersurface donnée quand u^1 varie.

L'hyperquadrique R' attachée au point $(x + x_1 du^1)$ est donnée par

$$2\xi^0\xi^{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{n+1} C_\lambda\xi^1\xi^\lambda + \sum_{\sigma,\tau=3}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + \rho(\xi^{n+1})^2$$

$$+\,\xi^0\left[-C_0(\xi_0 + \Gamma^1_{11}\xi^1) + \frac{\partial C_0}{\partial u^1}\xi^1 + \sum_{\sigma=1}^{n}(2H_{1\sigma} - C_\sigma)\xi^\sigma + (2\mu - C_{n+1})\xi^{n+1}\right]du^1 + \xi^1 P\,du^1,$$

où P est linéaire en $\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}$.

Donc, pour que l'intersection de R avec R' soit Q, il faut que

$$C_i = 2H_{1i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$
$$C_0 = 0,$$
$$C_{n+1} = 2\mu.$$

Cette condition est aussi suffisante, parce qu'en remplaçant ces valeurs de C_i dans l'expression P, on a

$$P = 1.$$

Il résulte de là que *l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait est une enveloppe de ∞^1 hyperquadriques satisfaisant à la condition que chacune touche son enveloppe suivant un cône.*

[**4**] Considérons l'hypersurface générale (c'est-à-dire l'hypersurface dont la forme de Darboux est quelconque) et supposons qu'on ait attaché à chaque point P sur l'hypersurface une ligne droite (L) qui passe par le point P, et qui ne se trouve pas dans l'hyperplan tangent en P.

Soit (l) une variété linéaire *réciproque*[1] à (L) et supposons que (l) soit déterminée par les n points $P_i(x_i + \alpha_i x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Alors (L) est déterminée par le point (x) et par le point $(y + \alpha^\sigma x_\sigma)$.

Lorsque le point P se déplace, suivant une courbe, sur l'hypersurface, (l) engendre une hypersurface (S). L'hyperplan tangent à (S) en un point $\nu^\sigma(x_\sigma + \alpha_\sigma x)$ qui se trouve dans (l), est déterminé par les points $P_1, \ldots, P_n$, et le point

$$\nu^\sigma\left[\left(\bar{d}\alpha_\sigma + M_{\sigma\tau}du^\tau + K^\lambda_{\sigma\tau}du^\tau\alpha_\lambda + H_{\sigma\tau}du^\tau\alpha^\lambda\alpha_\lambda - \alpha_\sigma\alpha_\tau du^\tau\right)x + H_{\sigma\tau}du^\tau y\right).$$

Pour que (S) soit une hypersurface développable, il faut et il suffit que le dernier point soit le même pour tous les points dans (l). Cette condition s'écrit

$$\bar{d}\alpha^i + M^i_\sigma du^\sigma + K^{i\lambda}_\sigma du^\sigma\alpha_\lambda + \alpha^\lambda\alpha_\lambda du^i - \alpha^i\alpha_\sigma du^\sigma = \rho\, du^i. \tag{11}$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

---

[1] Une variété linéaire conjuguée à L par rapport à l'hyperquadrique qui est déterminée par

$$2\xi^0\xi^{n+1} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + C(\xi^{n+1})^2 \qquad \text{(C : arbitraire)}$$

quant au repère local, et qui est appelée l'hyperquadrique semi-canonique osculatrice en P. Voir J. Kanitani, *Abs. diff. cal.*, p. 270.

Il existe n valeurs $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de ρ qui rendent ces équations compatibles. Ainsi, par (l) passent n hypersurfaces développables dont chacune est décrite par (l), lorsque P se déplace suivant une des courbes déterminées par (11).

Les n hyperplans tangents passant par (l) à ces n hypersurfaces développables s'intersectent avec (L) en n points $T_i(y + \alpha^\sigma x_\sigma + \rho_i x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Le point T conjugué harmoniquement(¹) à P par rapport à ces n points, est donné par

$$y + \alpha^\sigma x_\sigma + \frac{1}{n}\left\{ \frac{\bar{\partial} \alpha^\sigma}{\partial u^\sigma} + (n-1)\alpha^\sigma \alpha_\sigma \right\} x .$$

D'autre part (L) décrit une surface lorsque P se déplace suivant une courbe sur l'hypersurface donnée. Par (L) passent n surfaces développables dont chacune est décrite par (L) lorsque P se déplace suivant une des courbes déterminées par

$$N^i_\sigma du^\sigma + \bar{d}\alpha^i - \alpha^\sigma K^i_{\sigma\tau} du^\tau - \alpha^i \alpha_\sigma du^\sigma + \lambda du^i = 0 .$$

Soit $U_1, \ldots, U_n$ les points où (L) touche les n arêtes de rebroussement des n développables passant par (L). Le point U conjugué harmoniquement à P par rapport aux n points $U_1, \ldots, U_n$ est donné par

$$y + \alpha^\sigma x_\sigma - \frac{1}{n}\left(N^\sigma_\sigma + \frac{\bar{\partial}\alpha^\sigma}{\partial u^\sigma} - \alpha^\sigma \alpha_\sigma \right) x .$$

Enfin, le point V conjugué harmoniquement à P par rapport aux U et T est donné par

$$y + \alpha^\sigma x_\sigma + \frac{1}{2}(\alpha^\sigma \alpha_\sigma - E + R)\, x .$$

Lorsqu'on fait tourner la ligne droite (L) autour du point P en changeant la règle pour attacher (L) à P, V décrit une hyperquadrique qui est définie par

$$2\xi^0 \xi^{n+1} = H_{\sigma\tau}\xi^\sigma \xi^\tau - (E - R)(\xi^{n+1})^2,$$

si on la rapporte au repère local formé par $n + 2$ points $(x), (x_1), \ldots, (x_n)$ et (y).

(¹) Prenons deux points R_1 et R_2 sur L et désignons par ν et ν_i les rapports anharmoniques $(PR_1; R_2T)$ et $(PR_1; R_2T_i)$ respectivement.

Le point T est déterminé de manière à avoir la relation

$$n\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_n .$$

qui est indépendante des positions de R_1 et R_2. Voir J. Kanitani, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kioto, Japon.* Tome IX (1925), p. 148.

Cette hyperquadrique étant une des hyperquadriques semi-canoniques osculatrices, sera appelé *l'hyperquadrique canonique osculatrice* à l'hypersurface donnée en P.

Pour l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait, l'hyperquadrique canonique osculatrice est donnée par

$$2\xi^0\xi^{n+1} = H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + 2\mu\xi^1\xi^{n+1} + \rho(\xi^{n+1})^2,$$

si on la rapporte au repère formé par $n+2$ points $(x), (x_1), \ldots, (x_n)$ et (z).

Donc, *les courbes de Darboux sur l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait, forment ∞^1 cônes, chacun étant la section de l'hyperquadrique canonique osculatrice faite par un de ses hyperplans tangents.*

[5] Enfin, nous allons démontrer que *l'enveloppe de ∞^1 hyperquadriques satisfaisant à la condition que chacune touche son enveloppe suivant un cône, est une hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait.*

En considérant la dite enveloppe, soit

$$x^k = f^k(u^1) \qquad (k = 0, \ldots, n+1)$$

les équations qui définissent la courbe (C) décrite par le sommet du cône de contact. A chaque point P sur (C), sont attachés le cône de contact (Q) avec sommet P, et l'hyperplan (p) de (Q). Soit (p') la variété linéaire d'intersection de (p) avec l'hyperplan attaché au point $(f + df)$.

Supposons que (C) n'est pas dégénéré en un point. Alors, au moins une des fonctions f, par exemple f^2, n'est pas identiquement nulle. Désignons par (Q_1), (p_1) et (p'_1) les sections de (Q), (p), (p') faites par l'hyperplan $x^2 = 0$.

Nous supposerons que (p') n'est pas tangent à Q, et désignerons par P_0 le pôle de (p'_1) par rapport à (Q_1). Mais, dans le cas où (p') est tangent à Q, on peut aussi démontrer de même en prenant comme P_0 un point qui se trouve sur (Q_1) et hors de (p'_1).

Prenons $(n-1)$ points $P_3, \ldots, P_{n+1}$ sur (p'_1) de manière que, par rapport au repère formé par les n points $P_0, P_3, \ldots, P_{n-1}$, l'équation de (Q_1) devienne

$$(\xi^0)^2 + (\xi^3)^2 + \ldots + (\xi^{n+1})^2 = 0;$$

et supposons que les points $P_0, P_3, \ldots, P_{n+1}$ soient définis par

$$x^k = f_j^k(u^1). \qquad \begin{matrix} (k = 0, 1, \ldots, n+1) \\ (j = 0, 3, \ldots, n+1) \end{matrix}$$

Puisque les points $P_3, \ldots, P_{n+1}$ se trouvent sur (p'_1), les points

$$\left(\frac{df_3}{du^1}\right), \ldots, \left(\frac{df_{n+1}}{du^1}\right)$$

se trouvent sur p, et, par suite, on a

$$\frac{df_i}{du^1} = \lambda_i^0 f_0 + \sum_{\sigma=3}^{n+1} \lambda_i^\sigma f_\sigma \qquad (i = 3, \ldots, n+1).$$

Par hypothèse, le point $\left(\frac{df_0}{du^1}\right)$ est hors de l'hyperplan (p_1), et le point P_1

$$\left(\frac{d^2 f_0}{(du^1)^2}\right)$$

peut être exprimé sous la forme

$$\frac{d^2 f_0}{(du^1)^2} = \lambda_1^0 f_0 + \lambda_1^1 \frac{df_0}{du^1} + \sum_{\sigma=3}^{n+1} \lambda_1^\sigma f_\sigma.$$

Le cône (Q) est la section de l'hyperquadrique enveloppante (S) qui touche l'hypersurface enveloppée suivant (Q), faite par l'hyperplan (p) qui est tangent à (S) en P; la courbe (C) touche (S) en P. Par conséquent, la ligne tangente à (C) en P se trouve dans (p).

Ainsi, on a

$$\frac{df}{du^1} = \lambda_2^0 f_0 + \lambda_2^2 f + \sum_{\sigma=3}^{n+1} \lambda_2^\sigma f_\sigma.$$

Par rapport au repère formé par $n+1$ points $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$, l'hyperquadrique (S) est donnée par l'équation

$$(\xi_0)^2 + \sum_{\sigma=0}^{n+1} C_\lambda \xi^1 \xi^\lambda + (\xi^3)^2 + \ldots + (\xi^{n+1})^2 = 0.$$

Pour que (S) intersecte suivant (Q) avec l'hyperquadrique enveloppante $(\bar{S})$ qui est consécutive à (S), il faut que

$$\lambda_2^i = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

Par conséquent, λ_2^0 n'est pas nul, parce que, par supposition, la courbe ne dégénère pas en point. Comme la position de P ne change pas en multipliant ses coordonnées par un même facteur, nous supposerons ce facteur préalablement déterminé de manière qu'on ait

$$|f_0 f'_0 f f_3 \dots f_{n+1}|^2 (\lambda_2^0)^n = (-1)^n,$$

et, pour simplifier, nous écrirons ρ et ν au lieu de λ_2^0 et λ_2^2 respectivement.

Alors, on a, comme condition nécessaire et suffisante pour que (S) intersecte avec (S') suivant (Q),

$$(12) \qquad \begin{cases} \lambda_1^1 + \nu + \dfrac{\rho'}{2\rho} = 0, \\ \lambda_j^i + \lambda_i^j = 0, \qquad (i \neq j) \\ \lambda_i^i = -\dfrac{\rho'}{2\rho}, \\ \dfrac{d\lambda_i^0}{du^1} + \nu\lambda_i^0 + \lambda^i + \displaystyle\sum_{\sigma=3}^{n+1} \lambda_i \lambda_\sigma^0 = 0. \end{cases}$$
$$(i, j = 3, \dots, n+1)$$

D'autre part, l'hypersurface enveloppée peut être définie par les équations

$$x^k = f^k + u^2 f^k + u^3 f_3^k + \dots + u^{n+1} f_{n-1}^k, \qquad (k = 0, \dots, n+1)$$

les u étant reliés entre eux par l'équation

$$1 + (u^3)^2 + \dots + (u^{n+1})^2 = 0,$$

et, comme nous pouvons le vérifier facilement, les K_{ijl}, excepté K_{111}, s'annulent comme conséquence des équations (12).

Le théorème est ainsi démontré.